МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ОДЕСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ імені І. І. МЕЧНИКОВА

Н. А. Якімова

ДИСКРЕТНА МАТЕМАТИКА

Частина 2

БУЛЕВІ ФУНКЦІЇ

КУРС ЛЕКЦІЙ

ОДЕСА
ОНУ
2023

УДК 510.633.3(042.4)
Я453

Автор:
Н. А. Якімова, кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри комп'ютерної алгебри та дискретної математики.

Рецензенти:
Н. О. Малаксіано, доктор технічних наук, доцент, завідувач кафедри технічної кібернетики й інформаційних технологій ім. проф. Р. В. Меркта Одеського національного морського університету;
П. Д. Варбанець, доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри комп'ютерної алгебри та дискретної математики ОНУ імені І. І. Мечникова.

Рекомендовано до друку науково-методичною радою
ОНУ імені І. І. Мечникова.
Протокол № 1 від 23.03.2023 р.

Якімова Н. А.
Я453 Дискретна математика. Частина 2. Булеві функції : курс лекцій / Н. А. Якімова. – Одес. нац. ун-т ім І. І. Мечнікова. – Одеса, 2023. – 127 с.
ISBN 978-617-689-495-7

У пропонованому курсі лекцій розглядаються основні поняття теорії булевих функцій. Весь викладений матеріал ілюструється дуже докладними прикладами, схемами та алгоритмами, що полегшує розуміння студентами як самого теоретичного матеріалу, так і його значення для обраної ними спеціальності. В даному курсі лекцій викладені основні способи задання булевих функцій, їх властивості та класифікація, нормальні форми булевих функцій та пов'язані з ними алгоритми, а також спеціальні розділи, що мають особливо важливе значення при вивченні дискретної математики студентами спеціальностей саме комп'ютерного напрямку.

Курс лекцій складений для студентів першого (бакалаврського) рівня освіти спеціальностей 111 «Математика», 113 «Прикладна математика», 122 «Комп'ютерні науки», 123 «Комп'ютерна інженерія», 126 «Інформаційні системи та технології», 151 «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології».

УДК 510.633.3(042.4)

ISBN 978-617-689-495-7

© Якімова Н. А., 2023
© Одеський національний університет імені І. І. Мечникова, 2023

ЗМІСТ

Передмова 5
1. Задання булевих функцій 6
1.1. Однорідні логічні функції 6
1.2. Табличне задання булевих функцій 7
1.2.1. Булеві функції однієї змінної 7
1.2.2. Булеві функції двох змінних 8
1.3. Аналітичне задання булевих функцій 11
1.3.1. Логічні операції 11
1.3.2. Логічні формули 12
1.3.3. Основні закони алгебри логіки 13
2. Булеві функції багатьох змінних 19
2.1. Елементарні булеві функції 19
2.2. Залежність між булевими функціями 20
2.3. Властивості елементарних булевих функцій 23
2.4. Дерево підформул 25
2.5. Таблиці Квайна 26
3. Класифікація булевих функцій 30
4. Геометрична інтерпретація булевих функцій 32
5. Двоїстість булевих функцій 36
5.1. Означення двоїстої функції 36
5.2. Таблична побудова двоїстої функції 36
5.3. Принцип двоїстості 37
6. Нормальні форми 40
6.1. Диз'юнктивна нормальна форма (ДНФ) 40
6.2. Досконала диз'юнктивна нормальна форма (ДДНФ) 44
6.3. Кон'юнктивна нормальна форма (КНФ) 47
6.4. Досконала кон'юнктивна нормальна форма (ДКНФ) 51
6.5. Зв'язок між досконалими нормальними формами 54
6.6. Нормальна форма Жегалкіна (НФЖ) 56
6.6.1. Побудова поліному Жегалкіна функції через подання в НФЖ елементарних функцій 56
6.6.2. Перехід від ДДНФ до НФЖ 59
6.6.3. НФЖ для функції, яку задано таблично 60
7. Мінімізація булевих функцій 64
7.1. Метод Квайна 64
7.1.1. Імпліканта 64
7.1.2. Мінімізація за Квайном в ДДНФ 68
7.1.3. Імпліцента 75
7.1.4. Мінімізація за Квайном в ДКНФ 77
7.1.5. Отримання мінімальних КНФ за допомогою диз'юнктивних форм 83
7.2. Карти Карно 87

8. Повні системи булевих функцій …….... 95
8.1. Перший критерій повноти ……... 95
8.2. Класи Поста булевих функцій …… 98
8.2.1. Клас T_0 функцій, що зберігають константу 0 …….. 98
8.2.2. Клас T_1 функцій, що зберігають константу 1 …….. 99
8.2.3. Клас ***S*** самодвоїстих функцій ……... 100
8.2.4. Клас ***L*** лінійних функцій …….. 102
8.2.5. Клас ***M*** монотонних функцій ……... 103
8.2.6. Приналежність до класів Поста функції,
яку задано таблично …….. 105
8.2.7. Приналежність до класів Поста функції,
яку задано аналітично ……..…… 109
8.3. Другий критерій повноти систем булевих функцій
(критерій Поста) ……..……..… 116
Список літератури …… 125

ПЕРЕДМОВА

Сьогодення ставить перед наукою все більшу кількість задач, пов'язаних із комп'ютеризацією. Курс дискретної математики є базовою математичною дисципліною при підготовці студентів, які обрали собі фах, що передбачає комп'ютерний напрям підготовки. Дискретна математика складається з багатьох розділів. Даний курс лекцій своєю другою частиною охоплює теорію булевих функцій.

В пропонованому курсі лекцій докладно розглянуто способи задання булевих функцій: аналітичний, табличний та графічний, їх зв'язок, особливості та методи переходу від одного способу задання до іншого. Також розглянуті основні властивості булевих функцій та можлива їх класифікація, основні операції над булевими функціями та закони, які для них виконуються. Особливу увагу приділено нормальним формам та алгоритмам, заснованим саме на цьому аналітичному поданні булевих функцій. Булеві функції – дуже важливий розділ дискретної математики, що має подальше застосування в теорії алгоритмів, електротехніці тощо. Велику увагу приділено алгоритмам мінімізації булевих функцій та дослідженню систем на функціональну повноту.

В умовах дистанційного навчання, що в теперішній час стає все більш затребуваним, велике значення має візуалізація теоретичного матеріалу. Це досягається за допомогою розробки презентацій, якими супроводжується викладання лекцій. Цей курс лекцій складений із використанням цих напрацювань, зроблених за останні роки. Тому він містить дуже багато кольорових ілюстрацій, схем і таблиць, бо саме за рахунок цього досягаються зручна візуалізація та глибше засвоєння досить незвичного для студентів першого курсу математичного матеріалу. Базовий курс математики загальноосвітньої середньої школи не передбачає вивчення подібних математичних конструкцій. А саме для студентів-першокурсників і складений пропонований курс лекцій. Майже усі твердження, леми та теореми мають суворе математичне доведення. Їх робота проілюстрована багатьма докладними прикладами.

1. ЗАДАННЯ БУЛЕВИХ ФУНКЦІЙ

1.1. Однорідні логічні функції

В дискретній математиці важливу роль відіграють скінченні функції.

Означення. *Скінченною функцією* називається відображення однієї скінченної множини в іншу [2].

Відмінна особливість логічних функцій полягає в тому, що вони приймають значення в скінченних множинах. Іншими словами, область значень логічної функції завжди є скінченною сукупністю чисел, символів, понять, властивостей і, взагалі, будь-яких об'єктів [1].

Означення. Якщо область значень функції містить $\boldsymbol{k}$ різних елементів, то така функція називається *k-значною функцією*.

Щоб розрізняти елементи області значень функції, їх необхідно в якійсь спосіб відмітити. Зручніше за все елементи перенумерувати числами від $\mathbf{1}$ до $\boldsymbol{k}$ або позначити якимись символами (наприклад, буквами).

Означення. Непорожня множина, елементи якої є повним переліком всіх символів, що відповідають області значень логічної функції, називають *алфавітом*, а самі символи – *буквами* цього алфавіту [1, 3].

Буквами можуть служити як букви будь-якого алфавіту, так і порядкові числа і будь-які інші символи. Логічні функції можуть залежати від однієї, двох і взагалі будь-якої кількості змінних (аргументів) $\boldsymbol{x_1}$, $\boldsymbol{x_2}$, …, $\boldsymbol{x_n}$. На відміну від самої функції, аргументи можуть приймати значення із елементів як скінченних, так і нескінченних множин.

Означення. Якщо аргументи деякої логічної функції приймають значення із тієї ж множини, що й сама логічна функція, то її називають *однорідною функцією* [1].

В цьому випадку $\boldsymbol{X_1}=\boldsymbol{X_2}=\ldots=\boldsymbol{X_n}=\boldsymbol{N}$, де $\boldsymbol{x_1} \in \boldsymbol{X_1}$, $\boldsymbol{x_2} \in \boldsymbol{X_2}$, …, $\boldsymbol{x_n} \in \boldsymbol{X_n}$ і однорідна функція визначає деяку $\boldsymbol{n}$-місну операцію на скінченній множині $\boldsymbol{N}$.

Означення. *Областю визначення однорідної функції* $\boldsymbol{y=f(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$ служить множина $\boldsymbol{D^n}$ наборів значень змінних $\boldsymbol{(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$, що називаються *словами*, де кожний із аргументів $\boldsymbol{x_1}$, $\boldsymbol{x_2}$, …, $\boldsymbol{x_n}$ заміщується буквами $\boldsymbol{k}$-їчного алфавіту $\boldsymbol{\{0, 1, \ldots, k-1\}}$. Кількість букв у даному слові визначає його *довжину*.

Є очевидним, що кількість усіх можливих слів довжини $\boldsymbol{n}$ в $\boldsymbol{k}$-їчному алфавіті дорівнює $\boldsymbol{k^n}$. В силу того, що кожному такому слову є можливість приписати одне з $\boldsymbol{k}$ різних значень множини $\boldsymbol{N}$, то загальна кількість однорідних функцій від $\boldsymbol{n}$ змінних дорівнює $\boldsymbol{k^{(k^n)}}$. Якщо буквами алфавіту є числа від $\mathbf{0}$ до $\boldsymbol{k-1}$, то кожне слово $\boldsymbol{(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$ символічно подається упорядкованою послідовністю $\boldsymbol{n}$ таких чисел і розглядається як запис $\boldsymbol{n}$-розрядного числа в позиційній системі числення з основою $\boldsymbol{k}$.

Однорідна функція двох змінних може бути задана таблицею (матрицею), рядки та стовпці якої відповідають буквам алфавіту. Для подання функцій трьох та більшої кількості змінних потрібно було б використовувати 3-мірні і взагалі $\boldsymbol{n}$-мірні таблиці. Цього можна уникнути, якщо стовпці матриці поставити у відповідність не буквам алфавіту, а словам, тобто утворити $\boldsymbol{k^n}$ стовпців. Для кожної функції відводиться рядок, клітини якого заповнюються буквами із даного алфавіту.

Означення. Матриці всіх функцій $\boldsymbol{n}$ змінних в $\boldsymbol{k}$-значному алфавіті містить $\boldsymbol{k}^{(\boldsymbol{k}^{\boldsymbol{n}})}$ рядків та називається *загальною таблицею відповідності* [4, 5].

Наприклад, для $\boldsymbol{k} = \mathbf{3}$ і $\boldsymbol{n} = \mathbf{2}$ така матриця має вигляд:

x_1	0	0	0	1	1	1	2	2	2
x_2	0	1	2	0	1	2	0	1	2
f_0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
f_1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
f_2	0	0	0	0	0	0	0	0	2
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
f_{2361}	0	1	0	0	1	2	2	0	1
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
f_{19682}	2	2	2	2	2	2	2	2	2

Номери стовпців цієї матриці визначаються розташованими над ними $\boldsymbol{n}$-розрядними числами з основою $\boldsymbol{k}$, кожне з яких читається зверху вниз. Номери функцій ототожнюються з $\boldsymbol{k}^{\boldsymbol{n}}$-розрядними числами, які відповідають рядкам матриці в тієї ж системі числення.

Найбільш простим і в той же час найважливішим класом однорідних функцій є двозначні (булеві) функції.

Означення. *Булева функція (від* $\boldsymbol{n}$ *змінних)* – це довільне відображення виду $\boldsymbol{f}: \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}^{\boldsymbol{n}} \to \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$ [2].

Таким чином, областю визначення булевих функцій від $\boldsymbol{n}$ змінних служить множина слів довжини $\boldsymbol{n}$. Вони є всілякими наборами із $\boldsymbol{n}$ двійкових цифр. Множина всіх можливих булевих функцій позначається як $\boldsymbol{P_2}$ [2, 6].

Теорема 1. *Формулювання*. Загальна кількість наборів значень $\boldsymbol{n}$ змінних, на яких задано булеву функцію, дорівнює $\mathbf{2}^{\boldsymbol{n}}$.

Доведення. За означенням булевої функції, кожна змінна $\boldsymbol{x_i}$, $\boldsymbol{i} = \overline{\mathbf{1}, \boldsymbol{n}}$, може приймати значення **0** і **1**. Отже, кількість наборів, що містять $\boldsymbol{j} = \mathbf{0, 1, \ldots, } \boldsymbol{n}$ одиниць, дорівнює кількості сполучень із $\boldsymbol{n}$ по $\boldsymbol{j}$, тобто $\boldsymbol{C_n^j}$. В силу того, що $\boldsymbol{j}$ може приймати значення $\mathbf{0, 1, \ldots, } \boldsymbol{n}$ то кількість всіх можливих наборів буде дорівнювати $\boldsymbol{N} = \sum_{\boldsymbol{j}=\mathbf{1}}^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{C_n^j} = \mathbf{2}^{\boldsymbol{n}}$ [4]. **Теорему доведено**.

Кількість всіх можливих булевих функцій $\boldsymbol{n}$ змінних, що дорівнює $\mathbf{2}^{(\mathbf{2}^{\boldsymbol{n}})}$, швидко зростає з ростом $\boldsymbol{n}$ (при $\boldsymbol{n}$=**3** вона дорівнює **256**, а при $\boldsymbol{n}$=**5** перебільшує чотири мільярди). Але функції однієї та двох змінних ще можна перелічити й докладно дослідити, тому що їх кількість порівняно невелика (при $\boldsymbol{n}$=**1** вона дорівнює **4**, а при $\boldsymbol{n}$=**2** вона дорівнює **16**).

1.2. Табличне задання булевих функцій

1.2.1. Булеві функції однієї змінної

Означення. Константа з областю значень **{0, 1}** називається *булевою константою* [2].

Таким чином, існує всього дві булеві константи: **α=1** і **α=0**. Із означення булевої функції та булевої константи випливає, що **кожна булева константа також є булевою функцією від 0 змінних**.

Означення. Об'єкти з двома можливими станами характеризуються *булевими змінними*, які здатні приймати лише два різних значення. Для позначення цих двох значень зазвичай використовують цифри **0** і **1**.

Апарат математичної логіки широко використовується для формалізації природної мови. Власне, зародження математичної логіки почалося зі спроб записати математично висловлювання на природній людській мові. В зв'язку з цим, всі об'єкти математичної логіки мають аналоги в мові. Тому крім вказаних вище цифр, для позначення значень булевих змінних або булевих функцій іноді використовують букви **«X»** - хибно, і **«I»** - істинно (відповідно **«F»** і **«T»**).

Найважливіша особливість булевих функцій полягає в тому, що вони, як і їх аргументи, беруть свої значення з двохелементної множини **{0, 1}**, або **{X, I}**, тобто характеризуються одним з двох можливих станів. Функції невеликої кількості змінних можна задавати за допомогою таблиць, подібних до таблиць додавання та множення однорозрядних чисел. Для цього потрібно тільки вказати значення функції для кожної комбінації значень її аргументів.

Для булевих функцій однієї змінної $\boldsymbol{n} = \mathbf{1}$, $\boldsymbol{k} = \mathbf{2}$. Отже, кількість наборів, на яких задано ці функції, дорівнює $\boldsymbol{k^n} = \mathbf{2^1} = \mathbf{2}$. Загальна кількість булевих функцій однієї змінної дорівнює $\boldsymbol{k^{(k^n)}} = \mathbf{2^{(2^1)}} = \mathbf{2^2} = \mathbf{4}$.

Загальна таблиця відповідності для булевих функцій однієї змінної має наступний вигляд (праворуч вказані позначення і назви функцій):

№ набору	0	1	f	Назва
x	**0**	**1**		
f_0	0	0	**0**	Константа 0
f_1	0	1	x	Повторення (селектор)
f_2	1	0	$\overline{x}$	Заперечення (інверсія)
f_3	1	1	**1**	Константа 1

Означення. Функції $\boldsymbol{f_0}$ і $\boldsymbol{f_3}$ називаються ***функції-константи*** ($\boldsymbol{f_0}$ – *тотожний нуль*, а $\boldsymbol{f_3}$ – *тотожна одиниця*), тому що вони не змінюють своїх значень при зміні аргументу.

Означення. Функція $\boldsymbol{f_1}$ повторює значення змінної і тому тотожно дорівнює самій змінній. Її називають *змінна* $\boldsymbol{x}$, ***повторення*** або ***селектор***.

Означення. Єдиною нетривіальною функцією є $\boldsymbol{f_2}$, яка приймає значення, протилежні значенням аргументу. Вона називається ***інверсія x*** або ***заперечення x***.

Таким чином, заперечення обчислюється за формулою

$$\overline{x} = \begin{cases} \mathbf{0}, & x = \mathbf{1}; \\ \mathbf{1}, & x = \mathbf{0}, \end{cases}$$

і в природномовній інтерпретації читається як **«не *x*»**.

1.2.2. Булеві функції двох змінних

Для булевих функцій двох змінних $\boldsymbol{n} = \mathbf{2}$, $\boldsymbol{k} = \mathbf{2}$. Отже, кількість наборів, на яких задано ці функції, дорівнює $\boldsymbol{k^n} = \mathbf{2^2} = \mathbf{4}$. Загальна кількість булевих функцій двох змінних дорівнює $\boldsymbol{k^{(k^n)}} = \mathbf{2^{(2^2)}} = \mathbf{2^4} = \mathbf{16}$. Ці функції описано в таблиці 1 [4]. В ній вказані умовні позначення, назви і можливі варіанти читання (в дужках подано варіанти, які можливо зустріти в літературі).

Таблиця 1

Булеві функції двох змінних

№	Позначення	Назва	Читання
f_0	0	Константа 0 (тотожний нуль, завжди хибно)	Будь-яке 0
f_1	x_1x_2; $x_1 \wedge x_2$; ($x_1 \& x_2$; $x_1 \cap x_2$)	Кон'юнкція (збіг, логічний добуток, перетин, логічне «і»)	x_1 і x_2; і x_1 і x_2
f_2	$x_1 \leftarrow x_2$	Заперечення імплікації (збіг із забороною, антизбіг, заборона)	x_1, але не x_2
f_3	x_1	Повторення (твердження, домінація, селектор) першого аргументу	Як x_1
f_4	$x_2 \leftarrow x_1$ ($x_1 \not\subset x_2$)	Заперечення зворотної імплікації (зворотний антизбіг, заперечення реплікації, антиреплікація)	Не x_1, але x_2
f_5	x_2	Повторення (твердження, домінація, селектор) другого аргументу	Як x_2
f_6	$x_1 \oplus x_2$ ($x_1 \nabla x_2$; $x_1 + x_2$)	Сума за модулем 2 (нерівнозначність, антиеквівалентність)	x_1 не як x_2; або x_1, або x_2
f_7	$x_1 \vee x_2$ ($x_1 + x_2$; $x_1 \cup x_2$)	Диз'юнкція (розділ, логічна сума, складання, логічне «або»)	x_1 або x_2 (x_1 або хоча б x_2)
f_8	$x_1 \downarrow x_2$ ($x_1 \overline{\vee} x_2$; $x_1 \circ x_2$)	Стрілка Пірса (функція Вебба, заперечення диз'юнкції, логічне «не – або»)	Ані x_1, ані x_2 (не x_1 і не x_2)
f_9	$x_1 \sim x_2$ ($x_1 \equiv x_2$; $x_1 \leftrightarrow x_2$)	Еквіваленція (рівнозначність, еквівалентність, взаємозалежність)	x_1 як x_2 (x_1 якщо і тільки якщо x_2)
f_{10}	$\overline{x_2}$ (x'_2; $\sim x_2$; $\rceil x_2$)	Заперечення (інверсія) другого аргументу (доповнення до першої змінної)	Не x_2
f_{11}	$x_2 \rightarrow x_1$ ($x_1 \subset x_2$; $x_1 < x_2$)	Зворотна імплікація (зворотне розділення із забороною, зворотна селекція, репликація)	Якщо x_2, то x_1 (x_1 або не x_2)
f_{12}	$\overline{x_1}$ (x'_1; $\sim x_1$; $\rceil x_1$)	Заперечення (інверсія) першого аргументу (доповнення до другої змінної)	Не x_1
f_{13}	$x_1 \rightarrow x_2$ ($x_1 \supset x_2$; $x_1 > x_2$)	Імплікація (розділення із забороною, слідування, селекція)	Якщо x_1, то x_2 (не x_1 або x_2)
f_{14}	x_1 / x_2 ($x_1 \overline{\wedge} x_2$)	Штрих Шеффера (заперечення кон'юнкції, несумісність, логічне «не – і»)	Не x_1 або не x_2
f_{15}	1	Константа 1 (тотожна одиниця, завжди істинно)	Будь-яке 1

<u>Загальну таблицю відповідності</u> для описаних булевих функцій двох змінних подано в таблиці 2.

Таблиця 2

Загальна таблиця відповідності булевих функцій двох змінних

№ набору	x_1	x_2	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
2	1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
3	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
Позначення			0	$\wedge$	$\leftarrow$	x_1	$\not\subset$	x_2	$\oplus$	$\vee$	$\downarrow$	$\sim$	$\overline{x_2}$	$\subset$	$\overline{x_1}$	$\rightarrow$	/	1

Шість із наведених функцій не залежать від x_1 або x_2 (або від обох аргументів одночасно). Це дві константи (f_0=0 і f_{15}=1), повторення ($f_3=x_1$ і $f_5=x_2$) і заперечення ($f_{10}=\overline{x}_2$ і $f_{12}=\overline{x}_1$), що є функціями однієї змінної (x_1 або x_2). Із решти десяти функцій дві (f_4 і f_{11}) відрізняються від відповідних ним (f_2 і f_{13}) лише порядком розташування аргументів і тому не є самостійними. Тому з шістнадцяти булевих функцій двох змінних лише вісім є оригінальними ($f_1, f_2, f_6, f_7, f_8, f_9, f_{13}, f_{14}$). Дослідження булевих функцій однієї, двох і більшої кількості змінних свідчить про те, що будь-яка функція від меншої кількості змінних міститься серед функцій більшої кількості змінних.

<u>Означення</u>. Функції, що зводяться до залежності від меншої кількості змінних, називаються *виродженими*, а функції, що суттєво залежать від усіх змінних, є *невиродженими*.

Так, серед функцій однієї змінної є дві вироджені (функції-константи f_0 = 0 і f_{15} = 1, що є функціями від нуля змінних). Функції двох змінних містять ті ж самі константи і чотири функції однієї змінної і т. д. [1].

Означення. Змінна x_i називається *суттєвою змінною*, якщо булева функція суттєво залежить від цієї змінної, тобто

$$f(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n) \neq f(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_n).$$

Означення. Змінна x_i називається *несуттєвою* або *фіктивною змінною*, якщо булева функція не залежить від цієї змінної [7], тобто

$$f(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n) = f(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_n).$$

Наприклад, для функцій $f_3=x_1$ і $f_{12}=\overline{x}_1$ фіктивною є змінна x_2, а для функцій $f_5=x_2$ і $f_{10}=\overline{x}_2$ фіктивною є змінна x_1. Для функцій-констант $f_0=0$ і $f_{15}=1$ фіктивними є обидві змінні – і x_1, і x_2.

Поняття фіктивної змінної дозволяє розглядати дві довільні булеві функції як функції від однакової кількості змінних [2].

Означення. *Таблицею істинності* називається таблиця, в якій кожному набору значень змінних логічної функції поставлено у відповідність значення цієї функції.

Таблиці істинності є одним із можливих способів задання логічних функцій. За допомогою загальної таблиці відповідності, можна виписати індивідуальні таблиці істинності для усіх елементарних логічних функцій.

Іншим способом задання логічних функцій є їх порядковий номер. Як вже відзначалося, десятковий порядковий номер функції в загальній таблиці відповідності є аналогом його двійкового запису у вигляді послідовності значень цієї функції на всіх наборах значень змінних. Цей порядковий номер, як десятковий, так і двійковий, повністю визначає логічну функцію [8]. Таким чином, *задання логічної функції її порядковим номером можна також розглядати як табличне задання логічної функції*.

Приклад 1. Знайти порядковий номер логічної функції двох змінних, що на різних наборах значень цих змінних приймає наступні значення:

$x = 0,\ y = 0$: $f(x, y) = 1$;
$x = 0,\ y = 1$: $f(x, y) = 0$;
$x = 1,\ y = 0$: $f(x, y) = 1$;
$x = 1,\ y = 1$: $f(x, y) = 0$.

Розв'язання. Побудуємо для цієї функції таблицю істинності. Вона буде мати вигляд:

x	y	f
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	0

Таким чином, $f(x, y) = (1\ 0\ 1\ 0)$ – рядок значень цієї функції. Перетворимо двійкове число 1010_2 в десяткову систему числення. В силу того, що ця функція залежить від двох змінних, загальна кількість наборів їх значень дорівнюватиме $2^2 = 4$, тобто двійковий номер має 4 розряди. Самий лівий розряд є множником при 3-му ступені двійки (нумерація розрядів, як і наборів, починається з нуля). Таким чином, маємо:

$$1010_{(2)} = 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 8 + 0 + 2 + 0 = 10_{(10)}.$$

Отже, ця функція – це функція f_{10}. За таблицею 1 визначаємо, що це функція $f_{10}=\overline{y}$.

Відповідь. f = **(1010)** = $f_{10}=\overline{y}$.

Приклад 2. Побудувати таблицю істинності для логічної функції двох змінних f_6.

Розв'язання. Перетворимо десятковий порядковий номер цієї функції в двійкове число, що буде відповідати послідовності значень цієї функції на всіх наборах значень змінних. Для цього розкладемо це число на доданки, кожний з яких є ступенем двійки. В силу того, що це функція двох змінних, загальна кількість наборів дорівнюватиме $2^2 = 4$, тобто максимальний ступінь двійки серед цих доданків не повинен перевищувати третій ступінь.

$$6_{(10)} = 4 + 2 = 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 0110_{(2)}.$$

Отже, таблиця істинності для функції $f_6 = x \oplus y$ матиме вигляд:

x	y	$f_6 = x \oplus y$
0	0	**0**
0	1	**1**
1	0	**1**
1	1	**0**

Приклад 1 і приклад 2 наочно показують, що, маючи лише таблицю 1 із описом функцій, за їх порядковими номерами можна відновити таблицю 2, тобто загальну таблицю відповідності булевих функцій двох змінних.

1.3. Аналітичне задання булевих функцій

1.3.1. Логічні операції

Крім вже розглянутого заперечення, основними в двозначній логіці є також функції диз'юнкції $f_7=x_1 \vee x_2$ і кон'юнкції $f_2=x_1 \wedge x_2$.

Означення. ***Диз'юнкція*** – функція двох змінних, що приймає значення **0** тоді й лише тоді, коли обидва її аргументи дорівнюють **0**. В решті випадків вона приймає значення **1**.

Таким чином, диз'юнкція обчислюється за формулою

$$x_1 \vee x_2 = \begin{cases} 0, & x_1 = x_2 = 0; \\ 1, & x_1 \neq x_2 \text{ або } x_1 = x_2 = 1 \end{cases}$$

і в природномовній інтерпретації читається як «x_1 **або** x_2». Як випливає із означення диз'юнкції та її таблиці істинності, поява хоча б однієї одиниці серед диз'юнктів обертає в одиницю всю диз'юнкцію незалежно від значення решти диз'юнктів.

Означення. ***Кон'юнкція*** – функція двох змінних, що приймає значення **1** тоді й лише тоді, коли обидва її аргументи дорівнюють **1**. В решті випадків вона приймає значення **0**.

Таким чином, кон'юнкція обчислюється за формулою

$$x_1 \wedge x_2 = \begin{cases} 0, & x_1 \neq x_2 \text{ або } x_1 = x_2 = 0; \\ 1, & x_1 = x_2 = 1 \end{cases}$$

і в природномовній інтерпретації читається як «x_1 **і** x_2». Як випливає із означення кон'юнкції та її таблиці істинності, поява хоча б одного нуля серед кон'юнктів обертає в нуль всю кон'юнкцію незалежно від значення решти кон'юнктів.

Означення. Булеві функції можна розглядати як *логічні операції* над величинами, що приймають лише два значення – **0** і **1**.

Заперечення – це одномісна (унарна) операція, а диз'юнкція та кон'юнкція – двомісні (бінарні) операції.

Означення. Операції заперечення, кон'юнкції та диз'юнкції називаються *булевими операціями*.

1.3.2. Логічні формули

Означення *логічної формули* складається із двох частин і має рекурсивний характер в тому розумінні, що перша його частина визначає *атомарні формули*, а друга і третя дозволяють із будь-яких формул утворювати нові формули [3]:

1. *Логічні змінні і константи є найпростішими (атомарними) формулами.*
2. *Якщо з деякою формулою виконати операцію заперечення і результат взяти в дужки, то отриманий вираз також буде формулою.*
3. *Якщо* $\boldsymbol{x_1}$ *і* $\boldsymbol{x_2}$ *– формули, то якщо виконати з ними описані в таблиці 1 бінарні операції і результат взяти в дужки, то отримані вирази – також формули.*

Більш складні формули отримуються заміщенням змінних, що до них входять, іншими логічними формулами, що зазвичай беруться у дужки.

Наприклад: $\boldsymbol{x_1} = \overline{\boldsymbol{a}}$, $\boldsymbol{x_2} = \boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c}$. Тоді маємо: $\boldsymbol{x_1} \vee \boldsymbol{x_2} = (\,\overline{\boldsymbol{a}}\,) \vee (\boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c})$.

Логічна формула є третім способом задання логічної функції.

В записі логічних формул припускаються наступні ***спрощення***. Якщо змінні або формули пов'язані лише за участю операції диз'юнкції або операції кон'юнкції, то їх можна виконувати в будь-якому порядку, а формули записувати без дужок.

Наприклад:

$$((x_1 \vee x_2) \vee (x_3 \vee x_4)) \vee x_5 = x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4 \vee x_5,$$

а також

$$(x_1 \wedge x_2) \wedge (\,x_3 \wedge (x_4 \wedge x_5)) = x_1 \wedge x_2 \wedge x_3 \wedge x_4 \wedge x_5.$$

Якщо вважати, що операція кон'юнкції повинна передувати операції диз'юнкції (тобто операція кон'юнкції старша за операцію диз'юнкції), то можна не писати дужки, що обмежують формули зі знаком кон'юнкції. За наявності дужок в першу чергу повинні виконуватися операції всередині дужок, незалежно від їх старшинства. Зазвичай також не пишуть дужки, що обмежують формули із знаком заперечення. Ще одне спрощення пов'язане із символікою. Знак кон'юнкції в формулах можна не писати або писати замість нього символ «·», тобто замість $\boldsymbol{x} \wedge \boldsymbol{y}$ писати $\boldsymbol{xy}$ або $\boldsymbol{x \cdot y}$.

Означення. Операцію кон'юнкції часто називають *логічним добутком*, а операцію диз'юнкції – *логічним додаванням*. З урахуванням наведених умов запис формул суттєво спрощується.

Наприклад: формулі $(x \wedge (y \wedge \overline{z})) \vee ((\overline{x \vee y}) \wedge z)$ відповідає запис $x\,y\,\overline{z} \vee \overline{x \vee y}\,z$.

Означення. Дві функції (як і формули, що їх визначають) вважаються *рівносильними (рівними)*, якщо за будь-яких значень аргументів ці функції (формули) приймають однакові значення. Рівносильні функції (формули) поєднуються знаком рівності.

Рівність функцій (формул) перевіряється за таблицями істинності основних операцій, причому необхідно порівняти їх значення для усіх комбінацій значень змінних.

1.3.3. Основні закони алгебри логіки

Означення. *Булевою алгеброю* називається алгебраїчна система, яку створено на ґрунті двохелементної множини **{0, 1}** і операцій диз'юнкції, кон'юнкції та заперечення.

Означення. *Алгеброю логіки* називається булева алгебра, в якій множину її операцій доповнено бінарними операціями імплікації та еквіваленції [8].

Означення. ***Імплікація*** – функція двох змінних, що дорівнює **0** в тому і лише в тому випадку, коли перша змінна дорівнює **1**, а друга змінна дорівнює **0**. В усіх решті випадках імплікація дорівнює **1**.

Таким чином, імплікація обчислюється за формулою

$$x_1 \to x_2 = \begin{cases} \mathbf{0}, & x_1 = \mathbf{1} \text{ і } x_2 = \mathbf{0}; \\ \mathbf{1}, & x_1 = \mathbf{0} \text{ або } x_1 = x_2 \end{cases}$$

і в природномовній інтерпретації читається як **«якщо x_1, то x_2»**.

Означення. Для функції імплікації $f = x_1 \to x_2$ вираз x_1 називається *посилкою* (*антецедентом*), а вираз x_2 – наслідком (*консеквентом*) [1].

Як випливає із означення операції імплікації, вона може дорівнювати нулю лише в тому випадку, коли посилка є істинною, тобто дорівнює одиниці. В цьому випадку все залежить від значення наслідку. У випадку ж, коли посилка є хибною, тобто дорівнює нулю, імплікація дорівнює одиниці незалежно від значення наслідку.

Означення. ***Еквіваленція*** – функція двох змінних, що дорівнює **1**, коли обидві її змінні одночасно дорівнюють **0** або одночасно дорівнюють **1**. В решті випадків еквіваленція дорівнює **0**.

Таким чином, еквіваленція обчислюється за формулою

$$x_1 \sim x_2 = \begin{cases} \mathbf{0}, & x_1 \neq x_2, \\ \mathbf{1}, & x_1 = x_2 \end{cases}$$

і в природномовній інтерпретації читається як **«x_1 якщо і тільки якщо x_2»**. Як випливає із означення операції еквіваленції, вона дорівнює одиниці лише в тому випадку, коли її змінні приймають однакові значення. Якщо її змінні приймають різні значення, еквіваленція дорівнює нулю. Саме тому її також називають *рівнозначністю*.

Основні **<u>операції алгебри логіки пов'язані наступними співвідношеннями</u>**:

властивість імплікації

$$x \to y = \overline{x} \vee y \ ;$$

властивості еквіваленції

$$x \sim y = x\,y \vee \overline{x}\,\overline{y}\,,$$
$$x \sim y = (x \vee \overline{y})\,(\overline{x} \vee y)\,,$$
$$x \sim y = (x \to y)\,(y \to x).$$

Для доведення цих властивостей необхідно скористатися таблицями істинності булевих операцій заперечення, диз'юнкції та кон'юнкції, а також таблицями істинності операцій імплікації та еквіваленції. Ці таблиці істинності можна отримати із загальної таблиці відповідності логічних функцій двох змінних (із таблиці 2).

Заперечення

x	$\overline{x}$
0	1
1	0

Диз'юнкція

x_1	x_2	$x_1 \vee x_2$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Кон'юнкція

x_1	x_2	$x_1 \wedge x_2$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

x_1	x_2	$x_1 \to x_2$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Імплікація

x_1	x_2	$x_1 \sim x_2$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Еквіваленція

Доведемо ***властивість імплікації*** $x \to y = \overline{x} \vee y$. Для обчислення значень формули в правій частині рівності знадобляться таблиці істинності для заперечення та диз'юнкції. Обчислюємо значення цієї формули на всіх наборах значень змінних:

$x = 0,\ y = 0$: $\overline{x} \vee y = \overline{0} \vee 0 = 1 \vee 0 = 1$;

$x = 0,\ y = 1$: $\overline{x} \vee y = \overline{0} \vee 1 = 1 \vee 1 = 1$;

$x = 1,\ y = 0$: $\overline{x} \vee y = \overline{1} \vee 0 = 0 \vee 0 = 0$;

$x = 1,\ y = 1$: $\overline{x} \vee y = \overline{1} \vee 1 = 0 \vee 1 = 1$.

Таким чином, для правої частини цієї рівності маємо наступну таблицю істинності:

x	y	$\overline{x} \vee y$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Є очевидним, що вона збігається з таблицею істинності для імплікації. Цей збіг і **доводить властивість імплікації**.

Доведемо тепер ***властивості еквіваленції***. Для обчислення значень формул в правих частинах цих рівностей нам знадобляться таблиці істинності для всіх булевих операцій (диз'юнкції, кон'юнкції та заперечення). Значення цих виразів також необхідно обчислити для всіх наборів значень змінних. Для властивості $x \sim y = x\,y \vee \overline{x}\,\overline{y}$ ці значення будуть наступними:

$x = 0,\ y = 0$: $x\,y \vee \overline{x}\,\overline{y} = (0 \wedge 0) \vee (\overline{0} \wedge \overline{0}) = 0 \vee (1 \wedge 1) = 0 \vee 1 = 1$;

$x = 0,\ y = 1$: $x\,y \vee \overline{x}\,\overline{y} = (0 \wedge 1) \vee (\overline{0} \wedge \overline{1}) = 0 \vee (1 \wedge 0) = 0 \vee 0 = 0$;

$x = 1,\ y = 0$: $x\,y \vee \overline{x}\,\overline{y} = (1 \wedge 0) \vee (\overline{1} \wedge \overline{0}) = 0 \vee (0 \wedge 1) = 0 \vee 0 = 0$;

$x = 1,\ y = 1$: $x\,y \vee \overline{x}\,\overline{y} = (1 \wedge 1) \vee (\overline{1} \wedge \overline{1}) = 1 \vee (0 \wedge 0) = 1 \vee 0 = 1$.

Для властивості $x \sim y = (x \vee \overline{y})\,(\overline{x} \vee y)$ ці значення будуть наступними:

$x = 0,\ y = 0$: $(x \vee \overline{y})\,(\overline{x} \vee y) = \left(0 \vee \overline{0}\right)\,(\overline{0} \vee 0) = (0 \vee 1) \wedge (1 \vee 0) = 1 \wedge 1 = 1$;

$x = 0,\ y = 1$: $(x \vee \overline{y})\,(\overline{x} \vee y) = \left(0 \vee \overline{1}\right)\,(\overline{0} \vee 1) = (0 \vee 0) \wedge (1 \vee 1) = 0 \wedge 1 = 0$;

$x = 1,\ y = 0$: $(x \vee \overline{y})\,(\overline{x} \vee y) = \left(1 \vee \overline{0}\right)\left(\overline{1} \vee 0\right) = (1 \vee 1) \wedge (0 \vee 0) = 1 \wedge 0 = 0;$

$x = 1,\ y = 1$: $(x \vee \overline{y})\,(\overline{x} \vee y) = \left(1 \vee \overline{1}\right)\left(\overline{1} \vee 1\right) = (1 \vee 0) \wedge (0 \vee 1) = 1 \wedge 1 = 1.$

Для доведення властивості $x \sim y = (x \to y)\,(y \to x)$ необхідно обчислити значення правої частини цього виразу на всіх наборах значень змінних, використовуючи таблиці істинності для імплікації та кон'юнкції:

$x = 0,\ y = 0$: $(x \to y)\,(y \to x) = (0 \to 0)\,(0 \to 0) = 1 \wedge 1 = 1;$

$x = 0,\ y = 1$: $(x \to y)\,(y \to x) = (0 \to 1)\,(1 \to 0) = 1 \wedge 0 = 0;$

$x = 1,\ y = 0$: $(x \to y)\,(y \to x) = (1 \to 0)\,(0 \to 1) = 0 \wedge 1 = 0;$

$x = 1,\ y = 1$: $(x \to y)\,(y \to x) = (1 \to 1)\,(1 \to 1) = 1 \wedge 1 = 1.$

Таким чином, таблиці істинності для правих частин рівностей, що виражають властивості еквіваленції, мають вигляд:

x	y	$x\,y \vee \overline{x}\,\overline{y}$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

x	y	$(x \vee \overline{y})\,(\overline{x} \vee y)$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

x	y	$(x \to y)\,(y \to x)$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Є очевидним, що всі вони збігаються з таблицею істинності для операції еквіваленції. Цей збіг і **доводить властивості еквіваленції**.

<u>Основні закони булевої алгебри</u>:

комутативність:

$$x \vee y = y \vee x, \quad x\,y = y\,x; \tag{1}$$

асоціативність:

$$x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z, \quad x\,(y\,z) = (x\,y)\,z; \tag{2}$$

дистрибутивність:

$$x\,(y \vee z) = x\,y \vee x\,z, \tag{3.1}$$

$$x \vee y\,z = (x \vee y)\,(x \vee z); \tag{3.2}$$

властивості констант:

$$x \vee 0 = x, \quad x \wedge 1 = x, \quad x \vee 1 = 1, \quad x \wedge 0 = 0; \tag{4}$$

закон виключення третього:

$$x \vee \overline{x} = 1; \tag{5}$$

закон протиріччя:

$$x \wedge \overline{x} = 0; \tag{6}$$

ідемпотентність:

$$x \vee x = x, \quad x\,x = x; \tag{7}$$

закони нуля та одиниці:

$$\overline{1} = 0,\ \overline{0} = 1; \tag{8}$$

закон подвійного заперечення:

$$\overline{\overline{x}} = x; \tag{9}$$

закони де Моргана:

$$\overline{x \vee y} = \overline{x} \wedge \overline{y}, \tag{10.1}$$

$$\overline{x \wedge y} = \overline{x} \vee \overline{y}; \tag{10.2}$$

елімінація (поглинання):

$$x \vee x\,y = x, \tag{11.1}$$

$$x\,(x \vee y) = x. \tag{11.2}$$

Закон *ідемпотентності є основним законом булевої алгебри*. Він не має аналогів в класичній математиці. Справедливість законів (1) – (10) безпосередньо випливає із означень операцій заперечення, диз'юнкції та кон'юнкції і легко перевіряються за таблицями істинності булевих операцій. Доведемо, наприклад, ***закони де Моргана***. Для цього необхідно обчислити значення лівих та правих частин рівностей (10.1) і (10.2) на всіх можливих наборах значень змінних. Для ***1-го закону де Моргана*** маємо:

ліва частина рівності:

$$x = 0,\ y = 0:\ \overline{x \vee y} = \overline{0 \vee 0} = \overline{0} = 1;$$

$$x = 0,\ y = 1:\ \overline{x \vee y} = \overline{0 \vee 1} = \overline{1} = 0;$$

$$x = 1,\ y = 0:\ \overline{x \vee y} = \overline{1 \vee 0} = \overline{1} = 0;$$

$$x = 1,\ y = 1:\ \overline{x \vee y} = \overline{1 \vee 1} = \overline{1} = 0,$$

права частина рівності:

$$x = 0,\ y = 0:\ \overline{x} \wedge \overline{y} = \overline{0} \wedge \overline{0} = 1 \wedge 1 = 1;$$

$$x = 0,\ y = 1:\ \overline{x} \wedge \overline{y} = \overline{0} \wedge \overline{1} = 1 \wedge 0 = 0;$$

$$x = 1,\ y = 0:\ \overline{x} \wedge \overline{y} = \overline{1} \wedge \overline{0} = 0 \wedge 1 = 0;$$

$$x = 1,\ y = 1:\ \overline{x} \wedge \overline{y} = \overline{1} \wedge \overline{1} = 0 \wedge 0 = 0.$$

Для ***2-го закону де Моргана*** маємо:

ліва частина рівності:

$$x = 0,\ y = 0:\ \overline{x \wedge y} = \overline{0 \wedge 0} = \overline{0} = 1;$$

$$x = 0,\ y = 1:\ \overline{x \wedge y} = \overline{0 \wedge 1} = \overline{0} = 1;$$

$$x = 1,\ y = 0:\ \overline{x \wedge y} = \overline{1 \wedge 0} = \overline{0} = 1;$$

$$x = 1,\ y = 1:\ \overline{x \wedge y} = \overline{1 \wedge 1} = \overline{1} = 0,$$

права частина рівності:

$$x = 0,\ y = 0:\ \overline{x} \vee \overline{y} = \overline{0} \vee \overline{0} = 1 \vee 1 = 1;$$

$$x = 0,\ y = 1:\ \overline{x} \vee \overline{y} = \overline{0} \vee \overline{1} = 1 \vee 0 = 1;$$

$$x = 1,\ y = 0:\ \ \overline{x} \vee \overline{y} = \overline{1} \vee \overline{0} = 0 \vee 1 = 1;$$

$$x = 1,\ y = 1:\ \ \overline{x} \vee \overline{y} = \overline{1} \vee \overline{1} = 0 \vee 0 = 0.$$

Таким чином, для 1-го і 2-го законів де Моргана маємо наступні таблиці істинності для лівих та правих частин їх формул:

1-й закон де Моргана

x	y	$\overline{x \vee y}$	$\overline{x} \wedge \overline{y}$
0	0	1	1
0	1	0	0
1	0	0	0
1	1	0	0

2-й закон де Моргана

x	y	$\overline{x \wedge y}$	$\overline{x} \vee \overline{y}$
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	1	1
1	1	0	0

Із наведених таблиць істинності видно, що значення лівих частин співвідношень законів де Моргана збігаються зі значеннями їх правих частин для всіх наборів значень змінних. Ці збіги і **доводять закони де Моргана**.

Закони ***елімінації*** **(11)** можна довести аналітично з використанням законів (1) – (10) вже без звернення до таблиць істинності. Для ***1-го закону елімінації*** маємо:

$$x \vee x\,y = x \cdot 1 \vee x\,y = \text{(за 1-м законом дистрибутивності)} = x\,(1 \vee y) = x \cdot 1 = x.$$

Для ***2-го закону елімінації*** маємо:

$$x\,(x \vee y) = \text{(за 1-м законом дистрибутивності)} = x\,x \vee x\,y =$$

$$= \text{(за законом ідемпотентності кон'юнкції)} = x \vee x\,y =$$

$$= \text{(за 1-м законом елімінації)} = x.$$

Наведені тотожні перетворення **доводять закони елімінації**.

За допомогою тотожних перетворень з використанням законів (1) – (11) можна отримувати й інші властивості булевої алгебри.

