УДК 517.954

А. В. Голушков
Одесский национальный университет имени И. И. Мечникова

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ, СОДЕРЖАЩЕГО ПРОИЗВОДНУЮ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

Голушков О. В. Задача Коши для диференціального рівняння, що містить похідну дробового порядку. Розглядається диференціальне рівняння першого порядку, що містить похідну Рімана-Ліувілля порядку $\alpha \in (0,1)$. Отримано умови існування та єдності розв'язку початкової задачі для цього рівняння та доведено збіжність аналогу методу Ейлера.
Ключові слова: задача Коши, диференціальне рівняння, дробова похідна, похідна Рімана-Ліувілля, метод Ейлера, чисельне рішення.

Голушков А. В. Задача Коши для дифференциального уравнения, содержащего производную дробного порядка. Рассматривается дифференциальное уравнение первого порядка, содержащее производную Римана-Лиувилля порядка $\alpha \in (0,1)$. Получены условия существования и единственности решения начальной задачи для этого уравнения и доказана сходимость аналога метода Эйлера.
Ключевые слова: задача Коши, дифференциальное уравнение, дробная производная, производная Римана-Лиувилля, метод Эйлера, численное решение.

Golushkov O. V. The Cauchy-type problem for differential equations with fractional derivative. The first-order differential equation, containing Riemann-Liouville derivative of the $\alpha \in (0,1)$ order, is considered. Sufficient conditions of existence and uniqueness of solution of initial problem for this equation are obtained, and convergence of analogue of the Euler method is proved.
Key words: Koshi-type problem, differential equation, fractional derivative, Riemann-Liouville derivative, Euler method, numerical solution.

Введение. Условия разрешимости обыкновенных дифференциальных уравнений дробного порядка, а также некоторые методы их приближенного решения, изучались в работах многих авторов (обширная библиография работ имеется в [5]).

В настоящей работе рассматривается задача Коши для дифференциального уравнения первого порядка, правая часть которого содержит производную Римана-Лиувилля порядка $\alpha \in (0,1)$. Такая задача возникает, например, при изучении процесса растворения сжимаемого газового объёма в жидкости [1, с. 106].

Основные результаты. Получены условия существования и единственности решения этой задачи и предлагается метод ее численного решения.

1^0. Пусть $J=[0,a]$, $f(x) \in L(0,a)$. Интегралом Римана-Лиувилля порядка $\alpha > 0$ называем функцию [3, с. 40]

$$(I_0^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt, \ x>0,$$

где $\Gamma(\cdot)$ — гамма-функция Эйлера. Ниже полагаем, что $\alpha \in (0,1)$, а $f_{1-\alpha}(x) = I_0^{1-\alpha} f(x)$.

Тогда функцию

$$D_0^\alpha f(x) = \frac{df_{1-\alpha}(x)}{dx} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int\limits_0^x (x-t)^{-\alpha} f(t)dt$$

называем производной Римана-Лиувилля порядка α.

Если $f(x) \in AC(J), f(0) = 0$, то [3, с. 43] почти всюду (п. в.) на J

$$D_0^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int\limits_0^x (x-t)^{-\alpha} f'(t)dt. \tag{1}$$

2^0. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$y'(x) = f(x, y(x), D_0^\alpha y(x)), \tag{2}$$

решение которого удовлетворяет начальному условию

$$y(0) = 0. \tag{3}$$

Предположим, что функция $f(x,y,z) : G \to R$, где $G = \{(x,y,z) : 0 \le x \le a, |y| \le b, |z| \le c\}$, удовлетворяет условиям:

(а) измерима по x при фиксированных y, z;

(б) непрерывна по (y,z) для п. в. $x \in J$;

(в) $|f(x,y,z)| \le M$.

Под решением задачи (2),(3) понимаем функцию $y(x) \in AC(J)$ такую, что $y(0) = 0, z(x) \equiv D_0^\alpha y(x) \in C(J)$, и которая п. в. на J удовлетворяет уравнению (1).

