

М Е Х А Н І К А

УДК 62-50

Л. Д. Акуленко*, А. Л. Рачинская***, Я. С. Зинкевич**,
Д. Д. Лещенко**

*Институт проблем механики имени А. Ю. Ишлинского
Российской Академии наук

**Одесская государственная академия строительства и архитектуры

***Одесский национальный университет имени И. И. Мечникова

**ОПТИМАЛЬНОЕ ТОРМОЖЕНИЕ ВРАЩЕНИЙ
СИММЕТРИЧНОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА С ВНУТРЕННЕЙ
СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ В СРЕДЕ С СОПРОТИВЛЕНИЕМ**

Акуленко Л. Д., Рачинська А. Л., Зінкевич Я. С., Лещенко Д. Д. Оптимальне гальмування обертань симетричного твердого тіла з внутрішньою ступенню вільності в середовищі з опором. Досліджується задача про оптимальне по швидкодії гальмування обертань вільного твердого тіла. Припускається, що тіло містить рухому масу, яка з'єднана з тілом пружним зв'язком з квадратичною дисипацією. Крім того, на тверде тіло діє гальмуючий момент сил лінійного опору середовища. Вважається, що в недеформованому стані тіло динамічно симетричне, а маса знаходиться на осі симетрії. Визначені оптимальний закон керування для гальмування обертань несучого твердого тіла в формі синтезу, час швидкодії та фазові траєкторії. **Ключові слова:** оптимальне гальмування, тверде тіло, обертання, середовище з опором.

Акуленко Л. Д., Рачинская А. Л., Зинкевич Я. С., Лещенко Д. Д. Оптимальное торможение вращений симметричного твердого тела с внутренней степенью свободы в среде с сопротивлением. Исследуется задача об оптимальном по быстродействию торможении вращений свободного твердого тела. Предполагается, что тело содержит подвижную массу, соединенную с телом посредством упругой связи с квадратичной диссипацией. Кроме того, на твердое тело действует тормозящий момент сил линейного сопротивления среды. Считается, что в недеформированном состоянии тело динамически симметрично, а масса находится на оси симметрии. Определены оптимальный закон управления для торможения вращений несущего твердого тела в форме синтеза, время быстродействия и фазовые траектории.

Ключевые слова: оптимальное торможение, твердое тело, вращение, среда с сопротивлением.

Akulenko L. D., Rachinskaya A. L., Zinkevich Ya. S., Leshchenko D. D. Rotations of a satellite with cavity filled with a viscous fluid under the action of gravitational and light torques. We investigate the problem of response-optimal braking of the rotations of a free rigid body. It is assumed that the body contains a moving mass connected to the body by an elastic coupling with square – law friction dissipation. Furthermore the braking moment of the forces of linear resisting medium is acted on the rigid body. It is supposed that the body is dynamically symmetrical in nondeformed state and mass can be found at axis of symmetry. Optimal control law for braking of rotations of

a rigid body in the form of synthesis, time of speed and phase trajectories are determined.

Key words: optimal braking, rigid body, rotation, resisting medium.

ВВЕДЕНИЕ. Анализ гибридных систем, т. е. объектов, содержащих элементы с распределенными и сосредоточенными параметрами, представляет интерес в теоретическом и прикладном аспектах. Разработаны подходы и получены значительные результаты для систем, содержащих “квазитвердые” тела. Модели последних предполагают, что в определенном смысле их движение близко движению абсолютно твердых тел. Влияние неидеальностей может быть выявлено на основе асимптотических методов нелинейной механики (сингулярных возмущений, усреднения и др.). Оно сводится к наличию дополнительных слагаемых в уравнениях движения Эйлера некоторого фиктивного твердого тела. Анализ пассивных движений твердого тела, несущего подвижную массу, соединенную с телом упругой связью при наличии вязкого или квадратичного трения, и в сопротивляющейся среде уделялось значительное внимание [1-7]. Проблеме управления вращениями “квазитвердых тел” посредством сосредоточенных (приложенных к корпусу) моментов сил, имеющей значение для приложений, уделялось недостаточное внимание. Удалось выделить класс систем, приводящих к гладким управляющим воздействиям и дающих возможность применения метода сингулярных возмущений без накопления погрешностей типа “временных погранслоев” [2, 8-11].