Приклад 3. Довести за допомогою тотожних перетворень наступні тотожності, що також можуть розглядатися як *властивості булевої алгебри* і, відповідно, *алгебри логіки*, і які називаються [6]

закони викреслювання:

$$x \vee \overline{x}\,y = x \vee y; \tag{12}$$

$$\overline{x} \vee x\,y = \overline{x} \vee y. \tag{13}$$

Розв'язання. Доведемо ***закон викреслювання*** **(12)**:

$$x \vee \overline{x}\,y = \text{(за 2-м законом дистрибутивності)} = (x \vee \overline{x})\,(x \vee y) =$$

$$= \text{(за законом виключення третього)} = 1 \cdot (x \vee y) = x \vee y.$$

Властивість (12) доведено.

Доведемо тепер ***закон викреслювання*** **(13)**:

$$\overline{x} \vee x\,y = \text{(за 2-м законом дистрибутивності)} = (\overline{x} \vee x)\,(\overline{x} \vee y) =$$

$$= \text{(за законом виключення третього)} = 1 \cdot (\overline{x} \vee y) = \overline{x} \vee y.$$

Властивість (13) доведено.

Використовуючи рівності (1) – (13), можна спрощувати складні логічні формули. Якщо поставлена така задача, то мається на увазі, що в формулі необхідно позбутися всіх небулевих операцій (тобто в підсумковому виразі повинні бути присутніми лише операції диз'юнкції, кон'юнкції та заперечення), розкрити всі дужки та перетворити формули таким чином, щоб операції заперечення відносилися лише безпосередньо к змінним.

<u>Приклад 4</u>. Спростити вирази:

$$f = (\overline{x \vee \overline{y}\, z} \vee \overline{x}\, y) \to \overline{z}.$$

$$f = ((x\, \overline{z} \vee (y \to z)) \to x\, y\, z)\ (x\, y\, z \to (x\, \overline{z} \vee (y \to z))).$$

<u>Розв'язання</u>. Спростимо перший вираз, використовуючи рівності (1) – (13), а також властивість імплікації.

$$f = (\overline{x \vee \overline{y}\, z} \vee \overline{x}\, y) \to \overline{z} = (\overline{x}\, \overline{\overline{y}\, z} \vee \overline{x}\, y) \to \overline{z} =$$

$$= (\overline{x}\, (\overline{\overline{y}} \vee \overline{z}) \vee \overline{x}\, y) \to \overline{z} = (\overline{x}\, (y \vee \overline{z}) \vee \overline{x}\, y) \to \overline{z} =$$

$$= (\overline{x}\, y \vee \overline{x}\, \overline{z} \vee \overline{x}\, y) \to \overline{z} = (\overline{x}\, y \vee \overline{x}\, \overline{z}) \to \overline{z} =$$

$$= \overline{\overline{x}\, y \vee \overline{x}\, \overline{z}} \vee \overline{z} = \overline{\overline{x}\, y}\ \ \overline{\overline{x}\, \overline{z}} \vee \overline{z} = (\overline{\overline{x}} \vee \overline{y})\ (\overline{\overline{x}} \vee \overline{\overline{z}}) \vee \overline{z} =$$

$$= (x \vee \overline{y})\ (x \vee z) \vee \overline{z} = x\, x \vee x\, z \vee x\, \overline{y} \vee \overline{y}\, z \vee \overline{z} =$$

$$= x \vee x\, z \vee x\, \overline{y} \vee \overline{y}\, z \vee \overline{z} = x\, (1 \vee z \vee \overline{y}) \vee \overline{y}\, z \vee \overline{z} =$$

$$= (x \wedge 1) \vee \overline{y}\, z \vee \overline{z} = x \vee \overline{y}\, z \vee \overline{z} = x \vee \overline{y} \vee \overline{z}.$$

<u>Відповідь</u>. $f = (\overline{x \vee \overline{y}\, z} \vee \overline{x}\, y) \to \overline{z} = x \vee \overline{y} \vee \overline{z}$.

Спростимо тепер другий вираз, використовуючи рівності (1) – (13), а також властивості імплікації та еквіваленції.

$$f = ((x\, \overline{z} \vee (y \to z)) \to x\, y\, z)\ (x\, y\, z \to (x\, \overline{z} \vee (y \to z))) =$$

$$= (x\, \overline{z} \vee (y \to z)) \sim x\, y\, z =$$

$$= x\, y\, z\, (x\, \overline{z} \vee (y \to z)) \vee \overline{x\, y\, z}\ \overline{x\, \overline{z} \vee (y \to z)} =$$

$$= x\, y\, z\, (x\, \overline{z} \vee \overline{y} \vee z) \vee (\overline{x} \vee \overline{y} \vee \overline{z})\ \overline{x\, \overline{z}}\ \ \overline{(y \to z)} =$$

$$= x\, y\, z\, x\, \overline{z} \vee x\, y\, z\, \overline{y} \vee x\, y\, z\, z \vee (\overline{x} \vee \overline{y} \vee \overline{z})\ (\overline{x} \vee \overline{\overline{z}})\ \ \overline{\overline{y} \vee z} =$$

$$= 0 \vee 0 \vee x\, y\, z \vee (\overline{x} \vee \overline{y} \vee \overline{z})\ (\overline{x} \vee z)\ \overline{\overline{y}}\ \overline{z} =$$

$$= x\, y\, z \vee y\, \overline{z}\ (\overline{x} \vee \overline{y} \vee \overline{z})\ (\overline{x} \vee z) =$$

$$= x\, y\, z \vee (\overline{x}\, y\, \overline{z} \vee \overline{y}\, y\, \overline{z} \vee y\, \overline{z}\, \overline{z})\ (\overline{x} \vee z) =$$

$$= x\, y\, z \vee (\overline{x}\, y\, \overline{z} \vee 0 \vee y\, \overline{z})\ (\overline{x} \vee z) =$$

$$= x\, y\, z \vee (\overline{x}\, y\, \overline{z} \vee y\, \overline{z})\ (\overline{x} \vee z) =$$

$$= x\, y\, z \vee y\, \overline{z}\ (\overline{x} \vee 1)\ (\overline{x} \vee z) = x\, y\, z \vee y\, \overline{z}\ (\overline{x} \vee z) =$$

$$= x\, y\, z \vee \overline{x}\, y\, \overline{z} \vee y\, \overline{z}\, z = x\, y\, z \vee \overline{x}\, y\, \overline{z} \vee 0 = x\, y\, z \vee \overline{x}\, y\, \overline{z}.$$

<u>Відповідь</u>. $f = ((x\, \overline{z} \vee (y \to z)) \to x\, y\, z)\ (x\, y\, z \to (x\, \overline{z} \vee (y \to z))) = x\, y\, z \vee \overline{x}\, y\, \overline{z}.$

2. БУЛЕВІ ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

2.1. Елементарні булеві функції

З шістнадцяти логічних функцій, розглянутих в таблиці 1, до *елементарних булевих функцій* належать дванадцять функцій, що відіграють важливу роль в алгебрі логіки, а також в практичному застосуванні при побудові різноманітних електронних приладів та систем [8]. Це вже розглянуті вище логічні функції, що є функціями від нуля змінних $\boldsymbol{f_0(x_1,x_2)=0}$ і $\boldsymbol{f_{15}(x_1,x_2)=1}$, тобто ***константа* 0** і ***константа* 1**, функції однієї змінної $\boldsymbol{f_3(x_1,x_2)= x_1}$, тобто ***повторення*** першого аргументу або ***селектор***, і $\boldsymbol{f_{12}(x_1,x_2)= \overline{x}}$, тобто ***заперечення*** першого аргументу або ***інверсія***, і функції двох змінних $\boldsymbol{f_1(x_1,x_2)= x_1\, x_2}$, тобто ***кон'юнкція***, $\boldsymbol{f_7(x_1,x_2) = x_1 \vee x_2}$, тобто ***диз'юнкція***, $\boldsymbol{f_{13}(x_1,x_2) = x_1 \rightarrow x_2}$, тобто ***імплікація*** і $\boldsymbol{f_9(x_1,x_2)= x_1 \sim x_2}$, тобто ***еквіваленція***. Крім них, до елементарних логічних функцій належать також наступні функції.

Означення. ***Заперечення імплікації*** – функція двох змінних $\boldsymbol{f_2(x_1,x_2)= x_1 \leftarrow x_2}$, що дорівнює **1** в тому і лише в тому випадку, коли вираз $\boldsymbol{x_1}$ дорівнює **1**, а вираз $\boldsymbol{x_2}$ дорівнює **0**. У всіх решті випадках заперечення імплікації дорівнює **0**.

Таким чином, заперечення імплікації обчислюється за формулою

$$\boldsymbol{x_1 \rightarrow x_2 = \begin{cases} 1, & x_1 = 1 \text{ і } x_2 = 0; \\ 0, & x_1 = 0 \text{ або } x_1 = x_2. \end{cases}}$$

Операції імплікації та заперечення імплікації не є комутативними. Тому, як випливає із означення заперечення імплікації, ця операція може дорівнювати одиниці лише в тому випадку, коли посилка дорівнює одиниці. Значення функції при цьому залежить від значення наслідку. У випадку, коли посилка дорівнює нулю, функція також дорівнює нулю незалежно від значення наслідку.

Означення. ***Сума за модулем 2*** – функція двох змінних $\boldsymbol{f_6(x_1,x_2) = x_1 \oplus x_2}$, що дорівнює **0**, коли обидві її змінні одночасно дорівнюють **0** або одночасно дорівнюють **1**. В решті випадках сума за модулем 2 дорівнює **1**.

Таким чином, сума за модулем 2 обчислюється за формулою

$$\boldsymbol{x_1 \oplus x_2 = \begin{cases} 0, & x_1 = x_2, \\ 1, & x_1 \neq x_2. \end{cases}}$$

Як випливає із означення суми за модулем 2, вона дорівнює одиниці лише в тому випадку, коли її змінні приймають різні значення. Якщо змінні приймають однакові значення, тобто дорівнюють одна одній, то сума за модулем 2 дорівнює нулю. Таблицю істинності для цієї елементарної логічної функції було розглянуто в прикладі 2.

Означення. ***Стрілка Пірса*** – функція двох змінних $\boldsymbol{f_8(x_1,x_2)= x_1 \downarrow x_2}$, що дорівнює **1** лише в тому випадку, коли обидві її змінні дорівнюють **0**. В усіх решті випадках стрілка Пірса дорівнює **1**.

Таким чином, стрілка Пірса обчислюється за формулою

$$\boldsymbol{x_1 \downarrow x_2 = \begin{cases} 1, & x_1 = x_2 = 0; \\ 0, & x_1 \neq x_2 \text{ або } x_1 = x_2 = 1. \end{cases}}$$

Як випливає із означення стрілки Пірса, поява хоча б однієї одиниці серед значень її змінних обертає в нуль всю функцію незалежно від значення решти змінних.

<u>Означення</u>. ***<u>Штрих Шеффера</u>*** – функція двох змінних $f_{14}(x_1, x_2) = x_1 / x_2$, що приймає значення **0** тоді й лише тоді, коли обидва її аргументи мають значення **1**. В решті випадках вона приймає значення **1**.

Таким чином, штрих Шеффера обчислюється за формулою

$$x_1 / x_2 = \begin{cases} 1, & x_1 \neq x_2 \text{ або } x_1 = x_2 = 0; \\ 0, & x_1 = x_2 = 1. \end{cases}$$

Як випливає із означення штриха Шеффера, поява хоча б одного нуля серед значень змінних цієї функції обертає в одиницю всю функцію незалежно від значення решти змінних.

Як вже зазначалося, решта булевих функції не є самостійними, тобто повторюють наведений перелік елементарних функцій. <u>Наприклад</u>, функція $f_{11}(x_1, x_2) = x_2 \to x_1$ (реплікація) відрізняється від розглянутої $f_{13}(x_1, x_2) = x_1 \to x_2$ (імплікації) лише порядком змінних. Але на подальшу математичну обробку цієї функції за властивістю імплікації цей порядок н впливає. Алгоритм залишається незмінним: диз'юнкція між наслідком і запереченням посилки. Аналогічна ситуація складається і з функцією $f_4(x_1, x_2) = x_2 \leftarrow x_1$ (заперечення реплікації) та розглянутою функцією $f_2(x_1, x_2) = x_1 \leftarrow x_2$ (заперечення імплікації). Для функцій однієї змінної (селектора та заперечення) алгоритм роботи з будь-якою змінною також абсолютно однаковий.

2.2. Залежність між булевими функціями

Із таблиці 2 видно, що між булевими функціями існує залежність вигляду

$$f_i = \overline{f_{15-i}}, \quad (i = \overline{0, 15}),$$

тобто функції, розташовані на однаковій відстані від країв таблиці 1 або таблиці 2, є запереченнями одна одної. На ґрунті цих залежностей, використовуючи опис функцій із таблиці 1, можна записати співвідношення *<u>для констант</u>*, що є *законами нуля та одиниці* (8): $0 = \overline{1}$, $1 = \overline{0}$; співвідношення *<u>для функції однієї змінної</u>*, що є *законом подвійного заперечення* (9): $x = \overline{\overline{x}}$; а також співвідношення *<u>для функцій двох змінних</u>*:

$$\begin{aligned} x\,y &= \overline{x / y}, \\ x \leftarrow y &= \overline{x \to y}, \\ x \oplus y &= \overline{x \sim y}, \\ x \downarrow y &= \overline{x \vee y}, \end{aligned} \qquad (14) \qquad \text{або} \qquad \begin{aligned} x / y &= \overline{x\ y}, \\ x \to y &= \overline{x \leftarrow y}, \\ x \sim y &= \overline{x \oplus y}, \\ x \vee y &= \overline{x \downarrow y}. \end{aligned} \qquad (15)$$

Із цих залежностей випливає, що будь-яка функція двох змінних (в тому числі константи) виражається в аналітичній формі через сукупність шести функцій, що містить заперечення $\overline{x}$ і будь-яку із кожної пари функцій: $\{f_0, f_{15}\}$, $\{f_1, f_{14}\}$, $\{f_2, f_{13}\}$, $\{f_6, f_9\}$, $\{f_7, f_8\}$ [1]. <u>Наприклад</u>, такою сукупністю може служити сукупність функцій алгебри логіки: константа **0**, заперечення $\overline{x}$, кон'юнкція $x\,y$, диз'юнкція $x \vee y$, еквіваленція $x \sim y$, імплікація $x \to y$. Дійсно, константа **1** виражається через заперечення і константу **0**, реплікація повторює імплікацію, а заперечення реплікації – заперечення імплікації (яке, у свою чергу, виражається через операції імплікації та заперечення), сума за модулем 2 виражається через операцію еквіваленції та заперечення, стрілка Пірса – через диз'юнкцію та заперечення, а штрих Шеффера – через кон'юнкцію та заперечення.

Однак, обрана в такий спосіб сукупність шести функцій є надлишковою, тому що імплікацію та еквіваленцію можна виразити через решту функцій цієї сукупності за допомогою розглянутих властивостей імплікації та еквіваленції. Таким чином, комплект елементарних функції скорочується до чотирьох: ***константа* 0** і булеві операції заперечення $\overline{x}$, кон'юнкції $x\,y$ і диз'юнкції $x \vee y$. Виразимо через цей комплект функцій всі решта булевих функцій двох змінних.

$f_0(x,y) = 0$;

$f_1(x,y) = x\,y$;

$f_2(x,y) = x \leftarrow y = \overline{x \to y} = \overline{\overline{x} \vee y} = \overline{\overline{x}}\,\overline{y} = x\,\overline{y}$;

$f_3(x,y) = x$;

$f_4(x,y) = y \leftarrow x = \overline{y \to x} = \overline{\overline{y} \vee x} = \overline{\overline{y}}\,\overline{x} = y\,\overline{x} = \overline{x}\,y$;

$f_5(x,y) = y$;

$f_6(x,y) = x \oplus y = \overline{x \sim y} = \overline{x\,y \vee \overline{x}\,\overline{y}} = \overline{x\,y}\;\;\overline{\overline{x}\,\overline{y}} = (\overline{x} \vee \overline{y})\,(\overline{\overline{x}} \vee \overline{\overline{y}}) = (\overline{x} \vee \overline{y})\,(x \vee y)$,

$= \overline{(\overline{x} \vee y)\,(x \vee \overline{y})} = \overline{\overline{x} \vee y} \vee \overline{x \vee \overline{y}} = \overline{\overline{x}}\,\overline{y} \vee \overline{x}\,\overline{\overline{y}} = x\,\overline{y} \vee \overline{x}\,y$;

$f_7(x,y) = x \vee y$;

$f_8(x,y) = x \downarrow y = \overline{x \vee y} = \overline{x}\,\overline{y}$;

$f_9(x,y) = x \sim y = x\,y \vee \overline{x}\,\overline{y}$,

$= (\overline{x} \vee y)\,(x \vee \overline{y})$;

$f_{10}(x,y) = \overline{y}$;

$f_{11}(x,y) = y \to x = \overline{y} \vee x = x \vee \overline{y}$;

$f_{12}(x,y) = \overline{x}$;

$f_{13}(x,y) = x \to y = \overline{x} \vee y$;

$f_{14}(x,y) = x / y = \overline{x\,y} = \overline{x} \vee \overline{y}$;

$f_{15}(x,y) = 1 = \overline{0}$.

Таким чином, ***всі елементарні булеві функції можуть бути виражені через булеві операції*** в наступний спосіб:

$$x \to y = \overline{x} \vee y\,; \tag{16}$$

$$x \leftarrow y = x\,\overline{y}\,. \tag{17}$$

$$x \sim y = \overline{x}\,\overline{y} \vee x\,y = (x \vee \overline{y})\,(\overline{x} \vee y)\,; \tag{18}$$

$$x \oplus y = x\,\overline{y} \vee \overline{x}\,y = (\overline{x} \vee \overline{y})\,(x \vee y)\,; \tag{19}$$

$$x \downarrow y = \overline{x}\,\overline{y}\,; \tag{20}$$

$$x / y = \overline{x} \vee \overline{y}\,; \tag{21}$$

Рівності (16) і (18) є вже розглянутими вище властивостями імплікації та еквіваленції. Їх було використано для виводу формул (17) і (19) відповідно. Для операції еквіваленції існує два варіанти її подання через булеві операції диз'юнкції, кон'юнкції та заперечення. Тому операція суми за модулем 2 також має два варіанти такого подання. Співвідношення (14) – (21) також можуть використовуватися при спрощенні запису формул.

<u>Приклад 5</u>. Спростити вираз

$$f = (\overline{x} \vee (y \oplus z)) \downarrow (y \to x\,\overline{z}).$$

<u>Розв'язання</u>.

$$f = (\overline{x} \vee (y \oplus z)) \downarrow (y \to x\,\overline{z}) = \overline{(\overline{x} \vee (y \oplus z)) \vee (y \to x\overline{z})} =$$

$$= \overline{\overline{x} \vee (y \oplus z)}\ \overline{y \to x\overline{z}} = \overline{\overline{x}\,(y \oplus z)}\ \overline{(\overline{y} \vee x\,\overline{z})} = x\,(y \sim z)\,\overline{\overline{y}}\ \overline{x\,\overline{z}} =$$

$$= x\,y\,(\overline{z}\,\overline{y} \vee z\,y)\,(\overline{x} \vee \overline{\overline{z}}) = (x\,y\,\overline{z}\,\overline{y} \vee x\,y\,z\,y)\,(\overline{x} \vee z) =$$

$$= (x\,y\,\overline{z}\,\overline{y} \vee x\,z\,y\,y)\,(\overline{x} \vee z) = (0 \vee x\,y\,z)\,(\overline{x} \vee z) = x\,y\,z\,(\overline{x} \vee z) =$$

$$= x\,y\,z\,\overline{x} \vee x\,y\,z\,z = x\,\overline{x}\,y\,z \vee x\,y\,z = 0 \vee x\,y\,z = x\,y\,z\,.$$

<u>Відповідь</u>. $f = (\overline{x} \vee (y \oplus z)) \downarrow (y \to x\,\overline{z}) = x\,y\,z\,.$

Комплект булевих операцій дуже зручний, часто використовується на практиці, але й він може бути скорочений. Так, із законів де Моргана і властивості подвійного заперечення випливають тотожності:

$$x \vee y = \overline{\overline{x}\,\overline{y}}, \qquad x\,y = \overline{\overline{x} \vee \overline{y}}\,.$$

Звідси випливає, що всі булеві функції можуть бути виражені через заперечення і диз'юнкцію або через заперечення і кон'юнкцію. Більш за те, ***для запису будь-якої булевої функції достатньо лише однієї з двох елементарних функцій – стрілки Пірса або штриха Шеффера***. Це випливає із співвідношень:

$$\overline{x} = x \downarrow x = x / x, \quad x\,y = (x / y) / (x / y), \quad x \vee y = (x \downarrow y) \downarrow (x \downarrow y).$$

<u>Доведення</u> цих співвідношень проводиться за допомогою таблиць істинності булевих операцій, а також стрілки Пірса та штриха Шеффера.

Заперечення

x	$\overline{x}$
0	1
1	0

Диз'юнкція

x_1	x_2	$x_1 \vee x_2$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Кон'юнкція

x_1	x_2	$x_1 \wedge x_2$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

x_1	x_2	$x_1 \downarrow x_2$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Стрілка Пірса

x_1	x_2	x_1 / x_2
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Штрих Шеффера

Знайдемо значення правих частин цих рівностей для всіх наборів значень змінних. Для виразів $x \downarrow x$ і x / x маємо:

$$x = 0: \quad x \downarrow x = 0 \downarrow 0 = 1, \quad x / x = 0 / 0 = 1;$$

$$x = 1: \quad x \downarrow x = 1 \downarrow 1 = 0, \quad x / x = 1 / 1 = 0.$$

Для виразу $(x / y) / (x / y)$ маємо:

$$x = 0,\ y = 0: \quad (x / y) / (x / y) = (0 / 0) / (0 / 0) = 1 / 1 = 0;$$

$x = 0,\ y = 1$: $(x / y) / (x / y) = (0 / 1) / (0 / 1) = 1 / 1 = 0;$

$x = 1,\ y = 0$: $(x / y) / (x / y) = (1 / 0) / (1 / 0) = 1 / 1 = 0;$

$x = 1,\ y = 1$: $(x / y) / (x / y) = (1 / 1) / (1 / 1) = 0 / 0 = 1.$

Для виразу $(x \downarrow y) \downarrow (x \downarrow y)$ маємо:

$x = 0,\ y = 0$: $(x \downarrow y) \downarrow (x \downarrow y) = (0 \downarrow 0) \downarrow (0 \downarrow 0) = 1 \downarrow 1 = 0;$

$x = 0,\ y = 1$: $(x \downarrow y) \downarrow (x \downarrow y) = (0 \downarrow 1) \downarrow (0 \downarrow 1) = 0 \downarrow 0 = 1;$

$x = 1,\ y = 0$: $(x \downarrow y) \downarrow (x \downarrow y) = (1 \downarrow 0) \downarrow (1 \downarrow 0) = 0 \downarrow 0 = 1;$

$x = 1,\ y = 1$: $(x \downarrow y) \downarrow (x \downarrow y) = (1 \downarrow 1) \downarrow (1 \downarrow 1) = 0 \downarrow 0 = 1.$

Таким чином, для досліджуваних рівностей маємо наступні таблиці істинності:

x	$\overline{x}$	$x \downarrow x$	x / x
0	1	1	1
1	0	0	0

x	y	$x\,y$	$(x / y) / (x / y)$
0	0	0	0
0	1	0	0
1	0	0	0
1	1	1	1

x	y	$x \vee y$	$(x \downarrow y) \downarrow (x \downarrow y)$
0	0	0	0
0	1	1	1
1	0	1	1
1	1	1	1

Із наведених таблиць видно, що на всіх наборах значень змінних значення лівих та правих частин цих рівностей збігаються. Ці збіги й доводять справедливість наведених виразів.

2.3. Властивості елементарних булевих функцій

В силу законів булевої алгебри (1) – (11), що відображають властивості булевих операцій диз'юнкції, кон'юнкції та заперечення, закони де Моргана можна узагальнити на будь-яку кількість булевих змінних:

$$\overline{x_1 \vee x_2 \vee \ldots \vee x_n} = \overline{x}_1 \wedge \overline{x}_2 \wedge \ldots \wedge \overline{x}_n; \tag{22.1}$$

$$\overline{x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_n} = \overline{x}_1 \vee \overline{x}_2 \vee \ldots \vee \overline{x}_n. \tag{22.2}$$

На відміну від булевих операцій, імплікація та заперечення імплікації не є комутативними та асоціативними операціями, але для них існує ряд співвідношень, що характеризують їх додаткові властивості [8]. Ці співвідношення подано в таблиці 3.

Таблиця 3

Властивості імплікації та заперечення імплікації

$f = x \to y$	$f = x \leftarrow y$
$x \to x = 1$	$x \leftarrow x = 0$
$x \to \overline{x} = \overline{x}$	$x \leftarrow \overline{x} = x$
$x \to 1 = 1$	$x \leftarrow 1 = 0$
$x \to 0 = \overline{x}$	$x \leftarrow 0 = x$
$1 \to x = x$	$1 \leftarrow x = \overline{x}$
$0 \to x = 1$	$0 \leftarrow x = 0$
$x \to y = \overline{y} \to \overline{x}$	$x \leftarrow \overline{y} = y \to \overline{x}$
$(x \to y) \to x = x$	$x \leftarrow (y \leftarrow x) = x$

Рівність (16), що є властивістю імплікації, дозволяє перейти від операції імплікації до булевих операцій диз'юнкції, кон'юнкції та заперечення. Співвідношення (23) і (24) дозволяють здійснити зворотний перехід від булевих операцій до операцій імплікації та заперечення імплікації.

$$x \vee y = \overline{x} \to y; \quad x\,y = \overline{x \to \overline{y}}. \qquad (23)$$

$$x \vee y = \overline{\overline{x} \leftarrow y}; \quad x\,y = x \leftarrow \overline{y}. \qquad (24)$$

Стрілка Пірса та штрих Шеффера є комутативними, але не є асоціативними операціями, тобто

$$x \downarrow y = y \downarrow x, \quad x / y = y / x;$$
$$x \downarrow (y \downarrow z) \neq (x \downarrow y) \downarrow z, \quad x / (y / z) \neq (x / y) / z.$$

Ряд додаткових співвідношень для цих функцій наведено в таблиці 4.

Таблиця 4. **Властивості стрілки Пірса та штриха Шеффера**

$f = x \downarrow y$	$f = x / y$
$x \downarrow x = \overline{x}$	$x / x = \overline{x}$
$x \downarrow \overline{x} = 0$	$x / \overline{x} = 1$
$x \downarrow 1 = 0$	$x / 1 = \overline{x}$
$x \downarrow 0 = \overline{x}$	$x / 0 = 1$

Операції стрілки Пірса та штриха Шеффера також можна пов'язати співвідношеннями, що є аналогічними до законів де Моргана в булевій алгебрі:

$$x / y = \overline{\overline{x} \downarrow \overline{y}}, \qquad x \downarrow y = \overline{\overline{x} / \overline{y}}, \qquad (25)$$

В зв'язку з тим, що стрілка Пірса та штрих Шеффера не є асоціативними, то автоматично властивість дистрибутивності для них також не виконується. Отже, в ході тотожних перетворень цих операцій неможна виносити за дужки спільні множники або, навпаки, розкривати дужки, вносячи в них спільний множник. Таким чином, доведення тотожностей, що складаються лише зі стрілки Пірса та штриха Шеффера, можливо виконувати у два способи: або за допомогою таблиць істинності, або за допомогою окремого спрощення лівої та правої частин досліджуваного виразу. Якщо в ході такого спрощення вдається звести обидві частини рівності до однакового вигляду, тотожність вважається доведеною.

Приклад 6. Довести тотожність

$$(x \downarrow y) / (z \downarrow t) \equiv \overline{x} / \overline{\overline{y} / \overline{\overline{z} / \overline{t}}}\,.$$

Розв'язання. Спростимо спочатку ліву частину цього виразу.

$$(x \downarrow y) / (z \downarrow t) = \overline{x \vee y} / \overline{z \vee t} = (\overline{x}\,\overline{y}) / (\overline{z}\,\overline{t}) =$$

$$= \overline{\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}\,\overline{t}} = \overline{\overline{x}} \vee \overline{\overline{y}} \vee \overline{\overline{z}} \vee \overline{\overline{t}} = x \vee y \vee z \vee t\,.$$

Тепер спростимо праву частину виразу.

$$\overline{x} / \overline{\overline{y} / \overline{\overline{z} / \overline{t}}} = \overline{x} / \overline{\overline{y} / (\overline{z}\,\overline{t})} = \overline{x} / (\overline{y}\,\overline{z}\,\overline{t}) =$$

$$= \overline{\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}\,\overline{t}} = \overline{\overline{x}} \vee \overline{\overline{y}} \vee \overline{\overline{z}} \vee \overline{\overline{t}} = x \vee y \vee z \vee t\,.$$

В ході окремого спрощення лівої та правої частин виразу був отриманий той самий вираз. З цього випливає справедливість досліджуваної рівності. Таким чином, цю тотожність доведено.

2.4. Дерево підформул

Означення. Частина f деякої формули F, яка, у свою чергу, також є формулою, називається *підформулою* f логічної формули F. При цьому говорять, що підформула f *входить в* F, або *міститься в* F [3].

Означення. Функція $F=F(f_1, f_2, \ldots, f_n)$, яку отримано із функцій $f_1, f_2, \ldots, f_n$ шляхом їх підстановки замість аргументів $x_1, x_2, \ldots, x_n$ функції $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, називається *суперпозицією функцій* $f_1, f_2, \ldots, f_n$ [20].

За допомогою суперпозиції функцій можна отримувати більш складні формули від будь-якої кількості змінних. Є очевидним, що функції, з яких складається суперпозиція функцій, є підформулами тієї формули, яка відображає їх підсумкову суперпозицію. Таким чином, процес обчислення значень складної логічної функції від довільної кількості змінних на всіх наборах значень цих змінних можна звести до послідовності кроків, на кожному з яких обчислюється значення елементарної логічної функції від не більш, ніж двох змінних.

Означення. Схема ієрархічного розбиття логічної формули на підформули, з яких вона складається, з урахуванням старшинства виконання операцій називається *деревом підформул* або *семантичним деревом* [14].

Корінь такого дерева складається із обчислюваної формули, а вершини розташовані по ярусам (рівням) і містять підформули тих формул, які знаходяться на попередньому рівні та виокремлюються із цих формул з використанням одного і лише одного із правил утворення формул. Ребра такого дерева виходять з вершин, що відповідають підформулам початкової формули, і входять у вершини, що відповідають підформулам, що виокремлюються з підформул попереднього ярусу (рівня) за допомогою якогось із правил утворення формул [3].

Приклад 7. Побудувати дерево підформул для функції

$$f = (\overline{x} \vee (y \oplus z)) \downarrow (y \rightarrow x\,\overline{z}).$$

Розв'язання. Два можливі варіанти дерева підформул для цієї функції подано на рис. 1.

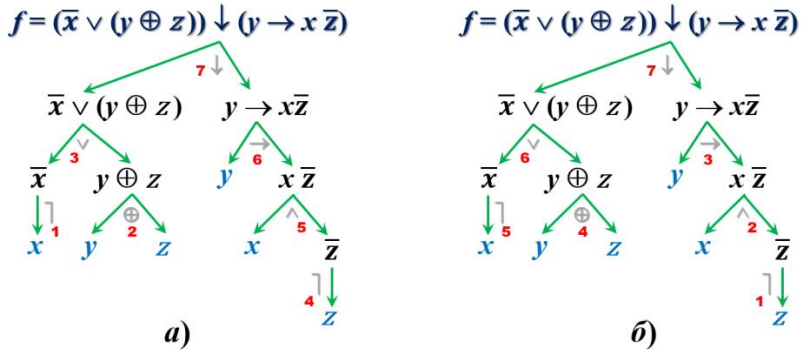


Рис. 1. – Можливі варіанти дерева підформул

Із рис. 1 видно, що для складної логічної функції від довільної кількості змінних може існувати декілька варіантів дерева підформул, тобто декілька варіантів черговості дій по обчисленню заданої функції. Наприклад, у варіанті, поданому на рис. 1*а*, 1-а і 2-а, дії можна виконувати в протилежному порядку. Це пов'язане з тим, що обидві ці дії використовують атомарні формули, тобто значення змінних на всіх наборах. Аналогічна ситуація і з 4-ю і 5-ю діями в варіанті, поданому на рис. 1*б*. Також можна переставляти місцями 3-ю і 6-у дії в обох цих варіантах. Однак незалежно від обраної черговості обчислення підформул, їх ієрархія, тобто конфігурація самого дерева при цьому залишається незмінною. Таким чином, можна в різному порядку виконувати дії виключно з того ж самого ярусу (рівня) дерева. Переставляти місцями дії з різних рівнів неможна. Також можна повністю змінити черговість виконання різних «гілок» побудованого дерева. На рис. 1 подані варіанти відрізняються саме за цією ознакою.

Із прикладу 7 наочно випливає, що кожна гілка побудованого дерева підформул повинна закінчуватися атомарною формулою, тобто селектором (значенням конкретної змінної в кожному наборі). Таким чином, рухаючись деревом знизу вверх і застосовуючи розглянуті вище правила утворення формул, в кожній вершині дерева буде отримано деяку підформулу.

2.5. Таблиці Квайна

Будь-якій формулі булевої алгебри однозначно відповідає деяка функція [13]. Використовуючи дерево підформул, можна обчислювати значення функції від довільної кількості змінних, підставляючи замість атомарних формул конкретні набори значень змінних. Якщо поставлено задачу обчислити значення функції на конкретному наборі, то при великій кількості змінних побудова дерева підформул суттєво полегшує цей процес. Однак якщо при великій кількості змінних поставлено задачу знайти значення функції на всіх наборах, використання лише дерева підформул буде нераціональним.

Означення. *Таблиця Квайна* відображає покроковий процес обчислення значень складної логічної функції від довільної кількості змінних на всіх наборах значень цих змінних.

Для побудови таблиці Квайна процес обчислення значень функції розбивається на дії, як і при побудові дерева підформул. При цьому кожна наступна дія є унарною або бінарною операцією, в якій беруть участь лише значення змінних із виписаних наборів, або результати операцій, що виконані в попередніх діях. Процес такого розбиття виконується в ході побудови дерева підформул. Однак для подальших обчислень будується таблиця Квайна. Такі таблиці містять усі без виключення набори значень змінних і значення на них всіх проміжних

підформул, з яких складається формула, що задає обчислювану функцію. ***<u>Процес побудови таблиці Квайна</u>*** виглядає наступним чином [3]:

1. Стовпці таблиці Квайна позначаються підформулами початкової формули в порядку ускладнення підформул у відповідності до дерева підформул (рух деревом відбувається знизу вверх). Таким чином, перші стовпці таблиці Квайна відповідають змінним, від яких залежить обчислювана функція, тобто атомарним формулам. Ці стовпці розташовані в таблиці або в порядку збільшення індексів змінних, або в їх алфавітному порядку.
2. Заповнення таблиці здійснюється послідовно по стовпцях з використанням таблиць істинності елементарних булевих функції і залежностей між булевими функціями (14) або (15). При цьому стовпці для змінних, від яких залежить функція, заповнюються двійковими наборами, що розташовані в цих стовпцях, в порядку збільшення номерів цих наборів.

<u>Приклад 8</u>. Знайти значення функції на всіх без виключення можливих наборах значень змінних, тобто побудувати таблицю Квайна для функції

$$f = (\overline{x} \vee (y \oplus z)) \downarrow (y \to x\,\overline{z}),$$

дерево підформул для якої було побудовано в прикладі 7.

<u>Розв'язання</u>. Оберемо для реалізації перший варіант дерева підформул, поданий на рис. 1*а*. Тоді таблиця Квайна для цієї функції має вигляд:

$$f = (\overset{1}{\overline{x}} \vee (\overset{3}{y \oplus z})) \overset{7}{\downarrow} (\overset{6}{y \to \overset{5}{x\,\overset{4}{\overline{z}}}})$$

				1	2	3 = 1∨2	4	5=x∧4	6 = y→5	7 = 3↓6
№	x	y	z	$\overline{x}$	$y \oplus z$	$\overline{x} \vee (y \oplus z)$	$\overline{z}$	$x\overline{z}$	$y \to x\overline{z}$	$(\overline{x} \vee (y \oplus z)) \downarrow (y \to x\overline{z})$
0	0	0	0	1	0	1	1	0	1	0
1	0	0	1	1	1	1	0	0	1	0
2	0	1	0	1	1	1	1	0	0	0
3	0	1	1	1	0	1	0	0	0	0
4	1	0	0	0	0	0	1	1	1	0
5	1	0	1	0	1	1	0	0	1	0
6	1	1	0	0	1	1	1	1	1	0
7	1	1	1	0	0	0	0	0	0	1

Перший стовпець цієї таблиці заповнюється відповідними десятковими номерами наборів значень змінних із множини $\boldsymbol{D^n}$. Досліджувана функція залежить від трьох змінних. Отже, загальна кількість наборів значень змінних в цьому випадку буде $|\boldsymbol{D^3}| = \mathbf{2^3 = 8}$. Далі значення функції обчислюється по діях. Порядок дій визначається у відповідності з обраним деревом підформул. В нашому прикладі 1-й дії відповідає стовпець зі значеннями функції $\overline{\boldsymbol{x}}$, тобто з результатами виконання унарної операції заперечення. Дані для виконання цієї операції беруться із стовпця значень змінної $\boldsymbol{x}$, тобто із умови задачі. В 2-й дії виконується бінарна операція суми за модулем 2 між змінними $\boldsymbol{y}$ і $\boldsymbol{z}$, значення яких знову беруться із умови задачі. Для виконання 3-ї дії використовуються результати попередніх дій, тому що 3-я дія є бінарною операцією диз'юнкції між результатами попередніх 1-ї та 2-ї дій. Для 4-ї дії дані знову беруться із умови, тому що ця дія передбачає виконання унарної операції заперечення над змінною $\boldsymbol{z}$. Для заповнення стовпця, що відповідає 5-й дії, використовуються як дані із умови (стовпець значень змінної $\boldsymbol{x}$) так і стовпець результатів попередньої 4-ї дії. В 5-й дії виконується бінарна операція кон'юнкції. Стовпець 6-ї дії заповнюється результатами

виконання бінарної операції імплікації від значення змінної x (дані беруться із умови) до результату попередньої 5-ї дії. В 7-й дії обчислюються вже остаточні значення функції, що розглядається. Вона є бінарною операцією стрілки Пірса між результатом 3-ї та 6-ї дій. Тому стовпець, що відповідає результатам 7-ї дії, в даній таблиці буде останнім.

В силу того, що порядок розташування наборів значень змінних в таблиці Квайна суворо регламентований (суворо в порядку зростання їх порядкових номерів), то таблицю формули (функції) можна задавати, вказуючи підсумковий стовпець таблиці Квайна.

Відповідь. f = **(0 0 0 0 0 0 0 1)**.

Таким чином, *за допомогою таблиці Квайна можна здійснювати перехід від аналітичного до табличного способу задання складної логічної функції від довільної кількості змінних*.

Досі ми розглядали логічні формули, в яких порядок дій, в першу чергу, встановлювався дужками. Однак це не завжди так. Якщо в запису формули, що визначає деяку логічну функцію, відсутні дужки, то операції слід виконувати в наступному порядку: заперечення, штрих Шеффера, стрілка Пірса, кон'юнкція, сума за модулем 2, диз'юнкція, імплікація, еквіваленція [10]. Таким чином, елементарні логічні операції в порядку зменшення їх старшинства розташовуються наступним чином: $\rceil, /, \downarrow, \wedge, \oplus, \vee, \rightarrow, \sim$, тобто в першу чергу має виконуватися заперечення, що відноситься безпосередньо до змінних, а в останню чергу – еквіваленція. У випадку, коли заперечення відноситься до деякої частини формули, а не безпосередньо до змінної, то спочатку виконуються ті операції, з яких складається заперечуваний вираз (з урахуванням їх старшинства), а потім вже виконується це заперечення.

Приклад 9. Припустимо, що у функції, яку розглянуто в прикладі 5 і прикладі 8, відсутні дужки. Необхідно розставити в цій формулі дужки у відповідності з пріоритетом виконання елементарних операцій та побудувати таблицю Квайна для отриманої формули.

Розв'язання. Без дужок розглянута функція має вигляд:

$$f = \overline{x} \vee y \oplus z \downarrow y \rightarrow x\,\overline{z}.$$

Найвищий пріоритет має операція заперечення. Візьмемо в дужки формули, над якими стоїть знак цієї операції:

$$f = (\overline{x}) \vee y \oplus z \downarrow y \rightarrow x\,(\overline{z}).$$

Штрих Шеффера в цій формулі відсутній. Тому наступний пріоритет має стрілка Пірса. Формула набуває вигляду:

$$f = (\overline{x}) \vee y \oplus (z \downarrow y) \rightarrow x\,(\overline{z}).$$

Наступний пріоритет має операція кон'юнкції. Отже,

$$f = (\overline{x}) \vee y \oplus (z \downarrow y) \rightarrow (x\,(\overline{z})).$$

Далі йде сума за модулем 2:

$$f = (\overline{x}) \vee (y \oplus (z \downarrow y)) \rightarrow (x\,(\overline{z})).$$

Наступний пріоритет має диз'юнкція:

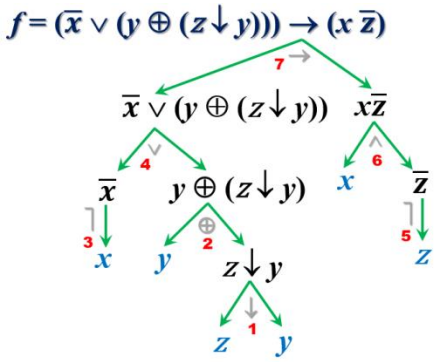
$$f = ((\overline{x}) \vee (y \oplus (z \downarrow y))) \rightarrow (x\,(\overline{z})).$$

Єдиною операцією, що залишилася, є імплікація. Вона має найменший пріоритет із присутніх в формулі елементарних операцій. Тому вона буде виконуватися в останню чергу.

Однак, у відповідності з прийнятими домовленостями по спрощенню запису формул, можна не писати дужки, що дублюють область дії операції заперечення. Таким чином, у відповідності з прийнятим пріоритетом виконання елементарних логічних операцій, остаточний вигляд заданої формули буде наступним:

$$f = (\overline{x} \vee (y \oplus (z \downarrow y))) \to (x\,\overline{z}).$$

Побудуємо для цієї формули дерево підформул та оберемо одну із можливих послідовностей виконання операцій в цій формулі.



Обраній послідовності виконання операцій в поданому дереві підформул відповідає наступна таблиця Квайна.

$$f = (\overset{3}{\overline{x}} \overset{4}{\vee} (\overset{2}{y} \oplus (\overset{1}{z \downarrow y}))) \overset{7}{\to} (\overset{6}{x}\,\overset{5}{\overline{z}})$$

				1=z↓y	2=y⊕1	3=x̄	4 = 2∨3	5=z̄	6=x∧5	7 = 4 → 6
№	x	y	z	$z \downarrow y$	$y \oplus (z \downarrow y)$	$\overline{x}$	$\overline{x} \vee (y \oplus (z \downarrow y))$	$\overline{z}$	$x\overline{z}$	$(\overline{x} \vee (y \oplus (z \downarrow y))) \to (x\,\overline{z})$
0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	**0**
1	0	0	1	0	0	1	1	0	0	**0**
2	0	1	0	0	1	1	1	1	0	**0**
3	0	1	1	0	1	1	1	0	0	**0**
4	1	0	0	1	1	0	1	1	1	**1**
5	1	0	1	0	0	0	0	0	0	**1**
6	1	1	0	0	1	0	1	1	1	**1**
7	1	1	1	0	1	0	1	0	0	**0**

Процес заповнення стовпців цієї таблиці відбувається за тим же принципом, що був описаний для функції із прикладу 9.

Відповідь. f = **(0 0 0 0 1 1 1 0)**.

Як видно із прикладу 8 і прикладу 9, за іншої розстановки дужок отримуємо зовсім іншу функцію.

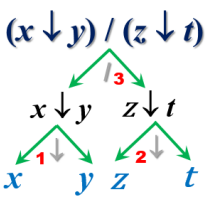
Таблиці Квайна можна також використовувати для доведення логічних тотожностей.

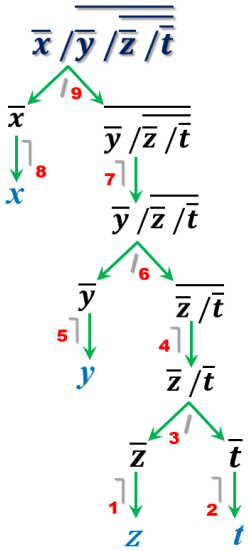
Приклад 10. В прикладі 6 аналітичним шляхом було доведено тотожність

$$(x \downarrow y) / (z \downarrow t) \equiv \overline{x} / \overline{\overline{y} / \overline{\overline{z} / \overline{t}}}\,.$$

Довести цю тотожність за допомогою таблиці Квайна.

Розв'язання. Побудуємо дерева підформул для лівої та правої частин цієї рівності.





Тоді таблиця Квайна для лівої та правої частин цієї рівності має вигляд:

№	x	y	z	t	$x \downarrow y$ 1	$z \downarrow t$ 2	$(x \downarrow y) / (z \downarrow t)$ 3 = 1 /2	$\bar{z}$ 1	$\bar{t}$ 2	$\bar{z} / \bar{t}$ 3 = 1 / 2	$\overline{\bar{z} / \bar{t}}$ 4 = $\bar{3}$	$\bar{y}$ 5	$\bar{y} / \overline{\bar{z} / \bar{t}}$ 6 =5 / 4	$\overline{\bar{y} / \overline{\bar{z} / \bar{t}}}$ 7 = $\bar{6}$	$\bar{x}$ 8	$\overline{\bar{x} / \overline{\bar{y} / \overline{\bar{z} / \bar{t}}}}$ 9 = 8 /7
0	0	0	0	0	1	1	**0**	1	1	0	1	1	0	1	1	**0**
1	0	0	0	1	1	0	**1**	1	0	1	0	1	1	0	1	**1**
2	0	0	1	0	1	0	**1**	0	1	1	0	1	1	0	1	**1**
3	0	0	1	1	1	0	**1**	0	0	1	0	1	1	0	1	**1**
4	0	1	0	0	0	1	**1**	1	1	0	1	0	1	0	1	**1**
5	0	1	0	1	0	0	**1**	1	0	1	0	0	1	0	1	**1**
6	0	1	1	0	0	0	**1**	0	1	1	0	0	1	0	1	**1**
7	0	1	1	1	0	0	**1**	0	0	1	0	0	1	0	1	**1**
8	1	0	0	0	0	1	**1**	1	1	0	1	1	0	1	0	**1**
9	1	0	0	1	0	0	**1**	1	0	1	0	1	1	0	0	**1**
10	1	0	1	0	0	0	**1**	0	1	1	0	1	1	0	0	**1**
11	1	0	1	1	0	0	**1**	0	0	1	0	1	1	0	0	**1**
12	1	1	0	0	0	1	**1**	1	1	0	1	0	1	0	0	**1**
13	1	1	0	1	0	0	**1**	1	0	1	0	0	1	0	0	**1**
14	1	1	1	0	0	0	**1**	0	1	1	0	0	1	0	0	**1**
15	1	1	1	1	0	0	**1**	0	0	1	0	0	1	0	0	**1**

Ліва частина рівності

1 3 2
$(x \downarrow y) / (z \downarrow t)$

Права частина рівності

7
5 4
$\bar{x} / \bar{y} / \overline{\bar{z} / \bar{t}}$
8 9 6 1 3 2

Стовпці значень для лівої та правої частин рівності збігаються. Отриманий збіг і доводить тотожність.