Теорема 1. *Пусть функция $f : G \to R$ удовлетворяет условиям (а), (б), (в). Для того, чтобы функция $y(x)$ была решением задачи (2), (3), необходимо и достаточно, чтобы $y(x)$ и $z(x)$ удовлетворяли системе интегральных уравнений*

$$\begin{cases} y(x) = \int\limits_0^x f(t, y(t), z(t))dt, & (4) \\ z(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int\limits_0^x (x-t)^{-\alpha} f(t, y(t), z(t))dt. & (5) \end{cases}$$

Доказательство. Пусть $y(x) \in AC(J)$ — решение задачи (2),(3). Тогда очевидно, что $y(x)$ удовлетворяет (4), а $z(x) = D_0^\alpha y(x)$ в силу (1) — интегральному уравнению (5).

Пусть теперь $y(x)$ и $z(x)$ — решение системы (4), (5), причем $y(x) \in AC(J)$. Очевидно, что $y(0) = 0$. Покажем, что $z(x) \in C(J)$. Действительно, для $x_1, x_2 \in \in (0, a], x_1 < x_2$ в силу условия (в) имеем:

$$\begin{aligned} &|z(x_2) - z(x_1)| \le \tfrac{M}{\Gamma(1-\alpha)} \times \\ &\times \left[\int\limits_0^{x_1} ((x_1 - t)^{-\alpha} - (x_2 - t)^{-\alpha})\, dt + \int\limits_{x_1}^{x_2} (x_2 - t)^{-\alpha} dt \right] \le \\ &\le \tfrac{M}{\Gamma(2-\alpha)} \left[2(x_2 - x_1)^{1-\alpha} - (x_2^{1-\alpha} - x_1^{1-\alpha}) \right] \le \\ &\le \tfrac{2M}{\Gamma(2-\alpha)} (x_2 - x_1)^{1-\alpha}. \end{aligned} \tag{6}$$

Кроме того, $|z(x)| \le (Mx^{1-\alpha})/(\Gamma(2-\alpha))$ для $x \in (0, a]$. Так как $\lim z(x) = 0$ при $x \to 0_+$, то полагаем $z(0) = 0$. Следовательно, приняв во внимание (6), получаем, что $z(x) \in C(J)$ и согласно (1) $z(x) = D_0^\alpha y(x)$. Очевидно, что $y(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению (2) п. в. на J. Этим завершается доказательство теоремы 1.

Пусть $T \le a$ такое, что $MT \le b, (MT^{1-\alpha})/(\Gamma(2-\alpha)) \le c$, т. е.

$$T = \min \left(a, \frac{b}{M}, \left(\frac{c \cdot \Gamma(2-\alpha)}{M} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \right).$$

Теорема 2. *Пусть функция $f(x, y, z) : G \to R$ удовлетворяет условиям (а), (б), (в). Тогда множество решений задачи (2),(3) непусто.*

Доказательство. Рассмотрим последовательности $y_n(x),\ z_n(x)$, где $y_0(x) = = z_0(x) = 0$,

$$y_n(x) = \begin{cases} 0, \text{если } x \in [-\frac{T}{n}, 0), \\ \int\limits_0^x f(t, y_n(t - \frac{T}{n}), z_n(t - \frac{T}{n}))dt, \text{если } x \in [0, T]; \end{cases} \tag{7}$$

$$z_n(x) = \begin{cases} 0, \text{если } x \in [-\frac{T}{n}, 0), \\ \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int\limits_0^x (x - t)^{-\alpha} f(t, y_n(t - \frac{T}{n}), z_n(t - \frac{T}{n}))dt, \text{если } x \in (0, T], \end{cases} \tag{8}$$

$$n = 1, 2, \ldots .$$

При этом $r_n(0_+) = r_n(0_-) = 0, r = y, z$. Функции $y_n(x)$ и $z_n(x)$ последовательно определяем на промежутке $\left[(k-1)\frac{T}{n}, k\frac{T}{n}\right], k = \overline{1, n}$. При этом $y_n(x) \in AC([0, T])$, $z_n(x) \in C([0, T])$ так как для $x_1, x_2 \in [0, T], x_1 < x_2$,

$$|y_n(x_1) - y_n(x_2)| \le M|x_1 - x_2|,$$

$$|z_n(x_1) - z_n(x_2)| \le \frac{2M}{\Gamma(2-\alpha)} (x_1 - x_2)^{1-\alpha}.$$

Кроме того, для $x \in [0,T], |y_n(x)| \le MT, |z_n(x)| \le (MT^{1-\alpha})/(\Gamma(2-\alpha))$.