Ниже исследуется задача оптимального по быстродействию торможения вращений симметричного тела, соединенного в точке на оси симметрии с массой относительно малых линейных размеров посредством упругой связи с квадратичной диссипацией. Кроме того, на твердое тело действует малый тормозящий момент сопротивления среды. Управление вращениями производится с помощью момента сил, ограниченного по модулю. Рассматриваемая модель обобщает исследованные ранее в работах [2, 8-11]. В работах [2, 11] решена задача об оптимальном по быстродействию стабилизации динамически симметричного твердого тела с подвижной массой, соединенных вязкоупругой связью. В статье [8] рассматривается управляемое движение динамически симметричного твердого тела с подвижной точечной массой, соединенных упругой связью при наличии квадратичного трения. В работах [9, 10] исследуется оптимальное по быстродействию торможение вращений динамически симметричного твердого тела со сферической полостью, целиком заполненной жидкостью большой вязкости (при малых числах Рейнольдса). Кроме того, в [9] считается, что тело содержит вязкоупругий элемент, который моделируется точечной массой, прикрепленной демпфером к точке на оси симметрии. В [10] твердое тело с полостью, заполненной вязкой жидкостью, соединено с подвижной массой посредством упругой связи с квадратичной диссипацией. В монографии [11] показано, что функциональное неравенство Шварца оказывается весьма полезным для построения синтеза закона торможения “квазитвердых” тел. Получены приближенные решения возмущенных задач оптимального по быстродействию торможения вращений твердых тел относительно центра масс, в том числе объектов с внутренними степенями свободы, имеющих приложения в динамике космических и летательных аппаратов. Свойство инвариантности неуправляемой системы по отношению к величине кинетического момента наблюдается для ряда механических моделей. Изучено

торможение тел, содержащих полость с вязкой жидкостью. Рассмотрены случаи осесимметричного и несимметричного в невозмущенном состоянии тел со сферической полостью, заполненной жидкостью большой вязкости (при малых числах Рейнольдса). Исследовано торможение возмущенных вращений твердого тела, близкого к сферически симметричному, под действием момента сил линейного сопротивления среды, направленного против вектора угловой скорости тела. Изучена задача оптимального по быстродействию торможения возмущенных вращений несимметричного твердого тела под действием момента сил линейного трения.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ.

1. Постановка задачи. На основе подхода [2, 11] уравнения управляемых вращений в проекциях на оси связанной с фиксированным твердым телом системы координат (уравнения Эйлера) могут быть представлены в виде [2, 4, 5, 10, 11]

$$\begin{aligned} A\dot{p} + (C - A)qr &= M_p + FG^2qr + Spr^6\omega - \chi Ap, \\ A\dot{q} + (A - C)pr &= M_q - FG^2pr + Sqr^6\omega_{\perp} - \chi Aq, \\ C\dot{r} &= M_r - AC^{-1}Sr^5\omega_{\perp}^3 - \chi Cr. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь p, q, r — проекции вектора абсолютной угловой скорости ω на связанные оси, $\mathbf{J} = \text{diag}(A, A, C)$ — тензор инерции невозмущенного тела, $M_{p,q,r}$ — проекции вектора момента управляющих сил $\mathbf{M}$; кинетический момент тела $\mathbf{G} = J\omega$, его модуль

$$G = |\mathbf{G}| = [A^2\omega_{\perp}^2 + C^2r^2]^{1/2}, \quad \omega_{\perp}^2 = p^2 + q^2.$$

Для упрощения задачи в систему (1) внесено структурное ограничение. Считается, что диагональный тензор момента сил линейного сопротивления среды пропорционален тензору момента сил инерции, т. е. момент сил диссипации пропорционален кинетическому моменту

$$\mathbf{M}^r = -\chi J\omega, \quad (2)$$

где χ — некоторый постоянный коэффициент пропорциональности, зависящий от свойств среды. Сопротивление, действующее на тело, представлено парой приложенных сил. При этом проекции момента этой пары на главные оси инерции тела являются величинами $\chi Ap, \chi Aq, \chi Cr$ [4, 5]. Такое предположение не является противоречивым.