3. КЛАСИФІКАЦІЯ БУЛЕВИХ ФУНКЦІЙ

Означення. *Областю істинності* **(ОІ(*f*))** логічної функції називається множина таких наборів значень змінних із D^n, на яких ця функція приймає значення **1 (істинно)**.

Означення. *Областю хибності* **(ОХ(*f*))** логічної функції називається множина таких наборів значень змінних із D^n, на яких ця функція приймає значення **0 (хибно)** [3].

Є очевидним, що

$$\text{ОІ}(f) \cup \text{ОХ}(f) = D^n, \qquad \text{ОІ}(f) \cap \text{ОХ}(f) = \varnothing.$$

<u>Означення</u>. Логічна функція f є *здійсненною* **($f \in$ ЗД)**, якщо для неї **OI(f)** $\neq \varnothing$ або **OX(f)** $\neq D^n$.

Таким чином, логічна функція є здійсненною, якщо хоча б на одному наборі значень змінних ця функція дорівнює ***одиниці***.

<u>Означення</u>. Логічна функція f є *спростуваною* **($f \in$ СП)**, якщо для неї **OX(f)** $\neq \varnothing$ або **OI(f)**$\neq D^n$.

Таким чином, логічна функція є спростуваною, якщо хоча б на одному наборі значень змінних ця функція дорівнює ***нулю***.

<u>Означення</u>. Логічна функція f є *тотожно істинною* **($f \in$ ТІ)**, якщо для неї **OI(f)** = D^n або **OX(f)** = $\varnothing$.

Іншими словами, функція є тотожно істинною, якщо вона дорівнює ***одиниці*** на всіх наборах значень своїх змінних. Стовпець значень такої функції в таблиці Квайна буде складатися із самих одиниць.

<u>Означення</u>. Логічна функція f є *тотожно хибною* **($f \in$ ТХ)**, якщо для неї **OX(f)** = D^n або **OI(f)** = $\varnothing$.

Іншими словами, функція є тотожно хибною, якщо вона дорівнює ***одиниці*** на всіх наборах значень своїх змінних. Стовпець значень такої функції в таблиці Квайна буде складатися із самих нулів.

Таким чином, якщо на всіх наборах значень змінних функція приймає однакові значення (всі **0** або всі **1**), то вона вироджується у відповідну константу і є ***тотожним нулем*** або ***тотожною одиницею***.

<u>Приклад 11</u>. Класифікувати функцію $f = (\bar{x} \vee (y \oplus z)) \downarrow (y \to x\ \bar{z})$, розглянуту в прикладі 5 і прикладі 8.

<u>Розв'язання</u>. В прикладі 8 для цієї функції було побудовано таблицю Квайна і, таким чином, було отримано табличне подання для цієї функції: f = **(0 0 0 0 0 0 0 1)**. Природно, класифікація функції, яку задано в табличний спосіб, не викликає жодних труднощів. Досліджувана функція серед своїх значень містить як нулі, так і одиниці (єдине одиничне значення на останньому наборі). Отже, для неї **OI(f) = {7} = {(1 1 1)}** $\neq \varnothing$ і **OX(f) = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6} = {(0 0 0), (0 0 1), (0 1 0), (0 1 1), (1 0 0), (1 0 1), (1 1 0)}** $\neq \varnothing$. Із цього випливає, що досліджувана логічна функція класифікується наступним чином: $f \in$ **ЗД**, $f \in$ **СП**, $f \notin$ **ТІ**, $f \notin$ **ТХ**.

Однак класифікувати цю функцію можна було вже після розв'язання прикладу 5. В прикладі 5 в ході тотожних перетворень цю функцію було зведено до вигляду $f = x\,y\,z$. Подальше спрощення цієї формули неможливе. Вочевидь, що в ході наведених в прикладі 5 перетворень, цю функцію не було зведено до тотожного нуля або тотожної одиниці, тобто є очевидним, що $x\,y\,z \not\equiv 0$ (наприклад, на наборі **(1 1 1)** $x\,y\,z = 1$) і $x\,y\,z \not\equiv 1$ (наприклад, на наборі **(0 0 0)** $x\,y\,z = 0$). Як наслідок, із аналітичного запису для цієї функції можна зробити такий самий висновок, що і з її табличного задання. А саме, що для неї **OI(f)** $\neq \varnothing$ і **OX(f)** $\neq \varnothing$, що підтверджує її класифікацію, яку зроблено на ґрунті табличного задання цієї функції.

<u>Відповідь</u>. $f \in$ **ЗД**, $f \in$ **СП**, $f \notin$ **ТІ**, $f \notin$ **ТХ**.

Приклад 11 наочно показує, що класифікувати логічну функцію можна незалежно від способу її задання. Якщо функцію задано таблично, то для неї можлива класифікація лише на ґрунті її таблиці значень. Якщо функцію задано аналітично, то для її класифікації можливий і аналітичний, і табличний шлях.

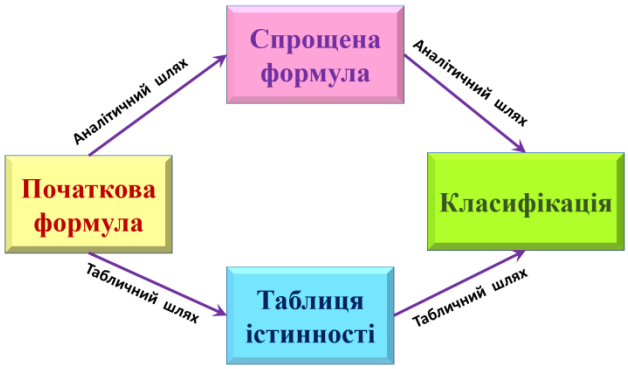


Рис. 2. – Класифікація логічних функцій

Якщо рухатися аналітичним шляхом, то функцію потрібно спочатку спростити. Якщо в результаті такого спрощення було отримано деяку формулу, то така функція не вироджується в жодну функцію-константу, тобто не є ані тотожно хибною, ані тотожно істинною. Як наслідок, така функція є і здійсненною, і спростованою. Якщо в ході спрощення формула зводиться до нуля або до одиниці, то така функція вироджується в константу і є або тотожно хибною (якщо вона вироджується в тотожний нуль), або тотожно істинною (якщо вона вироджується в тотожну одиницю). При цьому тотожно істинна функція є здійсненною, але не є спростованою. В свою чергу, тотожно хибна функція є спростованою, але не є здійсненною.

Якщо рухатися табличним шляхом, то для заданої функції необхідно побудувати таблицю Квайна і на ґрунті її останнього стовпця класифікувати досліджувану функцію. Якщо цей стовпець містить і нулі, і одиниці, то функція є здійсненною та спростуваною. При цьому до жодного класу тотожних функцій вона не належить. Якщо останній стовпець таблиці Квайна складається із самих одиниць, то функція належить лише до класів тотожно істинних і здійсненних функцій. Якщо останній стовпець таблиці Квайна містить самі нулі, то функція належить лише до класів тотожно хибних і спростуваних функцій.

Із всього сказаного можна зробити висновок, що будь-яка логічна функція одночасно може належати рівно до двох класів функцій із чотирьох можливих. Таким чином, функція може бути одночасно здійсненною та спростуваною, але тоді про жоден клас тотожних функцій мова вже не йде. Якщо ж функція належить до одного з класів тотожних функцій, то вона автоматично не належить до іншого тотожного класу. Здійсненність або спростуваність при цьому залежать від того, якою саме константою є дана функція (здійсненність для тотожно істинних і спростуваність для тотожно хибних функцій).

4. ГЕОМЕТРИЧНА ІНТЕРПРЕТАЦІЯ БУЛЕВИХ ФУНКЦІЙ

Область визначення булевих функцій від $\boldsymbol{n}$ змінних $\boldsymbol{f = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$ можна розглядати як сукупність $\boldsymbol{n}$-вимірних векторів (слів довжини $\boldsymbol{n}$), компонентами яких є символи (букви) **0** і **1** двійкового алфавіту [1]. Наприклад, при $\boldsymbol{n = 3}$ кожний вектор подається вершиною одиничного кубу в трьохвимірному просторі (рис. 3*а*).

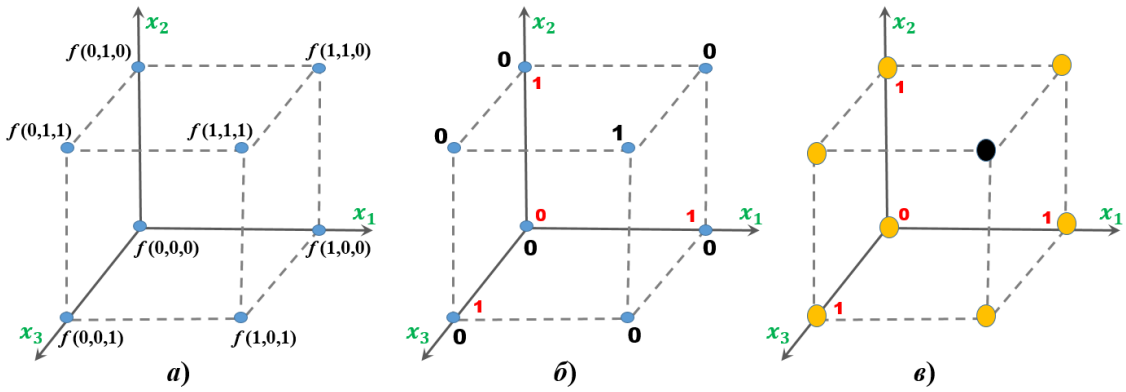


Рис. 3. – Геометричне подання булевих функцій

Таким чином, можна дати наступні означення.

Означення. *Булевий гіперкуб (одиничний гіперкуб, булевий куб, одиничний куб)* $\mathbb{B}^n$ *розмірності* $\boldsymbol{n}$ – це $\boldsymbol{n}$-й ступінь множини **{0, 1}**, тобто $\{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}^n$.

Означення. Елементи булевого гіперкубу $\{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}^n$ називаються $\boldsymbol{n}$*-вимірними булевими векторами*, або *наборами*, або *вершинами гіперкубу* [2].

Означення. *Гранню булевого гіперкубу* розмірності $\boldsymbol{n} - \boldsymbol{k}$, де $\boldsymbol{n}$ – розмірність булевого гіперкубу, називається множина наборів, що містять не менш, ніж $\boldsymbol{k}$ однакових компонент.

Наприклад, для трьохвимірного булевого кубу $\mathbb{B}^3$, поданого на рис. 3*а*, 2-вимірною гранню буде сукупність наборів **{(0 1 1), (1 1 1), (1 0 1), (0 0 1)}**, для яких однаковою є одна (**2 = 3 – 1**) третя компонента $\boldsymbol{x_3} = \mathbf{1}$.

Означення. Якщо число $\boldsymbol{n} - \boldsymbol{k}$, за яким визначається розмірність грані, дорівнює **1** (тобто $\boldsymbol{k} = \boldsymbol{n} - \mathbf{1}$), то така грань називається *ребром булевого гіперкубу* $\mathbb{B}^n$.

Таким чином, ребро – це сукупність двох наборів, що відрізняються один від одного значенням лише однієї єдиної змінної. Значення решти змінних в цих наборах мають бути однаковими.

Наприклад, для трьохвимірного булевого кубу на рис. 3*а* ребром є сукупність наборів **{(0 1 1), (0 1 0)}**, що відрізняються значенням лише однієї змінної $\boldsymbol{x_3}$. Значення решти змінних для цих наборів збігаються: $\boldsymbol{x_1} = \mathbf{0}$, $\boldsymbol{x_2} = \mathbf{1}$.

Будь-яка вершина булевого гіперкубу вважається **0**-вимірною гранню, або гранню нульової розмірності.

Означення. Множина векторів (вершин $\boldsymbol{n}$-вимірного гіперкубу) утворює *логічний простір* [12].

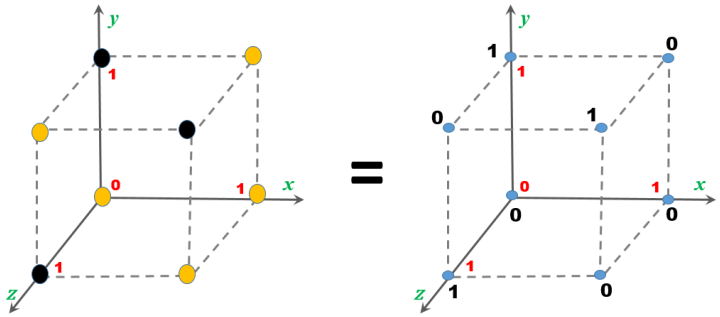
Булева функція відображається на $\boldsymbol{n}$-вимірному гіперкубі шляхом приписування кожній його вершині (набору) конкретного значення, яке функція приймає на цьому наборі. Наприклад, функція, яку розглянуто в прикладі 8, має геометричну інтерпретацію, подану на рис. 3*б*. При цьому кожній вершині кубу приписується значення **0** або **1** в залежності від значення функції. Так, досліджувана функція приймає одиничне значення на одному єдиному наборі значень змінних **(1 1 1)**. Отже, саме вершині, що відповідає цьому набору, в гіперкубі привласнюється одиничне значення. Решті вершинам будуть відповідати нулі.

Також для позначення двох можливих значень функції в різних вершинах гіперкубу можна використовувати виділення кольором. Наприклад, для функції із прикладу 8 таке геометричне подання відображене рис. 3*в*: єдиному одиничному значенню цієї функції відповідає вершина, яку зафарбовано чорним кольором, а нульовим значенням функції

відповідають вершини, зафарбовані жовтим кольором. Насправді не існує жорстко прийнятої системи позначень значень функції у вершинах. Так, можна, наприклад, одиничні вершини відмічати жирною точкою будь-якого кольору, а нульові – не відмічати взагалі, або навпаки. При цьому головне – заздалегідь визначити прийняту в кожному конкретному випадку систему позначень.

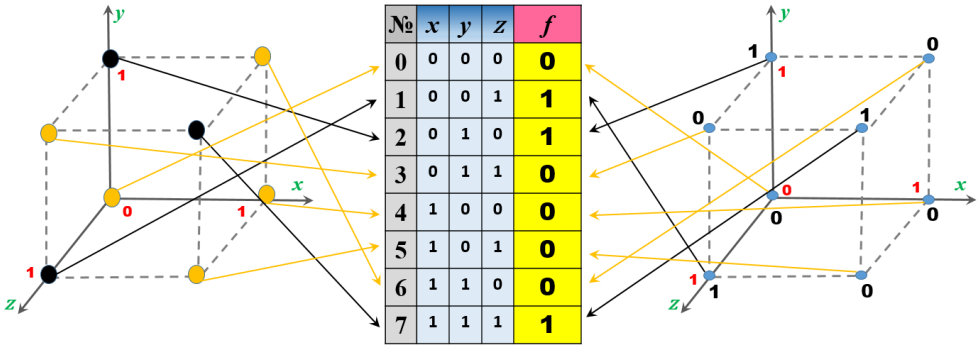
Із всього сказаного випливає, що геометричне подання у вигляді ***n***-вимірного гіперкубу, як і задання логічної функції її порядковим номером, є різновидом табличного задання логічної функції.

<u>Приклад 12</u>. Для функції, заданої одиничним тривимірним кубом



Відновити її таблицю істинності та класифікувати функцію.

<u>Розв'язання</u>. Схема, за якою вершинам одиничного гіперкубу ставляться у відповідність рядки таблиці істинності функції, подано на рис. 4.



№	*x*	*y*	*z*	*f*
0	0	0	0	**0**
1	0	0	1	**1**
2	0	1	0	**1**
3	0	1	1	**0**
4	1	0	0	**0**
5	1	0	1	**0**
6	1	1	0	**0**
7	1	1	1	**1**

Рис. 4. – Схема відновлення таблиці істинності за булевим кубом

Кожна вершина одиничного гіперкубу відповідає одному і лише одному конкретному набору значень змінних логічної функції. Кожній вершині відповідає конкретне значення цієї логічної функції. Отже, встановивши взаємно-однозначну відповідність між рядками таблиці і вершинами гіперкубу, заповнюємо стовпець значень функції значеннями відповідних вершин. Таким чином, табличне задання досліджуваної функції має вигляд: ***f* = (0 1 1 0 0 0 0 1)**. Із нього видно, що **OI(*f*) {1, 2, 7} = {(0 0 1), (0 1 0), (1 1 1)}** $\neq \varnothing$ і **OX(*f*) {0, 3, 4, 5, 6} = {(0 0 0), (0, 1 1), (1 0 0), (1 0 1), (1 1 0)** $\neq \varnothing$. Отже, ***f* ∈ ЗД**, ***f* ∈ СП**, ***f* ∉ ТІ**, ***f* ∉ ТХ**.

<u>Відповідь</u>. ***f* = (0 1 1 0 0 0 0 1)**, ***f* ∈ ЗД**, ***f* ∈ СП**, ***f* ∉ ТІ**, ***f* ∉ ТХ**.

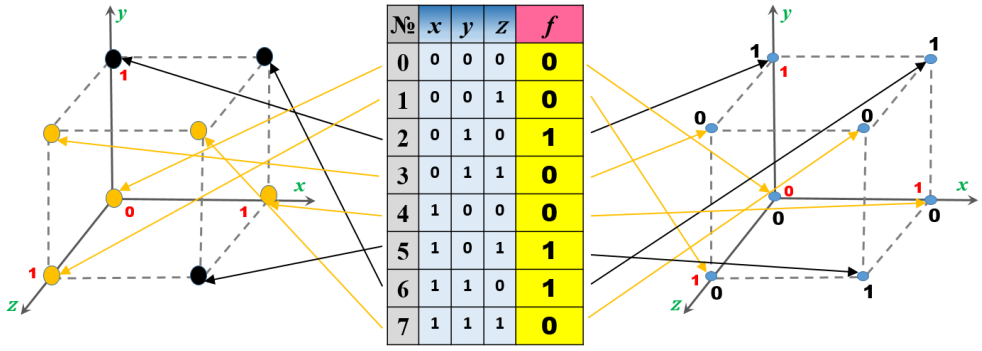
Є очевидним, що якщо змінити напрямки всіх стрілок на схемі на протилежні, то отримана схема буде відповідати зворотній процедурі, тобто побудові гіперкубу функції за її таблицею істинності.

<u>Приклад 13</u>. Побудувати одиничний гіперкуб для функції $f_{38}(x, y, z)$ та класифікувати її.

<u>Розв'язання</u>. В силу того, що це функція трьох змінних, то всього наборів буде $2^3 = 8$. Далі необхідно перевести десяткове число **38** в двійкову систему числення. Для цього розкладемо десяткове число **38** на доданки, кожний з яких є ступенем двійки:

$$38_{(10)} = 32 + 4 + 2 = 0{\cdot}2^7 + 0{\cdot} + 1{\cdot}2^5 + 0{\cdot}2^4 + 0{\cdot}2^3 + 1{\cdot}2^2 + 1{\cdot}2^1 + 0{\cdot}2^0 = 00100110_{(2)}.$$

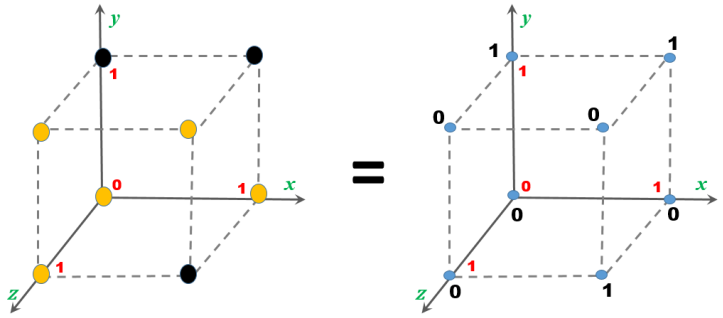
Отже, табличне задання цієї функції має вигляд: f **= (0 0 1 0 0 1 1 0)**. Із цього табличного задання випливає, що **OI(*f*) {2, 5, 6} = {(0 1 0), (1 0 1), (1 1 0)}** $\neq \varnothing$ і **OX(*f*) {0, 1, 3, 4, 7} = {(0 0 0), (0 0 1), (0 1 1), (1 0 0), (1 1 1)}** $\neq \varnothing$. Як наслідок, $f \in$ **ЗД**, $f \in$ **СП**, $f \notin$ **ТІ**, $f \notin$ **ТХ**. Тепер будуємо для цієї функції гіперкуб за схемою, поданою на рис. 5.



№	x	y	z	f
0	0	0	0	0
1	0	0	1	0
2	0	1	0	1
3	0	1	1	0
4	1	0	0	0
5	1	0	1	1
6	1	1	0	1
7	1	1	1	0

Рис. 5. – Схема відновлення булевого гіперкубу за таблицею істинності

<u>Відповідь</u>. Функція трьох змінних $f_{38}(x, y, z)$ класифікується як $f \in$ **ЗД**, $f \in$ **СП**, $f \notin$ **ТІ**, $f \notin$ **ТХ**. Гіперкуб для неї може бути поданий в один із наступних способів.



Класифікувати функцію за її гіперкубом можна візуально за його зовнішнім виглядом, не відновлюючи таблицю істинності. Якщо вершинам гіперкубу приписані різні значення (його вершини розфарбовано в різні кольори), то функція не є жодною константою. Як наслідок, вона здійсненна та спростувана, але до жодного класу тотожних функцій не належить. Якщо ж усім вершинам гіперкубу приписані однакові значення (всі вершини гіперкубу розфарбовано в той самий колір), то ця функція вироджується в якусь із функцій-констант. В цьому випадку вона тотожно істинна та здійсненна, але не тотожно хибна і не спростувана (якщо всі вершини одиничні), або тотожно хибна та спростувана, але не тотожно істинна і не здійсненна (якщо всі вершини нульові).

5. ДВОЇСТІСТЬ БУЛЕВИХ ФУНКЦІЙ

5.1. Означення двоїстої функції

Означення. Булева функція $f^*(x_1, \ldots, x_n)$ називається *двоїстою* по відношенню до початкової функції $f(x_1, \ldots, x_n)$, якщо вона виражається як заперечення формули, отриманої із початкової заміщенням кожної змінної її запереченням [13], тобто

$$f^*(x_1, \ldots, x_n) \overset{\text{def}}{=} \overline{f}(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n)$$

Приклад 14: Для функції $f = (\overline{x} \vee (y \oplus z)) \downarrow (y \to x\overline{z})$, розглянутої в прикладі 5 і прикладі 8, побудувати двоїсту функцію.

Розв'язання. Користуючись означенням двоїстої функції, основними законами булевої алгебри (1) – (13) і залежностями для елементарних булевих функцій (14) – (21), можна записати:

$$f^* = \overline{(\overline{\overline{x}} \vee (\overline{y} \oplus \overline{z})) \downarrow (\overline{y} \to \overline{x}\,\overline{\overline{z}})} = \overline{(x \vee (\overline{y} \oplus \overline{z})) \downarrow (\overline{y} \to \overline{x}\,z)} =$$

$$= (x \vee (\overline{y} \oplus \overline{z})) \vee (\overline{y} \to \overline{x}\,z) = x \vee \overline{y}\,\overline{\overline{z}} \vee \overline{\overline{y}}\,\overline{z} \vee \overline{\overline{y}} \vee \overline{x}\,z =$$

$$= x \vee \overline{y}\,z \vee y\,\overline{z} \vee y \vee \overline{x}\,z = x \vee \overline{y}\,z \vee y \vee \overline{x}\,z =$$

$$= x \vee z \vee y \vee z = x \vee y \vee z\,.$$

Відповідь. $f^* = x \vee y \vee z$.

Як випливає із наведеного означення, для відношення двоїстості має місце ***властивість взаємності***, тобто $(f^*)^* = f^{**} = f$. Таким чином, будь-яка функція f є двоїстою до функції f^* [8, 15].

5.2. Таблична побудова двоїстої функції

Другий метод побудови двоїстої функції заснований на табличному заданні функції.

Означення. Набор значень змінних $(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n)$ називається *протилежним*, або *антиподом* для набору значень змінних $(x_1, \ldots, x_n)$ [8].

Якщо функцію задано аналітично, то для побудови таблиці двоїстої функції необхідно спочатку побудувати таблицю Квайна для початкової функції. Потім діють за наступним **алгоритмом побудови таблиці двоїстої функції**, який ґрунтується на означенні двоїстої функції:

1. Заперечення усіх змінних перетворює всі набори в їх антиподи (протилежні набори). Як наслідок, стовпець значень функції перевертається догори ногами (кожну змінну заміщуємо її запереченням).
2. Заперечення функції змінює значення функції на протилежні. Як наслідок, перевернутий після 1-го кроку стовпець потрібно інвертувати (всі значення замінити на їх заперечення), тобто відбувається заперечення функції, отриманої на 1-му кроці алгоритму.

Приклад 15. Для функції $f = (\overline{x} \vee (y \oplus z)) \downarrow (y \to x\overline{z})$ із прикладу 5 і прикладу 8 записати таблицю двоїстої функції.

Розв'язання. В прикладі 8 для цієї функції було побудовано таблицю Квайна та отримано підсумковий стовпець значень цієї функції на всіх наборах значень змінних. Скористаємось цією таблицею для подальших побудов.

№	x	y	z	f	$f\updownarrow$	$f^* = \overline{(f\updownarrow)}$
0	0	0	0	0	1	0
1	0	0	1	0	0	1
2	0	1	0	0	0	1
3	0	1	1	0	0	1
4	1	0	0	0	0	1
5	1	0	1	0	0	1
6	1	1	0	0	0	1
7	1	1	1	1	0	1

Таким чином, табличне задання функції, двоїстої до початкової функції f, буде мати вигляд f^***=(0 1 1 1 1 1 1 1).**

Відповідь. f^***=(0 1 1 1 1 1 1 1).**

При цьому слід зазначити, що тотожна функція (селектор) x та заперечення (інверсія) $\overline{x}$ є двоїстими кожна до самої себе.

№ *набору*	x	$f=x$	x^*	$f=\overline{x}$	$(\overline{x})^*$
0	0	0	0	1	1
1	1	1	1	0	0

5.3. Принцип двоїстості

Третій можливий спосіб побудови двоїстої формули для функції, яку задано аналітично, ґрунтується на принципі двоїстості.

Означення. Формула F^* називається *двоїстою до формули* F, якщо її отримано із F заміною символів операцій на символи двоїстих до них операцій.

Теорема 2 (***принцип двоїстості***). *Формулювання*. Якщо формула F задає булеву функцію $f(x_1, \ldots, x_n)$, то двоїста до неї формула F^* задає двоїсту функцію $f^*(x_1, \ldots, x_n)$ [15, 16].

Доведення. За умовою теореми, формула F задає булеву функцію $f(x_1, \ldots, x_n)$. За означенням формули F маємо суперпозицію:

$$F = f(x_1, \ldots, x_n) = g(f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n)).$$

Розглянемо двоїсту до неї формулу:

$$F^* = f^*(x_1, \ldots, x_n) = g^*(f_1^*(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m^*(x_1, \ldots, x_n)) =$$

(*за означенням двоїстої функції для* $f_i^*(x_1, \ldots, x_n)$, $i=\overline{1,m}$)

$$= g^*(\overline{f}_1(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n), \ldots, \overline{f}_m(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n)) =$$

(*за означенням двоїстої функції для* $g(f_1, \ldots, f_m)$, $i=\overline{1,m}$)

$$= \overline{g}(\overline{\overline{f}}_1(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n), \ldots, \overline{\overline{f}}_m(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n)) =$$

(*за законом подвійного заперечення*)

$$= \overline{g}(f_1(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n), \ldots, f_m(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n)) = \overline{f}(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n) =$$

(*за означенням двоїстої функції для* $f(x_1, \ldots, x_n)$)

$$= f^*(x_1, \ldots, x_n).$$

Теорему доведено.

Таким чином, при побудові двоїстої формули за принципом двоїстості необхідно рухатися від зовнішніх функцій до функцій, що використовуються як аргументи зовнішніх функцій (від останніх операцій формули до початкових), тобто рухатися деревом підформул зверху вниз.

З урахуванням всього сказаного, можна знайти двоїсті операції для всіх бінарних операцій булевої алгебри:

$(f \vee g)^* = \overline{\overline{f^*} \vee \overline{g^*}} = \overline{\overline{f^*}}\ \overline{\overline{g^*}} = f^* \wedge g^*$;

$(f \wedge g)^* = \overline{\overline{f^*} \wedge \overline{g^*}} = \overline{\overline{f^*}} \vee \overline{\overline{g^*}} = f^* \vee g^*$;

$(f \sim g)^* = \overline{\overline{f^*} \sim \overline{g^*}} = \overline{f^*} \oplus \overline{g^*} = \overline{f^*}\ \overline{\overline{g^*}} \vee \overline{\overline{f^*}}\ \overline{g^*} = \overline{f^*}\ g^* \vee f^*\overline{g^*} = f^* \oplus g^*$;

$(f \oplus g)^* = \overline{\overline{f^*} \oplus \overline{g^*}} = \overline{f^*} \sim \overline{g^*} = \overline{f^*}\ \overline{g^*} \vee \overline{\overline{f^*}}\ \overline{\overline{g^*}} = f^*\ g^* \vee \overline{f^*}\ \overline{g^*} = f^* \sim g^*$;

$(f \to g)^* = \overline{\overline{f^*} \to \overline{g^*}} = \overline{\overline{\overline{f^*}} \vee \overline{g^*}} = \overline{f^* \vee \overline{g^*}} = \overline{f^*}\ \overline{\overline{g^*}} = g^*\ \overline{f^*} = g^* \leftarrow f^*$;

$(f \leftarrow g)^* = \overline{\overline{f^*} \leftarrow \overline{g^*}} = \overline{\overline{f^*}\ \ \overline{\overline{g^*}}} = \overline{\overline{f^*}\ g^*} = \overline{\overline{f^*}} \vee \overline{g^*} = f^* \vee \overline{g^*} = \overline{g^*} \vee f^* = g^* \to f^*$;

$(f \downarrow g)^* = \overline{\overline{f^*}\ \downarrow\ \overline{g^*}} = \overline{f^*} \vee \overline{g^*} = \overline{f^*\ g^*} = f^* / g^*$;

$(f / g)^* = \overline{\overline{f^*} / \overline{g^*}} = \overline{f^*}\ \overline{g^*} = \overline{f^* \vee g^*} = f^* \downarrow g^*$.

Таким чином, можна виділити ***<u>пари операцій, двоїстих одна до одної</u>***:

<u>диз'юнкція та кон'юнкція</u>

$$(f \vee g)^* = f^* \wedge g^* ; \quad (f \wedge g)^* = f^* \vee g^* ;$$

<u>еквіваленція та сума за модулем 2</u>

$$(f \sim g)^* = f^* \oplus g^* ; \quad (f \oplus g)^* = f^* \sim g^* ;$$

<u>імплікація та заперечення реплікації</u>

$$(f \to g)^* = g^* \leftarrow f^* ;$$

<u>заперечення імплікації та реплікація</u>

$$(f \leftarrow g)^* = g^* \to f^* ;$$

<u>стрілка Пірса та штрих Шеффера</u>

$$(f \downarrow g)^* = f^* / g^* ; \qquad (f / g)^* = f^* \downarrow g^* .$$

<u>Приклад 16</u>. Для функції $f = (\overline{x} \vee (y \oplus z)) \downarrow (y \to x\overline{z})$ із прикладу 5 та прикладу 8 знайти двоїсту до неї, користуючись принципом двоїстості.

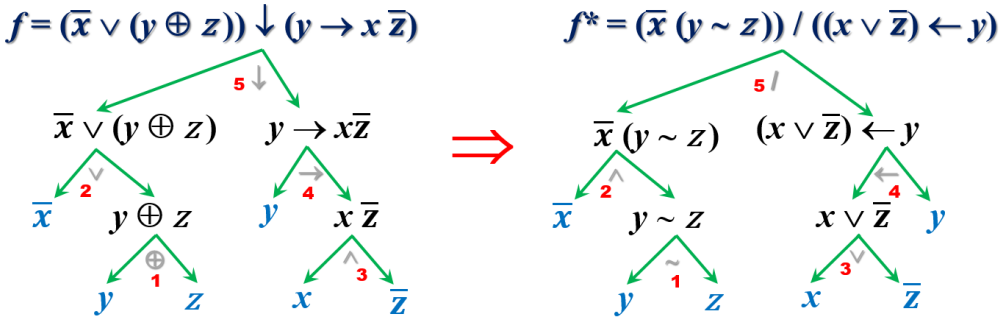
<u>Розв'язання</u>. Використовуючи отримані пари двоїстих операцій, можна записати:

$$f^* = ((\overline{x} \vee (y \oplus z)) \downarrow (y \to x\overline{z}))^* =$$

$$= (\overline{x} \vee (y \oplus z))^* \,/\, (y \to x\overline{z})^* = ((\overline{x})^* \,(y \oplus z)^*) \,/\, ((x\overline{z})^* \leftarrow y^*) =$$

$$= (\overline{x}\,(y^* \sim z^*)) \,/\, ((x^* \vee (\overline{z})^*) \leftarrow y) = (\overline{x}\,(y \sim z)) \,/\, ((x \vee \overline{z}) \leftarrow y).$$

Цей самий результат можна отримати також і схематично, якщо скористатися деревом підформул. Для цієї функції його було отримано в прикладі 7. З урахуванням того, що селектор (x) і заперечення ($\overline{x}$) є двоїстими самі до себе, маємо:



Далі цей вираз спрощується з використанням рівностей (1) – (21).

$$f^* = (\overline{x}\,(y \sim z)) \,/\, ((x \vee \overline{z}) \leftarrow y) =$$

$$= (\overline{x}\,(y\,z \vee \overline{y}\,\overline{z}) \,/\, ((x \vee \overline{z})\,\overline{y}) = (\overline{x}\,y\,z \vee \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}) \,/\, (x\,\overline{y} \vee \overline{y}\,\overline{z}) =$$

$$= \overline{(\overline{x}\,y\,z \vee \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z})\,(x\,\overline{y} \vee \overline{y}\,\overline{z})} = \overline{(\overline{x}\,y\,z \vee \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z})} \vee \overline{(x\,\overline{y} \vee \overline{y}\,\overline{z})} =$$

$$= \overline{\overline{x}\,y\,z}\;\overline{\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}} \vee \overline{x\,\overline{y}}\;\overline{\overline{y}\,\overline{z}} = (\overline{\overline{x}} \vee \overline{y} \vee \overline{z})\,(\overline{\overline{x}} \vee \overline{\overline{y}} \vee \overline{\overline{z}}) \vee (\overline{\overline{x}} \vee \overline{\overline{y}})\,(\overline{\overline{y}} \vee \overline{\overline{z}}) =$$

$$= (x \vee \overline{y} \vee \overline{z})\,(x \vee y \vee z) \vee (\overline{x} \vee y)\,(y \vee z) =$$

$$= x\,x \vee x\,y \vee x\,z \vee x\,\overline{y} \vee y\,\overline{y} \vee \overline{y}\,z \vee x\,\overline{z} \vee y\,\overline{z} \vee z\,\overline{z} \vee \overline{x}\,y \vee \overline{x}\,z \vee y\,y \vee y\,z =$$

$$= x \vee x\,y \vee x\,z \vee x\,\overline{y} \vee \overline{y}\,z \vee x\,\overline{z} \vee y\,\overline{z} \vee \overline{x}\,y \vee \overline{x}\,z \vee y \vee y\,z =$$

$$= x \vee \overline{y}\,z \vee \overline{x}\,z \vee y = x \vee z \vee y \vee z = x \vee y \vee z\,.$$

Відповідь. $f^* = x \vee y \vee z$.

Як видно із прикладів 14 і 16, для тієї ж самої функції в різні способи було отримано однакову двоїсту формулу. Однак, це не завжди так. Це випливає з того, що різні формули можуть задавати (реалізовувати) одну й ту ж саму функцію. Рівність цих різних двоїстих формул перевіряється або за допомогою тотожних перетворень (одна формула зводиться до іншої), або за допомогою побудови для них таблиць Квайна й встановлення їх рівності на однакових наборах.

Теорема 3 (наслідок із принципу двоїстості). *Формулювання*: Якщо формули F_1 і F_2 рівносильні, то двоїсті до них формули F_1^* і F_2^* також рівносильні [15, 17].

Доведення. Рівносильні формули F_1 і F_2 задають одну й ту ж саму булеву функцію $f(x_1, \ldots, x_n)$. Отже, за принципом двоїстості, двоїсті до них формули F_1^* і F_2^* також задають одну й ту ж саму двоїсту до функції $f(x_1, \ldots, x_n)$ функцію $f^*(x_1, \ldots, x_n)$. Як наслідок, формули F_1^* і F_2^* також є рівносильними. **Теорему доведено**.

Із наведених методів побудови двоїстої функції метод, заснований на використанні принципу двоїстості, здається найбільш складним. Однак, це не завжди так. Все залежить від складності (структури) початкової формули. Наприклад, якщо початкова формула не містить інших операцій, крім булевих (диз'юнкціїи, кон'юнкції та заперечення, що відноситься

безпосередньо до змінної), то застосування принципу двоїстості зводиться до заміни диз'юнкції на кон'юнкцію та кон'юнкції на диз'юнкцію. Заперечення, як це випливає із наведеної таблиці, при цьому зберігається.

Виходячи із всього вищесказаного, можна навести наступну схему побудови двоїстої формули:

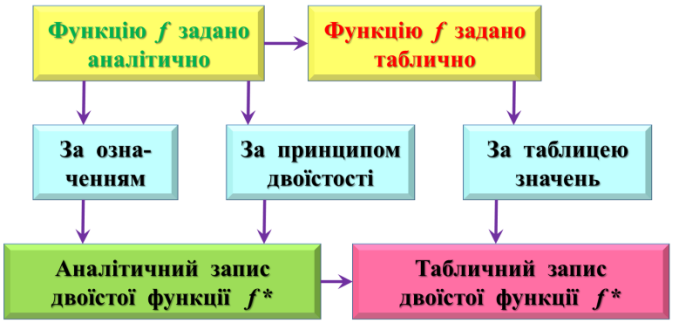


Рис. 6 – Схема побудови двоїстої функції

Таким чином, для функції, заданої таблично, існує єдиний метод пошуку двоїстої функції – з використанням таблиці Квайна. Природно, що двоїсту функцію при цьому також буде задано виключно таблично. Якщо ж функцію задано аналітично, то для неї є доступними всі три способи.

6. НОРМАЛЬНІ ФОРМИ

6.1. Диз'юнктивна нормальна форма (ДНФ)

Означення. Логічний добуток декількох змінних, взятих із запереченням або без нього, називається *елементарною кон'юнкцією* [19].

Кожна змінна або її заперечення може міститися в даній окремій елементарній кон'юнкції не більше, ніж один раз. Наприклад, вирази $x_1\ \bar{x}_2$, $x_1\ \bar{x}_2\ x_3$, $\bar{x}\ z$, $x\,y\,z$ є елементарними кон'юнкціями, а вирази $\bar{x}\,\bar{y}$, $x\,y \vee x\,\bar{z}$ - ні, тому що в 1-му виразі член $\bar{x}\,\bar{y}$ має спільне заперечення, а в 2-му є знак диз'юнкції.

Теорема 4. *Формулювання*. Елементарна кон'юнкція дорівнює одиниці тоді й лише тоді, коли змінні, що входять до її складу із запереченням, дорівнюють **0**, а змінні, що входять до її складу без заперечення, дорівнюють **1** [4, 5].

Доведення. У випадку, коли в елементарній кон'юнкції змінні із запереченням приймають значення **0**, а змінні без заперечення – значення **1**, то, в силу того, що $\bar{0} = 1$ і $1 \wedge x = x$, кон'юнкція всіх змінних буде дорівнювати одиниці. Тепер припустимо, що в заданій елементарній кон'юнкції хоча б одна змінна із запереченням дорівнює **1** із якогось набору. Тоді це заперечення змінної в силу того, що $\bar{1} = 0$, буде дорівнювати нулю. Поява хоча б одного нуля в кон'юнкції змінних у відповідності з властивістю $0 \wedge x = 0$ призведе до нульового значення всієї кон'юнкції. Припустимо тепер, що хоча б одна змінна без заперечення стала дорівнювати **0**. Тоді у відповідності з властивістю кон'юнкції $0 \wedge x = 0$ кон'юнкція змінної, що стала дорівнювати **0**, з рештою змінних, незалежно від їх значень, буде дорівнювати нулю. Таким чином, елементарна кон'юнкція дорівнює одиниці лише в одному

єдиному випадку, коли всі змінні, що входять до її складу із запереченням, дорівнюють **0**, а всі змінні, що входять до її складу без заперечення, дорівнюють **1**. **Теорему доведено**.

Наслідок із теореми 4. Кожній елементарній кон'юнкції відповідає один і лише один набор значень змінних, що входять до її складу, на якому ця кон'юнкція дорівнює одиниці. Із теореми 4 випливає, що таким набором є набор, в якому змінні, що входять в дану елементарну кон'юнкцію із запереченням, дорівнюють **0**, а змінні, що входять в дану елементарну кон'юнкцію без заперечення, дорівнюють **1**.

Наприклад, набором значень змінних (x_1, x_2, x_3), на якому елементарна кон'юнкція $\varphi = \overline{x}_1\, x_2\, x_3 = 1$, буде набор **(0 1 1)**, тому що $\varphi = \overline{0} \wedge 1 \wedge 1 = 1 \wedge 1 \wedge 1 = 1$. Цей набор буде єдиним, тому що будь-який інший набор перетворює елементарну кон'юнкцію φ в нуль. Якщо, скажемо, змінні x_1, x_2, x_3 приймуть, відповідно, значення **0**, **0** і **1**, то $\varphi = \overline{0} \wedge 0 \wedge 1 = 1 \wedge 0 \wedge 1 = 0$.

Теорема 5. *Формулювання*. Для кожного набору значень змінних існує одна і лише одна складена з них елементарна кон'юнкція, що дорівнює одиниці [19].

Доведення. Зафіксуємо довільний набор значень змінних і побудуємо елементарну кон'юнкцію, що дорівнює на цьому наборі одиниці. Це означає, що в цій елементарній кон'юнкції кожному нулю набору буде відповідати одна змінна із запереченням, а кожній одиниці набору – одна змінна без заперечення. Будь-яка інша кон'юнкція тих самих змінних буде відрізнятися наявністю або відсутністю заперечення хоча б в одній змінній. Це означає, що або x_i перетворюється в $\overline{x}_i$, або $\overline{x}_i$ перетворюється x_i. В результаті елементарна кон'юнкція стане дорівнювати нулю. **Теорему доведено**.

Означення. Логічна функція, яку подано диз'юнкцією елементарних кон'юнкцій, називається *диз'юнктивною нормальною формою* (*ДНФ*) [8].

Наприклад, $x\,\overline{y} \vee \overline{x}\,y\,\overline{z}$ – ДНФ, тому що всі умови, що висуваються до ДНФ, виконані; $\overline{x\,z} \vee x\,y$ – не ДНФ, тому що заперечення відноситься до кон'юнкції змінних, а не безпосередньо до змінних; $\overline{y}\,z \to x\,y\,\overline{z}$ - не ДНФ, тому що формула містить небулеві операції.

Алгоритм приведення функції до ДНФ аналітичним шляхом [4]:

1. Якщо початкова формула містить небулеві операції, то вони попередньо виражаються через диз'юнкцію, кон'юнкцію та заперечення.
2. За допомогою законів де Моргана формула зводиться до такого вигляду, щоб знаки заперечення відносилися лише до окремих змінних.
3. На основі 1-го закону дистрибутивності формула зводиться до диз'юнкції елементарних кон'юнкцій.
4. Отриманий вираз спрощується у відповідності із законом ідемпотентності та властивостями заперечення.

Приклад 17. Знайти ДНФ функції

$$f = \overline{x \oplus y} \vee (y \downarrow z).$$

Розв'язання:

$$f = \overline{x \oplus y} \vee (y \downarrow z) = (x \sim y) \vee \overline{y \vee z} = (x\,y \vee \overline{x}\,\overline{y}) \vee \overline{y}\,\overline{z} = x\,y \vee \overline{x}\,\overline{y} \vee \overline{y}\,\overline{z} = \text{ДНФ}(f).$$

Відповідь. **ДНФ(*f*)** $= x\,y \vee \overline{x}\,\overline{y} \vee \overline{y}\,\overline{z}$ **.**

Означення. Члени ДНФ, що є елементарними кон'юнкціями ***k*** літер, називаються *мінтермами k-того рангу* [1].

Наприклад, для функції $f(x, y, z)$ кон'юнкція $x\,y$ – мінтерм 2-го рангу, а $x\,\overline{y}\,z$ - мінтерм 3-го рангу.

За ДНФ функції можна визначити область істинності функції, і, таким чином, відновити її таблицю істинності. В силу того, що диз'юнкція дорівнює одиниці, коли хоча б один диз'юнктивний доданок дорівнює одиниці, область істинності ДНФ дорівнює об'єднанню областей істинності її елементарних кон'юнкцій. Підпишемо під кожною елементарною кон'юнкцією ДНФ значення змінних, при яких ця елементарна кон'юнкція дорівнює одиниці (відмічаючи зірочкою відсутні змінні). Так як замість «*» можна поставити будь-які значення (**0** або **1**) відсутньої змінної, то для кожної елементарної кон'юнкції можна виписати повні набори змінних, на яких вона дорівнює одиниці. При цьому різні елементарні кон'юнкції можуть дорівнювати одиниці на однакових наборах. Природно, до області істинності кожний такий набор входить лише один раз.