Таким образом, последовательности $y_n(x), z_n(x)$ равномерно ограниченные и равномерно непрерывные. По теореме Арцела, существуют их подпоследовательности, которые равностепенно на $[0,T]$ сходятся, соответственно, к функциям $u(x), v(x) \in C([0,T]))$. Не нарушая общности и ради простоты, можно считать, что сами последовательности сходятся к $u(x)$ и $v(x)$.

Покажем, что $y_n(x-\frac{T}{n}), z_n(x-\frac{T}{n})$ также равномерно на $[0,T]$ сходятся, соответственно, к $u(x), v(x)$. Дествительно,

$$\begin{aligned} \left|y_n(x-\tfrac{T}{n})-u(x)\right| &\le \left|y_n(x-\tfrac{T}{n})-y_n(x)\right|+|y_n(x)-u(x)| \le \\ &\le \tfrac{MT}{n}+|y_n(x)-u(x)|. \end{aligned} \tag{9}$$

Для $x \in \left[0,\frac{T}{n}\right]$

$$\begin{aligned} \left|z_n(x-\frac{T}{n})-z_n(x)\right| &\le \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_0^x (x-t)^{-\alpha}\times \\ \times\left|f(t,y_n(t-\frac{T}{n}),z_n(t-\frac{T}{n}))\right|dt &\le \frac{M}{\Gamma(2-\alpha)}\cdot\left(\frac{T}{n}\right)^{1-\alpha}, \end{aligned}$$

а для $x \in \left(\frac{T}{n},T\right]$

$$\begin{aligned} &\left|z_n\left(x-\tfrac{T}{n}\right)-z_n(x)\right| \le \tfrac{M}{\Gamma(1-\alpha)}\times \\ &\times\left[\int\limits_0^{x-\frac{T}{n}}\left(\left(x-\tfrac{T}{n}-t\right)^{-\alpha}-(x-t)^{-\alpha}\right)dt+\int\limits_{x-\frac{T}{n}}^{x}(x-t)^{-\alpha}dt\right] \le \\ &\le \tfrac{M}{\Gamma(2-\alpha)}\left[\left(\tfrac{T}{n}\right)^{1-\alpha}-\left(x^{1-\alpha}-\left(x-\tfrac{T}{n}\right)^{1-\alpha}\right)\right] \le \\ &\le \tfrac{M}{\Gamma(2-\alpha)}\left(\tfrac{T}{n}\right)^{1-\alpha}, \end{aligned} \tag{10}$$

т. к. $x^{1-\alpha}-\left(x-\frac{T}{n}\right)^{1-\alpha} \le \left(\frac{T}{n}\right)^{1-\alpha}$.

Кроме того,

$$\left|z_n\left(x-\tfrac{T}{n}\right)-v(x)\right| \le \left|z_n\left(x-\tfrac{T}{n}\right)-z_n(x)\right|+|z_n(x)-v(x)|. \tag{11}$$

Из оценок (9)-(11) следует нужное утверждение.

По теореме Лебега, из (7),(8) при $n \to \infty$ получаем, что

$$\begin{cases} u(x)=\int\limits_0^x f(t,u(t),v(t))dt, \\ v(x)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_0^x (x-t)^{-\alpha}f(t,u(t),v(t))dt, \end{cases}$$

причем $v(x)=D_0^\alpha u(x)$, т. е. $u(x)$ — решение задачи (2),(3).

Теорема 3. *Пусть в области G функция $f(x,y,z)$ удовлетворяет условиям (а), (в) и условию Липшица*

$$|f(x,y,z)-f(x,\overline{y},\overline{z})| \leq K(|y-\overline{y}|-|z-\overline{z}|) \tag{12}$$

для п. в. $x \in [0,a]$.