Предполагается, что допустимые значения момента управляющих сил $\mathbf{M}$ ограничены сферой [11]

$$\mathbf{M}^u = b\mathbf{u}, \quad |\mathbf{u}| \leq 1; \quad b = b(t, \mathbf{G}), \quad 0 < b_* \leq b < b^* < \infty, \quad (3)$$

где b — скалярная функция, ограниченная в рассматриваемой области изменения аргументов $t, \mathbf{G}$ согласно уравнениям (3). Эта область определяется априори или может быть оценена через начальные данные для $\mathbf{G}$, $\mathbf{G}(t_0) = \mathbf{G}^0$.

Введенные в (1) обозначения F, S выражаются через параметры системы следующим образом:

$$F = m\rho^2\Omega^{-2}CA^{-3}, \quad S = m\rho^3\Lambda\Omega^{-3}d|d|C^4A^{-4}, \quad d = 1 - CA^{-1}. \quad (4)$$

Коэффициенты F , S характеризуют возмущающие моменты сил, обусловленные наличием упругого элемента. Здесь m — масса подвижной точки, ρ — радиус-вектор точки O_1 крепления подвижной массы, находящейся на оси симметрии. Постоянные $\Omega^2 = c/m$, $\lambda = \mu/m = \Lambda\Omega^3$ определяют частоту колебаний и скорость их затухания соответственно; c — жесткость; μ — коэффициент квадратичного трения.

Рассматривается случай, когда коэффициенты связи λ и Ω таковы, что "свободные" движения точки m , вызванные начальными отклонениями, затухают значительно быстрее, чем тело совершит оборот. Движение твердого тела близко к движению Эйлера-Пуансо, а относительные колебания точки, вынуждаемые этим движением, будут малы. Предполагается, что

$$\Omega \gg \omega. \quad (5)$$

Неравенство (5) позволяет ввести малый параметр в (4) и считать указанные возмущающие моменты в (1) малыми с целью применения асимптотических методов усреднения. Заметим, что величина массы m может быть значительной, сравнимой с массой тела.

Итак в квазистатическом приближении возмущающие моменты сил, обусловленные упругостью и квадратичным трением демпфера, определяются мономами компонент вектора $\omega = (p, q, r)^T$ четвертой и восьмой степени соответственно. Малый тормозящий момент сопротивления среды является линейным относительно угловой скорости возмущением. Математическая модель управляемых вращений квазитвердого тела построена в виде уравнений Эйлера (1).

Ставится задача оптимального по быстродействию торможения вращений

$$\omega(T) = 0, \quad T \rightarrow \min_{\mathbf{u}}, \quad |\mathbf{u}| \leq 1. \quad (6)$$

Требуется найти оптимальный закон управления в виде синтеза $u = u(t, \omega)$, соответствующую ему траекторию $\omega(t, t_0, \omega^0)$ и время быстродействия $T = T(t_0, \omega^0)$, а также функцию Беллмана задачи $W = T(t, \omega) - t$.

2. Решение задачи оптимального торможения. Отметим, что момент сил, обусловленный движением подвижной массы, соединенной с телом упругой связью при наличии квадратичного трения, является внутренним для фиктивного тела, а момент сил линейного сопротивления среды — внешним.

На основе динамического программирования синтез оптимального по быстродействию управления имеет вид [11]

$$M_p = -b \frac{Ap}{G}, \quad M_q = -b \frac{Aq}{G}, \quad M_r = -b \frac{Cr}{G}, \quad b = b(t, G). \quad (7)$$

Здесь для дальнейшего упрощения полагаем $b = b(t, G)$, $0 < b_1 \leq b \leq b_2 < \infty$.

Домножим первое уравнение (1) на Ap , второе — на Aq , третье — на Cr и сложим. Получим уравнение вида, подлежащее интегрированию, и уравнение для T

$$\dot{G} = -b(t, G) - \chi G, \quad G(t_0) = G^0, \quad G(T, t_0, G^0) = 0,$$

$$T = T(t_0, G^0), \quad W(t, G) = T(t, G) - t.$$

В предположении $b = b(t)$ получим решение и условие для T

$$G(t) = G^0 e^{-\chi(t-t_0)} - \int_{t_0}^t b(\tau) e^{-\chi(t-\tau)} d\tau, \quad G^0 = e^{-\chi t_0} \int_{t_0}^T b(\tau) e^{\chi\tau} d\tau, \quad (8)$$

$$T = T(t_0, G^0).$$

Здесь t — текущее время процесса торможения, T — время быстрогодействия.