Приклад 18. Відновити область істинності для функції $f = x\,\overline{y} \vee \overline{x}\,y\,\overline{z} \vee z$.

Розв'язання. ДНФ заданої функції складається із трьох елементарних кон'юнкцій, кожна з яких містить різну кількість змінних. Отже, для кожної з цих елементарних кон'юнкцій будуть зафіксовані значення різної кількості змінних. Для кон'юнкції $x\,\overline{y}$ фіксується $x = 1$ (змінна x входить в дану елементарну кон'юнкцію без заперечення) і $y = 0$ (змінна y входить в дану елементарну кон'юнкцію із запереченням). Змінна z в даній елементарній кон'юнкції відсутня, тому її значення не фіксується, тому що воно не впливає на значення цієї елементарної кон'юнкції. Елементарна кон'юнкція $\overline{x}\,y\,\overline{z}$ містить всі змінні, від яких залежить задана функція. Отже, для цієї елементарної кон'юнкції будуть зафіксовані значення всіх трьох змінних в залежності від наявності у них заперечень: $x = 0$, $y = 1$, $z = 0$. Остання елементарна кон'юнкція складається із єдиної змінної z. Отже, для цієї елементарної кон'юнкції буде зафіксоване значення лише цієї змінної. Значення змінних x і y на значення цієї елементарної кон'юнкції не впливають і, як наслідок, не фіксуються. Процес пошуку наборів значень змінних, на яких задана функція буде дорівнювати одиниці, тобто пошук області істинності заданої функції можна подати у вигляді наступної схеми.

$$f = x\,\overline{y} \vee \overline{x}\,y\,\overline{z} \vee z$$

$x\,\overline{y}$	$\overline{x}\,y\,\overline{z}$	z
1 0 *	0 1 0	* * 1
1 0 0	0 1 0	0 0 1
1 0 1		0 1 1
		1 0 1
		1 1 1

Із поданої схеми видно, що різні елементарні кон'юнкції можуть приймати одиничне значення на однакових наборах. Наприклад, і елементарна кон'юнкція $x\,\overline{y}$, і елементарна кон'юнкція $\overline{x}\,y\,\overline{z}$ на наборі **(1 0 1)** – обидві будуть дорівнювати одиниці. Це дублювання не порушує рівність одиниці на цьому наборі самої функції f. До області істинності функції f цей набор ввійде один раз. Таким чином, із отриманої схеми можна виписати всю область істинності заданої функції:

ОІ(f) = {(0 0 1), (0 1 0), (0 1 1), (1 0 0), (1 0 1), (1 1 1)}.

Відповідь. **ОИ(f) = {(0 0 1), (0 1 0), (0 1 1), (1 0 0), (1 0 1), (1 1 1)} = {1, 2, 3, 4, 5, 7}.**

Означення. *Піднесення до ступеню* булевих змінних визначається формулою [6]

$$x^{\sigma} = \begin{cases} \overline{x}, & \sigma = 0, \\ x, & \sigma = 1. \end{cases}$$

Із цього означення випливає, що

$$x^{\sigma} = x\,\sigma \vee \overline{x}\,\overline{\sigma}.$$

<u>Теорема 6 (*про диз'юнктивний розклад за сукупністю змінних*)</u>. <u>*Формулювання*</u>. Будь-яку булеву функцію при будь-якому $1 \leqslant k \leqslant n$ можна подати формулою [6, 8, 16]

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \bigvee_{\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_k} x_1^{\sigma_1} \cdot x_2^{\sigma_2} \cdot \ldots \cdot x_k^{\sigma_k} \cdot f(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k, x_{k+1}, \ldots, x_n).$$

<u>*Доведення*</u>. Розглянемо довільний набір $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ значень всіх змінних функції $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. При підстановці до вказаної формули цього набору отримуємо:

$$f(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = \bigvee_{\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_k} \alpha_1^{\sigma_1} \cdot \alpha_2^{\sigma_2} \cdot \ldots \cdot \alpha_k^{\sigma_k} \cdot f(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k, \alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_n).$$

Кон'юнкція $\alpha_1^{\sigma_1}\,\alpha_2^{\sigma_2} \ldots \alpha_k^{\sigma_k}$ обертається в нуль, якщо хоча б один з кон'юнктів $\alpha_i^{\sigma_i} = 0$, $i = \overline{1,k}$. Із означення піднесення до ступеню булевої змінної випливає, що $\alpha_i^{\sigma_i} = 0$, коли $\alpha_i \neq \sigma_i$. При цьому $\alpha_1^{\sigma_1}\,\alpha_2^{\sigma_2} \ldots \alpha_k^{\sigma_k} = 0$, тому відповідний логічний доданок (елементарну кон'юнкцію) можна відкинути. Інакше, коли $\alpha_i = \sigma_i$, маємо $\alpha_i^{\sigma_i} = 1$. Таким чином, $\alpha_1^{\sigma_1}\,\alpha_2^{\sigma_2} \ldots \alpha_k^{\sigma_k} = 1$ лише тоді, коли $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k) = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k)$. З урахуванням цього, для правої частини рівності маємо:

$$\bigvee_{\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_k} \alpha_1^{\sigma_1} \cdot \alpha_2^{\sigma_2} \cdot \ldots \cdot \alpha_k^{\sigma_k} \cdot f(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k, \alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_n) =$$

$$= \alpha_1^{\alpha_1} \cdot \alpha_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot \alpha_k^{\alpha_k} \cdot f(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k, \alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_n) =$$

$$= 1 \wedge f(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = f(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n).$$

В силу того, що набор значень змінних $\tilde{\alpha}$ обирався довільно, вказаний розклад має місце на будь-якому наборі значень змінних функції $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. **Теорему доведено**.

<u>Наслідок 1 (*диз'юнктивний розклад за однією змінною*)</u>. Для розкладу булевої функції $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ за змінною x_i має місце формула:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n) =$$

$$= x_i \cdot f(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \ldots, x_n) \vee \overline{x}_i \cdot f(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots, x_n).$$

<u>Наслідок 2 (*диз'юнктивний розклад за всіма змінними*)</u>. Для розкладу булевої функції $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ за всіма змінними має місце формула:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \bigvee_{\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n} x_1^{\sigma_1} \cdot x_2^{\sigma_2} \cdot \ldots \cdot x_n^{\sigma_n} \cdot f(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n).$$

При цьому є очевидним, що якщо $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \neq 0$, то

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \bigvee_{\substack{\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n \\ f(\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n)=1}} x_1^{\sigma_1} \cdot x_2^{\sigma_2} \cdot \ldots \cdot x_n^{\sigma_n}.$$

Приклад 19. Для функції $f(x, y, z, t) = (\overline{\overline{x} \vee y\,\overline{z}})\,t$ знайти диз'юнктивний розклад за змінними x і z.

Розв'язання. Використовуючи теорему 6, отримуємо:

$$f(x,\ y,\ z,\ t) = \bigvee_{\sigma_1,\sigma_3} \alpha_1^{\sigma_1} \cdot \alpha_3^{\sigma_3} \cdot f(\sigma_1,\ y,\ \sigma_3,\ t) =$$

$$= \overline{x}\,\overline{z}\,f(0, y, 0, t) \vee \overline{x}\,z\,f(0, y, 1, t) \vee x\,\overline{z}\,f(1, y, 0, t) \vee x\,z\,f(1, y, 1, t).$$

Обчислимо вказані значення функції:

$$f(0, y, 0, t) = (\overline{\overline{0} \vee y \cdot \overline{0}}) \wedge t = \overline{1 \vee y \cdot 1} \wedge t = \overline{1} \cdot t = 0 \cdot t = 0;$$

$$f(0, y, 1, t) = (\overline{\overline{0} \vee y \cdot \overline{1}}) \wedge t = \overline{1 \vee y \cdot 0} \wedge t = \overline{1} \cdot t = 0 \cdot t = 0;$$

$$f(1, y, 0, t) = (\overline{\overline{1} \vee y \cdot \overline{0}}) \wedge t = \overline{0 \vee y \cdot 1} \wedge t = \overline{y}\,t\,;$$

$$f(1, y, 1, t) = (\overline{\overline{1} \vee y \cdot \overline{1}}) \wedge t = \overline{0 \vee y \cdot 0} \wedge t = \overline{0} \cdot t = 1 \cdot t = t\,.$$

Підставляючи отримані значення функції до формули диз'юнктивного розкладу за змінними x і z, отримуємо:

$$f(x, y, z, t) = \overline{x}\,\overline{z} \cdot 0 \vee \overline{x}\,z \cdot 0 \vee x\,\overline{z} \cdot \overline{y}\,t \vee x\,z \cdot t = x\,\overline{z}\,\overline{y}\,t \vee x\,z\,t\,.$$

Відповідь. $f(x, y, z, t) = x\,\overline{z}\,\overline{y}\,t \vee x\,z\,t\,.$

6.2. Досконала диз'юнктивна нормальна форма (ДДНФ)

Означення. Логічна функція n змінних, що дорівнює одиниці лише на одному їх наборі, називається *конституентою одиниці* [19].

Теорема 7. *Формулювання*. Елементарна кон'юнкція всіх n змінних, що входять до функції f, є конституентою одиниці [4].

Доведення. У відповідності з наслідком із теореми 4, елементарна кон'юнкція довільної кількості змінних дорівнює одиниці лише на одному наборі цих змінних. Отже, і кон'юнкція n змінних дорівнює одиниці лише на одному наборі їх значень. **Теорему доведено**.

Теорема 8. *Формулювання*. Кількість конституент одиниці n змінних дорівнює 2^n [8].

Доведення. Кількість наборів значень для n змінних дорівнює 2^n, а кожному набору, за теоремою 5, відповідає одна й лише одна конституента одиниці. **Теорему доведено**.

Таким чином, для будь-якої функції існує взаємно-однозначна відповідність між її конституентами одиниці і наборами, на яких цю функцію задано. Наприклад: для $f(x, y, z, t)$: $\overline{x}\,y\,\overline{z}\,\overline{t} = 1$ на наборі **(0 1 0 0)**; набору **(0 0 0 1)** відповідає конституента $\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}\,t = 1$; вираз $x\,\overline{y}\,t$ взагалі не є конституентою для цієї функції, тому що в ньому відсутня змінна z.

Означення. Якщо в кожному члені нормальної форми містяться всі змінні в прямому або в інверсному вигляді, (тобто із заперечення або без нього), то така форма називається *досконалою нормальною формою*.

Означення. Диз'юнкція конституент одиниці, що дорівнює одиниці на тих самих наборах, що й задана функція, називається *досконалою диз'юнктивною нормальною формою* (*ДДНФ*) [19].

Теорема 9. *Формулювання*. Будь-яка логічна функція f, крім **константи 0**, в єдиний спосіб може бути поданою в ДДНФ [13, 17].

Доведення. Дійсно, будь-яка логічна функція f характеризується тим, що на k $(1 \leqslant k \leqslant 2^n)$ наборах вона дорівнює одиниці, а на решті наборах – нулю. Конституента одиниці дорівнює одиниці лише на одному єдиному наборі, а на решті наборах приймає нульове значення. Тому якщо всі конституенти одиниці K_i^1, $i = \overline{1, k}$, що дорівнюють одиниці на тих самих наборах, що й логічна функція, об'єднати знаком диз'юнкції, то у відповідності із правилом $1 \vee x = 1$ функція f буде дорівнювати одиниці на тих самих наборах, що й конституенти одиниці. В той же час функція f буде дорівнювати нулю, якщо жодна з конституент одиниці K_i^1 не буде дорівнювати одиниці, що можливо лише за наявності наборів значень змінних, що не належать до жодної з цих конституент. Це означає, що будь-яка функція f може бути поданою за допомогою диз'юнкції конституент одиниці. Таке подання є єдиним, тому що в іншому випадку мають бути присутніми дві або більше різних конституент одиниці, що дорівнюють одиниці на одному й тому ж самому наборі значень змінних, що у відповідності із наслідком із теореми 4 є неможливим. **Константа 0** на всіх наборах дорівнює нулю. Тому її неможливо подати за допомогою конституент одиниці, тобто в ДДНФ. **Теорему доведено**.

Виходячи із доведеної теореми 9, розглянемо **задачу подання логічних функцій в ДДНФ**. Для її розв'язання треба скласти диз'юнкцію конституент одиниці, що дорівнюють одиниці на тих самих наборах, що й задана функція, за наступним алгоритмом [4, 8]:

1. Виписати за кількістю одиниць в логічній функції кон'юнкції всіх аргументі від **1**-го до n-го і з'єднати їх знаками диз'юнкції;
2. Записати під кожною змінною її одиничне або нульове значення у наборі, що відповідає даній кон'юнкції.
3. Над змінними, що дорівнюють нулю, поставити знаки заперечення.

Означення. Даний алгоритм називається *записом логічної функції по одиницях* [19].

Приклад 20. Знайти ДДНФ для функції, що дорівнює одиниці на наборах **№№ 0**, **3**, **7**, і дорівнює нулю на решті наборах значень змінних.

Розв'язання. Процес пошуку ДДНФ заданої функції зручно проводити таблично. Дана функція в своєму стовпці значень має три одиниці. Отже, її ДДНФ буде складатися із трьох конституент одиниці. Для їх пошуку утворюється стовпець із так званих «заготівель», які є кон'юнкціями всіх змінних. Рядки тих наборів, на яких досліджувана функція дорівнює нулю, в таблиці зафарбовано чорним, тому що в процесі пошуку ДДНФ вони не беруть участь. Кожна така «заготівля» відповідає лише одному певному набору із тих, на яких функція дорівнює одиниці. У відповідності з цими наборами, в «заготівлях» розставляються заперечення над змінними: над нулями заперечення ставляться, одиниці залишаються без змін. Потім конституенти одиниці, отримані в останньому стовпці таблиці, з'єднуються операціями диз'юнкції. Отриманий запис буде являти собою ДДНФ досліджуваної функції.

№	x	y	z	f	Члени ДДНФ	
0	0	0	0	1	$x\ y\ z$ 0 0 0	$\bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z}$
1	0	0	1	0		
2	0	1	0	0		
3	0	1	1	1	$x\ y\ z$ 0 1 1	$\bar{x}\,y\,z$
4	1	0	0	0		
5	1	0	1	0		
6	1	1	0	0		
7	1	1	1	1	$x\ y\ z$ 1 1 1	$x\,y\,z$

Таким чином, для цієї функції

$$\text{ДДНФ}(f)= \bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z} \vee \bar{x}\,y\,z \vee x\,y\,z.$$

Відповідь. **ДДНФ(*f*)=** $\bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z} \vee \bar{x}\,y\,z \vee x\,y\,z$.

Але можливий і зворотний образ дій, тобто відновлення області істинності й, відповідно, таблиці істинності функції за її ДДНФ. Для цього використовується **алгоритм, зворотний запису логічної функції по одиницях**:

1. Для кожної конституенти із ДДНФ функції визначити єдиний набор значень змінних, на якому лише вона дорівнює одиниці (змінні із запереченням дорівнюють нулю, змінні без заперечення дорівнюють одиниці).
2. На відповідних наборах в стовпці значень функції поставити одиниці.
3. На решті наборах поставити нулі.

Приклад 21. Відновити таблицю істинності для функції, поданої в ДДНФ:

$$\text{ДДНФ}(f) = x\,\bar{y}\,z \vee \bar{x}\,y\,z \vee x\,y\,\bar{z} \vee \bar{x}\,\bar{y}\,z.$$

Розв'язання. Для розв'язання такої задачі будується таблиця, подібна до тієї, що використовувалась для розв'язання приклада 20. ДДНФ заданої функції складається із чотирьох конституент одиниці. Отже, функція в своєму стовпці значень буде мати рівно чотири одиниці. Із побудованої таблиці видно відповідність між конституентами одиниці та наборами, на яких кожна з них приймає одиничне значення. В цій відповідності беруть участь чотири набори. В стовпці значень функції на цих наборах ставляться одиниці. Клітинки для решти наборів в таблиці зафарбовано чорним. В стовпці значень функції ці набори заповнюються нулями.

№	x	y	z	Члени ДДНФ		f
0	0	0	0			0
1	0	0	1	$x\ y\ z$ 0 0 1	$\bar{x}\,\bar{y}\,z$	1
2	0	1	0			0
3	0	1	1	$x\ y\ z$ 0 1 1	$\bar{x}\,y\,z$	1
4	1	0	0			0
5	1	0	1	$x\ y\ z$ 1 0 1	$x\,\bar{y}\,z$	1
6	1	1	0	$x\ y\ z$ 1 1 0	$x\,y\,\bar{z}$	1
7	1	1	1			0

Таким чином, табличне задання даної функції має вигляд

$$f = (0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0).$$

Відповідь. $f = (0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0)$.

Однак подати логічну функцію в ДДНФ можна й в інший спосіб. Якщо якийсь член ДНФ не містить змінної x_i, то вона вводиться тотожним перетворенням [4, 5]

$$\varphi = \varphi(x_i \vee \overline{x}_i) = \varphi\, x_i \vee \varphi\, \overline{x}_i\ . \qquad (25)$$

В силу тотожностей ідемпотентності однакові члени, якщо вони з'являються, замінюються одним таким членом.

Означення. Співвідношення (25) називається *операцією розгортання в ДДНФ*.

Приклад 22. Для функції із приклада 17 знайти її ДДНФ аналітичним шляхом.

Решение. ДНФ для цієї функції вже знайдено. Таким чином, ми можемо скористатися результатом, що отриманий в прикладі 17:

$$ДНФ(f) = x\,y \vee \overline{x}\,\overline{y} \vee \overline{y}\,\overline{z} = x\,y\,(z \vee \overline{z}) \vee \overline{x}\,\overline{y}\,(z \vee \overline{z}) \vee (x \vee \overline{x})\,\overline{y}\,\overline{z} =$$

$$= x\,y\,z \vee x\,y\,\overline{z} \vee \overline{x}\,\overline{y}\,z \vee \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z} \vee x\,\overline{y}\,\overline{z} \vee \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z} = x\,y\,z \vee x\,y\,\overline{z} \vee \overline{x}\,\overline{y}\,z \vee \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z} \vee x\,\overline{y}\,\overline{z} = ДДНФ(f).$$

Відповідь. $ДДНФ(f) = x\,y\,z \vee x\,y\,\overline{z} \vee \overline{x}\,\overline{y}\,z \vee \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z} \vee x\,\overline{y}\,\overline{z}$.

6.3. Кон'юнктивна нормальна форма (КНФ)

Означення. Диз'юнкція декількох різних змінних, взятих із запереченням або без нього, називається *елементарною диз'юнкцією* [19].

Кожна змінна, яку взято із запереченням або без, може входити в дану окрему елементарну диз'юнкцію не більше, ніж один раз. Наприклад, вирази $x_1 \vee \overline{x}_2$, $x_1 \vee \overline{x}_2 \vee x_3$, $x \vee y \vee z$ є елементарними диз'юнкціями, а вирази $\overline{x \vee y}$ і $(x \vee y)\,(x \vee \overline{z})$ - ні, тому що в 1-му виразі присутнє спільне заперечення, що відноситься не безпосередньо до змінних, а до операції диз'юнкції, а в 2-му виразі присутня операція кон'юнкції.

Теорема 10. *Формулювання*. Елементарна диз'юнкція дорівнює нулю тоді й лише тоді, коли змінні, що входять до її складу із запереченням, дорівнюють **1**, а змінні, що входять до її складу без заперечення, дорівнюють **0** [4, 5].

Доведення. У випадку, коли в елементарній диз'юнкції змінні, що входять до її складу із запереченням, дорівнюють **1**, а змінні, що входять до її складу без заперечення, дорівнюють **0**, то в силу того, що $\overline{1} = 0$ і $0 \vee x = x$, диз'юнкція всіх змінних буде дорівнювати нулю. Тепер припустимо, що в заданій елементарній диз'юнкції хоча б одна змінна, що входить до її складу із запереченням, дорівнює **0** з будь-якого набору змінних. Тоді це заперечення цієї нульової змінної у відповідності з тим, що $\overline{0} = 1$, буде дорівнювати одиниці. Поява хоча б однієї одиниці в диз'юнкції змінних у відповідності з властивістю $1 \vee x = 1$ призведе до одиничного значення всієї диз'юнкції. Припустимо тепер, що хоча б одна змінна без заперечення дорівнює **1**. Тоді у відповідності з властивістю диз'юнкції $1 \vee x = 1$ диз'юнкція змінної, що прийняла одиничне значення, з рештою змінними, незалежно від їх значень, буде дорівнювати одиниці. Таким чином, елементарна диз'юнкція дорівнює нулю лише в одному єдиному випадку, коли всі змінні, що входять до її складу із запереченням, дорівнюють **1**, а всі змінні, що входять до її складу без заперечення, дорівнюють **0**. **Теорему доведено**.

Наслідок із теореми 10. Кожній елементарній диз'юнкції відповідає один й лише один набор значень змінних, з яких вона складається, на якому вона дорівнює нулю. Із теореми 10 випливає, що таким набором є набор, на якому змінні без заперечення дорівнюють **0**, а змінні із запереченням дорівнюють **1**.

Наприклад, набором значень змінних (x_1, x_2, x_3), на якому елементарна диз'юнкція $\psi = \overline{x}_1 \vee x_2 \vee x_3 = 0$, буде набор **(1 0 0)**, тому що $\psi = \overline{1} \vee 0 \vee 0 = 0 \vee 0 \vee 0 = 0$. Цей набор буде єдиним, тому що будь-який інший набор перетворює елементарну диз'юнкцію ψ в одиницю. Якщо, скажемо, змінні x_1, x_2, і x_3 приймуть відповідно значення **1**, **1** і **0**, то $\psi = \overline{1} \vee 1 \vee 0 = 0 \vee 1 \vee 0 = 1$.

Теорема 11. *Формулювання*. Для кожного набору значень змінних існує одна й лише одна їх елементарна диз'юнкція, що дорівнює нулю [19].

Доведення. Зафіксуємо довільний набор значень змінних і побудуємо елементарну диз'юнкцію, що приймає на цьому наборі значення **0**. Це означає, що в цій елементарній диз'юнкції кожній одиниці набору буде відповідати одна змінна із запереченням, а кожному нулю набору – одна змінна без заперечення. Будь-яка інша диз'юнкція тих самих змінних буде відрізнятися наявністю або відсутністю заперечення хоча б в одній змінній. Це означає, що або x_i перетворюється в $\overline{x}_i$, або $\overline{x}_i$ перетворюється в x_i. В результаті елементарна диз'юнкція стане дорівнювати одиниці. **Теорему доведено**.

Означення. Логічна функція, яку подано кон'юнкцією елементарних диз'юнкцій, називається *кон'юнктивною нормальною формою* (*КНФ*) [19].

Наприклад, $(x \vee \overline{y})\,(\overline{x} \vee y \vee \overline{z})$ – КНФ, тому що всі умови, що висуваються до КНФ, виконані; $\overline{x \vee z}\,(x \vee y)$ – не КНФ, тому що заперечення відноситься до диз'юнкції змінних, тобто не до змінної, а до операції; $(\overline{y} \vee z) \downarrow (x \vee y \vee \overline{z})$ – не КНФ, тому що формула містить небулеві операції.

Алгоритм приведення функції до КНФ аналітичним шляхом [4]:

1. Якщо початкова формула містить небулеві операції, то вони попередньо виражаються через диз'юнкцію, кон'юнкцію та заперечення.
2. За допомогою законів де Моргана формула зводиться до такого вигляду, що знаки заперечення відносилися лише до окремих змінних.
3. На основі 2-го закону дистрибутивності формула зводиться до кон'юнкції елементарних диз'юнкцій.
4. Отриманий вираз спрощується у відповідності із законом ідемпотентності та властивостями заперечення.

Приклад 23. Розглянемо функцію $f = \overline{x \oplus y} \vee (y \downarrow z)$ із прикладу 17 та зведемо її до КНФ. В цьому випадку маємо:

$$f = \overline{x \oplus y} \vee (y \downarrow z) = (x \sim y) \vee \overline{y \vee z} = (x\,y \vee \overline{x}\,\overline{y}) \vee \overline{y}\,\overline{z} = x\,y \vee \overline{x}\,\overline{y} \vee \overline{y}\,\overline{z} =$$

$$= (x\,y \vee \overline{x}\,\overline{y} \vee \overline{y})\,(x\,y \vee \overline{x}\,\overline{y} \vee \overline{z}) = (x\,y \vee \overline{y})\,(x\,y \vee \overline{x}\,\overline{y} \vee \overline{z}) =$$

$$= (x \vee \overline{y})\,(y \vee \overline{y})\,(x \vee \overline{x}\,\overline{y} \vee \overline{z})\,(y \vee \overline{x}\,\overline{y} \vee \overline{z}) =$$

$$= (x \vee \overline{y})\,(x \vee \overline{x} \vee \overline{z})\,(x \vee \overline{y} \vee \overline{z})\,(y \vee \overline{x} \vee \overline{z})\,(y \vee \overline{y} \vee \overline{z}) =$$

$$= (x \vee \overline{y})\,(x \vee \overline{y} \vee \overline{z})\,(\overline{x} \vee y \vee \overline{z}) = (x \vee \overline{y})\,(\overline{x} \vee y \vee \overline{z}) = \text{КНФ}(f).$$

За КНФ функції можна визначити область хибності функції, і, таким чином, як і за ДНФ, відновити її таблицю істинності. В силу того, що кон'юнкція дорівнює нулю, коли хоча б один

кон'юнктивний множник дорівнює нулю, область хибності КНФ дорівнює об'єднанню областей хибності її елементарних диз'юнкцій. Підпишемо під кожною елементарною диз'юнкцією КНФ значення змінних, при яких ця елементарна диз'юнкція дорівнює нулю (відмічаючи зірочкою відсутні змінні). Оскільки замість «*» можна підставити будь-які значення (**0** або **1**) відсутньої змінної, то для кожної елементарної диз'юнкції можна виписати повні набори змінних, на яких ця елементарна диз'юнкція дорівнює нулю. При цьому різні елементарні диз'юнкції можуть дорівнювати нулю на однакових наборах. Природно, до області хибності кожний такий набор входить лише один раз.

<u>Приклад 24</u>. Відновити область хибності для функції $f = z\,(x \vee \overline{y})\,(\overline{x} \vee y \vee \overline{z})$.

<u>Розв'язання</u>. КНФ заданої функції складається із трьох елементарних диз'юнкцій, кожна з яких містить різну кількість змінних. Отже, для кожної з цих елементарних диз'юнкцій будуть зафіксовані значення різної кількості змінних. Для диз'юнкції $(x \vee \overline{y})$ фіксується $x = 0$ (змінна x входить в дану елементарну диз'юнкцію без заперечення) і $y = 1$ (змінна y входить в дану елементарну диз'юнкцію із запереченням). Змінна z в даній елементарній диз'юнкції відсутня, тому її значення не фіксується, тому що воно не впливає на значення цієї елементарної диз'юнкції. Елементарна диз'юнкція $(\overline{x} \vee y \vee \overline{z})$ містить всі змінні, від яких залежить задана функція. Отже, для цієї елементарної диз'юнкції будуть зафіксовані значення всіх трьох змінних в залежності від наявності у них заперечень: $x = 1$, $y = 0$, $z = 1$. Перша елементарна диз'юнкція складається із єдиної змінної z. Отже, для цієї елементарної диз'юнкції буде зафіксоване значення лише цієї змінної. Значення змінних x і y на значення цієї елементарної диз'юнкції не впливають і, як наслідок, не фіксуються. Процес пошуку наборів значень змінних, на яких задана функція буде дорівнювати нулю, тобто пошуку області хибності заданої функції можна подати у вигляді наступної схеми.

$$f = \quad z\,(x \vee \overline{y}\quad)\,(\overline{x} \vee y \vee \overline{z}\,)$$

*	*	0	0	1	*	1	0	1
0	0	0	0	1	0	1	0	1
0	1	0	0	1	1			
1	0	0						
1	1	0						

Із поданої схеми видно, що різні елементарні диз'юнкції можуть приймати нульове значення на однакових наборах. Наприклад, і елементарна диз'юнкція $(x \vee \overline{y})$, і елементарна диз'юнкція z на наборі **(0 1 0)** – обидві будуть дорівнювати нулю. Це дублювання не порушує рівність нулю на цьому наборі самої функції f. До області хибності функції f цей набор ввійде один раз. Таким чином, із отриманої схеми можна виписати всю область хибності заданої функції:

ОХ(f) = {(0 0 0), (0 1 0), (0 1 1), (1 0 0), (1 0 1), (1 1 0)}.

<u>Відповідь</u>. **ОХ(f) = {(0 0 0), (0 1 0), (0 1 1), (1 0 0), (1 0 1), (1 1 0)} = {0, 2, 3, 4, 5, 6}.**

<u>Теорема 12 (*про кон'юнктивний розклад за сукупністю змінних*)</u>. *<u>Формулювання</u>*. Будь-яку булеву функцію при будь-якому $1 \leqslant k \leqslant n$ можна подати формулою [6, 8]

$$f(x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n) = \bigwedge_{\sigma_1,\sigma_2,\dots,\sigma_k} \left(x_1^{\overline{\sigma}_1} \vee x_2^{\overline{\sigma}_2} \vee \dots \vee x_k^{\overline{\sigma}_k} \vee f(\sigma_1,\ \sigma_2,\ \dots,\ \sigma_k,\ x_{k+1},\ \dots,\ x_n)\right).$$

<u>Доведення</u>. Розглянемо довільний набор $\tilde{\alpha} = (\alpha_1,\ \alpha_2,\ \dots,\ \alpha_n)$ значень всіх змінних функції $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. При підстановці до вказаної формули цього набору отримуємо:

$$f(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \dots,\ \alpha_n) = \bigwedge_{\sigma_1,\sigma_2,\dots,\sigma_k} (\alpha_1^{\overline{\sigma}_1} \vee \alpha_2^{\overline{\sigma}_2} \vee \dots \vee \alpha_k^{\overline{\sigma}_k} \vee f(\sigma_1,\ \sigma_2,\ \dots,\ \sigma_k,\ x_{k+1},\ \dots,\ x_n)) .$$

Диз'юнкція $\alpha_1^{\overline{\sigma}_1} \vee \alpha_2^{\overline{\sigma}_2} \vee \dots \vee \alpha_k^{\overline{\sigma}_k}$ перетворюється в одиницю, якщо хоча б один із диз'юнктів $\alpha_i^{\overline{\sigma}_i} = 1$, $i = \overline{1, k}$. Із означення піднесення до ступеню булевої змінної випливає, що $\alpha_i^{\overline{\sigma}_i} = 1$, коли $\alpha_i \neq \overline{\sigma}_i$. При цьому $\alpha_1^{\overline{\sigma}_1} \vee \alpha_2^{\overline{\sigma}_2} \vee \dots \vee \alpha_k^{\overline{\sigma}_k} = 1$, тому відповідний логічний множник (елементарну диз'юнкцію) можна відкинути. Інакше, коли $\alpha_i = \overline{\sigma}_i$, маємо $\alpha_i^{\overline{\sigma}_i} = 0$. Таким чином, $\alpha_1^{\overline{\sigma}_1} \vee \alpha_2^{\overline{\sigma}_2} \vee \dots \vee \alpha_k^{\overline{\sigma}_k} = 0$ лише тоді, коли $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k) = (\overline{\sigma}_1, \overline{\sigma}_2, \dots, \overline{\sigma}_k)$. З урахуванням цього, для правої частини рівності маємо:

$$\bigwedge_{\sigma_1,\sigma_2,\dots,\sigma_k} (\alpha_1^{\overline{\sigma}_1} \vee \alpha_2^{\overline{\sigma}_2} \vee \dots \vee \alpha_k^{\overline{\sigma}_k} \vee f(\sigma_1,\ \sigma_2,\ \dots,\ \sigma_k,\ \alpha_{k+1},\ \dots,\ \alpha_n)) =$$

$$= \alpha_1^{\overline{\alpha}_1} \vee \alpha_2^{\overline{\alpha}_2} \vee \dots \vee \alpha_k^{\overline{\alpha}_k} \vee f(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \dots,\ \alpha_k,\ \alpha_{k+1},\ \dots,\ \alpha_n) =$$

$$= 0 \vee f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n).$$

В силу того, що набор значень змінних $\tilde{\alpha}$ обирався довільно, вказаний розклад має місце на будь-якому наборі значень змінних функції $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. **Теорему доведено**.

<u>Наслідок 1 (*кон'юнктивний розклад за однією змінною*)</u>. Для розкладу булевої функції $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ за змінною x_i має місце формула:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n) =$$

$$= (x_i \vee f(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n))\ (\overline{x}_i \vee f(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_n)).$$

<u>Наслідок 2 (*кон'юнктивний розклад за всіма змінними*)</u>. Для розкладу булевої функції $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ за всіма змінними має місце формула:

$$f(x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n) = \bigwedge_{\sigma_1,\sigma_2,\dots,\sigma_n} (x_1^{\overline{\sigma}_1} \vee x_2^{\overline{\sigma}_2} \vee \dots \vee x_n^{\overline{\sigma}_n} \vee f(\sigma_1,\ \sigma_2,\ \dots,\ \sigma_n)) .$$

При цьому є очевидним, що якщо $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \neq 1$, то

$$f(x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n) = \bigwedge_{\substack{\sigma_1,\sigma_2,\dots,\sigma_n \\ f(\sigma_1,\sigma_2,\dots,\sigma_n)=0}} x_1^{\overline{\sigma}_1} \vee x_2^{\overline{\sigma}_2} \vee \dots \vee x_n^{\overline{\sigma}_n} .$$

<u>Приклад 25</u>. Для функції $f(x, y, z, t) = (\overline{\overline{x} \vee y\,\overline{z}}) \vee t$ знайти кон'юнктивний розклад за змінними x і z.

<u>Розв'язання</u>. Використовуючи теорему 12, отримуємо:

$$f(x,\ y,\ z,\ t) = \bigwedge_{\sigma_1,\sigma_3} (\alpha_1^{\overline{\sigma}_1} \vee \alpha_3^{\overline{\sigma}_3} \vee f(\sigma_1,\ y,\ \sigma_3,\ t)) =$$

$$= (x \vee z \vee f(0, y, 0, t))\ (x \vee \overline{z} \vee f(0, y, 1, t))\ (\overline{x} \vee z \vee f(1, y, 0, t))\ (\overline{x} \vee \overline{z} \vee f(1, y, 1, t)).$$

Обчислимо вказані значення функції:

$$f(0, y, 0, t) = (\overline{\overline{0} \vee y \cdot \overline{0}}) \vee t = \overline{1 \vee y \cdot 1} \vee t = \overline{1} \vee t = 0 \vee t = t;$$

$$f(0, y, 1, t) = (\overline{\overline{0} \vee y \cdot \overline{1}}) \vee t = \overline{1 \vee y \cdot 0} \vee t = \overline{1} \vee t = 0 \vee t = t;$$

$$f(1, y, 0, t) = (\overline{\overline{1} \vee y \cdot \overline{0}}) \vee t = \overline{0 \vee y \cdot 1} \vee t = \overline{y} \vee t\,;$$

$$f(1, y, 1, t) = (\overline{\overline{1} \vee y \cdot \overline{1}}) \vee t = \overline{0 \vee y \cdot 0} \vee t = \overline{0} \vee t = 1 \vee t = 1\,.$$

Підставляючи отримані значення функції до формули кон'юнктивного розкладу за змінними x і z, отримуємо:

$$f(x, y, z, t) = (x \vee z \vee t)\,(x \vee \overline{z} \vee t)\,(\overline{x} \vee z \vee \overline{y} \vee t)\,(\overline{x} \vee \overline{z} \vee 1) =$$

$$= (x \vee z \vee t)\,(x \vee \overline{z} \vee t)\,(\overline{x} \vee z \vee \overline{y} \vee t).$$

Відповідь. $f(x, y, z, t) = (x \vee z \vee t)\,(x \vee \overline{z} \vee t)\,(\overline{x} \vee z \vee \overline{y} \vee t)$.

6.4. Досконала кон'юнктивна нормальна форма (ДКНФ)

Означення. Логічна функція n змінних, що приймає значення **0** лише на одному їх наборі, називається *конституентою нуля* [19].

Теорема 13. *Формулювання*. Елементарна диз'юнкція всіх n змінних, що входять до функції f, є конституентою нуля [4].

Доведення. У відповідності до наслідку із теореми 10, елементарна диз'юнкція довільної кількості змінних приймає нульове значення лише на одному наборі цих змінних. Отже, і диз'юнкція всіх n змінних дорівнює нулю лише на одному наборі їх значень. **Теорему доведено**.

Теорема 14. *Формулювання*. Кількість конституент нуля n змінних дорівнює 2^n [8].

Доведення. Кількість наборів для n змінних дорівнює 2^n , а кожному набору, за теоремою 11, відповідає одна й лише одна конституента нуля. **Теорему доведено**.

Таким чином, для будь-якої функції існує взаємно-однозначна відповідність між її конституентами нуля і наборами, на яких цю функцію задано. Наприклад: для $f(x, y, z, t)$: $\overline{x} \vee y \vee \overline{z} \vee \overline{t} = 0$ на наборі **(1 0 1 1)**; набору **(1 1 1 0)** відповідає конституента $\overline{x} \vee \overline{y} \vee \overline{z} \vee t = 0$; вираз $x \vee \overline{y} \vee t$ взагалі не є конституентою, тому що в ньому відсутня змінна z.

Означення. Кон'юнкція конституент нуля, що дорівнює нулю на тих самих наборах значень змінних, що й задана функція, називається *досконалою кон'юнктивною нормальною формою* (*ДКНФ*) [8, 19].

Теорема 15. *Формулювання*. Будь-яку логічну функцію, за виключенням **константи 1**, в єдиний спосіб можна подати в ДКНФ [13, 17].

Доведення. Дійсно, будь-яка логічна функція f характеризується тим, що на k $(1 \leqslant k \leqslant 2^n)$ наборах вона дорівнює нулю, а на решті наборах – одиниці. Конституента нуля дорівнює нулю лише на одному єдиному наборі, а на решті наборах приймає одиничне значення. Тому якщо всі конституенти нуля K_i^0, $i = \overline{1, k}$, що дорівнюють нулю на тих самих наборах, що й логічна функція, об'єднати знаком кон'юнкції, то у відповідності з правилом $0 \wedge x = 0$ функція f буде дорівнювати нулю на тих самих наборах, що й конституенти нуля. В той же час функція f буде дорівнювати одиниці, якщо жодна із конституент нуля K_i^0 не буде дорівнювати нулю, що можливо лише за наявності наборів значень змінних, що не належать до жодної з цих конституент. Це означає, що будь-яка функція f може бути поданою за допомогою кон'юнкції конституент нуля. Таке подання є єдиним, тому що в іншому випадку мають бути присутніми дві або більше різних конституент нуля, що дорівнюють нулю на одному й самому наборі

значень змінних, що у відповідності до наслідку із теореми 10 є неможливим. **Константа 1** на всіх наборах дорівнює одиниці. Тому її неможливо подати за допомогою конституент нуля, тобто в ДКНФ. **Теорему доведено**.

Виходячи із теореми 15, розглянемо **задачу подання логічної функції в ДКНФ**. Для її розв'язання треба скласти кон'юнкцію тих конституент нуля, що дорівнюють нулю на тих самих наборах змінних, що й задана функція, за наступним алгоритмом [4, 8]:

1. Виписати за кількістю нулів в логічній функції диз'юнкції всіх аргументів від **1**-го до ***n***-го і з'єднати їх знаками кон'юнкції;
2. Записати під кожним аргументом його значення у відповіднім даній диз'юнкції наборі, що дорівнює нулю або одиниці.
3. Над аргументами, що дорівнюють одиниці, поставити знаки заперечення.

Означення. Даний алгоритм називається *записом логічної функції по нулях* [19].

Приклад 26. Знайти ДКНФ для функції із приклада 20, тобто для функції, що дорівнює одиниці на наборах **№№ 0**, **3**, **7**, і дорівнює нулю на решті наборах значень змінних.

Решение. Процес пошуку ДКНФ заданої функції зручно проводити таблично. Дана функція у своєму стовпці значень містить п'ять нулів. Отже, її ДКНФ буде складатися із п'яти конституент нуля. Для їх пошуку утворюється стовпець із так званих «заготівель», що є диз'юнкціями всіх змінних. Рядки тих наборів, на яких досліджувана функція дорівнює одиниці, в таблиці зафарбовано чорним кольором, тому що в процесі пошуку ДКНФ вони не беруть участі. Кожна така «заготівля» відповідає лише одному певному набору значень змінних із тих, на яких функція дорівнює нулю. У відповідності з цими наборами, в «заготівлях» розставляються заперечення над змінними: над одиницями заперечення ставляться, нулі залишаються без змін. Потім конституенти нуля, отримані в останньому стовпці таблиці, з'єднуються операціями кон'юнкції. Отриманий запис буде являти собою ДКНФ досліджуваної функції.

№	x	y	z	f	*Члени ДКНФ*	
0	0	0	0	1		
1	0	0	1	0	$x \vee y \vee z$ 0 0 1	$x \vee y \vee \bar{z}$
2	0	1	0	0	$x \vee y \vee z$ 0 1 0	$x \vee \bar{y} \vee z$
3	0	1	1	1		
4	1	0	0	0	$x \vee y \vee z$ 1 0 0	$\bar{x} \vee y \vee z$
5	1	0	1	0	$x \vee y \vee z$ 1 0 1	$\bar{x} \vee y \vee \bar{z}$
6	1	1	0	0	$x \vee y \vee z$ 1 1 0	$\bar{x} \vee \bar{y} \vee z$
7	1	1	1	1		

Таким чином, для цієї функції

$$\text{ДКНФ}(f) = (x \vee y \vee \bar{z})\,(x \vee \bar{y} \vee z)\,(\bar{x} \vee y \vee z) \wedge$$
$$\wedge\,(\bar{x} \vee y \vee \bar{z})\,(\bar{x} \vee \bar{y} \vee z).$$

Відповідь. $\text{ДКНФ}(f) = (x \vee y \vee \bar{z})\,(x \vee \bar{y} \vee z)\,(\bar{x} \vee y \vee z)\,(\bar{x} \vee y \vee \bar{z})\,(\bar{x} \vee \bar{y} \vee z)$.

Як і у випадку з ДДНФ, для кон'юнктивної форми також можливий і зворотній образ дій, тобто відновлення області хибності і, відповідно, таблиці істинності функції за її ДКНФ. Для цього використовується **алгоритм, зворотний запису логічної функції по нулях**:

1. Для кожної конституенти із ДКНФ функції визначити єдиний набор, на якому лише вона дорівнює нулю (змінні із запереченням дорівнюють одиниці, змінні без заперечення дорівнюють нулю).
2. На відповідних наборах в стовпці значень функції поставити нулі.
3. На решті наборах поставити одиниці.

Приклад 27. Відновити таблицю істинності для функції, поданої в ДКНФ:

$$\text{ДКНФ}(f) = (\bar{x} \vee y \vee \bar{z})\,(\bar{x} \vee \bar{y} \vee z)\,(x \vee y \vee \bar{z})\,(x \vee \bar{y} \vee z).$$

Розв'язання. Для розв'язання такої задачі будується таблиця, подібна до тієї, яку було використано для розв'язання приклада 24. ДКНФ заданої функції складається із чотирьох конституент нуля. Отже, функція у своєму стовпці значень буде містити чотири нуля. Із побудованої таблиці видно відповідність між конституентами нуля і наборами, на яких кожна з цих конституент приймає нульове значення. В цій відповідності беруть участь чотири набори. В стовпці значень функції на цих наборах ставляться нулі. Клітинки для решти наборів в таблиці зафарбовано чорним. В стовпці значень функції ці набори заповнюються одиницями.

№	x	y	z	Члени ДКНФ		f
0	0	0	0			1
1	0	0	1	$x \vee y \vee z$ (0 0 1)	$x \vee y \vee \bar{z}$	0
2	0	1	0	$x \vee y \vee z$ (0 1 0)	$x \vee \bar{y} \vee z$	0
3	0	1	1			1
4	1	0	0			1
5	1	0	1	$x \vee y \vee z$ (1 0 1)	$\bar{x} \vee y \vee \bar{z}$	0
6	1	1	0	$x \vee y \vee z$ (1 1 0)	$\bar{x} \vee \bar{y} \vee z$	0
7	1	1	1			1

Таким чином, дана функція має вигляд:

$$f = (1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1).$$

Відповідь. $f = (1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1)$.

Однак, як і з диз'юнктивною формою, подати логічну функцію в ДКНФ можна і в інший, аналітичний спосіб. Якщо якийсь член КНФ не містить змінної x_i, то вона вводиться тотожним перетворенням [4, 5]

$$\psi = \psi \vee x_i\,\bar{x}_i = (\psi \vee x_i)\,(\psi \vee \bar{x}_i). \qquad (26)$$

В силу тотожностей ідемпотентності однакові члени, якщо вони з'являються, замінюються одним таким членом.

Означення. Співвідношення (26) називається *операцією розгортання в ДКНФ*.

Приклад 28. Для функції із прикладу 17 знайти її ДКНФ аналітичним шляхом.

Розв'язок. КНФ для цієї функції вже було знайдено в прикладі 23. Використовуючи цей результат, маємо:

$$\textit{КНФ}(f) = (x \vee \bar{y})\,(\bar{x} \vee y \vee \bar{z}) = (x \vee \bar{y} \vee z\,\bar{z})\,(\bar{x} \vee y \vee \bar{z}) =$$

$$= (x \vee \bar{y} \vee z)\,(x \vee \bar{y} \vee \bar{z})\,(\bar{x} \vee y \vee \bar{z}) = \text{ДКНФ}(f).$$

Відповідь. $\text{ДКНФ}(f) = (x \vee \bar{y} \vee z)\,(x \vee \bar{y} \vee \bar{z})\,(\bar{x} \vee y \vee \bar{z})$.