Тогда существует единственное решение задачи (2),(3) в области $[0,\delta]$, *где* $\delta \in T$ *такое, что*

$$K\left(\delta+\tfrac{\delta^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}\right)<1. \tag{13}$$

Доказательство. Пусть $y(x)$ также решение задачи (2),(3), а

$$\Theta=\max_{[0,\delta]}|y(x)-u(x)|=|y(\tau)-u(\tau)|,$$

$$\Theta_1=\max_{[0,\delta]}|D_0^\alpha y(x)-D_0^\alpha u(x)|=|D_0^\alpha y(\tau_1)-D_0^\alpha u(\tau_1)|, 0<\tau,\tau_1\leq\delta.$$

Теперь

$$\begin{aligned}\Theta &= |y(\tau)-u(\tau)| \leq K\int_0^\tau \left(|y(t)-u(t)|+|D_0^\alpha y(t)-D_0^\alpha u(t)|\right)dt \leq \\ &\leq K\left(\Theta+\Theta_1\right)\delta,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Theta_1 &\leq \frac{K}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^{\tau_1}(\tau_1-t)^{-\alpha}\left(|y(t)-u(t)|+|D_0^\alpha y(t)-D_0^\alpha u(t)|\right)dt \leq \\ &\leq \frac{K\delta^{1-\alpha}(\Theta+\Theta_1)}{\Gamma(2-\alpha)}.\end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\Theta+\Theta_1 \leq (\Theta+\Theta_1)K\left(\delta+\frac{\delta^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}\right),$$

т. е.

$$K\left(\delta+\frac{\delta^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}\right)\geq 1,$$

что противоречит условию (13). Теорема 3 доказана.

3^0. Далее речь пойдет о численном решении задачи (2), (3).

В дальнейшем предполагаем, что в области G функция $f(x,y,z)$ непрерывна по совокупности переменных (x,y,z), удовлетворяет условию Липшица с постоянной K по переменным y,z для каждого $x\in[0,a]$ и условию (в). Пусть в области $[0,T]$ существует единственное решение задачи (2),(3), причем в дальнейшем предполагаем, что $T\leq 1$.

Пусть $x_i=ih$, $h=T/N$. Обозначим, соответственно, через y_n и z_n приближенные значения $y(x_n)$ и $z(x_n)$. Полагаем $y_0=z_0=0$. Тогда

$$y_{n+1}=y_n+hf(x_n,y_n,z_n). \tag{14}$$

Найдем z_{n+1}. С этой целью рассмотрим

$$\begin{aligned} z(x_{n+1}) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int\limits_0^{x_{n+1}} (x_{n+1}-t)^{-\alpha} y'(t)dt = \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \sum_{k=1}^{n+1} \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} (x_{n+1}-t)^{-\alpha} y'(t)dt \approx \\ &\approx \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \sum_{k=1}^{n+1} \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} (x_{n+1}-t)^{-\alpha} y'(x_{k-1})dt \approx \\ &\approx \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{k=1}^{n+1} f(x_{k-1}, y_{k-1}, z_{k-1}) \left(x_{n+2-k}^{1-\alpha} - x_{n+1-k}^{1-\alpha}\right). \end{aligned}$$

Теперь полагаем

$$z_{n+1} = \tfrac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \textstyle\sum_{k=1}^{n+1} f(x_{k-1}, y_{k-1}, z_{k-1}) \left(x_{n+2-k}^{1-\alpha} - x_{n+1-k}^{1-\alpha}\right). \tag{15}$$

Пусть $\delta_n = y(x_n) - y_n$ и $\gamma_n = z(x_n) - z_n$. Тогда

$$\begin{aligned} &|\delta_{n+1} - \delta_n| \le |(y(x_{n+1}) - y(x_n)) - (y_{n+1} - y_n)| \le \\ &\le \int\limits_{x_n}^{x_{n+1}} |f(x, y(x), z(x)) - f(x_n, y_n, z_n)| dx, \end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned} &|f(x, y(x), z(x)) - f(x_n, y_n, z_n)| \le |f(x, y(x), z(x)) - f(x, y(x_n), z(x_n))| + \\ &+ |f(x, y(x_n), z(x_n)) - f(x_n, y(x_n), z(x_n))| + \\ &+ |f(x_n, y(x_n), z(x_n)) - f(x_n, y_n, z_n)| = A_1 + A_2 + A_3. \end{aligned} \tag{17}$$

Оценим каждое из трех слагаемых в (17) при $x \in [x_n, x_{n+1}]$. Получим $A_1 \le K(|y(x) - y(x_n)| + |z(x) - z(x_n)|)$.