При $b = \text{const}$ решение уравнения и краевой задачи (8) записывается следующим образом

$$G(t) = \frac{1}{\chi} [(G^0 \chi + b) \exp(-\chi t) - b], \quad T = \frac{1}{\chi} \ln \left(G^0 \frac{\chi}{b} + 1 \right), \quad t_0 = 0. \quad (9)$$

Далее детально анализируется случай (9).

3. Анализ осевого вращения для управляемого движения тела. Подстановка известного выражения для G в третье уравнение (1) приводит к нелинейному уравнению относительно r следующего вида

$$\dot{r} = -r \left[bG^{-1} + A^{-2} C^{-2} S r^4 (G^2 - C^2 r^2)^{3/2} + \chi \right]. \quad (10)$$

Заменой осевой составляющей вектора угловой скорости $r = GR$, где R — неизвестная функция, уравнение (10) приводится к виду, допускающему разделение переменных и тривиальное интегрирование

$$\dot{R} = -A^{-2} C^{-2} S G^4 R^5 [G^2 (1 - C^2 R^2)]^{3/2}. \quad (11)$$

Вектор кинетического момента $\mathbf{G}$ при проектировании на главные центральные оси инерции тела приводит к выражению $Cr = G \cos \theta$, где θ — угол нутации. В результате для неизвестной R получается соотношение $CR = \cos \theta$. Уравнение (11) после перехода к неизвестной θ может быть записано в виде

$$\dot{\theta} = A^{-2} C^{-6} S \sin \theta |\sin \theta| \cos^5 \theta \chi^{-7} |(G^0 \chi + b) \exp(-\chi t) - b|^7, \quad \theta(0) = \theta^0. \quad (12)$$

Его решение записывается следующим образом:

$$2 \sec^4 \theta \operatorname{cosec} \theta + 5 (\sec^2 \theta - 3) \operatorname{cosec} \theta - 2 \sec^4 \theta^0 \operatorname{cosec} \theta^0 -$$

$$- 5 (\sec^2 \theta^0 - 3) \operatorname{cosec} \theta^0 + 15 \ln \left| tg \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2} \right) tg^{-1} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta^0}{2} \right) \right| = K(t), \quad (13)$$

где

$$\begin{aligned}
 K(t) = & \pm 8A^{-2}C^{-6}S\chi^{-7} \left\{ -\frac{(G^0\chi + b)^7}{7\chi} [\exp(-7\chi t) - 1] + \right. \\
 & + \frac{7b(G^0\chi + b)^6}{6\chi} [\exp(-6\chi t) - 1] - \frac{21b^2(G^0\chi + b)^5}{5\chi} [\exp(-5\chi t) - 1] + \\
 & + \frac{35b^3(G^0\chi + b)^4}{4\chi} [\exp(-4\chi t) - 1] - \frac{35b^4(G^0\chi + b)^3}{3\chi} [\exp(-3\chi t) - 1] + \\
 & \left. + \frac{21b^5(G^0\chi + b)^2}{2\chi} [\exp(-2\chi t) - 1] - \frac{7b^6(G^0\chi + b)}{\chi} [\exp(-\chi t) - 1] - b^7 t \right\}.
 \end{aligned}$$

Без нарушения общности можно принять, что θ^0 (и θ) принадлежат первой четверти ($0 \leq \theta^0 \leq \pi/2$). Если θ^0 принимает значения из указанного промежутка, то угол нутации в процессе эволюции вращений также не выйдет за его пределы, поскольку $\theta^* = 0, \pi/2$ — стационарные точки уравнения (12).

При $A \approx C$, а также θ^0 в окрестности стационарных точек могут быть применены методы возмущений, которые в данном случае приводят к элементарным выражениям. Например, после первой итерации имеем выражение для θ

$$\theta(t) = \theta^0 + \frac{1}{8} \sin^2 \theta^0 \cos^5 \theta^0 K(t). \quad (14)$$

Формула (14) позволяет провести анализ угла нутации во времени для различных значений параметров системы и начальных данных.