6.5. Зв'язок між досконалими нормальними формами

Слід звернути увагу на кількість членів в ДДНФ і в ДКНФ, що виписуються *для однієї тієї ж самої функції*. В сумі вони мають дорівнювати кількості наборів, на яких задано функцію від заявленої кількості змінних. Це пов'язане з тим, що на якихось наборах функція дорівнює одиниці (їх кількість відповідає кількості членів ДДНФ для досліджуваної функції), а на решті наборах – нулю (їх кількість відповідає кількості членів ДКНФ досліджуваної функції). Не існує набору, на якому функція могла б одночасно дорівнювати і нулю, і одиниці. Отже, сумарна кількість членів досконалих форм для цієї функції не може перебільшувати кількості наборів. З іншого боку, не існує набору, на якому функція не приймала б ніякого значення. Як наслідок, сумарна кількість членів досконалих форм для цієї функції не може бути меншою за кількість наборів, на яких цю функцію задано. Таким чином, для кожної функції сумарна кількість її конституент одиниці та конституент нуля, тобто сумарна кількість членів її досконалих форм, збігається з кількістю наборів для її задання. Наприклад, функція із прикладів 20 і 26 містить серед своїх значень три одиниці (її ДДНФ складається із трьох конституент одиниці) і п'ять нулів (її ДКНФ складається із п'яти конституент нуля). В підсумку сумарна кількість її конституент нуля та одиниці виводить нас на кількість наборів, на яких її задано. Коли функцію задано таблично, побудова її досконалих форм не викликає труднощів. Але коли функцію задано аналітично і, відповідно, ДДНФ і ДКНФ для неї також отримуються аналітичним шляхом (функція із прикладів 17, 22 і 28), то це правило можна використовувати для самоперевірки, тому що при аналітичних обчисленнях ймовірність припуститися помилки більша.

Крім того, враховуючи принцип двоїстості для операцій диз'юнкції та кон'юнкції, можна записати співвідношення, що пов'язують *ДДНФ і ДКНФ двоїстих одна одній функцій*:

$$\text{(ДДНФ}(f))^* = \text{ДКНФ}(f^*), \tag{27}$$

$$\text{(ДКНФ}(f))^* = \text{ДДНФ}(f^*). \tag{28}$$

Приклад 29. Знайти досконалі форми для функції, двоїстої до функції $f = \overline{x \oplus y} \vee (y \downarrow z)$ із прикладу 17.

Розв'язання. В прикладі 22 для цієї функції було знайдено ДДНФ. Таким чином, маємо:

$$f^* = (\text{ДДНФ}(f))^* = (x\,y\,z \vee x\,y\,\bar z \vee \bar x\,\bar y\,z \vee \bar x\,\bar y\,\bar z \vee x\,\bar y\,\bar z)^* =$$

$$= (x\,y\,z)^*\,(x\,y\,\bar z)^*\,(\bar x\,\bar y\,z)^*\,(\bar x\,\bar y\,\bar z)^*\,(x\,\bar y\,\bar z)^* =$$

$$= (x \vee y \vee z)\,(x \vee y \vee \bar z)\,(\bar x \vee \bar y \vee z)\,(\bar x \vee \bar y \vee \bar z)\,(x \vee \bar y \vee \bar z) = \text{ДКНФ}(f^*) = f^*.$$

В прикладі 28 для цієї функції знайдено ДКНФ. Таким чином, маємо:

$$f^* = (\text{ДКНФ}(f))^* = ((x \vee \bar y \vee z)\,(x \vee \bar y \vee \bar z)\,(\bar x \vee y \vee \bar z))^* =$$

$$= (x \vee \bar y \vee z)^* \vee (x \vee \bar y \vee \bar z)^* \vee (\bar x \vee y \vee \bar z)^* = x\,\bar y\,z \vee x\,\bar y\,\bar z \vee \bar x\,y\,\bar z = \text{ДДНФ}(f^*) = f^*.$$

Відповідь. $\text{ДДНФ}(f^*) = x\,\bar y\,z \vee x\,\bar y\,\bar z \vee \bar x\,y\,\bar z,$

$$\text{ДКНФ}(f^*) = (x \vee y \vee z)\,(x \vee y \vee \bar z)\,(\bar x \vee \bar y \vee z)\,(\bar x \vee \bar y \vee \bar z)\,(x \vee \bar y \vee \bar z).$$

Цей зв'язок також легко помітити для функцій, які задано таблично.

Приклад 30. Знайти досконалі форми для функції, двоїстої до функції f, що дорівнює одиниці на наборах **№№ 0, 3, 7**, і дорівнює нулю на решті наборах значень змінних.

Розв'язання. В прикладах 20 і 26 вже розглянуто функцію f і наведено її таблицю істинності. Таким чином, можна записати таблицю істинності для f^*:

№	x	y	z	f	$f\updownarrow$	$f^* = \overline{(f\updownarrow)}$
0	0	0	0	1	1	0
1	0	0	1	0	0	1
2	0	1	0	0	0	1
3	0	1	1	1	0	1
4	1	0	0	0	1	0
5	1	0	1	0	0	1
6	1	1	0	0	0	1
7	1	1	1	1	1	0

Як видно із наведеної таблиці, кількість одиниць в стовпці значень початкової функції (кількість її конституент одиниці) збігається з кількістю нулів в стовпці значень двоїстої функції (з кількістю конституент нуля двоїстої функції). Отже, кількість членів в ДДНФ(f) і в ДКНФ(f^*) буде однаковою. Відповідно збігається кількість нулів в стовпці значень початкової функції (її кількість конституент нуля) і кількість одиниць в стовпці значень двоїстої функції (кількість конституент одиниці двоїстої функції). Тому також буде збігатися кількість членів в ДКНФ(f) і в ДДНФ(f^*). Із правила побудови таблиці двоїстої функції випливає, що відповідні члени початкової функції f і двоїстої функції f^* розташовані на протилежних наборах. Це означає, що заперечення над змінними в парах функцій {ДДНФ(f), ДКНФ(f^*)} і {ДКНФ(f), ДДНФ(f^*)} будуть розташовані однаково. Таким чином, табличним шляхом ми знову приходимо до співвідношень (27) і (28). Отже, маючи таблицю істинності початкової функції, можна відразу виписувати ДДНФ(f^*) і ДКНФ(f^*) двоїстої функції. ДДНФ(f) и ДКНФ(f) знайдено в прикладах 20 і 26. Використовуючи цей результат і наведену таблицю, маємо:

$$\text{ДДНФ}(f) = \bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z} \;\vee\; \bar{x}\,y\,z \;\vee\; x\,y\,z,$$

$$(\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z})\,(\bar{x} \vee y \vee z)\,(x \vee y \vee z) = \text{ДКНФ}(f^*).$$

$$\text{ДКНФ}(f) = (x \vee y \vee \bar{z})\,(x \vee \bar{y} \vee z)\,(\bar{x} \vee y \vee z)\,(\bar{x} \vee y \vee \bar{z})\,(\bar{x} \vee \bar{y} \vee z),$$

$$x\,y\,\bar{z} \;\vee\; x\,\bar{y}\,z \;\vee\; \bar{x}\,y\,z \;\vee\; \bar{x}\,y\,\bar{z} \;\vee\; \bar{x}\,\bar{y}\,z = \text{ДДНФ}(f^*).$$

Відповідь. $\text{ДДНФ}(f^*) = x\,y\,\bar{z} \vee x\,\bar{y}\,z \vee \bar{x}\,y\,z \vee \bar{x}\,y\,\bar{z} \vee \bar{x}\,\bar{y}\,z$,

$$\text{ДКНФ}(f^*) = (\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z})\,(\bar{x} \vee y \vee z)\,(x \vee y \vee z).$$

Метод пошуку КНФ і ДКНФ, заснований на принципі двоїстості, може виявитися більш раціональним, ніж розглянутий вище метод з використанням 2-го закону дистрибутивності у випадках, коли отримана ДНФ містить багато елементарних кон'юнкцій. В цьому випадку можна знаходити КНФ, користуючись алгоритмом [21]

$$f \to \text{ДНФ}(f) \to \text{КНФ}(f^*) \to \text{ДНФ}(f^*) \to \text{КНФ}(f). \qquad (29)$$

Приклад 31. Нехай для деякої функції $\text{ДНФ}(f) = x\,y \vee \bar{x}\,z \vee \bar{y}\,z \vee \bar{x}\,y\,\bar{z}$. Знайти для цієї функції КНФ, використовуючи алгоритм (29), заснований на принципі двоїстості.

Розв'язання. З урахуванням того, що операції диз'юнкції та кон'юнкції є парою двоїстих одна одній операцій, двоїста для даної функції буде мати вигляд:

$$f^* = (\text{ДНФ}(f))^* = (x\,y \vee \bar{x}\,z \vee \bar{y}\,z \vee \bar{x}\,y\,\bar{z})^* = (x \vee y)\,(\bar{x} \vee z)\,(\bar{y} \vee z)\,(\bar{x} \vee y \vee \bar{z}) = \text{КНФ}(f^*).$$

Спрощуючи цей вираз до ДНФ, маємо:

$$\text{КНФ}(f^*) = (x \vee y)\,(\bar{x} \vee z)\,(\bar{y} \vee z)\,(\bar{x} \vee y \vee \bar{z}) =$$

$$= (x\,\bar{x} \vee x\,z \vee y\,\bar{x} \vee y\,z)\,(\bar{x}\,\bar{y} \vee y\,\bar{y} \vee \bar{y}\,\bar{z} \vee \bar{x}\,z \vee y\,z \vee z\,\bar{z}) =$$

$$= (x\,z \vee \bar{x}\,y \vee y\,z)\,(\bar{x}\,\bar{y} \vee \bar{y}\,\bar{z} \vee \bar{x}\,z \vee y\,z) =$$

$$= x\,z\,\bar{x}\,\bar{y} \vee \bar{x}\,y\,\bar{x}\,\bar{y} \vee y\,z\,\bar{x}\,\bar{y} \vee x\,z\,\bar{y}\,\bar{z} \vee \bar{x}\,y\,\bar{y}\,\bar{z} \vee y\,z\,\bar{y}\,\bar{z} \vee x\,z\,\bar{x}\,z \vee$$

$$\vee\, \bar{x}\,y\,\bar{x}\,z \vee y\,z\,\bar{x}\,z \vee x\,z\,y\,z \vee \bar{x}\,y\,y\,z \vee y\,z\,y\,z =$$

$$= 0 \vee 0 \vee 0 \vee 0 \vee 0 \vee 0 \vee 0 \vee \bar{x}\,y\,z \vee \bar{x}\,y\,z \vee x\,y\,z \vee \bar{x}\,y\,z \vee y\,z =$$

$$= \bar{x}\,y\,z \vee x\,y\,z \vee y\,z = y\,z = \text{ДНФ}(f^*).$$

$$\text{КНФ}(f) = (\text{ДНФ}(f^*))^* = (y\,z)^* = y \vee z.$$

Відповідь. **КНФ(f) = $y \vee z$.**

Із всього вищесказаного випливає, що подання функції в досконалій формі є можливим та єдиним незалежно від способу задання функції (табличне або аналітичне). Більш того, завжди можливий перехід від ДДНФ до ДКНФ і назад. Для аналітичного задання функції можливий як аналітичний, так і табличний шлях побудови досконалих форм. Для таблично заданих функцій можливий лише табличний шлях визначення досконалих форм (запис функції по нулях або по одиницях). Відновити при цьому аналітичний запис можливо лише через булеві операції (диз'юнкцію, кон'юнкцію та заперечення), спростивши досконалі форми до ДНФ. Схеми можливих переходів показано на рис. 7.

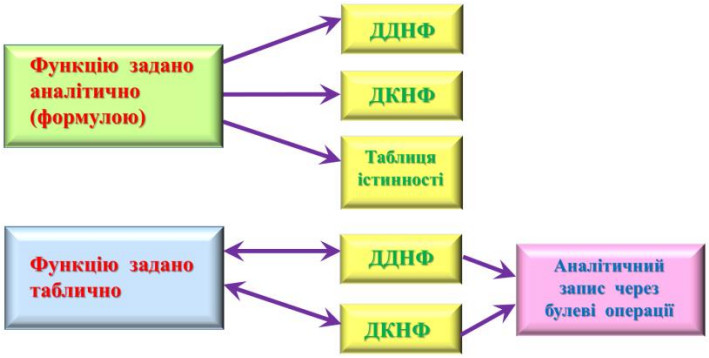


Рис. 7 – Перехід від аналітичного задання функції до табличного і назад через апарат досконалих форм

6.6. Нормальна форма Жегалкіна (НФЖ)

6.6.1. Побудова поліному Жегалкіна функції через подання В НФЖ елементарних функцій

Означення. *Алгебра Жегалкіна* – це множина булевих функцій, на якій визначено нульарну операцію (константу) **взяття одиниці (1)** та бінарні операції **кон'юнкції (∧)** та **суми за модулем 2 (⊕)**.

Через операції алгебри Жегалкіна можна подати всі булеві операції. Рівності (30) – (32) перевіряються за допомогою таблиць істинності для операцій суми за модулем 2, диз'юнкції, кон'юнкції та заперечення, які взято із таблиці 2:

Заперечення

x	$\overline{x}$
0	1
1	0

Диз'юнкція

x_1	x_2	$x_1 \vee x_2$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Кон'юнкція

x_1	x_2	$x_1 \wedge x_2$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Сума за модулем 2

x_1	x_2	$x_1 \oplus x_2$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

$$\mathbf{0} = \mathbf{1} \oplus \mathbf{1}\,; \tag{30}$$

$$\overline{x} = \mathbf{1} \oplus x\,; \tag{31}$$

$$x \vee y = x \oplus y \oplus x\,y\,. \tag{32}$$

Ці тотожності дозволяють перейти від будь-якої формули булевої алгебри до відповідної їй формули алгебри Жегалкіна. Зворотний перехід здійснюється через вже відомі формули:

$$x \oplus y = \overline{x}\,y \vee x\,\overline{y} = (\overline{x} \vee \overline{y})\,(x \vee y)\,.$$

Безпосередньою перевіркою за таблицями істинності для операцій кон'юнкції та суми за модулем 2 встановлюються наступні ***основні властивості цієї алгебри*** [8]:

комутативність $\quad x \oplus y = y \oplus x, x\,y = y\,x\,;$

асоціативність $\quad (x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z), \quad (x\,y)\,z = x\,(y\,z)\,;$

дистрибутивність кон'юнкції відносно додавання $\quad x\,(y \oplus z) = x\,y \oplus x\,z\,;$

закон приведення подібних членів при додаванні $\quad x \oplus x = \mathbf{0}\,;$

закон ідемпотентності для кон'юнкції $\quad x\,x = x\,;$

властивості констант $\quad x \wedge \mathbf{0} = \mathbf{0}, \quad x \wedge \mathbf{1} = x, \quad x \oplus \mathbf{0} = x\,.$

Всі ці властивості подібні звичайній булевій алгебрі, але на відміну від булевої алгебри закон дистрибутивності додавання відносно кон'юнкції не має сили [1]:

$$x \oplus y\,z \neq (x \oplus y)\,(x \oplus z)\,.$$

Таким чином, в формулах алгебри Жегалкіна, як і в булевій алгебрі, не можуть з'являтися коефіцієнти при змінних і показники ступеню.

З урахуванням формул (31) і (32) через операції алгебри Жегалкіна можна виразити всі інші елементарні булеві функції [1]:

$$x \to y = \overline{x} \vee y = \overline{x} \oplus y \oplus \overline{x}\,y = \mathbf{1} \oplus x \oplus y \oplus y\,(\mathbf{1} \oplus x) = \mathbf{1} \oplus x \oplus y \oplus y \oplus x\,y = \mathbf{1} \oplus x \oplus x\,y\,;$$

$$x \sim y = \overline{x \oplus y} = \mathbf{1} \oplus x \oplus y\,;$$

$$x \leftarrow y = \overline{x \to y} = \mathbf{1} \oplus \mathbf{1} \oplus x \oplus x\,y = \mathbf{0} \oplus x \oplus x\,y = x \oplus x\,y\,;$$

$$x \,/\, y = \overline{x\,y} = \mathbf{1} \oplus x\,y\,;$$

$$x \downarrow y = \overline{x \vee y} = \mathbf{1} \oplus x \oplus y \oplus x\,y\,.$$

Таким чином, маємо:

$$x \to y = \mathbf{1} \oplus x \oplus x\,y\,; \tag{33}$$

$$x \sim y = 1 \oplus x \oplus y\,; \tag{34}$$

$$x \leftarrow y = x \oplus x\,y\,; \tag{35}$$

$$x \,/\, y = 1 \oplus x\,y\,; \tag{36}$$

$$x \downarrow y = 1 \oplus x \oplus y \oplus x\,y\,. \tag{37}$$

<u>Приклад 32</u>. Виразити через операції алгебри Жегалкіна функцію

$$f = ((x \vee (\bar{y} \downarrow z)) \,/\, (\bar{x} \to z)) \oplus x\,y\,\bar{z},$$

використовуючи подання (31) – (37) через операції алгебри Жегалкіна елементарних булевих функцій.

<u>Розв'язання</u>.

$$f = ((x \vee (\bar{y} \downarrow z)) \,/\, (\bar{x} \to z)) \oplus x\,y\,\bar{z} = 1 \oplus (x \vee (\bar{y} \downarrow z))\,(\bar{x} \to z) \oplus x\,y\,\bar{z} =$$

$$= 1 \oplus (x \vee (1 \oplus \bar{y} \oplus z \oplus \bar{y}\,z))\,(1 \oplus \bar{x} \oplus \bar{x}\,z) \oplus x\,y\,\bar{z} =$$

$$= 1 \oplus (x \vee (1 \oplus 1 \oplus y \oplus z \oplus z\,(1 \oplus y))\,(1 \oplus 1 \oplus x \oplus z\,(1 \oplus x)) \oplus x\,y\,\bar{z} =$$

$$= 1 \oplus (x \vee (y \oplus z \oplus z \oplus y\,z))\,(x \oplus z \oplus x\,z) \oplus x\,y\,\bar{z} =$$

$$= 1 \oplus (x \vee (y \oplus y\,z))\,(x \oplus z \oplus x\,z) \oplus x\,y\,\bar{z} \;\boxed{=}$$

$$= 1 \oplus (x \oplus y \oplus y\,z \oplus x\,(y \oplus y\,z))\,(x \oplus z \oplus x\,z) \oplus x\,y\,\bar{z} =$$

$$= 1 \oplus (x \oplus y \oplus y\,z \oplus x\,y \oplus x\,y\,z)\,(x \oplus z \oplus x\,z) \oplus x\,y\,\bar{z} =$$

$$= 1 \oplus x \oplus x\,z \oplus x\,z \oplus x\,y \oplus y\,z \oplus x\,y\,z \oplus x\,y\,z \oplus y\,z \oplus x\,y\,z \oplus$$

$$\oplus\, x\,y \oplus x\,y\,z \oplus x\,y\,z \oplus x\,y\,z \oplus x\,y\,z \oplus x\,y\,z \oplus x\,y\,\bar{z} =$$

$$= 1 \oplus x \oplus x\,y\,(1 \oplus z) = 1 \oplus x \oplus x\,y \oplus x\,y\,z\,.$$

Однак до тієї ж самої відповіді можна було прийти й іншим шляхом. Незважаючи на те, що остаточною метою є заміна всіх елементарних булевих операцій на операції алгебри Жегалкіна, в ході такого перетворення всі закони булевої алгебри для цих елементарних операцій продовжують діяти. Зокрема, закон протиріччя $x\,\bar{x} = 0$. Таким чином, якщо не поспішати відразу позбавлятися всіх заперечень (а іноді навіть здійснити й повернення до заперечення згідно з формулою (31)), то застосувавши закон протиріччя можна позбавитися деякої кількості доданків і, тим самим, скоротити кількість подальших перетворень. Виходячи з цього, після виділеного знаку рівності $\boxed{=}$ можна було виконати наступні перетворення:

$$f = 1 \oplus (x \vee (y \oplus y\,z))\,(x \oplus z \oplus x\,z) \oplus x\,y\,\bar{z} =$$

$$= 1 \oplus (x \vee y(1 \oplus z))(x \oplus z\,(1 \oplus x)) \oplus x\,y\,\bar{z} = 1 \oplus (x \vee y\,\bar{z})\,(x \oplus \bar{x}\,z) \oplus x\,y\,\bar{z} =$$

$$= 1 \oplus (x \oplus y\,\bar{z} \oplus x\,y\,\bar{z})(x \oplus \bar{x}\,z) \oplus x\,y\,\bar{z} =$$

$$= 1 \oplus x \oplus x\,\bar{x}\,z \oplus x\,y\,\bar{z} \oplus y\,\bar{z}\,\bar{x}\,z \oplus x\,y\,\bar{z} \oplus x\,y\,\bar{z}\,\bar{x}\,z \oplus x\,y\,\bar{z} = 1 \oplus x \oplus x\,y\,\bar{z} =$$

$$= 1 \oplus x \oplus x\,y\,(1 \oplus z) = 1 \oplus x \oplus x\,y \oplus x\,y\,z\,.$$

<u>Відповідь</u>. $f = 1 \oplus x \oplus xy \oplus xyz$.

<u>Означення</u>. *Позитивною кон'юнкцією* (K^{+}) називається елементарна кон'юнкція, що не містить заперечень змінних [18].

Наприклад, елементарні кон'юнкції $K^+ = y$, $K^+ = x\,y$, $K^+ = x\,y\,z$ не містять заперечень змінних і тому є позитивними, а елементарні кон'юнкції $K = \overline{x}\,z$ і $K = x\,y\,\overline{z}$ – ні, тому що містять заперечення змінних.

Означення. *Поліном Жегалкіна* (*канонічний багаточлен*, *нормальна форма Жегалкіна* (НФЖ), *алгебраїчна нормальна форма* (АНФ)) – це сума за модулем 2 різних позитивних кон'юнкцій змінних із множини $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$, тобто формула виду [18]:

$$f = K_1^+ \oplus K_2^+ \oplus \ldots \oplus K_p^+ .$$

Виходячи із цього означення, формули (6) – (12) можна розглядати як НФЖ для елементарних функцій. Таким чином, будь-яку функцію можна подати в НФЖ, використовуючи НФЖ елементарних функцій (31) – (37). Наприклад, для функції $f = ((x \vee (\overline{y} \downarrow z)) / (\overline{x} \to z)) \oplus x\,y\,\overline{z}$ із прикладу 32 було отримане подання в алгебрі Жегалкіна як $f = 1 \oplus x \oplus x\,y \oplus x\,y\,z$. Це подання є НФЖ для цієї функції, тому що містить лише позитивні кон'юнкції змінних, об'єднані операцією суми за модулем 2.

Означення. *Довжиною поліному Жегалкіна* називається кількість кон'юнкцій в поліномі. Довжина **константи 0** дорівнює нулю. Довжина **константи 1** дорівнює одиниці [18].

Означення. *Ступенем поліному Жегалкіна* називається найбільший із рангів кон'юнкцій, що входять до складу поліному. Ступінь **константи 0** і **константи 1** дорівнює нулю [18].

Наприклад, для функції із прикладу 32 **НФЖ(*f*)=1** $\oplus$ $x \oplus x\,y \oplus x\,y\,z$. Для цього поліному

$$f = \underset{1}{1} \oplus \underset{2}{x} \oplus \underset{3}{x\,y} \oplus \overset{1}{x}\,\overset{2}{y}\,\overset{3}{z}$$
$$\underset{4}{}$$

Таким чином, для досліджуваної функції ***довжина*(*f*)=4**, ***ступінь*(*f*)=3**.

6.6.2. Перехід від ДДНФ до НФЖ

Означення. Дві кон'юнкції змінних називаються *ортогональними* за змінною x_i, якщо ця змінна входить до однієї кон'юнкції із запереченням (в інверсному вигляді), а в іншу – без заперечення (в прямому вигляді).

Означення. Дві кон'юнкції змінних називаються *суміжними*, якщо вони ортогональні за однією й лише однією змінною x_i (зазвичай також говорять «*суміжні за змінною* x_i»).

Наприклад,

$\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}$	і	$x\,y\,z$	*ортогональні за трьома змінними* (x, y, z) ;
$\overline{x}\,\overline{y}\,z$	і	$x\,y\,\overline{z}$	*ортогональні за трьома змінними* (x, y, z) ;
$x\,\overline{y}\,\overline{z}$	і	$\overline{x}\,y\,\overline{z}$	*ортогональні за двома змінними* (x, y) ;
$x\,\overline{y}\,z$	і	$x\,\overline{y}\,\overline{z}$	*ортогональні за однією змінною* (z) – *суміжні* ;
$\overline{x}\,y$	і	$\overline{x}\,\overline{y}$	*ортогональні за однією змінною* (y) – *суміжні* .

Розглянемо формулу (32), що є НФЖ для диз'юнкції. Якщо в цій формулі змінні замінити на елементарні кон'юнкції, то отримаємо вираз:

$$K_1 \vee K_2 = K_1 \oplus K_2 \oplus K_1\,K_2. \qquad (38)$$

Якщо при цьому кон'юнкції є ортогональними, то $K_1\,K_2 = 0$. Отже, для ортогональних кон'юнкцій вираз (38) набуває вигляду: $K_1 \vee K_2 = K_1 \oplus K_2$. Але ДДНФ будь-якої булевої

функції складається із попарно ортогональних кон'юнкцій – конституент одиниці K^1. Отже [18],

$$\bigvee_j K_j^1 = \bigoplus_j K_j^1 .$$

Теорема 16 (*про існування НФЖ*). *Формулювання*. Будь-яку булеву функцію можна подати поліномом Жегалкіна [8, 18].

Доведення. **Константа 0** – це поліном Жегалкіна за домовленістю. Будь-яка інша булева функція $f(x_1, \ldots, x_n)$ може бути поданою в ДДНФ, отже, як щойно було показано, і формулою вигляду $f = \bigoplus_j K_j^1$. Ця формула не є поліномом Жегалкіна, якщо містить змінні із запереченнями. Заперечень можна позбутися, використовуючи рівність $\bar{x} = 1 \oplus x$ Розкривши в отриманій формулі дужки на основі закону дистрибутивності, отримаємо суму позитивних кон'юнкцій, яка не є поліномом Жегалкіна, якщо в ній кон'юнкції повторюються. Використовуючи рівності $x \oplus x = 0$ і $x \oplus 0 = x$, видаляємо пари однакові кон'юнкцій. В результаті отримаємо НФЖ. **Теорему доведено**.

Приклад 33. Для функції $f = ((x \vee (\bar{y} \downarrow z)) / (\bar{x} \to z)) \oplus x\, y\, \bar{z}$ із прикладу 32 побудувати НФЖ, використовуючи перехід від ДДНФ до НФЖ.

Розв'язання. Згідно з теоремою 9, для цієї функції існує єдина **ДДНФ**$(f) = \bar{x}\, y\, z \vee \bar{x}\, y\, \bar{z} \vee \bar{x}\, \bar{y}\, z \vee x\, y\, \bar{z} \vee \bar{x}\, \bar{y}\, \bar{z}$. Тоді, згідно з теоремою 16, маємо:

$$\text{ДДНФ}(f) = \bar{x}\, y\, z \vee \bar{x}\, y\, \bar{z} \vee \bar{x}\, \bar{y}\, z \vee x\, y\, \bar{z} \vee \bar{x}\, \bar{y}\, \bar{z} =$$

$$= \bar{x}\, y\, z \oplus \bar{x}\, y\, \bar{z} \oplus \bar{x}\, \bar{y}\, z \oplus x\, y\, \bar{z} \oplus \bar{x}\, \bar{y}\, \bar{z} =$$

$$= yz(1 \oplus x) \oplus y(1 \oplus x)(1 \oplus z) \oplus z(1 \oplus x)(1 \oplus y) \oplus xy(1 \oplus z) \oplus (1 \oplus x)(1 \oplus y)(1 \oplus z) =$$

$$= yz \oplus xyz \oplus y(1 \oplus x \oplus z \oplus xz) \oplus z(1 \oplus x \oplus y \oplus xy) \oplus xy \oplus xyz \oplus (1 \oplus x \oplus y \oplus xy)(1 \oplus z) =$$

$$= yz \oplus y \oplus xy \oplus yz \oplus xyz \oplus z \oplus xz \oplus yz \oplus xyz \oplus xy \oplus 1 \oplus z \oplus x \oplus xz \oplus y \oplus yz \oplus xy \oplus xyz =$$

$$= 1 \oplus x \oplus x\, y \oplus x\, y\, z = \text{НФЖ}(f).$$

Відповідь. **НФЖ**$(f) = 1 \oplus x \oplus xy \oplus xyz$.

6.6.3. НФЖ для функції, яку задано таблично

Лема (*про кількість позитивних кон'юнкцій*). *Формулювання*. Кількість різних позитивних кон'юнкцій змінних із множини $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ дорівнює 2^n [18].

Доведення. Кожна позитивна кон'юнкція складається із підмножини змінних із X, тобто є булевим вектором довжини n, і навпаки, кожний вектор довжини n задає позитивну кон'юнкцію підмножини змінних із множини X. Це означає, що кількість різних позитивних кон'юнкцій дорівнює кількості векторів довжини n, тобто дорівнює 2^n. **Лему доведено**.

Означення. Форма подання поліному Жегалкіна

$$f = a_0 K_0^+ \oplus a_1 K_1^+ \oplus \ldots \oplus a_{2^n-1} K_{2^n-1}^+ ,$$

де a_i – булеві константи, називається *формою з коефіцієнтами* [18].

Число i подається булевим вектором $(b_1, \ldots, b_n)$, який, у свою чергу, задає підмножину змінних, що складають кон'юнкцію K_i^+. Наприклад, для функції трьох змінних, тобто при n=3, кон'юнкція $K_{101}^+ = x_1 x_3$, тому що булевий вектор **(1 0 1)** задає підмножину змінних $\{x_1, x_3\}$ множини $\{x_1, x_2, x_3\}$. Таким чином, поліном Жегалкіна булевої функції n аргументів

однозначно визначається вектором своїх коефіцієнтів $\boldsymbol{a} = (\boldsymbol{a_0}, \boldsymbol{a_1}, \ldots, \boldsymbol{a_{2^n-1}})$ і навпаки, будь-який булевий вектор довжини $\mathbf{2^n}$ однозначно визначає поліном Жегалкіна функції $\boldsymbol{n}$ аргументів. Як наслідок, кількість різних поліномів Жегалкіна булевих функцій $\boldsymbol{n}$ аргументів дорівнює кількості різних булевих векторів довжини $\mathbf{2^n}$.

<u>Теорема 17 (*про єдиність НФЖ*)</u>. *<u>Формулювання</u>*. Кожна булева функція в єдиний спосіб може бути поданою в НФЖ [8, 18].

<u>Доведення</u>. Кількість різних поліномів Жегалкіна булевих функцій $\boldsymbol{n}$ змінних дорівнює кількості булевих векторів довжини $\mathbf{2^n}$, тобто дорівнює $\mathbf{2^{2^n}}$. Але кількість різних булевих функцій $\boldsymbol{n}$ змінних також дорівнює $\mathbf{2^{2^n}}$, і кожна булева функція може бути поданою поліномом Жегалкіна (за теоремою про існування поліному). Отже, на кожну булеву функцію припадає рівно по одному поліному Жегалкіна. Як наслідок, для кожної булевої функції подання в НФЖ є єдиним. **Теорему доведено**.

Процес пошуку НФЖ для функції, яку задано таблично, розглянемо на наступному прикладі.

<u>Приклад 34</u>. Для функції $\boldsymbol{f} = ((\boldsymbol{x} \vee (\overline{\boldsymbol{y}} \downarrow \boldsymbol{z})) / (\overline{\boldsymbol{x}} \to \boldsymbol{z})) \oplus \boldsymbol{x}\,\boldsymbol{y}\,\overline{\boldsymbol{z}}$ із прикладу 32 побудувати її НФЖ, використовуючи для цього таблицю істинності цієї функції.

<u>Розв'язання</u>. В прикладі 33 будо використано

$$\text{ДДНФ}(f) = \overline{x}\,y\,z \vee \overline{x}\,y\,\overline{z} \vee \overline{x}\,\overline{y}\,z \vee x\,y\,\overline{z} \vee \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}$$

цієї функції для переходу до НФЖ. Тепер скористаємось цією ДДНФ для побудови таблиці істинності заданої функції за алгоритмом, роботу якого було розглянуто в прикладі 21. Для заданої функції таблиця істинності буде мати вигляд:

№	x	y	z	*Члени ДДНФ*		f
0	0	0	0	$x\ y\ z$ 0 0 0	$\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}$	1
1	0	0	1	$x\ y\ z$ 0 0 1	$\overline{x}\,\overline{y}\,z$	1
2	0	1	0	$x\ y\ z$ 0 1 0	$\overline{x}\,y\,\overline{z}$	1
3	0	1	1	$x\ y\ z$ 0 1 1	$\overline{x}\,y\,z$	1
4	1	0	0			0
5	1	0	1			0
6	1	1	0	$x\ y\ z$ 1 1 0	$x\,y\,\overline{z}$	1
7	1	1	1			0

Таким чином, її табличне задання має вигляд: $\boldsymbol{f} = (\mathbf{1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0})$. Запишемо НФЖ($f$) від вказаних змінних поки що з невизначеними коефіцієнтами, використовуючи для індексації номери змінних, що утворюють позитивну кон'юнкцію [2]:

$$f(x, y, z) = a_0 \oplus a_1 x \oplus a_2 y \oplus a_3 z \oplus a_{12} xy \oplus a_{13} xz \oplus a_{23} yz \oplus a_{123} xyz\ .$$

Тепер, для визначення коефіцієнтів, скористаємось тим, що таблиця значень функції відома, тобто відомі значення НФЖ(f) на кожному наборі значень змінних. Підставимо послідовно в вираз НФЖ значення наборів змінних, збільшуючи на кожному кроці кількість одиниць в записі наборів, і врахуємо значення функції на цих наборах [14]. Розглянемо спочатку набор, в запису якого немає одиниць. Маємо:

$$f(0\ 0\ 0) = a_0 \oplus a_1 \cdot 0 \oplus a_2 \cdot 0 \oplus a_3 \cdot 0 \oplus a_{12} \cdot 0 \cdot 0 \oplus a_{13} \cdot 0 \cdot 0 \oplus a_{23} \cdot 0 \cdot 0 \oplus a_{123} \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 = 1.$$

Тоді, враховуючи властивості суми за модулем 2, отримуємо:

$$f(0\ 0\ 0) = a_0 = 1.$$

Тим самим, перший коефіцієнт багаточлену Жегалкіна a_0 знайдено і початковий вираз НФЖ(f) набуває вигляду:

$$f(x, y, z) = 1 \oplus a_1x \oplus a_2y \oplus a_3z \oplus a_{12}xy \oplus a_{13}xz \oplus a_{23}yz \oplus a_{123}xyz.$$

Далі послідовно використовуємо набори, в запису яких присутня єдина одиниця (причому ця одиниця буде займати послідовно місця в запису наборів, починаючи з першого). Маємо:

$$f(1\ 0\ 0) = a_0 \oplus a_1{\cdot}1 \oplus a_2{\cdot}0 \oplus a_3{\cdot}0 \oplus a_{12}{\cdot}1{\cdot}0 \oplus a_{13}{\cdot}1{\cdot}0 \oplus a_{23}{\cdot}0{\cdot}0 \oplus a_{123}{\cdot}1{\cdot}0{\cdot}0 =$$
$$= a_0 \oplus a_1 = 1 \oplus a_1 = 0.$$

Звідки отримуємо: $a_1 = 1$. Далі

$$f(0\ 1\ 0) = a_0 \oplus a_1{\cdot}0 \oplus a_2{\cdot}1 \oplus a_3{\cdot}0 \oplus a_{12}{\cdot}0{\cdot}1 \oplus a_{13}{\cdot}0{\cdot}0 \oplus a_{23}{\cdot}1{\cdot}0 \oplus a_{123}{\cdot}0{\cdot}1{\cdot}0 =$$
$$= a_0 \oplus a_2 = 1 \oplus a_2 = 1.$$

Звідки отримуємо: $a_2 = 0$. Далі

$$f(0\ 0\ 1) = a_0 \oplus a_1{\cdot}0 \oplus a_2{\cdot}0 \oplus a_3{\cdot}1 \oplus a_{12}{\cdot}0{\cdot}0 \oplus a_{13}{\cdot}0{\cdot}1 \oplus a_{23}{\cdot}0{\cdot}1 \oplus a_{123}{\cdot}0{\cdot}0{\cdot}1 =$$
$$= a_0 \oplus a_3 = 1 \oplus a_3 = 1.$$

Звідки отримуємо: $a_3 = 0$. Таким чином, підставляючи до форми вже знайдені коефіцієнти, маємо:

$$f(x, y, z) = 1 \oplus 1{\cdot}x \oplus 0{\cdot}y \oplus 0{\cdot}z \oplus a_{12}xy \oplus a_{13}xz \oplus a_{23}yz \oplus a_{123}xyz.$$

Тепер використаємо набори, в запису яких присутні дві одиниці. Маємо:

$$f(1\ 1\ 0) = a_0 \oplus a_1{\cdot}1 \oplus a_2{\cdot}1 \oplus a_3{\cdot}0 \oplus a_{12}{\cdot}1{\cdot}1 \oplus a_{13}{\cdot}1{\cdot}0 \oplus a_{23}{\cdot}1{\cdot}0 \oplus a_{123}{\cdot}1{\cdot}1{\cdot}0 =$$
$$= a_0 \oplus a_1 \oplus a_2 \oplus a_{12} = 1 \oplus 1 \oplus 0 \oplus a_{12} = 0 \oplus a_{12} = 1.$$

Звідки отримуємо: $a_{12} = 1$. Далі

$$f(1\ 0\ 1) = a_0 \oplus a_1{\cdot}1 \oplus a_2{\cdot}0 \oplus a_3{\cdot}1 \oplus a_{12}{\cdot}1{\cdot}0 \oplus a_{13}{\cdot}1{\cdot}1 \oplus a_{23}{\cdot}0{\cdot}1 \oplus a_{123}{\cdot}1{\cdot}0{\cdot}1 =$$
$$= a_0 \oplus a_1 \oplus a_3 \oplus a_{13} = 1 \oplus 1 \oplus 0 \oplus a_{13} = 0 \oplus a_{13} = 0.$$

Звідки отримуємо: $a_{13} = 0$. Далі

$$f(0\ 1\ 1) = a_0 \oplus a_1{\cdot}0 \oplus a_2{\cdot}1 \oplus a_3{\cdot}1 \oplus a_{12}{\cdot}0{\cdot}1 \oplus a_{13}{\cdot}0{\cdot}1 \oplus a_{23}{\cdot}1{\cdot}1 \oplus a_{123}{\cdot}0{\cdot}1{\cdot}1 =$$
$$= a_0 \oplus a_2 \oplus a_3 \oplus a_{23} = 1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus a_{23} = 1 \oplus a_{23} = 1.$$

Звідки отримуємо: $a_{23} = 0$. Таким чином, підставляючи до форми знайдені коефіцієнти при попарних кон'юнкціях змінних, маємо:

$$f(x, y, z) = 1 \oplus 1{\cdot}x \oplus 0{\cdot}y \oplus 0{\cdot}z \oplus 1{\cdot}xy \oplus 0{\cdot}xz \oplus 0{\cdot}yz \oplus a_{123}xyz.$$

Залишилося знайти останній коефіцієнт багаточлену Жегалкіна, використовуючи набор значень змінних, що складається із самих одиниць. Маємо:

$$f(1\ 1\ 1) = a_0 \oplus a_1{\cdot}1 \oplus a_2{\cdot}1 \oplus a_3{\cdot}1 \oplus a_{12}{\cdot}1{\cdot}1 \oplus a_{13}{\cdot}1{\cdot}1 \oplus a_{23}{\cdot}1{\cdot}1 \oplus a_{123}{\cdot}1{\cdot}1{\cdot}1 =$$
$$= a_0 \oplus a_2 \oplus a_3 \oplus a_{12} \oplus a_{13} \oplus a_{23} \oplus a_{123} =$$

$$= 1 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus a_{123} = =1 \oplus a_{123} = 0.$$

Звідки отримуємо: $a_{123} = 1$. Таким чином, маємо:

$$f(x, y, z) = 1 \oplus 1 \cdot x \oplus 0 \cdot y \oplus 0 \cdot z \oplus 1 \cdot xy \oplus 0 \cdot xz \oplus 0 \cdot yz \oplus 1 \cdot xyz.$$

Отже, для цієї функції

$$\text{НФЖ}(f) = 1 \oplus x \oplus x\,y \oplus x\,y\,z\,.$$

Всі наведені обчислення коефіцієнтів багаточлену Жегалкіна зручніше оформлювати за допомогою таблиці. При цьому в кожному рядку співвідношення між коефіцієнтами є сумами коефіцієнтів, в яких обов'язково присутній коефіцієнт a_0 та ті коефіцієнти, індекси яких визначаються номерами одиниць у відповідних наборах [21]. Наприклад, для набору **(0 1 1)**, номери одиниць в запису набору – **2** і **3**. Тому у вказаній сумі беруть участь коефіцієнти a_0, a_2, a_3, a_{23}.

№ з/п	x	y	z	f	Коефіцієнти НФЖ	
0	0	0	0	1	$= a_0$	$a_0=1$
1	0	0	1	1	$= a_0 + a_3 = 1 + a_3$	$a_3=0$
2	0	1	0	1	$= a_0 + a_2 = 1 + a_2$	$a_2=0$
3	0	1	1	1	$= a_0 + a_2 + a_3 + a_{23} = 1 + 0 + 0 + a_{23} = 1 + a_{23}$	$a_{23}=0$
4	1	0	0	0	$= a_0 + a_1 = 1 + a_1$	$a_1=1$
5	1	0	1	0	$= a_0 + a_1 + a_3 + a_{13} = 1 + 1 + 0 + a_{13} = 0 + a_{13}$	$a_{13}=0$
6	1	1	0	1	$= a_0 + a_1 + a_2 + a_{12} = 1 + 1 + 0 + a_{12} = 0 + a_{12}$	$a_{12}=1$
7	1	1	1	0	$= a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_{13} + a_{12} + a_{23} + a_{123} = 1 + 1 + 0 + 0 + 0 + 1 + 0 + a_{123} = 1 + a_{123}$	$a_{123}=1$

Із таблиці виписуємо багаточлен Жегалкіна, до якого ввійдуть ті позитивні кон'юнкції, коефіцієнти при яких дорівнюють одиниці, тобто знову отримуємо той самий єдиний для досліджуваної функції (незалежно від способу побудови) поліном **НФЖ**$(f) = 1 \oplus x \oplus xy \oplus xyz$.

Відповідь. **НФЖ**$(f) = 1 \oplus x \oplus x\,y \oplus x\,y\,z$.

Означення. Алгоритм побудови НФЖ, описаний в прикладі 34, називається *методом невизначених коефіцієнтів* [2, 8].

Отже, для кожної функції ми розглянули три канонічні нормальні форми, подання в яких для кожної функції є єдиним: ДДНФ, ДКНФ і НФЖ. При цьому перехід від ДДНФ до НФЖ можливий безпосередньо, а перехід між ДКНФ і НФЖ або між ДКНФ і ДДНФ можливий лише з використанням таблиці істинності функції як проміжного обчислення (або за допомогою складних громіздких тотожних перетворень, що не є раціональним з практичної точки зору).

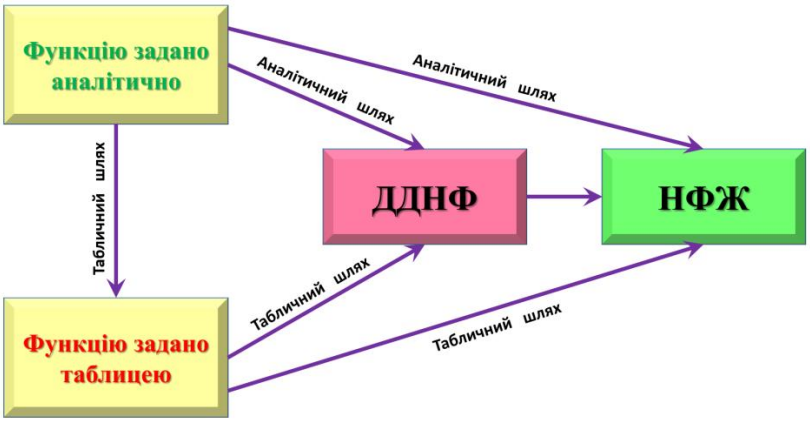


Рис. 8 – Способи побудови канонічних нормальних форм

7. МІНІМІЗАЦІЯ БУЛЕВИХ ФУНКЦІЙ

Згідно з теоремами 9 і 15, будь-яка булева функція в єдиний спосіб може бути поданою в ДДНФ або ДКНФ. Більш того, таке подання є першим кроком переходу від табличного задання функції до її аналітичного виразу.

Означення. *Мінімізація булевих функцій* являє собою подання цих функцій в ДНФ або КНФ, що містять мінімальну кількість букв (змінних або їх заперечень) [4, 5].

Кількість букв, що входять до ДНФ або КНФ логічної функції, дорівнює або є більшою за кількість змінних, що містяться в цій функції, тому що одна й та ж сама змінна може входити до функції декілька разів. Наприклад, ДНФ для функції $f = x\,y\,\bar{z} \vee x\,\bar{y}\,z \vee y\,z$ містить три змінні x, y, z і вісім букв за рахунок того, що x входить до функції двічі (обидва рази без заперечення), y – тричі (один раз з запереченням і двічі без нього) і z – також тричі (один раз в інверсному вигляді і двічі в прямому). Аналогічно КНФ для функції $f = (x \vee \bar{y})(\bar{x} \vee \bar{y} \vee z)(x \vee \bar{z})$ містить ті ж самі три змінні x, y, z і сім букв за рахунок того, що x входить до функції тричі (двічі в прямому вигляді й один раз в інверсному), y – двічі (обидва рази із запереченням) і z – також двічі (один раз із запереченням і один раз без нього). Таким чином, на практиці і, відповідно, в теорії стоїть задача скорочення кількості букв в ДНФ і КНФ.

7.1. Метод Квайна

7.1.1. Імпліканта

Означення 1. Якщо деяка логічна функція φ (в окремому випадку – елементарна кон'юнкція) дорівнює нулю на тих самих наборах, на яких дорівнює нулю інша функція f, то функція φ називається *імплікантою* функції f [19].

Дане формулювання визначає імпліканту через область хибності досліджуваних функцій f і φ. Однак, це означення можна також дати і через область істинності.

Означення 2. Функція φ є *імплікантою* функції f, якщо на тих наборах, на яких $\varphi = 1$, також і $f = 1$ [8, 11].

Таким чином, функція φ може дорівнювати нулю на тих наборах, на яких $f = 1$, але не навпаки. Виходячи з цього, можна дати ще одне формулювання означення імпліканти.

Означення 3. Функція φ є *імплікантою* функції ***f***, якщо $\varphi \vee f = f$ [17].