Для $x \in [x_n, x_{n+1}]$, $|y(x) - y(x_n)| \le Mh$,

$$\begin{aligned} |z(x) - z(x_n)| &\le \frac{M}{\Gamma(1-\alpha)} \times \\ &\times \left(\int\limits_0^{x_n} [(x_n - t)^{-\alpha} - (x-t)^{-\alpha}] dt + \int\limits_{x_n}^{x} (x-t)^{-\alpha} dt \right) \le \\ &\le \frac{M}{\alpha \cdot \Gamma(1-\alpha)} \left[x_n^{1-\alpha} - x^{1-\alpha} + 2(x - x_n)^{1-\alpha} \right] = \\ &= \frac{M}{\Gamma(2-\alpha)} \left[2(x - x_n)^{1-\alpha} - (x^{1-\alpha} - x_n^{1-\alpha}) \right] \le \frac{2Mh^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$A_1 \le K\left(Mh + \frac{2Mh^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \right).$$

Пусть $\overline{G} = \{(y,z) : |y| \leq b, |z| \leq c\}$. Частным модулем гладкости функции $f(x,y,z)$ называем [5, с. 124] величину

$$\omega(f;\tau,0,0) = \sup_{(y,z)\in\overline{G}} \sup_{\substack{|x_1-x_2|\leq\tau \\ x_1,x_2\in[0,T]}} |f(x_1,y,z) - f(x_2,y,z)|.$$

Тогда $A_2 \leq \omega(f;h,0,0)$, а $A_3 \leq K(|\delta_n| + |\gamma_n|)$. Окончательно, согласно (17), получаем:

$$|f(x,y(x),z(x)) - f(x_n,y_n,z_n)| \leq K(|\delta_n| + |\gamma_n| + B), \tag{18}$$

где $B = KM(h + \frac{2h^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}) + \omega(f;h,0,0)$. Из (16),(18) следует оценка

$$|\delta_{n+1} - \delta_n| \leq h[K(|\delta_n| + |\gamma_n|) + B]. \tag{19}$$

Оценим γ_{n+1}. Получим с учетом (18)

$$\begin{aligned} |\gamma_{n+1}| = \Bigg| \tfrac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \textstyle\sum_{k=1}^{n+1} \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} (x_{n+1}-t)^{-\alpha} \times \\ \times (f(t,y(t),z(t)) - f(x_k,y_k,z_k))\, dt \Bigg| \leq \\ \leq \tfrac{K}{\Gamma(2-\alpha)} \textstyle\sum_{k=1}^{n+1} (|\delta_k| + |\gamma_k|) \left(x_{n+2-k}^{1-\alpha} - x_{n+1-k}^{1-\alpha}\right) + \\ + \tfrac{T^\alpha}{\Gamma(2-\alpha)} \left[\omega(f;h,0,0) + KM\left(h + \tfrac{2h^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}\right)\right]. \end{aligned} \tag{20}$$

Так как $T \leq 1$, $0 < \Gamma(2-\alpha) < 1$, то в силу (19),(20) получаем, что

$$\begin{cases} |\delta_{n+1} - \delta_n| \leq h\left[K(|\delta_n| + |\gamma_n|) + A\right], & (21) \\ |\gamma_{n+1}| \leq \frac{K}{\Gamma(2-\alpha)} \sum\limits_{k=1}^{n+1} (|\delta_k| + |\gamma_k|) (x_{n+2-k}^{1-\alpha} - x_{n+1-k}^{1-\alpha}) + A, & (22) \end{cases}$$

где $A = \frac{B}{\Gamma(2-\alpha)}$, $n = \overline{0, N-1}$.

Рассмотрим систему интегральных уравнений

$$\begin{cases} \varphi(x) = K \int\limits_0^x (\varphi(t) + \psi(t))dt + Ax, \\ \psi(x) = \frac{K}{\Gamma(1-\alpha)} \int\limits_0^x (x-t)^{-\alpha} (\varphi(t) + \psi(t))dt + A. \end{cases} \tag{23}$$

Теорема 4. *Система (23) имеет на* $[0,T]$ *единственное, непрерывное и неубывающее решение.*

Доказательство. Рассмотрим последовательности функций $\{\varphi_n(x)\}$, $\{\psi_n(x)\}$, полагая $\varphi_0(x) = Ax$, $\psi_0(x) = A$,

$$\varphi_{n+1}(x) = K \int\limits_0^x (\varphi_n(t) + \psi_n(t))dt + Ax,$$

$$\psi_{n+1}(x)=\begin{cases} A, \text{если } x=0, \\ \frac{K}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_0^x (x-t)^{-\alpha}(\varphi_n(t)+\psi_n(t))dt+A, \text{если } x\in(0,a], \end{cases} \tag{24}$$

$$n=0,1,2,\ldots .$$

Очевидно, что $\varphi_n(x)\geq 0$, $\psi_n(x)>0$. Аналогично, как и при доказательстве теоремы 2, доказываем, что $\psi_n(x)\in C([0,T])$. Тогда $\varphi_n(x)\in C^1([0,T])$.