4. Анализ вращений тела в экваториальной плоскости. Рассмотрим теперь изменение экваториальных составляющих переменных p, q согласно первым двум уравнениям (1). Введем переменную $N = A\omega_{\perp}$, имеющую смысл модуля указанных составляющих, характеризующую эти вращения. Умножая первое уравнение (1) на ApN^{-1} , а второе — на AqN^{-1} и складывая, получим для N нелинейное однородное уравнение вида

$$\dot{N} = -d(t)N + f(t)N^2, \quad d(t) = \frac{b(t)}{G(t)} + \chi, \quad f(t) = A^{-2}Sr^6(t). \quad (15)$$

Это — уравнение Бернулли (см. [12], с. 297). Интегрируя (15), находим

$$N^{-1} = -E(t)A^{-2}S \int r^6(t)E^{-1}(t)dt, \quad E(t) = \exp \left[\int d(t)dt \right]. \quad (16)$$

С другой стороны, квадрат величины кинетического момента тела может быть представлен в виде

$$G^2 = N^2 + C^2 r^2.$$

Отсюда легко получить выражение для N

$$N = (G^2 - C^2 r^2)^{1/2}$$

или, учитывая соотношение $Cr = G \cos \theta$,

$$N = G |\sin \theta|. \quad (17)$$

При $b = \text{const}$ с учетом (8) имеем

$$N = \frac{1}{\chi} [(G^0 \chi + b) \exp(-\chi t) - b] |\sin \theta|. \quad (18)$$

Численный анализ изменения угла θ приведен в п. 5.

Используя известные выражения $G(t)$ и $r(t)$, приведем уравнения для p , q (1) к виду уравнений с переменными коэффициентами и определенной симметрией. Эти уравнения содержат только “гироскопические” и “диссипативные” члены с коэффициентами $g(t)$, $d(t)$ и $f(t)$ соответственно

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{N}} &= -[d(t) - f(t)N(t)]\mathbf{N} + g(t)I\mathbf{N}, \quad \mathbf{N} = (Ap, Aq)^T, \\ g(t) &= A^{-1}r(t)(A - C + FG^2(t)). \end{aligned} \quad (19)$$

Здесь I — симплектическая матрица, а “коэффициенты диссипации” $d(t)$ и $f(t)$ определены в (15), а функция $N = N(t)$ задана согласно (16–18).

Уравнение (17) для $\mathbf{N}$ интегрируется в явном виде [12]. Действительно, полагая $\mathbf{N} = N\mathbf{n}$, где $\mathbf{n} = \mathbf{n}(t)$ — орт вектора $\mathbf{N}$, получим для неизвестной $\mathbf{n}$ уравнение

$$\dot{\mathbf{n}} = g(t)I\mathbf{n}.$$

Начальное значение $\mathbf{n}(t_0) = \mathbf{n}^0$ определяется условием $\mathbf{N}^0 = N^0\mathbf{n}^0$. Отметим, что $|\mathbf{n}(t)| \equiv |\mathbf{n}(t_0)| = |\mathbf{n}^0| = 1$ для всех $t \in [t_0, T]$.

Введем аргумент δ так, чтобы $\dot{\mathbf{n}} = I\mathbf{n}$; имеем

$$\mathbf{n}(t) = \Pi(\delta)\mathbf{n}^0, \quad \delta = \int_{t_0}^t g(\tau) d\tau, \quad \Pi(\delta) = \begin{vmatrix} \cos \delta & \sin \delta \\ -\sin \delta & \cos \delta \end{vmatrix}, \quad (20)$$

где $\Pi(\delta)$ — матрица поворота (начального вектора $\mathbf{n}^0$) на угол δ . Таким образом, прецессионные вращения квазитвердого тела (относительно оси в экваториальной плоскости) полностью определены согласно (16), (19). Существенное значение при этом, как отмечалось, имеет знание переменных $G(t)$ и $r(t)$, которые определялись в разд. 2, 3.