Означення. У випадку, коли функція φ є імплікантою функції ***f***, то говорять, що функція φ входить до функції ***f***. Умова входження записується як $\varphi \subset f$.

Приклад 35. Нехай задано три функції ***f*(*x*, *y*, *z*)**, ***g*(*x*, *y*, *z*)** і ***h*(*x*, *y*, *z*)**.

№	*x*	*y*	*z*	*f*	*g*	*h*
0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	1	1	1	0
2	0	1	0	0	0	0
3	0	1	1	1	0	0
4	1	0	0	0	0	1
5	1	0	1	0	0	0
6	1	1	0	1	0	0
7	1	1	1	1	1	1

Визначити, які з цих функцій є імплікантами одна одної.

Розв'язання. Скористаємось першим означенням імпліканти. Для цих функцій **OX(*f*) = {0, 2, 4, 5}**, **OX(*g*) = {0, 2, 3, 4, 5, 6}**, **OX(*h*) = {0, 1, 2, 3, 5, 6}**. Є очевидним, що **OX(*f*) ⊆ OX(*g*)**, тобто на всіх тих наборах, на яких функція ***f* = 0**, функція ***g*** також дорівнює нулю. Як наслідок, функція ***g*** є імплікантою ***f***. Функція ***g* = 0** також і на наборах **№ 3** і **№ 6**, де функція ***f* = 1**, тобто **OX(*g*) ⊄ OX(*f*)**. Тому функція ***f*** не є імплікантою для функції ***g***. В той же час, на наборі **№ 4** функція ***h* = 1**, а функція ***f* = 0**, що суперечить означенню імпліканти. Отже, функція ***h*** не є імплікантою функції ***f***. Зворотне включення також не виконується, тобто **OX(*h*) ⊄ OX(*f*)**, тобто на наборах **№№ 1, 3, 6** функція ***h* = 0**, а функція ***f* = 1**, що також суперечить означенню імпліканти. Як наслідок, функція ***f*** не є імплікантою для функції ***h***. Для функцій ***g*** і ***h*** **OX(*g*) ⊄ OX(*h*)**, тобто на наборі **№ 4** ***g* = 0**, а ***h* = 1**. Як наслідок, функція ***h*** не є імплікантою функції ***g***. Зворотне включення також не виконується, тобто **OX(*h*) ⊄ OX(*g*)**, тому що на наборі **№ 1** ***h* = 0**, а ***g* = 1**. Отже, функція ***g*** не є імплікантою функції ***h***.

Тепер скористаємось другим означенням імпліканти і розглянемо області істинності для заданих функцій: **OI(*f*) = {1, 3, 6, 7}**, **OI(*g*) = {1, 7}**, **OI(*h*) = {4, 7}**. Є очевидним, що **OI(*g*) ⊆ OI(*f*)**, тобто якщо ***g* = 1**, то і ***f* = 1**. Цей факт підтверджує висновок про те, що функція ***g*** є імплікантою функції ***f***. Зворотне включення не виконується, тобто **OI(*f*) ⊄ OI(*g*)** (порушення відбувається на наборах **№ №3, 6**). Отже, висновок про те, що ***f*** не є імплікантою для функції ***g***, також підтверджується. Для областей істинності функцій ***f*** і ***h*** також не виконується жодне з включень: **OI(*h*) ⊄ OI(*f*)** (порушення відбувається на наборі **№ 4**) і **OI(*f*) ⊄ OI(*h*)** (порушення відбувається на наборах **№№ 1, 3, 6**). Як наслідок, жодна з цих функцій не є імплікантою іншої функції. Для функцій ***g*** і ***h*** також не виконується жодне з включень: **OI(*g*) ⊄ OI(*h*)** (порушення відбувається на наборі **№ 1**) і **OI(*h*) ⊄ OI(*g*)** (порушення відбувається на наборі **№ 4**). Отже, і ці функції не є імплікантами одна для одної.

Таким чином, порівняння областей істинності заданих функцій призводить до тих самих висновків, що й порівняння їх областей хибності.

Скористаємось тепер третім означенням імпліканти. Для цього побудуємо таблиці істинності для $f \vee g$, $f \vee h$ і $g \vee h$.

№	x	y	z	f	g	h	$f \vee g$	$f \vee h$	$g \vee h$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	1	1	1	0	1	1	1
2	0	1	0	0	0	0	0	0	0
3	0	1	1	1	0	0	1	1	0
4	1	0	0	0	0	1	0	1	1
5	1	0	1	0	0	0	0	0	0
6	1	1	0	1	0	0	1	1	0
7	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Як видно із наведеної таблиці істинності, $f \vee g = f$. Отже, функція g є імплікантою функції f. При цьому $f \vee g \neq g$, що свідчить про те, що функція f для функції g імплікантою не є. Для решти диз'юнкцій $f \vee h \neq f \neq h$ і $g \vee h \neq g \neq h$. Ці співвідношення також підтверджують, що для пар функцій $\{f, h\}$ і $\{g, h\}$ жодна з функцій не є імплікантою для іншої функції із пари.

Розглянутий приклад показує, що незалежно від того, в який спосіб досліджувати пару функцій на наявність імпліканти (яким із означень імпліканти користуватися), отримані висновки будуть однаковими.

Відповідь. Функція g є імплікантою функції f, але функція f не є імплікантою для функції g. Решта попарні поєднання розглянутих функцій не є імплікантами одна одній.

Теорема 18. *Формулювання*. Будь-яка конституента одиниці, що входить до складу ДДНФ логічної функції f, є її імплікантою [19].

Доведення. Конституента одиниці дорівнює **1** лише на єдиному наборі значень змінних. В силу того, що ДДНФ логічної функції f складається із диз'юнкції конституент одиниці, одиничне значення будь-якої конституенти одиниці, що входить до ДДНФ, збігається з одним із одиничних значень функції f. Тому, у відповідності з означенням імпліканти, конституента одиниці, що входить до ДДНФ, є імплікантою ДДНФ і, як наслідок, функції f. **Теорему доведено**.

Наслідок із теореми 18. Елементарні кон'юнкції, із яких складається ДНФ деякої логічної функції f, є імплікантами цієї функції f [8].

Теорема 19. *Формулювання*. **Константа 0** є імплікантою будь-якої логічної функції.

Доведення. За означенням, **константа 0** дорівнює нулю на всіх наборах значень змінних і, як наслідок, обов'язково дорівнює нулю на всіх тих наборах, на яких функція $f = 0$. **Теорему доведено.**

Є очевидним, що кожна логічна функція є імплікантою самої себе [4, 5].

Теорема 20. *Формулювання*. Будь-яка логічна функція є імплікантою **константи 1**.

Доведення. **Константа 1** не дорівнює нулю на жодному наборі. Це означає, що у будь-якої логічної функції, на яких би наборах не стояли у неї одиниці, буде відповідність її одиничних значень з одиничними значеннями **константи 1** і ніде не буде набору, для якого логічна функція дорівнює одиниці, а **константа 1** в цей час дорівнює нулю. **Теорему доведено**.

Означення. Дві логічні функції φ_1 і φ_2 називаються *порівнянними*, якщо вони є імплікантами одна для одній, тобто якщо для них виконуються умови $\varphi_1 \subset \varphi_2$, $\varphi_2 \subset \varphi_1$.

Означення. Елементарна кон'юнкція, отримана шляхом виключення із початкової кон'юнкції однієї або декількох змінних, називається *власною частиною* цієї кон'юнкції [11].

Наприклад, нехай задано елементарну кон'юнкцію $\varphi = x\,\overline{y}\,z$. Тоді її власними частинами будуть кон'юнкції $\overline{y}\,z$, $x\,z$, $x\,\overline{y}$, x, $\overline{y}$, z. Сама елементарна кон'юнкція $x\,\overline{y}\,z$ не є своєю власною частиною, тому що у відповідності з означенням для отримання власної частини із початкової елементарної кон'юнкції необхідно виключити хоча б одну змінну.

Означення 1. Елементарні кон'юнкції, що самі входять в дану функцію, але ніяка їх власна частина не входить, називаються *простими імплікантами* [8].

Наприклад, для функції $f(x, y, z, t) = x\,\overline{y}\,z \vee \overline{y}\,z\,\overline{t} \vee x\,\overline{y} \vee x\,t$ простими імплікантами будуть лише елементарні кон'юнкції $\overline{y}\,z\,\overline{t}$, $x\,\overline{y}$ і $x\,t$. Елементарна кон'юнкція (імпліканта) $x\,\overline{y}\,z$ не є простою імплікантою, тому що її власна частина $x\,\overline{y}$ також входить в дану функцію (є її імплікантою).

Означення 2. Таким чином, елементарна кон'юнкція φ є *простою імплікантою* логічної функції f, якщо при видаленні із φ входження хоча б однієї змінної, ця елементарна кон'юнкція припиняє бути імплікантою функції f [6].

Якщо якась кон'юнкція входить в дану функцію, то при додаванні до цієї кон'юнкції будь-яких змінних нова кон'юнкція також буде входити в цю функцію, тому що ця нова кон'юнкція обертається в нуль разом з початковою кон'юнкцією.

7.1.2. Мінімізація за Квайном в ДДНФ

Означення. Диз'юнкція всіх простих імплікант функції $\boldsymbol{f}$ називається *скороченою ДНФ* цієї функції [8].

Теорема 21. *Формулювання*. Будь-яку логічну функцію $\boldsymbol{f}$ можна в єдиний спосіб подати у вигляді скороченої ДНФ [19].

Доведення. В силу того, що прості імпліканти входять до функції $\boldsymbol{f}$, вони мають дорівнювати нулю на тих самих наборах, що й функція $\boldsymbol{f}$. Якщо це не так і проста імпліканта дорівнює одиниці там, де функція $\boldsymbol{f}$ має дорівнювати нулю, то у відповідності з рівністю $\mathbf{1} \vee \boldsymbol{x} = \mathbf{1}$ функція $\boldsymbol{f}$ буде тоді дорівнювати одиниці, що неприпустимо. Для кожного набору, де функція $\boldsymbol{f}$ дорівнює одиниці, має знайтися хоча б одна проста імпліканта, що дорівнює одиниці, інакше функція $\boldsymbol{f}$ в цьому випадку не буде дорівнювати одиниці. В найгіршому випадку такою імплікантою виступає конституента одиниці. Серед імплікант у функції $\boldsymbol{f}$ можуть знайтися прості імпліканти $\boldsymbol{v}$, що є власними частинами імпліканти φ. В цьому випадку $\varphi = \boldsymbol{v}\,\boldsymbol{w}$. В силу рівності $\boldsymbol{v}\,\boldsymbol{w} \vee \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}\,(\boldsymbol{w} \vee \mathbf{1}) = \boldsymbol{v}$ і, як наслідок, $\varphi \vee \boldsymbol{v} = \varphi$, відбудеться поглинання (елімінація) імпліканти φ її власною частиною $\boldsymbol{v}$, що є простою імплікантою. Це означає, що функція $\boldsymbol{f}$ буде після всіх можливих поглинань в підсумку складатися лише із самих простих імплікант.

Припустимо тепер, що для функції $\boldsymbol{f}$ існують дві різні скорочені ДНФ. Але за означенням скороченої ДНФ, вона має містити вичерпний перелік простих імплікант. Цей перелік є єдиним, інакше він не був би вичерпним. Отже, обидві ці форми складаються із одних і тих самих простих імплікант, тобто ці скорочені ДНФ реалізуються однією тією ж самою формулою. Це означає, що ці скорочені ДНФ ідентичні, тобто подання функції скороченою ДНФ є єдиним. **Теорему доведено**.

Для подання логічної функції $\boldsymbol{f}$ скороченою ДНФ використовуються операції повного і неповного склеювання, а також поглинання та розгортання в ДНФ [4, 8].

Операція ***повного склеювання*** визначається співвідношенням

$$\varphi\,\boldsymbol{x} \vee \varphi\,\overline{\boldsymbol{x}} = \varphi, \tag{39}$$

Що випливає з того, що

$$\varphi\,\boldsymbol{x} \vee \varphi\,\overline{\boldsymbol{x}} = \varphi\,(\boldsymbol{x} \vee \overline{\boldsymbol{x}}) = \varphi \wedge \mathbf{1} = \varphi.$$

Склеювання кон'юнкцій $\varphi\,\boldsymbol{x}$ і $\varphi\,\overline{\boldsymbol{x}}$ в даному випадку відбувається за змінною $\boldsymbol{x}$. Слід зазначити, що операція склеювання можлива лише для суміжних (ортогональних лише за однією єдиною змінною) елементарних кон'юнкцій, і таких, що мають при цьому однаковий склад змінних.

Операція ***неповного склеювання*** має наступний вигляд:

$$\varphi\,\boldsymbol{x} \vee \varphi\,\overline{\boldsymbol{x}} = \varphi \vee \varphi\,\boldsymbol{x} \vee \varphi\,\overline{\boldsymbol{x}}. \tag{40}$$

Зміст цієї операції полягає в тому, що диз'юнкція виразу φ з формулою $\varphi\,\boldsymbol{x} \vee \varphi\,\overline{\boldsymbol{x}}$ ніяким чином на значення цієї формули не впливає. Воно залишається незмінним, скільки б разів вираз φ з цією формулою не диз'юнктувався.

Операція ***поглинання*** визначається із рівностей

$$\varphi \vee \varphi\,\boldsymbol{x} = \varphi \qquad \text{і} \qquad \varphi \vee \varphi\,\overline{\boldsymbol{x}} = \varphi. \tag{41}$$

В цьому випадку вираз φ поглинає всю формулу. Це випливає із співвідношень елімінації (11.1) і (11.2).

Далеко не завжди початкову логічну функцію подано в ДДНФ. У випадку, коли це не так, застосовується операція ***розгортання***. Її багатократне застосування дозволяє перетворити будь-яку просту імпліканту в диз'юнкцію конституент одиниці. Ця операція відображається співвідношенням (25). При розгортанні різні імпліканти можуть утворювати одну й ту саму конституенту одиниці. В цьому випадку на основі властивості ідемпотентності диз'юнкції (7) $x \vee x = x$ треба залишити лише одну таку конституенту одиниці. В результаті отримаємо ДДНФ початкової логічної функції.

Теорема 22 (*теорема Квайна для ДДНФ*). *Формулювання*. Якщо в ДДНФ логічної функції f провести всі операції неповного склеювання, а потім всі операції поглинання, то отримаємо скорочену ДНФ цієї функції, тобто диз'юнкцію всіх її простих імплікант [4, 16].

Доведення. Нехай, наприклад, після проведення всіх операцій неповного склеювання, а потім поглинання ДНФ буде містити член w, що не є простою імплікантою. Тоді до цієї функції, крім w, входить якась його частина φ, що є простою імплікантою. Це означає, що функція f буде містити імпліканту w і просту імпліканту φ у вигляді їх диз'юнкції $\varphi \vee w$. Але $w = v\,\varphi$. Тоді член w у відповідності з рівністю $w \vee \varphi = \varphi \vee v\,\varphi = \varphi$ буде поглинений простою імплікантою φ і, відповідно, скорочена ДНФ міститиме лише цю просту імпліканту. Це ж стосується і решти імплікант. Відповідно ДНФ буде складатися лише із простих імплікант, об'єднаних операціями диз'юнкції. **Теорему доведено**.

Особливістю методу мінімізації за Квайном є те, що його робота починається після подання логічної функції, що мінімізується, в досконалій нормальній формі. Тому якщо функцію задано довільною ДНФ, то її слід спочатку перетворити в ДДНФ шляхом її розгортання. Далі діють за наступним ***алгоритмом мінімізації функції, поданої в ДДНФ***.

1. В ДДНФ функції $f = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ проводяться всі операції неповного склеювання конституент одиниці. Неповне склеювання викликано тим, що кожна конституента одиниці може склеюватися з декількома іншими. Тому її після першого склеювання не поглинають, а використовують для інших, в порядку черги, операцій склеювання. Це і є операція неповного склеювання. В результаті отримуємо імпліканти, що мають по $(n - 1)$ змінних. При цьому можливе також і отримання простих імплікант.
2. Відбувається поглинання імплікантами всіх конституент одиниці, що брали участь в неповному склеюванні. Конституенти одиниці, що брали участь в операціях неповного склеювання, поглинаються обов'язково, тому що вони містять в своєму складі імпліканти, що мають після першого склеювання по $(n - 1)$ букві та містяться в функції f. Конституенти одиниці, яких не було задіяно в операціях склеювання, не можуть бути поглиненими, тому що вони вже є простими імплікантами з n змінними.
3. Проводяться операції неповного склеювання і поглинання імплікант з $(n - 1)$ змінними, що отримані на першому кроці склеювання, за аналогією з пунктами 1) і 2). Ця процедура повторюється доти, поки операції неповного склеювання залишаються можливими. Отримана в результаті ДНФ буде скороченою ДНФ.

Приклад 36. Необхідно знайти скорочену ДНФ логічної функції [5]

$$f(x, y, z) = x\,y \vee \overline{x}\,z \vee \overline{y}\,\overline{z}.$$

Розв'язання

1. Застосовуючи операцію розгортання, отримуємо ДДНФ функції

$$f = x\,y \vee \bar{x}\,z \vee \bar{y}\,\bar{z} = x\,y\,(z \vee \bar{z}) \vee \bar{x}\,z\,(y \vee \bar{y}) \vee \bar{y}\,\bar{z}\,(x \vee \bar{x}) =$$
$$= x\,y\,z \vee x\,y\,\bar{z} \vee \bar{x}\,y\,z \vee \bar{x}\,\bar{y}\,z \vee x\,\bar{y}\,\bar{z} \vee \bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z}\,.$$

2. Проведемо в ДДНФ функції f всі можливі операції неповного склеювання конституент одиниці. Для цього пронумеруємо всі конституенти одиниці функції:

$$\underset{1}{x\,y\,z} \vee \underset{2}{x\,y\,\bar{z}} \vee \underset{3}{\bar{x}\,y\,z} \vee \underset{4}{\bar{x}\,\bar{y}\,z} \vee \underset{5}{x\,\bar{y}\,\bar{z}} \vee \underset{6}{\bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z}}$$

Потім виконаємо всі операції неповного склеювання членів функції, починаючи з першого, з рештою. На першому етапі склеювання всі елементарні кон'юнкції є конституентами одиниці і, як наслідок, мають однаковий склад змінних. Тому їх попарним порівнянням виявляємо серед них суміжні за якоюсь змінною і проводимо операцію склеювання саме за цією змінною.

3. Результати склеювання запишемо в таблицю, в якій перший стовпець відображає номери конституент, що склеюються, другий стовпець показує результат склеювання, а третій – змінні, за якими відбулося склеювання.

№№ конституент, що склеюються	Імпліканта	Змінна, за якою відбулося склеювання
1) 1-2	$x\,y$	z
2) 1-3	$y\,z$	x
3) 2-5	$x\,\bar{z}$	y
4) 3-4	$\bar{x}\,z$	y
5) 4-6	$\bar{x}\,\bar{y}$	z
6) 5-6	$\bar{y}\,\bar{z}$	x

Із першого стовпця цієї таблиці видно, що в операціях неповного склеювання брали участь всі конституенти (серед номерів конституент, що склеюються присутні всі, від **1**-ї й до останньої, **6**-ї конституенти). Як наслідок, всі вони будуть поглинені отриманими імплікантами. Серед отриманих на цьому етапі склеювання простих імплікант однакові за складом змінних імпліканти (**1**-а і **5**-а, **2**-а і **6**-а, **3**-я і **4**-а) не є суміжними. Всі ці пари імплікант ортогональні за двома змінними. Таким чином, подальше склеювання неможливе, і наведені в таблиці імпліканти будуть простими. Після поглинання цими імплікантами відповідних їм конституент одиниці отримаємо скорочену ДНФ, що містить шість простих імплікант, які є вичерпним переліком всіх можливих простих імплікант досліджуваної функції.

$$f_{\text{скор}} = \overset{1}{x\,y} \vee \overset{2}{y\,z} \vee \overset{3}{x\,\bar{z}} \vee \overset{4}{\bar{x}\,z} \vee \overset{5}{\bar{x}\,\bar{y}} \vee \overset{6}{\bar{y}\,\bar{z}}\,.$$

Серед них є і кон'юнкції, що входять в початкову функцію f: $x\,y$, $\bar{x}\,z$ і $\bar{y}\,\bar{z}$. Тому можна вважати імпліканти $y\,z$, $x\,\bar{z}$ і $\bar{x}\,\bar{y}$ зайвими. Даний результат ще раз підтверджує, що кон'юнкції, що входять до початкової функції, є простими імплікантами. Таким чином, видно, що скорочена ДНФ – це далеко не завжди мінімальна ДНФ, тому що вона хоч і містить самі прості імпліканти, але серед них можуть бути і зайві.

Означення. Диз'юнкція простих імплікант, жодна з яких не є зайвою, називається *тупиковою ДНФ* логічної функції [4, 19].

Тупикових форм у функції в загальному випадку може бути декілька. Кожна з цих тупикових форм може містити кількість букв, відмінну від решти. Тоді постає задача пошуку такої тупикової форми логічної функції, що містила б мінімальну кількість букв.

Означення. *Складністю ДНФ* називається кількість букв (всіх входжень змінних), з яких складається дана ДНФ [6].

Означення. ДНФ логічної функції f називається *мінімальною ДНФ*, якщо вона має найменшу складність в порівнянні з рештою ДНФ, що задають дану функцію f.

Деякі логічні функції можуть мати декілька мінімальних ДНФ, що містять однакову кількість букв. В цьому випадку обирається та мінімальна ДНФ, що є більш придатною в порівнянні з рештою для реалізації конкретних прикладних цілей даної задачі.

З метою визначення мінімальної ДНФ використовуються імплікантні матриці.

Означення. *Імплікантною матрицею* для заданої функції називається таблиця, в якій по вертикалі записуються конституенти одиниці, а по горизонталі – прості імпліканти заданої функції, отримані із скороченої ДНФ. Якщо імпліканта є власною частиною деякої конституенти одиниці, то клітинка імплікантної матриці, що відповідає цим імпліканті та конституенті одиниці, якимось чином відмічається.

Розв'язання прикладу 36 (продовження). Побудуємо імплікантну матрицю для досліджуваної логічної функції.

Проста імпліканта		Конституента					
		1 $x\,y\,z$	2 $x\,y\,\bar{z}$	3 $\bar{x}\,y\,z$	4 $\bar{x}\,\bar{y}\,z$	5 $x\,\bar{y}\,\bar{z}$	6 $\bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z}$
1	$x\,y$	*	*				
2	$y\,z$	*		*			
3	$x\,\bar{z}$		*			*	
4	$\bar{x}\,z$			*	*		
5	$\bar{x}\,\bar{y}$				*		*
6	$\bar{y}\,\bar{z}$					*	*

Щоб отримати мінімальну ДНФ заданої функції, достатньо знайти мінімальну кількість імплікант, які разом накриють помітками всі стовпці імплікантної матриці. В даному випадку кожен стовпець містить дві помітки. Тому із скороченої ДНФ досліджуваної функції можна виключити будь-яку імпліканту. Мінімальна кількість імплікант, що накривають помітками всі стовпці, дорівнює трьом: **1**-а імпліканта $x\,y$ накриває **1**-у і **2**-у конституенти, **4**-а імпліканта $\bar{x}\,z$ – **3**-ю і **4**-у конституенти, **6**-а імпліканта $\bar{y}\,\bar{z}$ – **5**-у і **6**-у конституенти (стовпці імплікантної матриці). Можна накрити стовпці (конституенти) в інший спосіб: **2**-а імпліканта $y\,z$ накриває **1**-у і **3**-ю конституенти, **3**-я імпліканта $x\,\bar{z}$ – **2**-у і **5**-у конституенти, **5**-а імпліканта $\bar{x}\,\bar{y}$ – **4**-у і **6**-у конституенти. Таким чином, дана логічна функція має дві тупикові ДНФ з однаковою кількістю (**6**) букв. Імпліканти, що складають одну з цих тупикових ДНФ, є зайвими для іншої тупикової ДНФ. Але це не завжди так. Крім вказаних, дана функція, як видно із побудованої для неї імплікантної матриці, має й інші тупикові форми, що мають більшу складність (**8**). Зокрема, **1**-ю імплікантою закриваються **1**-а і **2**-а конституенти, **2**-ю імплікантою – **1**-а і **3**-я конституенти, **5**-ю імплікантою – **4**-а і **6**-а конституенти, **6**-ю імплікантою – **5**-а і **6**-а конституенти. При такому обранні покриття деякі конституенти накриваються декількома імплікантами одночасно (**1**-а конституента накривається **1**-ю і **2**-ю імплікантами, а **6**-а конституента накривається **5**-ю і **6**-ю імплікантами). Для тупикової ДНФ це припустимо, тому що все одно жодну із обраних імплікант виключити неможна: при виключенні **1**-ї імпліканти залишається незакритою **2**-а конституента, при виключенні **2**-ї імпліканти залишається незакритою **3**-я конституента, при виключенні **5**-ї або **6**-ї імплікант залишаються ненакритими **4**-а і **5**-а конституенти відповідно. Інша тупикова ДНФ, що також має складність 8, складається

наступним чином: **1**-а імпліканта покриває **1**-у і **2**-у конституенти, **3**-я імпліканта – **2**-у і **5**-у конституенти, **4**-а імпліканта – **3**-ю і **4**-у конституенти, **5**-а імпліканта – **4**-у і **6**-у конституенти. При цьому також відбувається покриття однієї конституенти декількома імплікантами одночасно (**2**-у конституенту покривають **1**-а і **3**-я імпліканти, а **4**-у конституенту – **4**-а і **5**-а імпліканти). Але при такому обранні покриття конституент також неможна виключити жодну із обраних імплікант: при виключенні **1**-ї імпліканти виявляється незакритою **1**-а конституента, при виключенні **3**-ї імпліканти виявляється незакритою **5**-а конституента, при виключенні **4**-ї або **5**-ї імплікант виявляються незакритими **3**-я або **6**-а конституенти відповідно. Інших тупикових форм для заданої логічної функції немає. Таким чином, для цієї функції існує чотири різних тупикових ДНФ:

$$\underset{6\ \text{букв}}{f^1_{\text{туп}}} = \overset{1}{\underset{1,2}{x\,y}} \vee \overset{4}{\underset{3,4}{\bar{x}\,z}} \vee \overset{6}{\underset{5,6}{\bar{y}\,\bar{z}}}$$

$$\underset{6\ \text{букв}}{f^2_{\text{туп}}} = \overset{2}{\underset{1,3}{y\,z}} \vee \overset{3}{\underset{2,5}{x\,\bar{z}}} \vee \overset{5}{\underset{4,6}{\bar{x}\,\bar{y}}}$$

$$\underset{8\ \text{букв}}{f^3_{\text{туп}}} = \overset{1}{\underset{1,2}{x\,y}} \vee \overset{2}{\underset{1,3}{y\,z}} \vee \overset{5}{\underset{4,6}{\bar{x}\,\bar{y}}} \vee \overset{6}{\underset{5,6}{\bar{y}\,\bar{z}}}$$

$$\underset{8\ \text{букв}}{f^4_{\text{туп}}} = \overset{1}{\underset{1,2}{x\,y}} \vee \overset{3}{\underset{2,5}{x\,\bar{z}}} \vee \overset{4}{\underset{3,4}{\bar{x}\,z}} \vee \overset{5}{\underset{4,6}{\bar{x}\,\bar{y}}}$$

Серед цих тупикових ДНФ дві мають однакову найменшу (шість) складність. Отже, для цієї функції існує дві різні мінімальні ДНФ.

$$f^1_{min} = \overset{1}{\underset{1,2}{x\,y}} \vee \overset{4}{\underset{3,4}{\bar{x}\,z}} \vee \overset{6}{\underset{5,6}{\bar{y}\,\bar{z}}}$$

$$f^2_{min} = \overset{2}{\underset{1,3}{y\,z}} \vee \overset{3}{\underset{2,5}{x\,\bar{z}}} \vee \overset{5}{\underset{4,6}{\bar{x}\,\bar{y}}}$$

Відповідь. $f^1_{min} = x\,y \vee \bar{x}\,z \vee \bar{y}\,\bar{z}$, $\quad f^2_{min} = y\,z \vee x\,\bar{z} \vee \bar{x}\,\bar{y}$.

Виходячи із розглянутого прикладу, запишемо *решту кроків* ***алгоритму мінімізації логічної функції, яку подано в ДДНФ***.

4. За отриманою скороченою ДНФ будується імплікантна матриця.

5. В імплікантній матриці відшукуються всі набори простих імплікант, що сумісно накривають всі конституенти одиниці логічної функції, що мінімізується, і яку подано в ДДНФ. Об'єднавши імпліканти кожного з цих наборів знаками диз'юнкції, отримують всі можливі тупикові ДНФ заданої функції.

6. Серед цих тупикових ДНФ відшукується одна або декілька таких, що мають найменшу складність, тобто які в сумі містять мінімальну кількість букв. Таким чином, визначається одна або декілька мінімальних ДНФ.

Приклад 37. Знайти мінімальну ДНФ логічної функції чотирьох змінних ***f*(*x*, *y*, *z*, *t*)**, що дорівнює одиниці на наборах **№№ 1**, **3**, **5**, **7**, **14**, **15** і дорівнює нулю на решті наборах [5].

Розв'язання. Побудуємо для цієї функції таблицю істинності, за якою можна буде виписати ДДНФ.

№	x	y	z	t	f	Члени ДДНФ	
0	0	0	0	0	0		
1	0	0	0	1	1	$x\ y\ z\ t$ 0 0 0 1	$\bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z}\,t$
2	0	0	1	0	0		
3	0	0	1	1	1	$x\ y\ z\ t$ 0 0 1 1	$\bar{x}\,\bar{y}\,z\,t$
4	0	1	0	0	0		
5	0	1	0	1	1	$x\ y\ z\ t$ 0 1 0 1	$\bar{x}\,y\,\bar{z}\,t$
6	0	1	1	0	0		
7	0	1	1	1	1	$x\ y\ z\ t$ 0 1 1 1	$\bar{x}\,y\,z\,t$
8	1	0	0	0	0		
9	1	0	0	1	0		
10	1	0	1	0	0		
11	1	0	1	1	0		
12	1	1	0	0	0		
13	1	1	0	1	0		
14	1	1	1	0	1	$x\ y\ z\ t$ 1 1 1 0	$x\,y\,z\,\bar{t}$
15	1	1	1	1	1	$x\ y\ z\ t$ 1 1 1 1	$x\,y\,z\,t$

Виходячи із побудованої таблиці, Виписуємо для цієї функції ДДНФ та нумеруємо отримані конституенти одиниці:

$$\text{ДДНФ} = \overset{1}{\bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z}\,t} \vee \overset{2}{\bar{x}\,\bar{y}\,z\,t} \vee \overset{3}{\bar{x}\,y\,\bar{z}\,t} \vee \overset{4}{\bar{x}\,y\,z\,t} \vee \overset{5}{x\,y\,z\,\bar{t}} \vee \overset{6}{x\,y\,z\,t}$$

Проведемо операції неповного склеювання конституент одиниці, що складають отриману ДДНФ.

№№ конституент, що склеюються	Імпліканта	Змінна, за якою відбувається склеювання
1) 1-2	$\bar{x}\,\bar{y}\,t$	z
2) 1-3	$\bar{x}\,\bar{z}\,t$	y
3) 2-4	$\bar{x}\,z\,t$	y
4) 3-4	$\bar{x}\,y\,t$	z
5) 4-6	$y\,z\,t$	x
6) 5-6	$x\,y\,z$	t

Із першого стовпця цієї таблиці видно, що в операціях неповного склеювання брали участь всі конституенти. Як наслідок, вони всі будуть поглинені отриманими імплікантами. Об'єднуючи отримані імпліканти знаками диз'юнкції, отримуємо наступну ДНФ:

$$f = \underset{1}{\bar{x}\,\bar{y}\,t} \vee \underset{2}{\bar{x}\,\bar{z}\,t} \vee \underset{3}{\bar{x}\,z\,t} \vee \underset{4}{\bar{x}\,y\,t} \vee \underset{5}{y\,z\,t} \vee \underset{6}{x\,y\,z}$$

Серед отриманих імплікант однаковими за складом змінних є 1-а і 4-а, а також 2-а і 3-я імпліканти. Ці пари імплікант також є і суміжними. Тому подальше склеювання вказаних імплікант є можливим. Таким чином, необхідно провести другий етап склеювання.

№№ імплікант, що склеюються	Нова імпліканта	Змінна, за якою відбувається склеювання
1) 1-4	$\bar{x}\,t$	y
2) 2-3	$\bar{x}\,t$	z

На першому етапі склеювання неможливо отримати однакові імпліканти. Ця ситуація стає можливою, починаючи з другого етапу. Саме це й відбулося з досліджуваною в даному прикладі функцією. За складом змінних пари імплікант, що склеюються, відрізняються саме тими змінними, за якими відбувалося склеювання. Тому отримані в результаті різних склеювань нові імпліканти можуть виявитися однаковими. В даному випадку в результаті різних склеювань отримано одну й ту саму нову імпліканту $\bar{x}\,t$. При цьому на другому етапі в склеюваннях брали участь отримані на першому етапі імпліканти **№№ 1**, **2**, **3**, **4**. Всі вони будуть поглинені отриманою новою імплікантою $\bar{x}\,t$. Імпліканти першого етапу **№ 5** і **№ 6** не брали участі в жодному склеюванні другого етапу. Як наслідок, вони не будуть поглинені, тому що вже є простими імплікантами. Всі імпліканти, отримані в результаті другого етапу склеювання, є різними за складом змінних. Тому подальше склеювання неможливе. Отже, отримана на другому етапі склеювання ДНФ є скороченою ДНФ досліджуваної функції:

$$f_{\text{скор}} = \overset{1}{\bar{x}\,t} \vee \overset{2}{y\,z\,t} \vee \overset{3}{x\,y\,z}$$

За початковою ДДНФ і отриманою скороченою ДНФ будуємо імплікантну матрицю.

Проста імпліканта		Конституента					
		1 $\bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z}\,t$	2 $\bar{x}\,\bar{y}\,z\,t$	3 $\bar{x}\,y\,\bar{z}\,t$	4 $\bar{x}\,y\,z\,t$	5 $x\,y\,z\,\bar{t}$	6 $x\,y\,z\,t$
1	$\bar{x}\,t$	*	*	*	*		
2	$y\,z\,t$				*		*
3	$x\,y\,z$					*	*

Із цієї таблиці видно, що деякі стовпці матриці (конституенти ДДНФ) мають лише одну помітку. Як наслідок, імпліканта, що забезпечує цю єдину помітку, до складу будь-якої з можливих тупикових форм повинна ввійти обов'язково. В іншому випадку відповідна конституента залишиться незакритою. Для даної функції такими конституентами є **1**-а, **2**-а, **3**-я (їх закриває лише **1**-а імпліканта) і **5**-а (її закриває лише **3**-я імпліканта). Тому **1**-а і **3**-я імпліканти до складу тупикової форми повинні ввійти обов'язково. Але після обрання цих обов'язкових імплікант виявляється, що їх достатньо для покриття всіх конституент (**1**-а імпліканта закриває ще і **4**-у конституенту, а **3**-я імпліканта – ще і **6**-у конституенту). Отже, **2**-а імпліканта $y\,z\,t$ є надлишковою і до тупикової ДНФ не ввійде. Таким чином, дана функція має єдину тупикову ДНФ.

$$\underset{5\ \text{букв}}{f_{\text{туп}}} = \underset{\boxed{1},\boxed{2},\boxed{3},4}{\overset{1}{\bar{x}\,t}} \vee \underset{\boxed{5},6}{\overset{3}{x\,y\,z}}$$

В силу того, що вона є єдиною, ця тупикова ДНФ автоматично є і мінімальною ДНФ для досліджуваної функції.

Відповідь. $f_{min} = \bar{x}\,t \vee x\,y\,z$.

Означення. Проста імпліканта називається *ядровою*, якщо вона покриває деяку конституенту одиниці початкової ДДНФ, яку не покриває жодна інша проста імпліканта [2].

Означення. Множина всіх ядрових імплікант скороченої ДНФ називається *ядром імплікант* [2].

Виходячи із даних означень, для функції із прикладу 37 **1**-а і **3**-я імпліканти складають ядро, якого в даному випадку виявилося достатньо для покриття всіх конституент початкової

ДДНФ і, таким чином, для мінімальної ДНФ. Таким чином, для функції із прикладу 37 її ядро імплікант є одночасно і мінімальною ДНФ. При цьому у функції із прикладу 36 серед конституент одиниці її початкової ДДНФ немає жодної, яка покривалася б лише однією єдиною імплікантою, тобто немає жодної ядрової імпліканти. Отже, у функції із прикладу 36 взагалі немає ядра.

7.1.3. Імпліцента

Означення 1. Якщо деяка логічна функція ψ (зокрема – елементарна диз'юнкція) дорівнює одиниці на тих самих наборах, на яких дорівнює одиниці інша функція f, то функція ψ називається *імпліцентою* функції f [19].

Дане формулювання визначає імпліценту через область істинності досліджуваних функцій f і ψ. Однак, це означення можна дати і через область хибності.

Означення 2. Функція ψ є *імпліцентою* функції f, якщо на тих наборах, на яких $\psi = 0$, також і $f = 0$ [8, 11].

Таким чином, функція ψ може дорівнювати одиниці на тих наборах, на яких $f = 0$, але не навпаки. Виходячи з цього, можна дати ще одне формулювання означення імпліценти.

Означення 3. Функція ψ є *імпліцентою* функції f, якщо $\psi \wedge f = f$.

Означення. У випадку, якщо функція ψ є імпліцентою функції f, то також говорять, що функція ψ входить до функції f. Умова входження записується як $\psi \subset f$.

Приклад 38. Для функцій трьох змінних

$$f = (0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1),\ g = (0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1),\ h = (0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1)$$

із прикладу 36 визначити, які з них є імпліцентами одна одній.

Розв'язання. Скористаємось першим означенням імпліценти. Для цих функцій $OI(f) = \{1, 3, 6, 7\}$, $OI(g) = \{1, 7\}$, $OI(h) = \{4, 7\}$. Є очевидним, що $OI(g) \subseteq OI(f)$, тобто на тих наборах значень змінних, на яких $g = 1$, також і функція $f = 1$. Як наслідок, функція f є імпліцентою для функції g. Але функція $f = 1$ також і на наборах № 3 і № 6, на яких $g = 0$, тобто $OI(f) \not\subset OI(g)$. Як наслідок, функція g не є імпліцентою для функції f. Для функцій f і h не виконується жодне з включень $OI(f) \not\subset OI(h)$ (порушення відбувається на наборах №№ 1, 3, 6, на яких $h = 0$, а $f = 1$) і $OI(h) \not\subset OI(f)$ (порушення відбувається на наборі № 4, де $f = 0$, а $h = 1$). Отже, жодна із пари функцій $\{f, h\}$ не є імпліцентою для іншої. Для функцій g і h $OI(g) \not\subset OI(h)$ (порушення відбувається на наборі № 1, де $g = 1$, а $h = 0$). Як наслідок, функція h не є імпліцентою для функції g. Зворотне включення також не виконується, тобто $OI(h) \not\subset OI(g)$ (порушення відбувається на наборі № 4, на якому $h = 1$, а $g = 0$). Отже, функція g також не є імпліцентою для функції h.

Тепер скористаємось другим означенням імпліценти і розглянемо області хибності для заданих функцій: $OX(f) = \{0, 2, 4, 5\}$, $OX(g) = \{0, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $OX(h) = \{0, 1, 2, 3, 5, 6\}$. Є очевидним, що $OX(f) \subseteq OX(g)$, тобто на всіх наборах, на яких функція $f = 0$, функція g також дорівнює нулю. Отже, функція f є імпліцентою для функції g. В той же час, $OX(g) \not\subset OX(f)$, тому що на наборах № 3 і № 6 $g = 0$, а $f = 1$. Як наслідок, функція g не є імпліцентою для функції f. На наборі № 4 функція $f = 0$, а $h = 1$, що суперечить 2-му означенню імпліценти. Як наслідок, функція f не є імпліцентою для функції h. А на наборах №№ 1, 3, 6 $h = 0$, а $f = 1$, що також суперечить 2-му означенню імпліценти. Як наслідок, і функція h не є імпліцентою для

функції ***f***. Для функцій ***g*** і ***h*** **ОХ(*g*)** $\not\subset$ **ОХ(*h*)**, тому що на наборі **№ 4** ***g* = 0**, а ***h* = 1**. З цього випливає, що функція ***g*** не є імпліцентою функції ***h***. Зворотне включення також не виконується, тобто **ОХ(*h*)** $\not\subset$ **ОХ(*g*)**, тому що на наборі **№ 1** ***h* = 0**, а ***g* = 1**. Отже, функція ***h*** не є імпліцентою функції ***g***.

Таким чином, порівняння областей хибності заданих функцій дозволяє зробити ті ж самі висновки, що й порівняння їх областей істинності.

Скористаємось тепер третім означенням імпліценти. Для цього побудуємо таблиці істинності для $f \wedge g$, $f \wedge h$ і $g \wedge h$.

№	*x*	*y*	*z*	*f*	*g*	*h*	$f \wedge g$	$f \wedge h$	$g \wedge h$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	1	1	1	0	1	0	0
2	0	1	0	0	0	0	0	0	0
3	0	1	1	1	0	0	0	0	0
4	1	0	0	0	0	1	0	0	0
5	1	0	1	0	0	0	0	0	0
6	1	1	0	1	0	0	0	0	0
7	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Як видно із наведеної таблиці істинності, $f \wedge g = g$. Отже, функція ***f*** є імпліцентою функції ***g***. При цьому $f \wedge g \neq f$, що свідчить про те, що функція ***g*** для функції ***f*** імпліцентою не є. Для решти кон'юнкцій $f \wedge h \neq f \neq h$ і $g \wedge h \neq g \neq h$. Ці співвідношення також підтверджують, що для пар функцій **{*f*, *h*}** і **{*g*, *h*}** жодна із функцій не є імпліцентою для іншої функції із пари.

Розглянутий приклад показує, що незалежно від того, в який спосіб досліджувати пару функцій на наявність імпліценти (яким із означень імпліценти користуватися), отримані висновки будуть однаковими.

Відповідь. Функція ***f*** є імпліцентою функції ***g***, але функція ***g*** не є імпліцентою для функції ***f***. Решта попарні поєднання розглянутих функцій не є імпліцентами одна одній.

Теорема 23. *Формулювання*. Будь-яка конституента нуля, що входить до складу ДКНФ логічної функції ***f***, є її імпліцентою [19].

Доведення. Конституента нуля дорівнює нулю лише на одному наборі значень змінних. В силу того, що ДКНФ логічної функції ***f*** вкладається із кон'юнкцій конституент нуля, нульове значення будь-якої конституенти нуля, що входить до складу ДКНФ, збігається з одним із нульових значень функції ***f***. Тому, у відповідності з означенням імпліценти, конституента нуля, що входить до складу ДКНФ, є імпліцентою ДКНФ і, як наслідок, функції ***f***. **Теорему доведено**.

Наслідок із теореми 23. Елементарні диз'юнкції, із яких складається КНФ деякої логічної функції ***f***, є імпліцентами цієї функції ***f*** [8].

Теорема 24. *Формулювання*. **Константа 1** є імпліцентою будь-якої логічної функції.

Доведення. За означенням, **константа 1** дорівнює одиниці на всіх наборах значень змінних і, як наслідок, обов'язково дорівнює одиниці на всіх тих наборах, на яких функція ***f* = 1**. **Теорему доведено**.

Є очевидним, що кожна логічна функція є імпліцентою самої себе [4, 5].

Теорема 25. *Формулювання*. Будь-яка логічна функція є імпліцентою **константи 0**.

Доведення. **Константа 0** не дорівнює одиниці на жодному наборі. Це означає, що у будь-якої логічної функції, на яких би наборах не стояли у неї нулі, буде відповідність її нульових

значень нульовим значенням **константи 0** і ніде не буде набору, для якого логічна функція дорівнює нулю, а **константа 0** в цей же час дорівнює одиниці. **Теорему доведено**.

Означення. Дві логічні функції ψ_1 і ψ_2 називаються *порівнянними*, якщо вони є імпліцентами одна для одної, тобто якщо для них виконуються умови $\psi_1 \subset \psi_2$, $\psi_2 \subset \psi_1$.

Теорема 26. *Формулювання*. Якщо логічна функція f_1 є імплікантою для іншої логічної функції f_2, то функція f_2 є імпліцентою для функції f_1. І навпаки, якщо логічна функція f_1 є імпліцентою для іншої логічної функції f_2, то функція f_2 є імплікантою для функції f_1.

Доведення. Для доведення цієї теореми скористаємось 3-м означенням імпліканти та імпліценти. Доведемо першу частину теореми. Нехай логічна функція f_1 є імплікантою для іншої логічної функції f_2. Це означає, що $f_1 \vee f_2 = f_2$. Тоді

$$f_1 \wedge f_2 = f_1\,(f_1 \vee f_2) = f_1 \cdot f_1 \vee f_1 \cdot f_2 = f_1 \vee f_1 \cdot f_2 = f_1\,(1 \vee f_2) = f_1 \cdot 1 = f_1.$$

Із того, що $f_1 \wedge f_2 = f_1$ за 3-м означенням імпліценти випливає, що функція f_2 є імпліцентою для функції f_1.

Тепер доведемо другу частину теореми. Нехай тепер логічна функція f_1 є імпліцентою для іншої логічної функції f_2. Це означає, що $f_1 \wedge f_2 = f_2$. Тоді

$$f_1 \vee f_2 = f_1 \vee f_1 \cdot f_2 = f_1\,(1 \vee f_2) = f_1 \cdot 1 = f_1.$$

Із того, що $f_1 \vee f_2 = f_1$ за 3-м означенням імпліканти випливає, що функція f_2 є імплікантою для функції f_1. **Теорему доведено**.

Означення. Елементарна диз'юнкція, яку отримано шляхом виключення із початкової диз'юнкції однієї або декількох змінних, називається *власною частиною* цієї початкової диз'юнкції [11].

Наприклад, нехай дана елементарна диз'юнкція $\psi = x \vee \bar{y} \vee z$. Тоді її власними частинами будуть диз'юнкції $x \vee \bar{y}$, $\bar{y} \vee z$, $x \vee z$, x, $\bar{y}$, z. Сама елементарна диз'юнкція $x \vee \bar{y} \vee z$ не є своєю власною частиною, тому що згідно з означенням для отримання власної частини із початкової елементарної диз'юнкції треба виключити хоча б одну змінну.