Функции $\varphi_0(x)$ и $\psi_0(x)$ неубывающие на $[0,T]$. По индукции доказываем, что функции $\varphi_n(x)$ и $\psi_n(x)$ также неубывающие. Пусть $\varphi_n(x)$ и $\psi_n(x)$ этим свойством обладают и пусть $x_1,x_2\in[0,T], x_1<x_2$. Тогда

$$\varphi_{n+1}(x_2)-\varphi_{n+1}(x_1)=\int\limits_{x_1}^{x_2}(\varphi_n(x)+\psi_n(x))dx>0,$$

$$\psi_{n+1}(x_2)-\psi_{n+1}(x_1)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\Bigg[\int\limits_0^x\left[(x_2-t)^{-\alpha}-(x_1-t)^{-\alpha}\right]\times$$

$$\times(\varphi_n(t)+\psi_n(t))dt+\int\limits_{x_1}^{x_2}(x_2-t)^{-\alpha}(\varphi_n(t)+\psi_n(t))dt\Bigg]\geq\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\times$$

$$\times\Bigg[\int\limits_0^x\left[(x_2-t)^{-\alpha}-(x_1-t)^{-\alpha}\right](\varphi_n(x_1)+\psi_n(x_1))dt+$$

$$+\int\limits_{x_1}^{x_2}(x_2-t)^{-\alpha}(\varphi_n(x_1)+\psi_n(x_1))dt\Bigg]=$$

$$=\frac{\varphi_n(x_1)+\psi_n(x_1)}{\Gamma(2-\alpha)}\left[x_2^{1-\alpha}-(x_2-x_1)^{1-\alpha}-x_1^{1-\alpha}+(x_2-x_1)^{1-\alpha}\right]=$$

$$=\frac{\varphi_n(x_1)+\psi_n(x_1)}{\Gamma(2-\alpha)}(x_2^{1-\alpha}-x_1^{1-\alpha})>0.$$

Если $u_n(x)=\varphi_n(x)+\psi_n(x)$, то, согласно (22), $u_0(x)=A(1+x)$,

$$u_{n+1}(x)=\begin{cases} A, \text{если } x=0, \\ K\int\limits_0^x\left(1+\frac{(x-t)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}\right)u_n(t)+A(1+x), \text{если } x\in(0,T]. \end{cases}$$

Легко проверить, что $\lim u_{n+1}(x)=A$ при $x\to 0_+$, $u_{n+1}(x)\in C([0,T])$, а $u_1(x)\geq$ $\geq u_0(x)$. По индукции доказываем, что $u_{n+1}(x)\geq u_n(x)$, $x\in[0,T]$.

Если $P=A(1+T)$, то

$$\begin{aligned} u_1(x)-u_0(x) &= K\int\limits_0^x\left(1+\frac{(x-t)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}\right)u_0(t)dt\leq \\ &\leq PK\left(x+\frac{x^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}\right)\leq\frac{2PKx^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}, \end{aligned}$$

так как для $x \in [0,T]$ $x \le x^{1-\alpha}$ и $0 < \Gamma(2-\alpha) < 1$. Пусть

$$u_n(x) - u_{n-1}(x) \le \frac{P(2Kx^{1-\alpha})^n}{\Gamma(n(1-\alpha)+1)}.$$

И докажем, что

$$u_{n+1}(x) - u_n(x) \le \frac{P(2Kx^{1-\alpha})^{n+1}}{\Gamma((n+1)(1-\alpha)+1)}. \tag{25}$$