5. Численный анализ и выводы. Обратимся вновь к задаче определения угла нутации $\theta(t)$ в частном случае $b = \text{const}$ согласно (12). Проведем обезразмеривание уравнения (12). Введем обозначения

$$\tau = \chi t, \quad k^* = \frac{kS^{1/7}}{A^{2/7}C^{6/7}\chi^{1/7}}, \quad G_0^* = \frac{G_0S^{1/7}}{A^{2/7}C^{6/7}\chi^{1/7}}, \quad k = b\chi^{-1}. \quad (21)$$

В результате этих преобразований получим уравнение для угла нутации θ

$$\frac{d\theta}{d\tau} = \text{sign}d |(G^{0*} + k^*) \exp(-\tau) - k^*|^7 \sin \theta |\sin \theta| \cos^5 \theta. \quad (22)$$

Уравнение (22) было численно проинтегрировано для произвольных различных значений G^{0*} , k^* и начального угла $\theta^0 = \pi/4 \text{ рад}$. Графики изменения угла нутации θ представлены на рис. 1–3. Рис. 1, 2 соответствуют динамически вытянутому телу, а рис. 3 — сплюснутому.

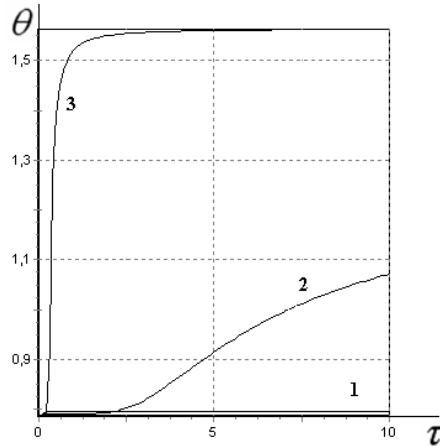


Рис. 1

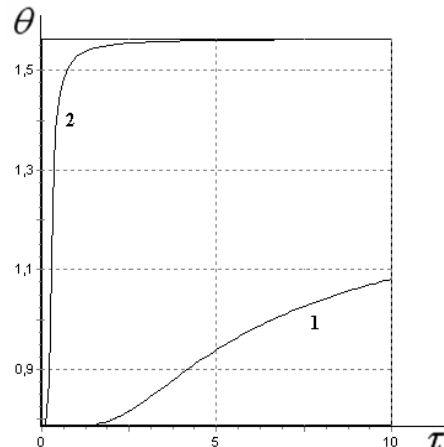


Рис. 2

Рис. 1 соответствует безразмерному начальному значению кинетического момента $G^{0*} = 1$. Кривые 1, 2 и 3 численно построены при различных значениях величины $k^* = 0.1, 1, 10$ соответственно. Согласно проведенному расчету, для динамически вытянутого твердого тела ($A > C$) угол нутации стремится к предельному значению $\pi/2 \text{ рад}$. На рис. 1 приведен расчетный интервал безразмерного времени $\tau \leq 10$. Согласно кривой 3, видно, что при существенном влиянии безразмерного коэффициента момента управляющих сил ($k^* = 10$) угол нутации быстро достигает предельного значения. При этом тело успевает затормозиться, так как время быстрогодействия в этом случае на порядок меньше выбранного расчетного времени. Чем меньше величина k^* , тем медленнее ось симметрии тела стремится к предельному положению. Однако во всех приведенных случаях за расчетный промежуток времени тело успевает затормозиться.

Кривые 1 и 2 рис. 2 соответствуют $k^* = 1, 10$ при значении $G^{0*} = 0.1$. На рисунке не представлена кривая для значения $k^* = 0.1$, так как за выбранное расчетное время величина угла нутации практически не изменяется. Видно, что чем больше значение k^* , тем быстрее тело стремится к устойчивому предельному положению оси вращения.

Аналогичный характер поведения для функции $\theta(t)$ получен в работах [8-10].

Численно исследовано изменение угла нутации для динамически сплюснутого твердого тела ($A < C$). На рис. 3 приведены графики изменения функции $\theta(t)$ при значении $G^{0*} = 1$. Кривая 1 соответствует величине $k^* = 0.1$, а кривая 2 — $k^* = 1$, кривая 3 — $k^* = 10$. Согласно кривым 2 и 3, динамически сплюснутое тело стремится к своему предельному устойчивому положению оси вращения, соответствующему $\theta = 0$. Видно, что характер стремления зависит от

величины безразмерного коэффициента момента управляющих сил. Чем больше этот коэффициент, тем быстрее ось тела стремится к предельному положению. При этом время быстрогодействия существенно уменьшается.

