

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
ОДЕСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
імені І.І.Мечникова  
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ, ЕКОНОМІКИ ТА МЕХАНІКИ  
КАФЕДРА ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

## ДИПЛОМНА РОБОТА

на тему: **СТІЙКІСТЬ ЗА ЛЯПУНОВИМ ЛІНІЙНИХ  
ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ**

студентки шостого курсу  
заочного відділення  
напрямку підготовки  
МАТЕМАТИКА  
Лебедевої Катерини  
Володимирівни

Науковий керівник:  
Євтухов В'ячеслав Михайлович,  
д. фіз.-мат. наук, професор  
Рецензент:  
Шарай Наталія Вікторівна,  
канд. фіз.-мат. наук, доцент

Допущено до захисту  
зав. кафедрою

Одеса – 2014

## СОДЕРЖАНИЕ

<b>ВВЕДЕНИЕ</b>	<b>3</b>
<b>ГЛАВА 1. Основные понятия и утверждения об устойчивости по Ляпунову систем линейных дифференциальных уравнений</b>	<b>5</b>
§1 Основные понятия теории устойчивости и их геометрический смысл . . . . .	6
§2 Общие критерии устойчивостей систем линейных однородных дифференциальных уравнений . . . . .	10
§3 Критерии устойчивостей систем линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными и периодическими коэффициентами . . . . .	19
<b>ГЛАВА 2. Достаточные признаки устойчивостей по Ляпунову систем линейных однородных дифференциальных уравнений</b>	<b>30</b>
§4 Об устойчивости возмущенных систем линейных однородных дифференциальных уравнений . . . . .	30
§5 Результаты Важевского . . . . .	38
<b>ГЛАВА 3. Устойчивость по Ляпунову линейных дифференциальных уравнений <math>n</math>-го порядка</b>	<b>42</b>
§6 Основные определения и утверждения . . . . .	42
§7 Теорема Ляпунова для одного класса линейных однородных дифференциальных уравнений второго порядка	47
<b>ВЫВОДЫ</b>	<b>53</b>
<b>СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ</b>	<b>55</b>

## ВВЕДЕНИЕ

Своему возникновению теория устойчивости обязана усилиям ученых, которые пытались объяснить существование различных типов космических объектов путем решения классической проблемы о фигурах равновесия однородных вращающихся сред.

Наиболее важные результаты в этом направлении были получены в конце XIX столетия русским ученым А.М. Ляпуновым [?], который не только ввел достаточно общее понятие устойчивости движения, но и создал эффективные методы его исследования. В последний год своей жизни А.М. Ляпунов работал в Одеском (Новороссийском) университете и читал лекции на тему "О форме небесных тел".

На примере линейных дифференциальных уравнений (систем линейных дифференциальных уравнений и линейных дифференциальных уравнений высшего порядка) особенно глубоко можно уяснить основные идеи, положения и методы теории устойчивости по Ляпунову. Полученные для таких уравнений результаты являются законченными и очень красивыми. Именно их изложению и посвящена настоящая дипломная работа.

Дипломная работа состоит из введения, трех глав, содержащих семь параграфов, выводов и списка использованной литературы.

В первой главе вводятся основные понятия теории устойчивости, приводятся основные результаты для систем линейных дифференциальных уравнений и на основе их решается вопрос об устойчивости, равномерной устойчивости, асимптотической и экспоненциальной асимптотической устойчивости систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными и периодическими коэффициентами.

Во второй главе устанавливаются результаты об устойчивости и асимптотической устойчивости возмущенных систем линейных однородных дифференциальных уравнений, а также приводятся известные результаты Важевского для систем линейных дифференциальных уравнений общего вида.

В третьей главе вводятся определения различных типов устойчивости по Ляпунову для линейных дифференциальных уравнений  $n$ -го порядка. Далее с использованием приведенных в первых двух главах работы результатов для систем формулируются основные результаты для дифференциальных уравнений. В заключение третьей

главы приводится известная теорема А.М.Ляпунова об устойчивости двучленного линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с периодическим коэффициентом.

## ВЫВОДЫ

Дипломная работа посвящена исследованию на устойчивости по Ляпунову разных типов систем линейных дифференциальных уравнений и линейных дифференциальных уравнений  $n$ -го порядка. При этом предполагается использование различных методов, отличных от второго метода Ляпунова. Работа состоит из трех глав, содержащих семь параграфов. В первой и во второй главах работы рассматриваются системы линейных дифференциальных уравнений, а в третьей линейные дифференциальные уравнения  $n$ -го порядка.

В первой главе вводятся основные понятия теории устойчивости по Ляпунову для систем линейных дифференциальных уравнений. Доказывается теорема о связи устойчивости любого решения системы линейных неоднородных дифференциальных уравнений с устойчивостью тривиального решения, соответствующей однородной системы. Эта теорема позволяет сделать вывод о том, что свойство устойчивости присуще не отдельно взятым решениям, а линейным уравнениям в целом. В частности, показано, что при исследовании на устойчивость линейных дифференциальных уравнений можно ограничиться лишь рассмотрением систем линейных однородных дифференциальных уравнений. Для систем линейных однородных дифференциальных уравнений в первой главе установлены критерии устойчивости, равномерной устойчивости, асимптотической устойчивости и экспоненциально асимптотической устойчивости. С использованием этих критериев получены критерии различных типов устойчивости систем линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными и периодическими коэффициентами.

Во второй главе работы сначала при некоторых ограничениях на матрицу возмущения устанавливается лемма об оценке решений возмущенной системы линейных дифференциальных уравнений. С использованием этой леммы доказываются два удобных для использования признака устойчивости и асимптотической устойчивости возмущенных систем. Полученные здесь результаты иллюстрируются на примерах конкретных систем уравнений. Кроме того, во второй главе доказываются результаты Важевского об устойчивости систем линейных однородных дифференциальных уравнений общего вида.

Третья глава посвящена линейным дифференциальным уравнениям  $n$ -го порядка. Здесь, учитывая эквивалентность уравнения  $n$ -го порядка системе линейных дифференциальных уравнений, с использованием изложенного в первых двух главах вводятся основные определения устойчивостей указанных выше типов и формулируются основные результаты для уравнений. В последнем параграфе третьей главы доказывается теорема А.М.Ляпунова об устойчивости двучленного линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с периодическим коэффициентом.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. – М.: Наука, 1967. – 472.
2. Беллман Р. Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений. – М.: ИЛ, 1954. – 216.
3. Coppel W.A. Stability and asymptotic behavior of differential equations. – D.C. Heath and Company Boston. – 1965. – 166 p.
4. Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Наука, 1984. – 271с.
5. Кигурадзе И.Т. Начальная и краевые задачи для систем обыкновенных дифференциальных уравнений. – АН Грузии, Мат. ин-т им. А.Размадзе. Тбилиси: Мецниереба, 1997. – 215с.
6. Євтухов В.М. Стійкість за Ляпуновим лінійних диференціальних рівнянь. Навчальний посібник.– Одеса: Астропринт, 2001. – 118.