Имеем:

$$\begin{aligned} u_{n+1}(x) - u_n(x) &\le K\int_0^x \left(1 + \tfrac{(x-t)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}\right) \tfrac{P(2Kt^{1-\alpha})^n}{\Gamma(n(1-\alpha)+1)} dt = \\ &= P\cdot 2^n \cdot K^{n+1}\left(\tfrac{x^{n(1-\alpha)+1}}{\Gamma(n(1-\alpha)+2)} + \tfrac{x^{(n+1)(1-\alpha)}}{\Gamma((n+1)(1-\alpha)+1)}\right). \end{aligned} \tag{26}$$

Пусть $n \ge 1$, $\lambda = n(1-\alpha)+1$, $\mu = (n+1)(1-\alpha)$. Очевидно, что $\lambda > 1$, $0 < \mu < \lambda$. Тогда либо $0 < \mu \le 1$, $\lambda > 1$, либо $1 < \mu < \lambda$. В обоих случаях $x^\mu \ge x^\lambda$ для $x \in [0,1]$.

Если $\xi = n(1-\alpha)+2$, $\eta = (n+1)(1-\alpha)+1$, то $1 < \eta < \xi$, $\xi > 2$. При этом либо $1 < \eta \le 2 < \xi$, либо $2 < \eta < \xi$. В обоих случаях $\Gamma(\eta) < \Gamma(\xi)$. Следовательно, $\frac{x^\lambda}{\Gamma(\xi)} \le \frac{x^\mu}{\Gamma(\eta)}$, то есть $\frac{x^{n(1-\alpha)+1}}{\Gamma(n(1-\alpha)+2)} \le \frac{x^{(n+1)(1-\alpha)}}{\Gamma((n+1)(1-\alpha)+1)}$.

Отсюда и (26) следует оценка (25).

Рассмотрим ряд

$$u_0(x) + \sum_{n=0}^{\infty} (u_{n+1}(x) - u_n(x)), \tag{27}$$

который мажорируется рядом

$$P\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2KT^{1-\alpha})^n}{\Gamma(n(1-\alpha)+1)} = P \cdot E_{\frac{1}{1-\alpha}}(2KT^{1-\alpha}; 1) = Q,$$

где $E_\rho(z;\mu) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\mu+\rho^{-1})}$ — функция Миттаг-Леффлера [2, с. 117], причем $\rho > 0$, μ - параметр. По признаку Вейерштрасса, ряд (27) равномерно на $[0,T]$ сходится к функции $u(x) \in C([0,T])$, причем $u_n(x) \le u(x) \le P\cdot E_{\frac{1}{1-\alpha}}(2KT^{1-\alpha}; 1)$. Так как этот же ряд является мажорирующим и для последовательностей $\varphi_n(x)$, $\psi_n(x)$, то эти последовательности равномерно на $[0,T]$ сходятся, соответственно, к непрерывным и неубывающим функциям $\varphi(x)$, $\psi(x)$, которые являются решением системы (23). Доказательство единственности решения системы (23) аналогично доказательству единственности решения системы (4),(5).

Теорема 5. *Пусть сеточные функции* q_h, p_h, w_h, s_h, $(r_h = (r_0, r_1, \dots, r_N)$, $r = q,p,w,s)$ *такие, что* $q_0 = w_0 = 0$, $p_0 = s_0 = A$ *и*

$$\begin{cases} |q_{n+1} - q_n| \le h\left[K(|q_n| + |p_n|) + A\right], \\ |p_{n+1}| \le A + \frac{K}{\Gamma(2-\alpha)} \sum\limits_{i=1}^{n+1} (|q_{i-1}| + |p_{i-1}|)(x_{n+2-i}^{1-\alpha} - x_{n+1-i}^{1-\alpha}), n = \overline{0, N-1}, \end{cases} \tag{28}$$

$$\begin{cases} w_{n+1} \ge w_n + h\left[K(w_n + s_n) + A\right], \\ s_{n+1} \ge A + \frac{K}{\Gamma(2-\alpha)} \sum\limits_{i=1}^{n+1} (|w_{i-1}| + |s_{i-1}|)(x_{n+2-i}^{1-\alpha} - x_{n+1-i}^{1-\alpha}), n = \overline{0, N-1}, \end{cases} \tag{29}$$

где $K > 0, A > 0, x_i = ih, Nh = T$.