Означення 1. Елементарні диз'юнкції, які самі входять до даної функції, але ніяка їх власна частина не входить, називаються *простими імпліцентами* [8].

Наприклад, для функції $f(x, y, z, t) = (x \vee \bar{y} \vee z)\,(\bar{y} \vee z \vee \bar{t})\,(x \vee \bar{y})\,(x \vee t)$ простими імпліцентами будуть лише елементарні диз'юнкції $\bar{y} \vee z \vee \bar{t}$, $x \vee \bar{y}$ і $x \vee t$. Елементарна диз'юнкція (імпліцента) $x \vee \bar{y} \vee z$ не є простою імпліцентою, тому що її власна частина $x \vee \bar{y}$ також входить до даної функції (є її імпліцентою).

Означення 2. Таким чином, елементарна диз'юнкція ψ є *простою імпліцентою* логічної функції f, якщо при видаленні із ψ входження хоча б однієї змінної, ця елементарна диз'юнкція припиняє бути імпліцентою функції f.

Якщо якась диз'юнкція входить до даної функції, то при додаванні до цієї диз'юнкції будь-яких змінних нова диз'юнкція також буде входити до цієї функції, тому що ця нова диз'юнкція обертається в одиницю разом з початковою диз'юнкцією.

7.1.4. Мінімізація за Квайном в ДКНФ

Означення. Кон'юнкція всіх простих імпліцент називається *скороченою КНФ* [8].

Теорема 27. *Формулювання*. Будь-яку логічну функцію f можна в єдиний спосіб подати скороченою КНФ [19].

Доведення. В зв'язку з тим, що прості імпліценти входять до функції f, вони мають дорівнювати одиниці на тих самих наборах, що й функція f. Якщо це не так і проста імпліцента дорівнює нулю там, де функція f має дорівнювати одиниці, то в силу рівності $\mathbf{0} \wedge x = \mathbf{0}$ функція f буде тоді дорівнювати нулю, що неприпустимо. Для кожного набору, де функція f дорівнює нулю, має знайтися хоча б одна проста імпліцента, що дорівнює нулю, інакше функція f в цьому випадку не буде дорівнювати нулю. В найгіршому випадку такою імпліцентою є конституента нуля. Серед імпліцент у функції f можуть знайтися прості імпліценти w, що є власними частинами імпліценти ψ. В цьому випадку $\psi = w \vee v$. В силу рівності $w\,(w \vee v) = w\,v \vee w = w$ і, як наслідок, $\psi\, w = w$, відбудеться поглинання (елімінація) імпліценти ψ її власною частиною w, що є простою імпліцентою. Це означає, що функція f після всіх можливих поглинань в підсумку буде складатися лише із самих простих імпліцент.

Припустимо тепер, що для функції f існують дві різні скорочені КНФ. Але за означенням скороченої КНФ, вона повинна містити вичерпний перелік простих імпліцент. Цей перелік є єдиним, бо інакше він не був би вичерпним. Отже, обидві ці форми складаються із одних і тих самих простих імпліцент, тобто ці скорочені КНФ реалізуються однією й тією ж самою формулою. А це означає, що ці скорочені КНФ є ідентичними, тобто подання функції скороченою КНФ є єдиним. **Теорему доведено**.

Із теореми 21 і теореми 27 можна зробити висновок про те, *що скорочена ДНФ і скорочена КНФ також є канонічними формами подання булевої функції*.

Означення. Дві елементарні диз'юнкції називаються *ортогональними* за змінною x_i, якщо ця змінна входить в одну диз'юнкцію із запереченням (в інверсному вигляді), а в іншу – без заперечення (в прямому вигляді).

Означення. Дві елементарні диз'юнкції називаються *суміжними*, якщо вони ортогональні за однією й лише однією змінною x_i (прийнято також говорити «*суміжні за змінною* x_i»).

Наприклад,

$\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z}$	і	$x \vee y \vee z$	*ортогональні за трьома змінними* (x, y, z) ;
$\bar{x} \vee \bar{y} \vee z$	і	$x \vee y \vee \bar{z}$	*ортогональні за трьома змінними* (x, y, z) ;
$x \vee \bar{y} \vee \bar{z}$	і	$\bar{x} \vee y \vee \bar{z}$	*ортогональні за двома змінними* (x, y) ;
$x \vee \bar{y} \vee z$	і	$x \vee \bar{y} \vee \bar{z}$	*ортогональні за однією змінною* (z) – ***суміжні*** ;
$\bar{x} \vee y$	і	$\bar{x} \vee \bar{y}$	*ортогональні за однією змінною* (y) – ***суміжні*** .

З метою подання логічної функції скороченою КНФ використовуються операції повного і неповного склеювання, а також поглинання та розгортання до КНФ [4, 8].

Операція ***повного склеювання*** визначається співвідношенням

$$(\psi \vee x)\,(\psi \vee \bar{x}) = \psi, \tag{42}$$

що випливає із того, що

$$(\psi \vee x)\,(\psi \vee \bar{x}) = \psi \vee \psi\,\bar{x} \vee \psi\,x \vee x\,\bar{x} = \psi \vee \psi\,(x \vee \bar{x}) = \psi \vee \mathbf{0} = \psi.$$

Склеювання диз'юнкцій $\psi \vee x$ і $\psi \vee \overline{x}$ в даному випадку проводиться за змінною x. Слід зазначити, що операція склеювання можлива лише для суміжних (ортогональних лише за однією єдиною змінною) елементарних диз'юнкцій, і таких, що мають при цьому однаковий склад змінних.

Операція ***неповного склеювання*** має наступний вигляд:

$$(\psi \vee x)\,(\psi \vee \overline{x}) = \psi\,(\psi \vee x)\,(\psi \vee \overline{x}). \qquad (43)$$

Операція ***поглинання*** визначається із рівностей

$$\psi\,(\psi \vee x) = \psi \qquad \text{і} \qquad \psi\,(\psi \vee \overline{x}) = \psi. \qquad (44)$$

В цьому випадку вираз ψ поглинає всю формулу. Це випливає із співвідношень елімінації (11.1) і (11.2).

Далеко не завжди початкову логічну функцію подано в ДКНФ. У випадку, коли це не так, застосовується операція ***розгортання***. Її багатократне застосування дозволяє перетворити будь-яку просту імпліценту в кон'юнкцію конституент нуля. Ця операція відображається співвідношенням (26). При розгортанні різні імпліценти можуть утворювати одну й ту саму конституенту нуля. В цьому випадку на основі властивості ідемпотентності кон'юнкції (7) $x\,x = x$ треба залишити лише одну таку конституенту нуля. В результаті отримаємо ДКНФ початкової логічної функції.

Теорема 28 (*теорема Квайна для ДКНФ*). *Формулювання*. Якщо в ДКНФ логічної функції f провести всі операції неповного склеювання, а потім операції поглинання, то отримаємо скорочену КНФ цієї функції, тобто кон'юнкцію всіх її простих імпліцент.

Доведення. Нехай, наприклад, після проведення всіх операцій неповного склеювання, а потім поглинання КНФ буде містити член w, що не є простою імпліцентою. Тоді до цієї функції, крім w, входить якась його частина ψ, що є простою імпліцентою. Це означає, що функція f буде містити імпліценту w і просту імпліценту ψ у вигляді їх кон'юнкції $\psi\,w$. Але $w = (v \vee \psi)$. Тоді член w у відповідності з рівністю $\psi\,w = \psi\,(v \vee \psi) = \psi$ буде поглинений простою імпліцентою ψ і, відповідно, скорочена КНФ буде містити лише цю просту імпліценту. Це стосується і решти імпліцент. Відповідно, КНФ буде складатися лише із простих імпліцент, об'єднаних операціями кон'юнкції. **Теорему доведено**.

Для пошуку мінімальної КНФ використовуються ті ж самі поняття, що й для пошуку мінімальної ДНФ.

Означення. Кон'юнкція простих імпліцент, жодна з яких не є зайвою, називається *тупиковою КНФ* логічної функції [4, 19].

Означення. *Складністю КНФ* називається кількість букв (всіх входжень змінних), із яких складається дана КНФ.

Означення. КНФ логічної функції f називається *мінімальною КНФ*, якщо вона має найменшу складність у порівнянні з іншими КНФ, що задають дану функцію f.

Деякі логічні функції можуть мати декілька мінімальних КНФ, що містять однакову кількість букв. В цьому випадку обирається та мінімальна КНФ, що є більш придатною в порівнянні з іншими для реалізації конкретних прикладних цілей даної задачі.

З метою визначення мінімальної КНФ використовуються імпліцентні матриці.

Означення. *Імпліцентною матрицею* для заданої функції називається таблиця, в якій по вертикалі записуються конституенти нуля, а по горизонталі – прості імпліценти заданої функції, отримані із скороченої КНФ. Якщо імпліцента є власною частиною деякої

конституенти нуля, то клітинка імпліцентної матриці, що відповідає цим імпліценті та конституенті нуля, якимось чином помічається.

За теоремою Квайна для мінімізації логічної функції, поданої в КНФ, її спочатку треба перетворити в ДКНФ, а потім виконати наступні кроки ***алгоритму мінімізації логічної функції, поданої в ДКНФ***.

1. В ДКНФ функції $\boldsymbol{f = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$ проводяться всі операції неповного склеювання конституент нуля.
2. Відбувається поглинання імпліцентами всіх тих конституент нуля, що брали участь в неповному склеюванні. Конституенти нуля, що брали участь в операціях неповного склеювання, поглинаються обов'язково, тому що вони містять в своєму складі імпліценти, що мають після першого склеювання по $\boldsymbol{(n-1)}$ букві та містяться в функції $\boldsymbol{f}$. Конституенти нуля, що не були задіяні в операціях склеювання, не можуть бути поглиненими, тому що вони вже є простими імпліцентами з $\boldsymbol{n}$ змінними.
3. Проводяться операції неповного склеювання та поглинання імпліцент з $\boldsymbol{(n-1)}$ змінними, що отримані на першому кроці склеювання, за аналогією з пунктами 1) і 2). Ця процедура повторюється доти, поки операції неповного склеювання залишаються можливими. Отримана в результаті КНФ буде скороченою КНФ.
4. За отриманою скороченою КНФ будується імпліцентна матриця.
5. В імпліцентній матриці всі набори простих імпліцент, які накривають всі конституенти нуля функції, яка мінімізується і подана в ДКНФ. Об'єднавши імпліценти кожного із цих наборів знаками кон'юнкції, отримуємо всі можливі тупикові КНФ заданої функції.
6. Серед цих тупикових КНФ обирається одна або декілька таких, що мають найменшу складність, тобто які в сумі містять мінімальну кількість букв. Таким чином, визначаються одна або декілька мінімальних КНФ.

Для пошуку мінімальної КНФ вводяться означення, аналогічні до тих, що були введені для пошуку мінімальної ДНФ.

Означення. Проста імпліцента називається *ядровою*, якщо вона покриває деяку конституенту нуля початкової ДКНФ, яку не покриває жодна інша проста імпліцента.

Означення. Множина всіх ядрових імпліцент скороченої КНФ називається *ядром імпліцент*.

Приклад 39. Знайти мінімальну КНФ логічної функції, що дорівнює нулю на наборах **№№ 0**, **1**, **2**, **3**, **7**, **9**, **12**, **13**, **15** і дорівнює нулю на решті наборах [5].

Розв'язання. Побудуємо для цієї функції таблицю істинності, за якою можна буде виписати ДКНФ.

№	x	y	z	t	f	Члени ДКНФ	
0	0	0	0	0	0	$x \vee y \vee z \vee t$ 0 0 0 0	$x \vee y \vee z \vee t$
1	0	0	0	1	0	$x \vee y \vee z \vee t$ 0 0 0 1	$x \vee y \vee z \vee \bar{t}$
2	0	0	1	0	0	$x \vee y \vee z \vee t$ 0 0 1 0	$x \vee y \vee \bar{z} \vee t$
3	0	0	1	1	0	$x \vee y \vee z \vee t$ 0 0 1 1	$x \vee y \vee \bar{z} \vee \bar{t}$
4	0	1	0	0	1		
5	0	1	0	1	1		
6	0	1	1	0	1		
7	0	1	1	1	0	$x \vee y \vee z \vee t$ 0 1 1 1	$x \vee \bar{y} \vee \bar{z} \vee \bar{t}$
8	1	0	0	0	1		
9	1	0	0	1	0	$x \vee y \vee z \vee t$ 1 0 0 1	$\bar{x} \vee y \vee z \vee \bar{t}$
10	1	0	1	0	1		
11	1	0	1	1	1		
12	1	1	0	0	0	$x \vee y \vee z \vee t$ 1 1 0 0	$\bar{x} \vee \bar{y} \vee z \vee t$
13	1	1	0	1	0	$x \vee y \vee z \vee t$ 1 1 0 1	$\bar{x} \vee \bar{y} \vee z \vee \bar{t}$
14	1	1	1	0	1		
15	1	1	1	1	0	$x \vee y \vee z \vee t$ 1 1 1 1	$\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z} \vee \bar{t}$

Виходячи із побудованої таблиці, виписуємо для цієї функції ДКНФ і нумеруємо отримані конституенти нуля:

$$\text{ДКНФ} = \overset{1}{(x \vee y \vee z \vee t)}\ \overset{2}{(x \vee y \vee z \vee \bar{t})} \wedge \overset{3}{(x \vee y \vee \bar{z} \vee t)}\ \overset{4}{(x \vee y \vee \bar{z} \vee \bar{t})} \wedge$$
$$\wedge \underset{5}{(x \vee \bar{y} \vee \bar{z} \vee \bar{t})}\ \underset{6}{(\bar{x} \vee y \vee z \vee \bar{t})} \wedge \underset{7}{(\bar{x} \vee \bar{y} \vee z \vee t)}\ \underset{8}{(\bar{x} \vee \bar{y} \vee z \vee \bar{t})} \wedge \underset{9}{(\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z} \vee \bar{t})}$$

Проведемо операції неповного склеювання конституент нуля, що складають отриману ДКНФ.

№№ конституент, що склеюються	Імпліцента	Змінна, за якою відбувається склеювання
1) 1-2	$x \vee y \vee z$	t
2) 1-3	$x \vee y \vee t$	z
3) 2-4	$x \vee y \vee \bar{t}$	z
4) 2-6	$y \vee z \vee \bar{t}$	x
5) 3-4	$x \vee y \vee \bar{z}$	t
6) 4-5	$x \vee \bar{z} \vee \bar{t}$	y
7) 5-9	$\bar{y} \vee \bar{z} \vee \bar{t}$	x
8) 6-8	$\bar{x} \vee z \vee \bar{t}$	y
9) 7-8	$\bar{x} \vee \bar{y} \vee z$	t
10) 8-9	$\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{t}$	z

Із першого стовпця цієї таблиці видно, що в операціях неповного склеювання брали участь всі конституенти. Отже, вони всі будуть поглинені отриманими імпліцентами. Об'єднавши отримані імпліценти знаками кон'юнкції, отримуємо наступну КНФ:

$$f = \overset{1}{(x \vee y \vee z)}\ \overset{2}{(x \vee y \vee t)}\ \overset{3}{(x \vee y \vee \bar{t})}\ \overset{4}{(y \vee z \vee \bar{t})}\ \overset{5}{(x \vee y \vee \bar{z})} \wedge$$
$$\wedge \underset{6}{(x \vee \bar{z} \vee \bar{t})}\ \underset{7}{(\bar{y} \vee \bar{z} \vee \bar{t})}\ \underset{8}{(\bar{x} \vee z \vee \bar{t})}\ \underset{9}{(\bar{x} \vee \bar{y} \vee z)}\ \underset{10}{(\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{t})}$$

Серед отриманих імпліцент однаковими за складом змінних є 1-а, 5-а і 9-а, 2-а 3-я і 10-а імпліценти, а також 6-а і 8-а імпліценти. Але суміжними серед них є лише 1-а і 5-а (1-а і 9-а, а також 5-а і 9-а ортогональні за двома змінними) і 2-а і 3-я (2-а і 10-а ортогональні за трьома змінними, а 3-я і 10-а – за двома змінними). Також за двома змінними ортогональні 6-а і 8-а імпліценти. Тому вони також не є суміжними. Таким чином, подальше склеювання можливе лише між 1-ю і 5-ю, а також між 2-ю і 3-ю імпліцентами. Таким чином, необхідно провести другий етап склеювання.

№№ імпліцент, що склеюються	Нова імпліцента	Змінна, за якою відбувається склеювання
1) 1-5	$x \vee y$	z
2) 2-3	$x \vee y$	t

На першому етапі склеювання, як і при відшукуванні мінімальної ДНФ, неможливо отримати однакові імпліценти. Ця ситуація стає можливою, починаючи з другого етапу. Саме це й відбулося з досліджуваною в даному прикладі функцією. За складом змінних пари імпліцент, які склеювалися, відрізнялися саме тими змінними, за якими відбулося склеювання. Тому отримані в результаті різних склеювань нові імпліценти можуть виявитися однаковими. В даному випадку в результаті різних склеювань було отримано одну й ту саму нову імпліценту $x \vee y$. При цьому на другому етапі в склеюваннях брали участь отримані на першому етапі імпліценти **№№ 1, 2, 3, 5**. Всі вони будуть поглинені отриманою новою імпліцентою $x \vee y$. Імпліценти першого етапу **№ 4, 6, 7, 8, 9, 10** не брали участі в жодному склеюванні другого етапу. Як наслідок, вони не будуть поглинені, тому що вже є простими імпліцентами. Всі імпліценти, отримані в результаті другого етапу склеювання, є або різними за складом змінних, або ортогональними більше, ніж за однією змінною, тобто несуміжними (2-а і 4-а, а також 3-я і 5-а імпліценти). Тому подальше склеювання неможливе. Отже, отримана на другому етапі склеювання КНФ є скороченою КНФ досліджуваної функції:

$$f_{\text{скор}} = \overset{1}{(x \vee y)}\,\overset{2}{(y \vee z \vee \bar{t})}\,\overset{3}{(x \vee \bar{z} \vee \bar{t})}\,\overset{4}{(\bar{y} \vee \bar{z} \vee \bar{t})} \wedge$$
$$\wedge\, \underset{5}{(\bar{x} \vee z \vee \bar{t})}\,\underset{6}{(\bar{x} \vee \bar{y} \vee z)}\,\underset{7}{(\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{t})}$$

За початковою ДКНФ і отриманою скороченою КНФ будуємо імпліцентну матрицю.

	Проста імпліцента	Конституента								
		1 $x \vee y \vee z \vee t$	2 $x \vee y \vee z \vee \bar{t}$	3 $x \vee y \vee \bar{z} \vee t$	4 $x \vee y \vee \bar{z} \vee \bar{t}$	5 $x \vee \bar{y} \vee \bar{z} \vee \bar{t}$	6 $\bar{x} \vee y \vee z \vee \bar{t}$	7 $\bar{x} \vee \bar{y} \vee z \vee t$	8 $\bar{x} \vee \bar{y} \vee z \vee \bar{t}$	9 $\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z} \vee \bar{t}$
1	$x \vee y$	*	*	*	*					
2	$y \vee z \vee \bar{t}$		*				*			
3	$x \vee \bar{z} \vee \bar{t}$				*	*				
4	$\bar{y} \vee \bar{z} \vee \bar{t}$					*				*
5	$\bar{x} \vee z \vee \bar{t}$						*		*	
6	$\bar{x} \vee \bar{y} \vee z$							*	*	
7	$\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{t}$								*	*

Із цієї таблиці видно, що деякі стовпці матриці (конституенти ДКНФ) мають лише одну помітку. З цього випливає, що імпліцента, яка забезпечує цю єдину помітку, до складу кожної з можливих тупикових форм повинна ввійти обов’язково, тому що є ядровою. В іншому випадку відповідна конституента залишиться незакритою. Для даної функції такими

конституентами є 1-а і 3-я (їх закриває лише 1-а імпліцента) і 7-а (її закриває лише 6-а імпліцента). Тому 1-а і 6-а імпліценти складають ядро кожної тупикової КНФ заданої функції. В результаті обрання цих імпліцент виявляються накритими 1-а, 2-а, 3-я, 4-а, 7-а і 8-а конституенти. Решту 5-у, 6-у і 9-у конституенти можна накрити декількома способами. Один з них містить 4-у (закриває 5-у і 9-у конституенти) і 2-у (закриває 2-у і 6-у конституенти) імпліценти, а другий – 4-у (закриває 5-у і 9-у конституенти) і 5-у (закриває 6-у і 8-у конституенти) імпліценти. Ці два способи дають нам тупикові КНФ. При виключенні 4-ї імпліценти незакритими стають 5-а і 9-а конституенти, а при виключенні 2-ї або 5-ї імпліцент – 6-а конституента). Ці тупикові форми мають однакову складність – **11**. При вказаному обранні простих імпліцент 5-а і 9-а конституенти закриваються однією ж тією самою імпліцентою (4-ю). Але замість однієї 4-ї імпліценти можна обрати 3-ю (щоб закрити 5-у конституенту), 7-у (щоб закрити 9-у конституенту), а також 2-у або 5-у імпліценти (щоб закрити 6-у конституенту). Ці два способи дають ще дві тупикові форми з однаковою складністю – **14**. Таким чином, дана функція має чотири тупикових КНФ:

$$\underset{11\ \text{букв}}{f^1_{\text{туп}}} = \overset{1}{\underset{\boxed{1},2,\boxed{3},4}{(x \vee y)}}\ \overset{6}{\underset{\boxed{7},8}{(\bar{x} \vee \bar{y} \vee z)}}\ \overset{4}{\underset{\underline{5},\underline{9}}{(\bar{y} \vee \bar{z} \vee \bar{t})}}\ \overset{2}{\underset{2,\underline{6}}{(y \vee z \vee \bar{t})}}$$

$$\underset{11\ \text{букв}}{f^2_{\text{туп}}} = \overset{1}{\underset{\boxed{1},2,\boxed{3},4}{(x \vee y)}}\ \overset{6}{\underset{\boxed{7},8}{(\bar{x} \vee \bar{y} \vee z)}}\ \overset{4}{\underset{\underline{5},\underline{9}}{(\bar{y} \vee \bar{z} \vee \bar{t})}}\ \overset{5}{\underset{\underline{6},8}{(\bar{x} \vee z \vee \bar{t})}}$$

$$\underset{14\ \text{букв}}{f^3_{\text{туп}}} = \overset{1}{\underset{\boxed{1},2,\boxed{3},4}{(x \vee y)}}\ \overset{6}{\underset{\boxed{7},8}{(\bar{x} \vee \bar{y} \vee z)}}\ \overset{3}{\underset{4,\underline{5}}{(\bar{y} \vee \bar{z} \vee \bar{t})}}\ \overset{7}{\underset{8,\underline{9}}{(\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{t})}}\overset{2}{\underset{2,\underline{6}}{(y \vee z \vee \bar{t})}}$$

$$\underset{14\ \text{букв}}{f^4_{\text{туп}}} = \overset{1}{\underset{\boxed{1},2,\boxed{3},4}{(x \vee y)}}\ \overset{6}{\underset{\boxed{7},8}{(\bar{x} \vee \bar{y} \vee z)}}\ \overset{3}{\underset{4,\underline{5}}{(\bar{y} \vee \bar{z} \vee \bar{t})}}\ \overset{7}{\underset{8,\underline{9}}{(\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{t})}}\overset{5}{\underset{\underline{6},8}{(\bar{x} \vee z \vee \bar{t})}}$$

Серед цих тупикових КНФ дві мають однакову найменшу (одинадцять) складність. Отже, для цієї функції існують дві різні мінімальні КНФ:

$$f^1_{min} = \overset{1}{\underset{\boxed{1},2,\boxed{3},4}{(x \vee y)}}\ \overset{6}{\underset{\boxed{7},8}{(\bar{x} \vee \bar{y} \vee z)}}\ \overset{4}{\underset{\underline{5},\underline{9}}{(\bar{y} \vee \bar{z} \vee \bar{t})}}\ \overset{2}{\underset{2,\underline{6}}{(y \vee z \vee \bar{t})}}$$

$$f^2_{min} = \overset{1}{\underset{\boxed{1},2,\boxed{3},4}{(x \vee y)}}\ \overset{6}{\underset{\boxed{7},8}{(\bar{x} \vee \bar{y} \vee z)}}\ \overset{4}{\underset{\underline{5},\underline{9}}{(\bar{y} \vee \bar{z} \vee \bar{t})}}\ \overset{5}{\underset{\underline{6},8}{(\bar{x} \vee z \vee \bar{t})}}$$

Відповідь. $f^1_{min} = (x \vee y)\ (\bar{x} \vee \bar{y} \vee z)\ (\bar{y} \vee \bar{z} \vee \bar{t})\ (y \vee z \vee \bar{t})$,

$f^2_{min} = (x \vee y)\ (\bar{x} \vee \bar{y} \vee z)\ (\bar{y} \vee \bar{z} \vee \bar{t})\ (\bar{x} \vee z \vee \bar{t})$.

Слід зазначити, що кількість букв в мінімальних КНФ і ДНФ логічної функції є різним. Тому при розв'язанні задач мінімізації логічних функції слід знайти як диз'юнктивні, так і кон'юнктивні мінімальні нормальні форми і обрати серед них форму, що містить найменшу кількість букв.

7.1.5. Отримання мінімальних КНФ за допомогою диз'юнктивних форм

Нехай задано логічну функцію $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, що дорівнює одиниці на наборах з номерами $j_1, j_2, \ldots, j_l$ і нулю на наборах з номерами $i_1, i_2, \ldots, i_m$. При цьому $m = 2^n - l$ [19].

Теорема 29. *Формулювання*. Диз'юнкція всіх конституент одиниці, що не входять до **ДДНФ(*f*)**, є запереченням цієї функції f, тобто

$$K^1_{i_1} \vee K^1_{i_2} \vee \ldots \vee K^1_{i_m} = \bar{f}.$$

Доведення. В загальному випадку для будь-якої логічної функції $\boldsymbol{n}$ змінних, крім **константи 0**, диз'юнкція всіх можливих конституент одиниці дорівнює одиниці, тобто

$$\boldsymbol{K_0^1 \vee K_1^1 \vee K_2^1 \vee \ldots \vee K_{2^n-1}^1 = 1}.$$

Серед цих конституент виділимо імпліканти функції $\boldsymbol{f}$, тобто ті конституенти одиниці, з яких складається ДДНФ цієї функції $\boldsymbol{f}$. Тоді

$$\boldsymbol{f} = \text{ДДНФ}(\boldsymbol{f}) = \boldsymbol{K_{j_1}^1 \vee K_{j_2}^1 \vee \ldots \vee K_{j_l}^1}.$$

Є очевидним, що диз'юнкція цих конституент-імплікант зі всіма рештою можливими конституентами одиниці від $\boldsymbol{n}$ змінних буде дорівнювати одиниці, тобто

$$\boldsymbol{f \vee K_{i_1}^1 \vee K_{i_2}^1 \vee \ldots \vee K_{i_m}^1 = 1}.$$

У відповідності із законом виключення третього $\boldsymbol{f \vee \overline{f} = 1}$. Це означає, що функція $\overline{\boldsymbol{f}}$ складається із тих конституент одиниці, що не є імплікантами функції $\boldsymbol{f}$, тобто не містяться в **ДДНФ(*f*)**. Таким чином,

$$\boldsymbol{\overline{f} = K_{i_1}^1 \vee K_{i_2}^1 \vee \ldots \vee K_{i_m}^1}.$$

Теорему доведено.

Використовуючи цей результат, мінімізацію логічної функції $\boldsymbol{f}$, поданої в КНФ, можна провести шляхом переходу від неї до **ДНФ($\overline{\boldsymbol{f}}$)**. Здійснити цей перехід дозволяє наступна теорема.

<u>Теорема 30</u>. *<u>Формулювання</u>*. КНФ логічної функції $\boldsymbol{f}$, яку отримано із мінімальної ДНФ функції $\overline{\boldsymbol{f}}$ після її перетворення за допомогою законів де Моргана, також буде мінімальною [19].

<u>Доведення</u>. Закон де Моргана не змінює кількість букв в логічній формулі порівняно з початковою формулою безпосередньо після виконання перетворення. Тому якщо мінімальна ДНФ функції містить $\boldsymbol{k}$ букв, то й отримана після перетворення за законом де Моргана формула буде містити ту ж саму кількість букв $\boldsymbol{k}$. Ця кількість буде мінімальною.

Припустимо протилежне, тобто припустимо, що існує інша КНФ логічної функції $\boldsymbol{f}$ з меншою кількістю букв. Перетворивши цю КНФ за законом де Моргана, отримаємо **ДНФ($\overline{\boldsymbol{f}}$)** з кількістю букв, меншою, ніж це було визначено раніше в початковій мінімальній **ДНФ($\overline{\boldsymbol{f}}$)**. Але це неможливо, тому що метод Квайна дає вичерпний перелік тупикових ДНФ, серед яких обирається найкоротша. Отримане протиріччя і доводить теорему. **Теорему доведено**.

Виходячи із доведених теорем 29 і 30, можна записати ***<u>алгоритм пошуку мінімальної КНФ(f) на основі мінімізації $\overline{f}$ в ДДНФ</u>***.

1. Визначаються всі конституенти одиниці, що не входять до **ДДНФ(*f*)**, тобто не є імплікантами функції $\boldsymbol{f}$. Ці конституенти об'єднуються знаками диз'юнкції, тобто виписується **ДДНФ($\overline{\boldsymbol{f}}$)**.
2. Відшукується мінімальна **ДНФ($\overline{\boldsymbol{f}}$)**.
3. Береться заперечення **ДНФ($\overline{\boldsymbol{f}}$)**, тобто відшукується $\overline{\text{ДНФ}(\overline{\boldsymbol{f}})}$ і перетворюється на основі закону де Моргана. Отримана КНФ буде мінімальною **КНФ(*f*)**.

<u>Приклад 40</u>. Розглянемо функцію $\boldsymbol{f}$ **= (0 0 0 0 1 1 1 0 1 0 1 1 0 0 1 0)** із прикладу 39. Знайти для неї мінімальну КНФ, використовуючи наведений алгоритм мінімізації **ДНФ($\overline{\boldsymbol{f}}$)**.

Розв'язання. Використаємо наведену в прикладі 39 таблицю істинності функції f для запису **ДДНФ($\bar{f}$)**.

№	x	y	z	t	f	$\bar{f}$	*Члени ДДНФ*	
0	0	0	0	0	0	1	$x\ y\ z\ t$ 0 0 0 0	$\bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z}\,\bar{t}$
1	0	0	0	1	0	1	$x\ y\ z\ t$ 0 0 0 1	$\bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z}\,t$
2	0	0	1	0	0	1	$x\ y\ z\ t$ 0 0 1 0	$\bar{x}\,\bar{y}\,z\,\bar{t}$
3	0	0	1	1	0	1	$x\ y\ z\ t$ 0 0 1 1	$\bar{x}\,\bar{y}\,z\,t$
4	0	1	0	0	1	0		
5	0	1	0	1	1	0		
6	0	1	1	0	1	0		
7	0	1	1	1	0	1	$x\ y\ z\ t$ 0 1 1 1	$\bar{x}\,y\,z\,t$
8	1	0	0	0	1	0		
9	1	0	0	1	0	1	$x\ y\ z\ t$ 1 0 0 1	$x\,\bar{y}\,\bar{z}\,t$
10	1	0	1	0	1	0		
11	1	0	1	1	1	0		
12	1	1	0	0	0	1	$x\ y\ z\ t$ 1 1 0 0	$x\,y\,\bar{z}\,\bar{t}$
13	1	1	0	1	0	1	$x\ y\ z\ t$ 1 1 0 1	$x\,y\,\bar{z}\,t$
14	1	1	1	0	1	0		
15	1	1	1	1	0	1	$x\ y\ z\ t$ 1 1 1 1	$x\,y\,z\,t$

Є очевидним, що всі ті й лише ті набори, за якими виписується **ДКНФ(f)**, беруть участь в формуванні **ДДНФ($\bar{f}$)**. Далі діємо за алгоритмом мінімізації функції, поданої в ДДНФ. Із наведеної таблиці виписуємо **ДДНФ($\bar{f}$)** і нумеруємо конституенти одиниці, які її складають:

$$\text{ДДНФ} = \overset{1}{\bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z}\,\bar{t}} \vee \overset{2}{\bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z}\,t} \vee \overset{3}{\bar{x}\,\bar{y}\,z\,\bar{t}} \vee \overset{4}{\bar{x}\,\bar{y}\,z\,t} \vee \overset{5}{\bar{x}\,y\,z\,t} \vee$$
$$\vee \underset{6}{x\,\bar{y}\,\bar{z}\,t} \vee \underset{7}{x\,y\,\bar{z}\,\bar{t}} \vee \underset{8}{x\,y\,\bar{z}\,t} \vee \underset{9}{x\,y\,z\,t}$$

Проведемо з отриманими конституентами одиниці всі операції неповного склеювання.

№№ конституент, що склеюються		Імпліканта	Змінна, за якою відбувається склеювання
1)	1-2	$\bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z}$	t
2)	1-3	$\bar{x}\,\bar{y}\,\bar{t}$	z
3)	2-4	$\bar{x}\,\bar{y}\,t$	z
4)	2-6	$\bar{y}\,\bar{z}\,t$	x
5)	3-4	$\bar{x}\,\bar{y}\,z$	t
6)	4-5	$\bar{x}\,z\,t$	y
7)	5-9	$y\,z\,t$	x
8)	6-8	$x\,\bar{z}\,t$	y
9)	7-8	$x\,y\,\bar{z}$	t
10)	8-9	$x\,y\,t$	z

Як видно із першого стовпця цієї таблиці, в склеюваннях брали участь всі наявні конституенти. Отже, всі вони будуть поглинені отриманими на цьому етапі імплікантами. Об'єднавши імпліканти знаками диз'юнкції, отримаємо наступну ДНФ.

$$\bar{f} = \overset{1}{\bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z}} \vee \overset{2}{\bar{x}\,\bar{y}\,\bar{t}} \vee \overset{3}{\bar{x}\,\bar{y}\,t} \vee \overset{4}{\bar{y}\,\bar{z}\,t} \vee \overset{5}{\bar{x}\,\bar{y}\,z} \vee \overset{6}{\bar{x}\,z\,t} \vee \overset{7}{y\,z\,t} \vee \overset{8}{x\,\bar{z}\,t} \vee \overset{9}{x\,y\,\bar{z}} \vee \overset{10}{x\,y\,t}$$

Серед отриманих імплікант однаковими за складом змінних є 1-а, 5-а і 9-а, 2-а, 3-я і 10-а імпліканти, а також 6-а і 8-а імпліканти. Але суміжними серед них є лише 1-а і 5-а (1-а і 9-а, а також 5-а і 9-а ортогональні за двома змінними) і 2-а і 3-я (2-а і 10-а ортогональні за трьома змінними, а 3-я і 10-а – за двома змінними). Також за двома змінними ортогональні 6-а і 8-а імпліканти. Тому вони також не є суміжними. Отже, подальше склеювання можливе лише між 1-ю і 5-ю, а також між 2-ю і 3-ю імплікантами. Таким чином, необхідно провести другий етап склеювання.

№№ імплікант, що склеюються	Нова імпліканта	Змінна, за якою відбувається склеювання
1) 1-5	$\bar{x}\,\bar{y}$	z
2) 2-3	$\bar{x}\,\bar{y}$	t

На другому етапі в склеюваннях брали участь отримані на першому етапі імпліканти **№№ 1, 2, 3, 5**. Всі вони будуть поглинені отриманою новою імплікантою $\bar{x}\,\bar{y}$. Імпліканти першого етапу **№ 4, 6, 7, 8, 9, 10** не брали участі в жодному склеюванні другого етапу. Як наслідок, вони не будуть поглинені, тому що вже є простими імплікантами. Всі імпліканти, отримані в результаті другого етапу склеювання, є або різними за складом змінних, або ортогональними більше, ніж за однією змінною (2-а і 4-а, а також 3-я і 5-а імпліканти). Тому подальше склеювання неможливе. Отже, отримана на другому етапі склеювання **ДНФ($\bar{f}$)** є скороченою ДНФ досліджуваної функції.

$$\bar{f}_{\text{скор}} = \overset{1}{\bar{x}\,\bar{y}} \vee \overset{2}{\bar{y}\,\bar{z}\,t} \vee \overset{3}{\bar{x}\,z\,t} \vee \overset{4}{y\,z\,t} \vee \overset{5}{x\,\bar{z}\,t} \vee \overset{6}{x\,y\,\bar{z}} \vee \overset{7}{x\,y\,t}$$

За початковою **ДДНФ($\bar{f}$)** і отриманою скороченою **ДНФ($\bar{f}$)** будуємо імплікантну матрицю.

Проста імпліканта		Конституента								
		1 $\bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z}\,\bar{t}$	2 $\bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z}\,t$	3 $\bar{x}\,\bar{y}\,z\,\bar{t}$	4 $\bar{x}\,\bar{y}\,z\,t$	5 $\bar{x}\,y\,z\,t$	6 $x\,\bar{y}\,\bar{z}\,t$	7 $x\,y\,\bar{z}\,\bar{t}$	8 $x\,y\,\bar{z}\,t$	9 $x\,y\,z\,t$
1	$\bar{x}\,\bar{y}$	*	*	*	*					
2	$\bar{y}\,\bar{z}\,t$		*				*			
3	$\bar{x}\,z\,t$				*	*				
4	$y\,z\,t$					*				*
5	$x\,\bar{z}\,t$						*		*	
6	$x\,y\,\bar{z}$							*	*	
7	$x\,y\,t$								*	*

Порівнюючи хід розв’язання цього прикладу і прикладу 39, можна помітити, що номери використаних конституент одиниці та нуля, а також імпліцент і імплікант збігаються. Імплікантна та імпліцентна матриці також мають однакову структуру розташування поміток. Це означає, що в цьому прикладі хід міркувань для відшукання тупикових **ДНФ($\bar{f}$)** буде повністю аналогічний міркуванням в прикладі 39 для відшукання тупикових **КНФ(f)**. Цей збіг не є випадковим. Він пов’язаний з тим, що **ОХ(f) = ОІ($\bar{f}$)**. Тому набори, що використані для побудови **ДКНФ(f)** і **ДДНФ($\bar{f}$)** завжди будуть збігатися для будь-якої функції f. Враховуючи цей факт, можна виписати всі тупикові **ДНФ($\bar{f}$)**.

$$\bar{f}^{1}_{\text{туп}} = \overset{1}{\underset{1,2,3,4}{\bar{x}\,\bar{y}}} \vee \overset{6}{\underset{7,8}{x\,y\,\bar{z}}} \vee \overset{4}{\underset{5,9}{y\,z\,t}} \vee \overset{2}{\underset{2,6}{\bar{y}\,\bar{z}\,t}}$$
11 букв

$$\bar{f}^{2}_{\text{туп}} = \overset{1}{\underset{1,2,3,4}{\bar{x}\,\bar{y}}} \vee \overset{6}{\underset{7,8}{x\,y\,\bar{z}}} \vee \overset{4}{\underset{5,9}{y\,z\,t}} \vee \overset{5}{\underset{6,8}{x\,\bar{z}\,t}}$$
11 букв

$$\bar{f}^{3}_{\text{туп}} = \overset{1}{\underset{1,2,3,4}{\bar{x}\,\bar{y}}} \vee \overset{6}{\underset{7,8}{x\,y\,\bar{z}}} \vee \overset{3}{\underset{4,5}{\bar{x}\,z\,t}} \vee \overset{7}{\underset{8,9}{x\,y\,t}} \vee \overset{2}{\underset{2,6}{\bar{y}\,\bar{z}\,t}}$$
14 букв

$$\bar{f}^{4}_{\text{туп}} = \overset{1}{\underset{1,2,3,4}{\bar{x}\,\bar{y}}} \vee \overset{6}{\underset{7,8}{x\,y\,\bar{z}}} \vee \overset{3}{\underset{4,5}{\bar{x}\,z\,t}} \vee \overset{7}{\underset{8,9}{x\,y\,t}} \vee \overset{5}{\underset{6,8}{x\,\bar{z}\,t}}$$
14 букв

Є очевидним, що серед цих тупикових форм є дві з однаковою найменшою складністю (**11** букв). Ці тупикові форми і будуть мінімальними **ДНФ**($\bar{f}$).

$$\bar{f}^{1}_{min} = \overset{1}{\underset{1,2,3,4}{\bar{x}\,\bar{y}}} \vee \overset{6}{\underset{7,8}{x\,y\,\bar{z}}} \vee \overset{4}{\underset{5,9}{y\,z\,t}} \vee \overset{2}{\underset{2,6}{\bar{y}\,\bar{z}\,t}}$$

$$\bar{f}^{2}_{min} = \overset{1}{\underset{1,2,3,4}{\bar{x}\,\bar{y}}} \vee \overset{6}{\underset{7,8}{x\,y\,\bar{z}}} \vee \overset{4}{\underset{5,9}{y\,z\,t}} \vee \overset{5}{\underset{6,8}{x\,\bar{z}\,t}}$$

Тепер необхідно здійснити зворотний перехід від $\bar{f}$ до функції f. Застосовуючи закон де Моргана, отримуємо:

$$f^{1}_{min} = \overline{\bar{f}^{1}_{min}} = \overline{\bar{x}\,\bar{y} \vee x\,y\,\bar{z} \vee y\,z\,t \vee \bar{y}\,\bar{z}\,t} = \overline{\bar{x}\,\bar{y}}\;\;\overline{x\,y\,\bar{z}}\;\;\overline{y\,z\,t}\;\;\overline{\bar{y}\,\bar{z}\,t} =$$
$$= (\bar{\bar{x}} \vee \bar{\bar{y}})\,(\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{\bar{z}})\,(\bar{y} \vee \bar{z} \vee \bar{t})\,(\bar{\bar{y}} \vee \bar{\bar{z}} \vee \bar{t}) =$$
$$= (x \vee y)\,(\bar{x} \vee \bar{y} \vee z)\,(\bar{y} \vee \bar{z} \vee \bar{t})\,(y \vee z \vee \bar{t}),$$

$$f^{2}_{min} = \overline{\bar{f}^{2}_{min}} = \overline{\bar{x}\,\bar{y} \vee x\,y\,\bar{z} \vee y\,z\,t \vee x\,\bar{z}\,t} = \overline{\bar{x}\,\bar{y}}\;\;\overline{x\,y\,\bar{z}}\;\;\overline{y\,z\,t}\;\;\overline{x\,\bar{z}\,t} =$$
$$= (\bar{\bar{x}} \vee \bar{\bar{y}})\,(\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{\bar{z}})\,(\bar{y} \vee \bar{z} \vee \bar{t})\,(\bar{x} \vee \bar{\bar{z}} \vee \bar{t}) =$$
$$= (x \vee y)\,(\bar{x} \vee \bar{y} \vee z)\,(\bar{y} \vee \bar{z} \vee \bar{t})\,(\bar{x} \vee z \vee \bar{t}).$$

Відповідь. $f^{1}_{min} = (x \vee y)\,(\bar{x} \vee \bar{y} \vee z)\,(\bar{y} \vee \bar{z} \vee \bar{t})\,(y \vee z \vee \bar{t})$,

$f^{2}_{min} = (x \vee y)\,(\bar{x} \vee \bar{y} \vee z)\,(\bar{y} \vee \bar{z} \vee \bar{t})\,(\bar{x} \vee z \vee \bar{t})$.

Цей спосіб відшукання мінімальних КНФ доцільно застосовувати, коли функція містить багато нулів, тобто її ДКНФ складається із великої кількості конституент нуля. В цьому випадку розв'язання з використанням диз'юнктивних форм буде значно менше громіздким за рахунок прийнятих спрощень при запису логічних формул (знак кон'юнкції між змінними, як і знак множення в звичайній математиці, можна не писати). У випадку комп'ютерного розв'язання задачі мінімізації функції, поданої в ДКНФ, цей спосіб себе виправдовує, якщо вже є запрограмована процедура мінімізації в ДДНФ. Тоді використання додаткової функції, що реалізує закони де Моргана, потребує менших затрат ресурсів, ніж окремий алгоритм мінімізації. Якщо ж це не так, то такий спосіб є менш ефективним, тому що програмна реалізація пропусків запису знаків операцій кон'юнкції не передбачає.

7.2. Карти Карно

Методом графічного відображення булевих функцій є ***карти Карно***, що являють собою спеціально організовані таблиці істинності [4]. Стовпці та рядки таблиці відповідають всім можливим наборам значень не більше, ніж двох змінних. Причому ці набори розташовані в

такому порядку, що кожний наступний відрізняється від попереднього лише значенням однієї змінної, тобто в порядку так званого коду Грея: **(0; 0)**, **(0; 1)**, **(1; 1)**, **(1; 0)** [7]. Таким чином, ці набори є сусідніми і в математичному сенсі. Завдяки цьому і сусідні клітинки таблиці по горизонталі та по вертикалі відрізняються значенням лише однієї змінної. Клітинки, розташовані по краях таблиці, також вважаються сусідніми та мають цю властивість. В цьому легко переконатися, якщо розташувати карту Карно не на площині, а на поверхні тору [6, 7]. На рис. 9 показано карти Карно для 2-х, 3-х і 4-х змінних. Для побудови карт Карно для функцій 5-ти або 6-ти змінних використовуються тривимірні таблиці, де по третій осі значення змінних для стовпців та рядків карти розташовуються також в порядку коду Грея. При подальшому збільшенні кількості змінних карти Карно стають непридатними з практичної точки зору, тому що вони стають занадто громіздкими, і втрачається перевага цього методу мінімізації перед методом Квайна. В картах Карно значення змінних розташовані в заголовках рядків та стовпців. Кожній конституенті одиниці або конституенті нуля (в залежності від задачі мінімізації) ставиться у відповідність одна клітинка таблиці [8].

$x \backslash y$	0	1
0	0	0
1	1	1

а) **2 змінні**

$x \backslash yz$	00	01	11	10
0	0	0	1	1
1	1	1	1	0

б) **3 змінні**

$xy \backslash zt$	00	01	11	10
00	0	0	0	1
01	0	1	1	1
11	1	1	1	0
10	1	1	0	0

в) **4 змінні**

Рис. 9 – Карти Карно для функцій 2-х, 3-х і 4-х змінних

Як і в звичайних таблицях істинності, клітинки наборів, на яких функція дорівнює **1**, заповнюються одиницями, а на яких вона дорівнює **0** – нулями. При використанні карти Карно для пошуку мінімальної ДНФ можна не вписувати нульові значення функції. В цьому випадку їм відповідають порожні клітинки. При пошуку мінімальної КНФ з використанням карти Карно можна не вписувати до неї одиничні значення функції. В цьому випадку порожні клітинки відповідають одиницям. В загальному випадку легко здійснюється перехід від таблиці істинності логічної функції до її карти Карно і назад [4, 5].