Численный расчет показал, что характер поведения функции $\theta(t)$ в данной задаче совпадает с характером поведения функции изменения угла нутации для твердого тела с подвижными внутренними массами [1].

Таким образом, направление вектора кинетического момента $\mathbf{G}$ в связанной с телом системе координат стремится к стационарному состоянию: к направлениям осей, соответствующим наибольшим моментам инерции.

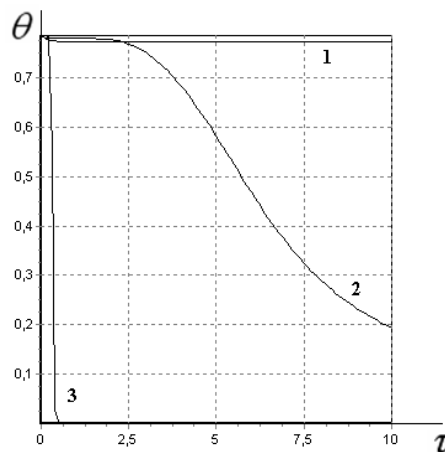


Рис. 3

ЗАКЛЮЧЕНИЕ. Аналитически и численно исследована задача синтеза оптимального по быстродействию торможения вращений динамически симметричного твердого тела с подвижной массой, соединенной с телом упругой связью при наличии квадратичного трения, в сопротивляющейся среде. В рамках асимптотического подхода определены управление, время быстрогодействия (функция Беллмана) и угол нутации, установлены качественные свойства оптимального движения.

1. Черноусько Ф. Л. О движении твердого тела с подвижными внутренними массами [текст] / Ф. Л. Черноусько // Известия АН СССР. Механика твердого тела. – 1973. – № 4. – С. 33–44.
2. Акуленко Л. Д. Некоторые задачи движения твердого тела с подвижной массой [текст] / Л. Д. Акуленко, Д. Д. Лещенко // Известия АН СССР. Механика твердого тела. – 1978. – № 5. – С. 29–34.
3. Лещенко Д. Д. Некоторые задачи движения твердого тела с внутренними степенями свободы [текст] / Д. Д. Лещенко, С. Н. Саллам // Прикл. механика. – 1992. – Т. 28, № 8. – С. 58–63.
4. Раус Э. Дж. Динамика системы твердых тел [текст] / Эдвард Джон Раус. – М. : Наука, 1983. – Т. II. – 544 с.

5. **Кошляков В. Н.** Задачи динамики твердого тела и прикладной теории гироскопов: Аналитические методы [текст] / Владимир Николаевич Кошляков. – М.: Наука, 1985. – 288 с.
6. **Акуленко Л. Д.** Быстрое вращение вокруг неподвижной точки тяжелого твердого тела в сопротивляющейся среде [текст] / Л. Д. Акуленко, Д. Д. Лещенко, Ф. Л. Черноусько // Известия АН СССР. Механика твердого тела. – 1982. – № 3. – С. 5–13.
7. **Акуленко Л. Д.** Эволюция быстрого вращения спутника под действием гравитационного момента в среде с сопротивлением [текст] / Л. Д. Акуленко, Д. Д. Лещенко, А. Л. Рачинская // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2008. – № 2. – С. 13–26.
8. **Акуленко Л. Д.** Некоторые задачи стабилизации тел с внутренними степенями свободы [текст] / Л. Д. Акуленко, Д. Д. Лещенко // Механика гироскопических систем. – 1983. – Вып. 2. – С. 90–97.
9. **Акуленко Л. Д.** Оптимальное торможение вращений твердого тела с внутренними степенями свободы [текст] / Л. Д. Акуленко, Д. Д. Лещенко // Известия РАН. Теория и системы управления. – 1995. – № 2. – С. 115–122.
10. **Лещенко Д. Д.** Оптимальное по быстродействию торможение вращений твердого тела с внутренними степенями свободы [текст] / Д. Д. Лещенко // Известия РАН. Теория и системы управления. – 1996. – № 1. – С. 80–85.
11. **Акуленко Л. Д.** Асимптотические методы оптимального управления [текст] / Леонид Денисович Акуленко. – М.: Наука, 1987. – 368 с.
12. **Камке Э.** Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям [текст] / Эрих Камке. – М.: Наука, 1971. – 576 с.