Тогда

$$|q_n| \leq w_n, |p_n| \leq s_n, n = \overline{0, N},$$

причем системе (29) удовлетворяют сеточные функции w_h, s_h, *у которых* $w_n = \varphi(x_n)$, $s_n = \psi(x_n)$, *где* $\varphi(x)$ *и* $\psi(x)$ *— решение системы (23).*

Доказательство. Доказательство по индукции. При $n = 0$, $|q_0| \leq w_0, |p_0| \leq s_0$ и пусть $|q_n| \leq w_n, |p_n| \leq s_n$. Тогда

$$|q_{n+1}| - |q_n| \leq |q_{n+1} - q_n| \leq h\left[K(|q_n| + |p_n|) + A\right],$$

$$|q_{n+1}| \leq |q_n| + h\left[K(|q_n| + |p_n|) + A\right] \leq w_n + h\left[K(w_n + s_n) + A\right] \leq w_{n+1},$$

$$|p_{n+1}| \leq A + \frac{K}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{i=1}^{n+1} (w_{i-1} + s_{i-1})(x_{n+2-i}^{1-\alpha} - x_{n+1-i}^{1-\alpha}) \leq s_{n+1}.$$

Докажем вторую часть утверждения. В (23) полагаем $x = x_{n+1}$ и учтем, что $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ не убывают на $[0, T]$. Получим

$$\begin{aligned}
\varphi(x_{n+1}) &= K\int_0^{x_n} (\varphi(t) + \psi(t))dt + K\int_{x_n}^{x_{n+1}} (\varphi(t) + \psi(t))dt + Ax_n + Ah = \\
&= \varphi(x_n) + K\int_{x_n}^{x_{n+1}} (\varphi(t) + \psi(t))dt + Ah \geq \\
&\geq \varphi(x_n) + h\left[K(\varphi(x_n) + \psi(x_n)) + A\right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\psi(x_{n+1}) &= \frac{K}{\Gamma(1-\alpha)} \sum_{i=1}^{n+1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x_{n+1} - t)^{-\alpha} (\varphi(t) + \psi(t))dt + A \geq \\
&\geq \frac{K}{\Gamma(1-\alpha)} \sum_{i=1}^{n+1} (\varphi(x_{i-1}) + \psi(x_{i-1})) \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x_{n+1} - t)^{-\alpha} dt + A \geq \\
&\geq \frac{K}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{i=1}^{n+1} (\varphi(x_{i-1}) + \psi(x_{i-1}))(x_{n+2-i}^{1-\alpha} - x_{n+1-i}^{1-\alpha}).
\end{aligned}$$

Теорема 5 доказана.

Теорема 6. *Численный метод (14),(15) является сходящимся.*

Доказательство. Согласно (21),(22) и теореме 4, $|\delta_n| \leq \varphi(x_n)$, $|\gamma_n| \leq \psi(x_n)$. Учтем, что $\varphi(x_n) \leq Q$, $\psi(x_n) \leq Q$ и $Q \to 0$ при $h \to 0$.

Следствие 1. *Если функция* $f(x, y, z)$ *удовлетворяет условию Липшица и по* x *с постоянной* L, *то* $\omega(f; h, 0, 0) \leq Lh$. *Следовательно,* $|\delta_n| = O(h^{1-\alpha})$, $|\gamma_n| = O(h^{1-\alpha})$ *при* $h \to 0$.

Заключение. Таким образом, в работе получены существования и единственности решения задачи Коши для дифференциального уравнения первого порядка, правая часть которого содержит производную Римана-Лиувилля порядка $\alpha \in (0, 1)$ и предложен метод ее численного решения.

1. **Бабенко Ю. И.** Тепломассообмен. Метод расчета тепловых и диффузорных потоков [текст] / Ю. И. Бабенко. – М: Химия, 1986. – 144 с.
2. **Джарбашян М. М.** Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области [текст] / М. М. Джарбашян. – Москва: Наука, 1966. – 671 с.
3. **Самко С. Г.** Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения [текст] / С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. Н. Маричев. – Минск: Техника, 1987. – 688 с.
4. **Тиман А. Ф.** Теория приближения функций действительного переменного [текст] / А. Ф. Тиман. – Москва: ГИФМЛ, 1960. – 624 с.
5. **Kilbas A. A.** Existence and uniqueness theorems for nonlinear fractional differential equations. Demonstration Math [text] / A. A. Kilbas, B. Bonilla, J. J. Trujillo. – 2000. – V. 33, № 3. – P. 583–602.