<u>Приклад 41</u>. Для логічної функції чотирьох змінних $f(x, y, z, t)$ із прикладу 37, що дорівнює одиниці на наборах **№№ 1**, **3**, **5**, **7**, **14**, **15** і дорівнює нулю на решті наборах, побудувати карту Карно.

<u>Розв'язання</u>. Скористаємось таблицею істинності для цієї функції, яку було побудовано при розв'язанні прикладу 37. З урахуванням того, що ця функція залежить від 4-х змінних, карта Карно для неї будуватиметься за схемою, поданою на рис. 9*в*. Встановлюючи відповідності між рядками таблиці істинності та клітинками карти Карно (наборами значень змінних, на яких задано досліджувану функцію), отримуємо наступну схему.

№	*x*	*y*	*z*	*t*	*f*
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	1
2	0	0	1	0	0
3	0	0	1	1	1
4	0	1	0	0	0
5	0	1	0	1	1
6	0	1	1	0	0
7	0	1	1	1	1
8	1	0	0	0	0
9	1	0	0	1	0
10	1	0	1	0	0
11	1	0	1	1	0
12	1	1	0	0	0
13	1	1	0	1	0
14	1	1	1	0	1
15	1	1	1	1	1

x y \ *z t*	00	01	11	10
00	0	1	1	0
01	0	1	1	0
11	0	0	1	1
10	0	0	0	0

Відновлення таблиці істинності логічної функції за картою Карно здійснюється за тією ж самою схемою, але рух стрілками відбувається в протилежному напрямку.

Перевагою методу мінімізації за допомогою карт Карно перед методом Квайна є те, що карта Карно дозволяє графічно виконати одразу всі етапи склеювання і поглинання конституент одиниці та імплікант або конституент нуля та імпліцент. У підсумку із цієї в спеціальний спосіб записаної таблиці істинності можна одразу виписати набор всіх простих імплікант (скорочену ДНФ) і набор всіх простих імпліцент (скорочену КНФ) досліджуваної логічної функції.

На карті Карно конституентам нуля або одиниці, які беруть участь у склеюванні відповідає сукупність двох сусідніх клітинок, що розташовані в рядку, стовпці, квадраті або прямокутнику (з урахуванням сусідства протилежних країв карти). Тому всі зазначені вище твердження мають місце і для карт Карно [4, 5]. Задача пошуку мінімальної ДНФ або мінімальної КНФ за допомогою карти Карно зводиться до задачі покриття всіх одиниць або нулів карти прямокутниками якнайбільшого розміру. При цьому площі таких прямокутників (кількість клітинок карти Карно, яка ними покривається) є цілими ступенями двійки [6]. *Зчитування простих імплікант з карти Карно відбувається за наступним правилом*. Сусідні клітинки, на яких функція приймає однакові значення, дають мінтерм **(*n*-*s*)**-го рангу, до якого входять ті **(*n*-*s*)** змінні, що зберігають однакові значення в цих клітинках. Для ДНФ при цьому значенням **1** відповідають самі змінні, а значенням **0** – їх заперечення. Для КНФ навпаки, значенням **0** відповідають самі змінні, а значенням **1** – їх заперечення. Змінні, що не зберігають своє значення при переході до сусідньої клітинки, в імпліканті (імпліценті) відсутні [1, 5]. Якщо одиниці або нулі, які склеюються, розташовані в прямокутнику 1×2 (2×1), то склеювання конституент відбувається лише за двома стовпцями (лише за двома рядками), тобто склеюється лише одна змінна. В результаті такого склеювання отримана проста імпліканта або проста імпліцента буде містити лише на одну змінну менше, ніж конституента для цієї функції. Якщо одиниці або нулі, які склеюються, розташовані в чотирьох клітинках, що утворюють квадрат 2×2, то це означає, що відбувається склеювання чотирьох сусідніх конституент і за стовпцями, і за рядками. В цьому випадку склеювання відбудеться за двома змінними одразу, і в отриманій простій імпліканті або простій імпліценті будуть відсутні вже дві змінні – одна з тих, чиї значення вказані в назвах рядків, і одна з тих, чиї значення вказані в назвах стовпців. Якщо одиниці або нулі, які склеюються, розташовані в прямокутнику 1×4 (4×1), тобто в

склеюванні повністю задіяний весь рядок (весь стовпець) карти, то в підсумкових простій імпліканті або простій імпліценті будуть наявні лише ті змінні, значення яких вказані в назві цього рядку (цього стовпця). При цьому всі змінні, значення яких утворюють назви стовпців (рядків) в підсумкових простій імпліканті або простій імпліценті будуть відсутні. Якщо одиниці або нулі, які склеюються, розташовані в прямокутнику 2×4 (4×2), то при цьому в склеюванні беруть участь два рядки і всі стовпці (всі рядки і два стовпці) карти. Отже, в підсумкових простій імпліканті або простій імпліценті будуть відсутні всі змінні, значення яких утворюють назви стовпців (рядків) і одна змінна, яка змінила своє значення при переході від одного рядка до іншого (від одного стовпця до іншого). Таким чином, якщо групи, до яких об'єднуються конституенти, які склеюються, мають розмір більший, ніж 1×2 або 2×1 (тобто більший, ніж $\mathbf{2^1}$), то карта Карно дозволяє скоротити декілька етапів склеювання, що проводяться при використанні методу Квайна, і одразу виписати скорочену ДНФ або скорочену КНФ. Якщо карта Карно містить клітинку, заповнену одиницею (нулем), а всі сусідні клітинки при цьому містять лише нулі (одиниці), тобто розмір прямокутнику дорівнює 1×1 (тобто $\mathbf{2^0}$), то для такої конституенти операції склеювання і подальшого поглинання неможливі. Така клітинка відповідає конституенті одиниці (конституенті нуля), яка в той же час є ядровою простою імплікантою (ядровою простою імпліцентою). Якщо всі клітинки карти Карно заповнені одиницями (нулями), то проводиться склеювання і поглинання всіх можливих конституент та імплікант (імпліцент), і функція є тотожною одиницею $\boldsymbol{f_{15}} = \mathbf{1}$ (тотожним нулем $\boldsymbol{f_0} = \mathbf{0}$).

Карту Карно також можна розглядати не лише як таблицю істинності, але одночасно і як імплікантну або імпліцентну матрицю (в залежності від задачі мінімізації). На карті Карно можна одразу побачити, які саме прості імпліканти або прості імпліценти, що входять до скороченої ДНФ або скороченої КНФ, є ядровими або надлишковими і, таким чином, одразу виписати всі тупикові форми і, відповідно, мінімальну ДНФ або мінімальну КНФ.

Таким чином, для ***пошуку мінімальної ДНФ (мінімальної КНФ)*** логічної функції за допомогою карти Карно необхідно діяти за ***наступним алгоритмом*** [8].

1. Клітинки карти об'єднуються в групи, що визначають операції склеювання. В цьому об'єднанні беруть участь лише ті сусідні клітинки, що заповнені одиницями (нулями). В кожну групу дозволяється об'єднувати кількість клітинок, що є цілим ступенем двійки. При цьому така група може мати лише прямокутну або квадратну форму. Кожна така група буде відповідати такій простій імпліканті (простій імпліценті) логічної функції, що мінімізується, змінні якої мають однакові значення для всіх клітинок групи.
2. Із цих груп складаються такі набори, що сумісно накривають всі одиниці (нулі) карти Карно, але при цьому жодну із цих групп неможна виключити без порушення повноти покриття. Такі набори будуть являти собою тупикові ДНФ (тупикові КНФ) досліджуваної логічної функції.
3. Зчитуються прості імпліканти (прості імпліценти цих наборів та об'єднуються знаками диз'юнкції (кон'юнкції). Серед отриманих форм обираються ті, що мають мінімальну складність. Вони і будуть мінімальними ДНФ (мінімальними КНФ) досліджуваної логічної функції.

Приклад 42. Знайти мінімальні ДНФ і КНФ для функції, поданої картою Карно на рис. 9*в*.

Розв'язання. Для пошуку мінімальної ДНФ об'єднаємо в групи одиничні клітинки цієї карти.

$x\,y \backslash z\,t$	00	01	11	10
00	0	0	0	1_4
01	0	1_2	1_3	1
11	1_1	1	1	0
10	1	1	0	0

В **1**-й групі беруть участь рядки **(1 1)** і **(1 0)**, а також стовпці **(0 0)** і **(0 1)**. Є очевидним, що при переході між рядками своє значення змінила змінна ***y***. Це означає, що до однієї конституенти вона входить із запереченням, а в сусідню суміжну – без заперечення. Тому саме за нею на одному із етапів відбудеться склеювання. При переході між стовпцями своє значення змінює змінна ***t***. Отже, на іншому етапі відбудеться склеювання вже за цією змінною. Після всіх етапів склеювання буде отримано просту імпліканту, що складається із тих змінних, які своє значення зберегли. При цьому $x = 1$, тому в остаточну просту імпліканту ця змінна ввійде в прямому вигляді (без заперечення). В той же час, $z = 0$, тому в остаточну просту імпліканту ця змінна ввійде в інверсному вигляді (із запереченням). Таким чином, ця група дає просту імпліканту $x\,\bar{z}$.

В **2**-й беруть участь рядки **(0 1)** і **(1 1)**, а також стовпці **(0 1)** і **(1 1)**. При переході між рядками своє значення змінила змінна ***x***, а при переході між стовпцями – змінна ***z***. Отже, на двох різних етапах склеювання ці змінні будуть виключені. У підсумку із змінних, які в цій групі зберегли своє значення, буде складено просту імпліканту $y\,t$, тому що і $y = 1$, і $t = 1$.

В **3**-й групі беруть участь стовпці **(1 1)** і **(1 0)** і лише один рядок **(0 1)**. В зв'язку з тим, що в цій групі руху рядками не було, жодна змінна, що утворюють назви рядків, своє значення не змінила. Як наслідок, склеювання за цими змінними не відбудеться на жодному етапі. При цьому $x = 0$, $y = 1$. Тому в остаточну просту імпліканту змінна ***x*** ввійде в інверсному вигляді, а змінна ***y*** – в прямому. При переході між стовпцями своє значення змінила змінна ***t***. Отже, лише за нею можливе склеювання між конституентами цієї групи. При цьому змінна ***z*** зберегла своє одиничне значення і тому ввійде в остаточну просту імпліканту в прямому вигляді. В результаті із змінних, що зберегли своє значення, отримуємо просту імпліканту $\bar{x}\,y\,z$.

В **4**-й групі беруть участь рядки **(0 0)** і **(0 1)** і лише один стовпець **(1 0)**. При переході між рядками своє значення змінила змінна ***y***. Як наслідок, за нею відбудеться склеювання, і в остаточній імпліканті вона буде відсутня. Змінна $x = 0$, тому в остаточну просту вона ввійде із запереченням. Руху стовпцями в цій групі не було. Це означає, що жодна змінна, значення яких складають назви стовпців, своє значення не змінила. Отже, в остаточній простій імпліканті вони будуть присутні всі. При цьому $z = 1$, $t = 0$. Тому в остаточну просту імпліканту змінна ***z*** ввійде без заперечення, а змінна ***y*** – із запереченням. Таким чином, ця група дає просту імпліканту $\bar{x}\,y\,\bar{z}$.

Отже, зчитуючи групи об'єднаних одиниць, отримуємо скорочену ДНФ для цієї функції:

$$f_{\text{скор}} = \overset{1}{x\,\bar{z}} \vee \overset{2}{y\,t} \vee \overset{3}{\bar{x}\,y\,z} \vee \overset{4}{\bar{x}\,y\,\bar{z}}\,.$$

Із наведеної схеми покриття одиниць карти видно, що **1**-а, **2**-а і **4**-а групи (прості імпліканти) є ядровими, тому що при їх видаленні порушується повнота покриття. Після обрання цих простих імплікант стає очевидним, що **3**-я група (проста імпліканта) є надлишковою, тому що всі одиниці карти вже закриті без її участі. Отже, для цієї функції існує єдина тупикова ДНФ, що складається лише із ядра імплікант цієї функції:

$$f_{\text{туп}} = \overset{1}{x\,\bar{z}} \vee \overset{2}{y\,t} \vee \overset{4}{\bar{x}\,y\,\bar{z}}\,.$$

В силу того, що тупикова ДНФ для цієї функції є єдиною, вона ж є і мінімальною ДНФ.

Для пошуку мінімальної КНФ об'єднаємо в групи нульові клітинки заданої карти Карно.

$x\,y$ \ $z\,t$	00	01	11	10
00	0 (2)	0	0 (3)	1
01	0 (1)	1	1	1
11	1	1	1	0 (5)
10	1	1	0 (4)	0

В 1-й групі об'єднаних конституент нуля беруть участь рядки **(0 0)** і **(0 1)**, а також єдиний стовпець **(0 0)**. В ході руху рядками своє значення змінила змінна ***y***. Тому за нею відбудеться склеювання і в остаточній простій імпліценті вона буде відсутня. Інша змінна із рядку зберегла своє значення $\boldsymbol{x = 0}$, тому до остаточної простої імпліценти вона ввійде без заперечення. Руху стовпцями в цій групі не було, тому обидві змінні $\boldsymbol{z = 0}$ і $\boldsymbol{t = 0}$ до остаточної простої імпліценти також ввійдуть без заперечень. Таким чином, ця група дає просту імпліценту $\boldsymbol{x \vee z \vee t}$.

В 2-й групі бере участь єдиний рядок **(0 0)**, а також два стовпці **(0 0)** і **(0 1)**. Змінні єдиного рядку $\boldsymbol{x = 0}$ і $\boldsymbol{y = 0}$ ввійдуть до остаточної простої імпліценти без заперечень. В ході руху стовпцями своє значення змінила змінна ***t***, тому в результаті склеювання в остаточній простій імпліценті вона буде відсутня. Змінна $\boldsymbol{z = 0}$, яка залишилась та зберегла своє значення, ввійде до остаточної простої імпліценти також без заперечення. Отже, із цієї групи маємо просту імпліценту $\boldsymbol{x \vee y \vee z}$.

В 3-й групі також бере участь єдиний рядок **(0 0)** і два стовпці **(0 1)** і **(1 1)**. Як і для попередньої групи, змінні єдиного рядку $\boldsymbol{x = 0}$ і $\boldsymbol{y = 0}$ ввійдуть до остаточної простої імпліценти без заперечень. В ході руху стовпцями своє значення змінила змінна ***z***, тому в результаті склеювання в остаточній простій імпліценті вона буде відсутня. Змінна $\boldsymbol{t = 1}$, яка залишилася та зберегла своє значення, ввійде до остаточної простої імпліценти в інверсному вигляді. Отже, із цієї групи маємо просту імпліценту $\boldsymbol{x \vee y \vee \bar{t}}$.

В 4-й групі бере участь єдиний рядок **(1 0)** і два стовпці **(1 1)** і **(1 0)**. Із єдиного рядку змінна $\boldsymbol{x = 1}$ ввійде до остаточної простої імпліценти в інверсному вигляді, а змінна $\boldsymbol{y = 0}$ – в прямому вигляді. В ході руху стовпцями своє значення змінила змінна ***t***, яка і буде відсутня в остаточній простій імпліценті. Змінна $\boldsymbol{z = 1}$, яка залишилась та зберегла своє значення, ввійде до остаточної простої імпліценти в інверсному вигляді. Отже, із цієї групи маємо просту імпліценту $\boldsymbol{\bar{x} \vee y \vee \bar{z}}$.

В 5-й групі бере участь єдиний стовпець **(1 0)** і два рядки **(1 1)** і **(1 0)**. В ході руху рядками своє значення змінила змінна ***y***. Тому вона буде відсутня в остаточній простій імпліценті. Змінна $\boldsymbol{x = 1}$, що при цьому зберегла своє значення, ввійде до остаточної простої імпліценти із запереченням. Із єдиного стовпця змінна $\boldsymbol{z = 1}$ ввійде до остаточної простої імпліценти із запереченням, а змінна $\boldsymbol{t = 0}$ – без заперечення. Таким чином, із цієї групи маємо просту імпліценту $\boldsymbol{\bar{x} \vee \bar{z} \vee t}$.

Отже, зчитуючи отримані групи об'єднаних нулів, отримуємо скорочену КНФ для цієї функції:

$$f_{\text{скор}} = (x \vee \overset{1}{z} \vee t)\,(x \vee \overset{2}{y} \vee z)\,(x \vee \overset{3}{y} \vee \bar{t})\,(\bar{x} \vee \overset{4}{y} \vee \bar{z})\,(\bar{x} \vee \overset{5}{\bar{z}} \vee t).$$

Із наведеної схеми покриття одиниць карти видно, що 1-а, 3-я, 4-а і 5-а групи (прості імпліценти) є ядровими імпліцентами, тому що при їх видаленні порушується повнота покриття. Після обрання цих простих імпліцент стає очевидним, що 2-а група (проста імпліцента) є надлишковою, тому що всі нулі карти вже закрито без її участі. Як наслідок, для цієї функції існує єдина тупикова КНФ, що складається лише із ядра імпліцент цієї функції:

$$f_{\text{туп}} = (x \vee \overset{1}{z} \vee t)\,(x \vee \overset{3}{y} \vee \bar{t})\,(\bar{x} \vee \overset{4}{y} \vee \bar{z})\,(\bar{x} \vee \overset{5}{\bar{z}} \vee t).$$

В силу того, що тупикова КНФ для цієї функції є єдиною, вона ж є і мінімальною КНФ.

Відповідь. $f_{min} = x\,\bar{z} \vee y\,t \vee \bar{x}\,y\,\bar{z}$ – мінімальна ДНФ;

$f_{min} = (x \vee z \vee t)\,(x \vee y \vee \bar{t})\,(\bar{x} \vee y \vee \bar{z})\,(\bar{x} \vee \bar{z} \vee t)$ – мінімальна КНФ.

Також на карті Карно, як і на імплікантній або імпліцентній матрицях, можна побачити всі варіанти покриття конституент, якщо цих варіантів декілька.

Приклад 43. Знайти мінімальні ДНФ і КНФ для логічної функції, заданої картою Карно, поданою на рис. 9*б*.

Розв'язання. Для пошуку мінімальної ДНФ об'єднаємо в групи одиничні клітинки цієї карти.

x \ $y\,z$	00	01	11	10
0	0	0	1	$_4$1
1	1 $_1$	1_2	$_3$1	0

В 1-й бере участь єдиний рядок **(1)** і два стовпці **(0 0)** і **(0 1)**. Тому змінна $x = 1$ ввійде до остаточної простої імпліканти цієї групи без заперечення. При переході між стовпцями своє значення змінила змінна z. Тому із змінних, значення яких утворили назви стовпців, в остаточній простій імпліканті буде присутня лише змінна $y = 0$, яка зберегла своє значення. Причому вона ввійде туди в інверсному вигляді. Таким чином, ця група дає просту імпліканту $x\,\bar{y}$.

В 2-й групі бере участь той самий єдиний рядок **(1)** і два стовпці **(0 1)** і **(1 1)**. Тому змінна $x = 1$ ввійде до остаточної простої імпліканти цієї групи без заперечення. При переході між стовпцями своє значення змінила змінна y. Тому в остаточну просту імпліканту цієї групи ввійде змінна z, яка своє значення зберегла З урахуванням того, що $z = 1$, вона ввійде до цієї простої імпліканти без заперечення. Отже, із цієї групи об'єднаних конституент отримуємо просту імпліканту $x\,z$.

В 3-й групі беруть участь два рядки **(0)** і **(1)** і один стовпець **(1 1)**. Змінна x при переході між рядками своє значення змінила, тому в остаточній простій імпліканті буде відсутня. Обидві змінні, значення яких утворили назви стовпців, свої значення зберегли, тому із них і буде складатися остаточна проста імпліканта. З урахуванням того, що $y = 1$ і $z = 1$, обидві вони ввійдуть до цієї простої імпліканти без заперечень. Таким чином, із цієї групи отримуємо просту імпліканту $y\,z$.

В 4-й групі бере участь єдиний рядок **(0)** і два стовпці **(1 1)** і **(1 0)**. Тому змінна $x = 0$ ввійде до остаточної простої імпліканти цієї групи із запереченням. При переході між

стовпцями своє значення змінила змінна z. Тому в остаточну просту імпліканту цієї групи ввійде змінна y, яка своє значення зберегла. З урахуванням того, що $y = 1$, ця змінна ввійде до цієї простої імпліканти без заперечення. Таким чином, із цієї групи отримуємо просту імпліканту $\bar{x}\,y$.

Отже, зчитуючи отримані групи об'єднаних одиниць, отримуємо скорочену ДНФ для цієї функції:

$$f_{\text{скор}} = \overset{1}{x\,\bar{y}} \vee \overset{2}{x\,z} \vee \overset{3}{y\,z} \vee \overset{4}{\bar{x}\,y}.$$

Із схеми покриття одиниць на поданій карті Карно видно, що до будь-якої тупикової ДНФ обов'язково треба включити 1-у і 4-у групи (прості імпліканти), тому що вони є ядром імплікант. Після обрання цих груп залишається незакритою єдина одиниця на наборі **(1 1 1)**. Її можна закрити в два способи: 2-ю групою (при цьому 3-я імпліканта буде надлишковою) або 3-ю групою (при цьому 2-а імпліканта буде надлишковою). Таким чином, для цієї функції існують дві тупикові ДНФ:

$$\underset{6\ \text{букв}}{f^1_{\text{туп}}} = \overset{1}{x\,\bar{y}} \vee \overset{2}{x\,z} \vee \overset{4}{\bar{x}\,y}$$

$$\underset{6\ \text{букв}}{f^2_{\text{туп}}} = \overset{1}{x\,\bar{y}} \vee \overset{3}{y\,z} \vee \overset{4}{\bar{x}\,y}$$

Ці тупикові ДНФ мають однакову складність – **6** букв. Із цього випливає, що для цієї логічної функції існують дві мінімальні ДНФ:

$$f^1_{min} = \overset{1}{x\,\bar{y}} \vee \overset{2}{x\,z} \vee \overset{4}{\bar{x}\,y}$$

$$f^2_{min} = \overset{1}{x\,\bar{y}} \vee \overset{3}{y\,z} \vee \overset{4}{\bar{x}\,y}.$$

Для пошуку мінімальної КНФ об'єднаємо в групи нульові клітинки цієї карти.

x \ $y\,z$	00	01	11	10
0	0_1	0	1	1
1	1	1	1	0_2

Покриття всіх нульових клітинок цієї карти можливе лише за допомогою двох груп, що не перетинаються.

В 1-й групі беруть участь єдиний рядок **(0)** і два стовпця **(0 0)** і **(0 1)**. Тому змінна $x = 0$ ввійде до остаточної простої імпліценти без заперечення. При переході між стовпцями своє значення змінила змінна z. Тому до остаточної простої імпліценти без заперечення ввійде змінна $y = 0$, яка зберегла своє значення. Таким чином, ця група дає просту імпліценту $x \vee y$.

Площа 2-ї групи дорівнює 1×1, тобто в цій групі руху не було ні стовпцями, ні рядками. Як наслідок, жодна змінна із назв рядків та стовпців в цій групі своє значення не змінила. Це означає, що до остаточної простої імпліценти вони ввійдуть усі: змінна x – із запереченням ($x = 1$), змінна y – із запереченням ($y = 1$), змінна z – без заперечення ($z = 0$). Таким чином, ця група дає просту імпліценту $\bar{x} \vee \bar{y} \vee z$.

Зчитуючи з вказаної карти Карно отримані прості імпліценти, можна записати скорочену КНФ для заданої функції:

$$f_{\text{скор}} = (x \overset{1}{\vee} y)\,(\overline{x} \vee \overline{y} \overset{2}{\vee} z).$$

Обидві отримані групи (прості імпліценти) є ядровими, тому видалення будь-якої з них призводить до порушення покриття. Отже, ця скорочена КНФ є також і єдиною тупиковою, і, як наслідок, єдиною мінімальною КНФ для досліджуваної функції.

Відповідь. $f^1_{min} = x\,\overline{y} \vee x\,z \vee \overline{x}\,y$, $f^2_{min} = x\,\overline{y} \vee y\,z \vee \overline{x}\,y$ – мінімальні ДНФ;

$f_{min} = (x \vee y)\,(\overline{x} \vee \overline{y} \vee z)$ – мінімальна КНФ.

8. ПОВНІ СИСТЕМИ БУЛЕВИХ ФУНКЦІЙ

8.1. Перший критерій повноти

В розділі 2.4 вже було розглянуто поняття суперпозиції функції. Повторимо його ще раз.

Означення. Функція $F=F(f_1, f_2, \ldots, f_n)$, яку отримано із функцій $f_1, f_2, \ldots, f_n$ шляхом їх підстановки замість аргументів $x_1, x_2, \ldots, x_n$ функції $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, називається *суперпозицією функцій* $f_1, f_2, \ldots, f_n$ [20].

Як вже було зазначено, P_2 – множина всіх без виключення можливих булевих функцій.

Нехай $H = \{f_1, f_2, \ldots, f_m \mid f_i \in P_2, i = \overline{1,m}\}$ – довільна множина (як скінченна, так і нескінченна) різних булевих функцій.

Означення. Множина всіх можливих суперпозицій функцій із H називається *замиканням* H і позначається $[H]$ [14].

Замикання множин має наступні очевидні **властивості** [14, 20].

1. *Будь-яка множина є підмножиною свого замикання*:

$$H \subseteq [H].$$

2. *Замикання підмножини є підмножиною замикання*:

$$H_1 \subseteq H_2 \Rightarrow [H_1] \subseteq [H_2].$$

3. *Багаторазове застосування операції замикання еквівалентне одноразовому*:

$$[[H]] = [H].$$

4. *Об'єднання замикань множин є підмножиною замикання об'єднання цих множин*:

$$[H_1] \cup [H_2] \subseteq [H_1 \cup H_2].$$

5. *Перетин замикань множин є підмножиною замикання перетину цих множин*:

$$[H_1] \cap [H_2] \subseteq [H_1 \cap H_2].$$

Означення. Система булевих функцій називається *повною*, якщо її замикання дорівнює множині всіх без виключення булевих функцій, тобто [20]

$$H = \{f_1, f_2, \ldots, f_m \mid f_i \in P_2, i = \overline{1,m}\} \text{ – є повною } \overset{\text{def}}{=} [H] = P_2.$$

Іншими словами, система булевих функцій є повною, якщо за допомогою суперпозиції функцій цієї системи можна подати будь-яку булеву функцію [16].

<u>Теорема 31 (*1-й критерій повноти системи БФ*)</u>. *<u>Формулювання</u>*: Нехай задані дві системи булевих функцій $\boldsymbol{H} = \{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ і $\boldsymbol{G} = \{g_1, g_2, \ldots, g_k\}$, причому система $\boldsymbol{H}$ є повною. Тоді система $\boldsymbol{G}$ буде повною системою тоді й лише тоді, коли будь-яка функція повної системи $\boldsymbol{H}$ може бути подана деякою суперпозицією функцій із системи $\boldsymbol{G}$, тобто [13, 16, 20]

$$([G] = P_2) \Leftrightarrow (\forall\, i = \overline{1, m}\,, \forall\, f_i \in H \;\; : f_i \in [G]).$$

<u>Доведення</u>. Спочатку доведемо, що для того, щоб система функцій $\boldsymbol{G}$ була повною, ***<u>необхідно</u>***, щоб будь-яка функція f_i, $i = \overline{1, n}$, системи $\boldsymbol{H}$ виражалася суперпозицією функцій системи $\boldsymbol{G}$, тобто із того, що система функцій $\boldsymbol{G}$ є повною, випливає, що будь-яка функція системи $\boldsymbol{H}$ виражається суперпозицією функцій системи $\boldsymbol{G}$. Таким чином, треба довести, що [20]

$$([G] = P_2) \Rightarrow (\forall\, i = \overline{1, m}\,, \forall\, f_i \in H \;\; : f_i \in [G]).$$

За умовою теореми, система функцій $\boldsymbol{H}$ є підмножиною множини всіх без виключення булевих функцій P_2, тобто $H \subseteq P_2$. В той же час, в силу того, що система $\boldsymbol{G}$ є повною, за означенням повних систем, $[G] = P_2$. Із цього, з урахуванням транзитивності відношення включення множин [22], випливає, що $H \subseteq [G]$, тобто

$$\left.\begin{array}{r} [G] = P_2 \\ H \subseteq P_2 \end{array}\right\} \Rightarrow ((H \subseteq [G]).$$

Це означає, що система функцій $\boldsymbol{H}$ є підмножиною множини суперпозицій, що складені із функцій системи $\boldsymbol{G}$, тобто будь-яка функція системи $\boldsymbol{H}$ є суперпозицією функцій системи $\boldsymbol{G}$. ***Необхідність доведено***.

Тепер доведемо, що того, що будь-яка функція f_i, $i = \overline{1, n}$, системи $\boldsymbol{H}$ може бути подана суперпозицією функцій системи $\boldsymbol{G}$, ***<u>достатньо</u>*** для того, щоб система функцій $\boldsymbol{G}$ була повною, тобто із того, що будь-яка функція f_i, $i = \overline{1, n}$, системи $\boldsymbol{H}$ подається суперпозицією функцій системи $\boldsymbol{G}$, випливає, що система функцій $\boldsymbol{G}$ є повною. Таким чином, треба довести, що

$$(\forall\, i = \overline{1, m}\;, \forall\, f_i \in H \;\; : f_i \in [G]) \Rightarrow ([G] = P_2).$$

Із того, що будь-яку функцію системи $\boldsymbol{H}$ можна подати суперпозицією функцій системи $\boldsymbol{G}$, випливає, що система функцій $\boldsymbol{H}$ є підмножиною замикання множини функцій системи $\boldsymbol{G}$, тобто $H \subseteq [G]$. Тоді, згідно з 2-ю властивістю замикання, можна стверджувати, що $[H] \subseteq [G]$. В силу того, що за умовою теореми система $\boldsymbol{H}$ є повною, із означення повних систем випливає, що $[H] = P_2$. Таким чином, отримуємо, що $P_2 \subseteq [G]$, тобто

$$\left.\begin{array}{r} [H] = P_2 \\ [H] \subseteq [G] \end{array}\right\} \Rightarrow ((P_2 \subseteq [G]).$$

В той же час, множина P_2 – це множина всіх без виключення булевих функцій. З цього випливає, що функції системи $\boldsymbol{G}$ також містяться в множині P_2, тобто $G \subseteq P_2$. Тоді із 2-ї властивості замикання випливає, що $[G] \subseteq P_2$. Таким чином, одночасно мають місце два відношення включення: $P_2 \subseteq [G]$ і $[G] \subseteq P_2$. Із властивостей відношення включення множин [22] випливає, що $[G] = P_2$, тобто

$$\left.\begin{array}{l} P_2 \subseteq [G] \\ [G] \subseteq P_2 \end{array}\right\} \Rightarrow ([G] = P_2.$$

Це означає, що система функцій G є повною. ***Достатність доведено***.

Теорему доведено.

При дослідженні системи логічних функцій на повноту слід чітко розрізняти, що саме використовується для обґрунтування повноти системи – означення повних систем чи перший критерій повноти. Наприклад, розглянемо систему функцій $H = \{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \sim\}$ – систему основних операцій алгебри логіки. В розділі 1.3 було показано, що будь-яку булеву функцію можна подати деякою формулою алгебри логіки. З цього випливає, що $[H] = [\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \sim] = P_2$. Це означає, що система H є повною *за означенням*, тому що ніяка інша система функцій G в якості посередника не використовувалася. Для обґрунтування повноти системи H ми зверталися безпосередньо до множини P_2. В той же час, для еквіваленції існує властивість $x \sim y = (x \rightarrow y)\,(y \rightarrow x)$, що виражає цю функцію через кон'юнкцію та імплікацію, тобто через інші функції досліджуваної системи H. Як наслідок, $(x \sim y) \in [\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow\}] = [G]$. Решта функції системи H містяться в системі G. Таким чином, $H \subseteq [G]$. Відносно системи H вже відомо, що вона є повною. Це означає, що всі функції повної системи H можна подати суперпозицією функцій іншої системи G. Отже, система функцій $G = \{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow\}$ також є повною згідно з *1-м критерієм повноти систем БФ*. Для обґрунтування повноти системи функцій G ми не зверталися безпосередньо до множини всіх без виключення булевих функцій P_2, а використовували в якості посередника іншу систему функцій H, про яку заздалегідь відомо, що вона є повною. Тому для системи G доведення її повноти відбувалося не за означенням, а за 1-м критерієм повноти.

Також слід зазначити той важливий факт, що *будь-яка система функцій, що складається не лише із функцій-констант, обов'язково містить у своєму складі тотожну функцію* $f(x) = x$ (*повторення, або селектор*).

Означення. Система булевих функцій називається *незалежною*, якщо жодна з її функцій не може бути подана суперпозицією решти функцій цієї системи [20].

Означення. Система булевих функцій називається *базисом* (*мінімально повною системою*), якщо вона є повною і жодна її власна підсистема повною не є (тобто якщо вона одночасно є повною і незалежною).

Означення. Якщо повна система булевих функцій містить хоча б одну функцію-константу, то така система називається *послаблено повною* [1, 6].

Означення. Множина логічних функцій A називається *замкненим класом*, якщо її замикання відносно операції суперпозиції збігається з самою цією множиною, тобто $[A]=A$ [8]. Іншими словами, множина логічних функцій A є *замкненою*, якщо будь-яка функція, яку можна подати формулою з використанням функцій лише з цієї множини, також входить до цієї множини.

Є очевидним, що множина всіх без виключення булевих функцій P_2 є замкненою.

Замкнені класи булевих функцій мають наступні ***властивості*** [23]:

1. Непорожній перетин замкнених класів також є замкненим класом.
2. Об'єднання замкнених класів може замкненим класом не бути.
3. Замкнений клас булевих функцій, що містить не лише константи, обов'язково містить тотожну функцію (селектор).

4. Доповнення замкненого класу булевих функцій до множини всіх без виключення булевих функцій $\boldsymbol{P_2}$ замкненим класом не є.

<u>Приклади замкнених класів булевих функцій</u> [24]:

- ***Клас кон'юнкцій K***, що є замиканням множини $\{\wedge, 0, 1\}$. Він є множиною функцій виду: $c_0\,(c_1 \vee x_1)\,(c_2 \vee x_2)\,\ldots\,(c_n \vee x_n)$, де c_i – булеві константи.
- ***Клас диз'юнкцій D***, що є замиканням множини $\{\vee, 0, 1\}$. Він є множиною функцій виду: $c_0 \vee c_1\,x_1 \vee c_2\,x_2 \vee \ldots \vee c_n\,x_n$, де c_i – булеві константи.
- ***Клас функцій однієї змінної U***, що містить лише константи, заперечення та селектор.
- ***Клас*** $\boldsymbol{O^m}$ функцій ($(m > 1) \in \mathbb{N}$), що задовольняють наступній умові: для будь-яких m наборів, на яких функція дорівнює нулю, знайдеться змінна, що також дорівнює нулю на всіх цих наборах.
- ***Клас*** $\boldsymbol{O^\infty}$ функцій, для яких виконано умову: $f(x_1, \ldots, x_n) \geqslant x_i$, де x_i – одна із змінних функції.
- ***Клас*** $\boldsymbol{I^m}$ функцій ($(m>1)\in\mathbb{N}$), що задовольняють наступній умові: для будь-яких m наборів, на яких функція дорівнює одиниці, знайдеться змінна, що також дорівнює одиниці на всіх цих наборах.
- ***Клас*** $\boldsymbol{I^\infty}$ функцій, для яких виконано умову: $f(x_1, \ldots, x_n) \leqslant x_i$, де x_i – одна із змінних функції.

8.2. Класи Поста булевих функцій

В алгебрі логіки із множини $\boldsymbol{P_2}$ всіх можливих різних булевих функцій n змінних $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ виділяються наступні п'ять типів булевих функцій, які називають ***класами Поста***. З урахуванням того, що $|P_2| = 2^{2^n}$, розглянемо всі ці класи.

8.2.1. Клас T_0 функцій, що зберігають константу 0

<u>Означення</u>. Функція $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *зберігає константу* **0**, тобто $f \in T_0$, якщо на нульовому наборі вона приймає нульове значення, тобто $f(\tilde{0}) = 0$ [8, 16, 20]:

$$T_0 \overset{\text{def}}{=} \{f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in P_2 \mid f(0\ 0\ \ldots\ 0) = 0\}.$$

<u>Властивості класу</u> $\boldsymbol{T_0}$:

1. $T_0 \neq \varnothing$

<u>Доведення</u>. Функція-константа $f_0 = 0$ дорівнює нулю на всіх наборах значень змінних, в тому числі й на нульовому наборі. Отже, за означенням, ця функція зберігає константу **0**, тобто належить до класу T_0. Таким чином, множина T_0 функцій, що зберігають константу **0**, не є порожньою. **Властивість 1 доведено**.

2. $[T_0] = T_0$, ***тобто*** T_0 ***є замкненим*** [13]

<u>Доведення</u>. Розглянемо довільну сукупність $g(y_1, y_2, \ldots, y_m)$, $f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, …, $f_m(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ функцій класу T_0. Складемо з них деяку

суперпозицію $F = g(f_1, f_2, \ldots, f_m)$. Тоді, з урахуванням того, що $g(\tilde{0}) = 0$, $f_1(\tilde{0}) = 0$, $f_2(\tilde{0}) = 0$, …, $f_m(\tilde{0}) = 0$, отримуємо:

$$F(\tilde{0}) = g(f_1(\tilde{0}), f_2(\tilde{0}), \ldots, f_m(\tilde{0})) = g(0\ 0\ \ldots 0) = g(\tilde{0}) = 0.$$

Це означає, що будь-яка довільна суперпозиція функцій, які зберігають константу **0**, також зберігає константу **0**, тобто належить до класу T_0. Отже, за означенням, клас T_0 функцій, що зберігають константу **0**, є замкненим. **Властивість 2 доведено**.

3. ***Половина всіх без виключення булевих функцій зберігають константу*** **0**

Доведення. В силу того, що на одному із 2^n наборів значень змінних $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ значення таких функцій зафіксовані, їх загальна кількість дорівнює [17]

$$|T_0(n)| = 2^{2^n-1} = \frac{1}{2}\, 2^{2^n} = \frac{1}{2}\, |P_2(n)|,$$

тобто половина всіх без виключення булевих функцій n змінних зберігають константу **0**. **Властивість 3 доведено**.

4. $[T_0] \neq P_2$, ***тобто клас функцій*** T_0 ***не є повним***

Доведення. Незалежно від кількості змінних, функція-константа $f_{2^{2^n}-1} = 1$ на всіх наборах значень змінних, в тому числі й на нульовому наборі, дорівнює одиниці, тобто $f_{2^{2^n}-1}(\tilde{0}) = 1 \neq 0$. Це означає, що $f_{2^{2^n}-1}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \notin T_0$. Із властивості 2 цього класу функцій випливає, що функцію $f_{2^{2^n}-1} = 1$ неможливо подати як суперпозицію функцій, які зберігають константу **0**. Отже, замикання $[T_0]$ класу функцій, що зберігають константу **0**, не збігається з множиною P_2 всіх без виключення булевих функцій, тобто клас T_0 не є повною системою (за означенням повних систем булевих функцій). **Властивість 4 доведено**.

8.2.2. Клас T_1 функцій, що зберігають константу 1

Означення. Функція $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *зберігає константу* **1**, тобто $f \in T_1$, якщо на одиничному наборі вона приймає одиничне значення, тобто $f(\tilde{1}) = 1$ [8, 16, 20]:

$$T_1 \stackrel{\text{def}}{=} \{f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in P_2 \mid f(1\ 1 \ldots 1) = 1\}.$$

Властивості класу T_1:

1. $T_1 \neq \varnothing$

Доведення. Функція-константа $f_{2^{2^n}-1} = 1$ дорівнює одиниці на всіх наборах значень змінних, в тому числі й на одиничному наборі. Отже, за означенням, ця функція зберігає константу **1**, тобто належить до класу T_1. Таким чином, множина T_1 функцій, що зберігають константу **1**, не є порожньою. **Свойство 1 доказано**.

2. $[T_1] = T_1$, ***тобто клас*** T_1 ***є замкненим*** [13]

Доведення. Розглянемо довільну сукупність $g(y_1, y_2, \ldots, y_m)$, $f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, …, $f_m(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ функцій класу T_1. Складемо з них деяку

суперпозицію $F = g(f_1, f_2, \ldots, f_m)$. Тоді, з урахуванням того, що $g(1) = 1$, $f_1(\tilde{1}) = 1$, $f_2(\tilde{1}) = 1$, …, $f_m(\tilde{1}) = 1$, отримуємо:

$$F(\tilde{1}) = g(f_1(\tilde{1}), f_2(\tilde{1}), \ldots, f_m(\tilde{1})) = g(1\ 1\ \ldots 1) = g(\tilde{1}) = 1.$$

Це означає, що будь-яка довільна суперпозиція функцій, які зберігають константу **1**, також зберігає константу **1**, тобто також належить до класу T_1. Отже, за означенням, клас T_1 функцій, які зберігають константу **1**, є замкненим. **Властивість 2 доведено**.

3. ***Половина всіх без виключення булевих функцій зберігають константу*** **1**

Доведення. В силу того, що на одному із 2^n наборів значень змінних $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ значення таких функцій зафіксовані, їх загальна кількість дорівнює

$$|T_1(n)| = 2^{2^n-1} = \frac{1}{2}\, 2^{2^n} = \frac{1}{2}\, |P_2(n)|,$$

Тобто половина всіх без виключення булевих функцій n змінних зберігають константу **1**. **Властивість 3 доведено**.

4. $[T_1] \neq P_2$

Доведення. Незалежно від кількості змінних, функція-константа $f_0 = 0$ на всіх наборах значень змінних, в тому числі й на одиничному наборі, приймає нульове значення, тобто $f_0(\tilde{1}) = 0 \neq 1$. Це означає, що $f_0(x_1, x_2, \ldots, x_n) \notin T_1$. Із властивості 2 цього класу функцій випливає, що функцію $f_0 = 0$ неможливо подати суперпозицією функцій, які зберігають константу **1**. Отже, замикання $[T_1]$ класу функцій, які зберігають константу **1**, не збігається з множиною P_2 всіх без виключення булевих функцій, тобто клас T_1 не є повною системою (за означенням повних систем булевих функцій). **Властивість 4 доведено**.

8.2.3. Клас S самодвоїстих функцій

Означення 1 (аналітичне). Функція $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ називається *самодвоїстою*, тобто $f \in S$, якщо її формула тотожна до двоїстої для неї формули, тобто [16, 20]

$$S \overset{\text{def}}{=} \{f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in P_2 \mid f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f^*(x_1, x_2, \ldots, x_n)\}.$$

Це означення легко застосувати до функцій, які задано аналітично (формулою). Існує два аналітичні способи побудови двоїстої функції (за означенням та за принципом двоїстості), що дозволяють аналітичним шляхом дослідити функцію на приналежність до класу S. Але для функцій, які задано таблично, ці способи будуть надто трудомісткими. Однак, з урахуванням означення двоїстої функції і заснованого на ньому способу побудови двоїстої функції за її таблицею істинності, можна сформулювати означення самодвоїстої функції для булевих функцій, які задані таблично.

Означення 2 (табличне). Функція $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ називається *самодвоїстою*, тобто $f \in S$, якщо вона приймає протилежні значення на будь-яких двох протилежних наборах значень своїх змінних, тобто [8]

$$S \overset{\text{def}}{=} \{f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in P_2 \mid f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n) = \overline{f(x_1, x_2, \ldots, x_n)}\}.$$

Виходячи з цього означення, можна сформулювати ***умову антисиметричності***: стовпець значень самодвоїстої функції є антисиметричним відносно своєї середини.

Властивості класу S:

1. $S \neq \varnothing$

Доведення. При розгляданні табличного способу побудови двоїстих функцій було показано, що для функції-селектора і для функції-заперечення таблиця істинності початкової функції збігається з таблицею істинності двоїстої функції, тобто для цих функцій $f = f^*$. Це означає, що заперечення і селектор є самодвоїстими функціями, тобто множина S самодвоїстих функцій не є порожньою. **Властивість 1 доведено**.

2. **[*S*] = *S*, *тобто клас S є замкненим*** [13, 20]

Доведення. Розглянемо довільну сукупність $g(y_1, y_2, \ldots, y_m)$, $f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, …, $f_m(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ функцій класу S. Складемо із них деяку суперпозицію $F = g(f_1, f_2, \ldots, f_m)$. Побудуємо для цієї суперпозиції двоїсту формулу, використовуючи означення двоїстої функції:

$$F^* = \overline{g(\overline{f_1(x_1, \ldots, x_n)}, \overline{f_2(x_1, \ldots, x_n)}, \ldots, \overline{f_m(x_1, \ldots, x_n)})} =$$

(*за табличним означенням самодвоїстої функції для функцій* $f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $i = \overline{1, m}$)

$$= \overline{g(f_1(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n), f_2(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n), \ldots, f_m(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n)} =$$

(*за законом подвійного заперечення*)

$$= \overline{g(\overline{\overline{f_1(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n)}}, \overline{\overline{f_2(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n)}}, \ldots, \overline{\overline{f_m(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n)}})} =$$

(*за означенням двоїстої функції для функцій* $f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $i = \overline{1, m}$)

$$= \overline{g(\overline{f_1^*(x_1, \ldots, x_n)}, \overline{f_2^*(x_1, \ldots, x_n)}, \ldots, \overline{f_m^*(x_1, \ldots, x_n)})} =$$

(*за означенням двоїстої функції для функції* g)

$$= g^*(f_1^*(x_1, x_2, \ldots, x_n), f_2^*(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, f_m^*(x_1, x_2, \ldots, x_n)) =$$

(*за аналітичним означенням самодвоїстої функції для функцій* $f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $i = \overline{1, m}$)

$$= g^*(f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, x_2, \ldots, x_n)) =$$

(*за аналітичним означенням самодвоїстої функції для функції* g)

$$= g(f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, x_2, \ldots, x_n)) = F.$$

Таким чином, для довільної суперпозиції самодвоїстих функцій її формула збігається з двоїстою для неї формулою. Отже, за аналітичним означенням самодвоїстої функції, така суперпозиція також відповідає самодвоїстій функції, тобто належить до множини S самодвоїстих функцій. Із цього випливає, що клас S самодвоїстих функцій є замкненим. **Властивість 2 доведено**.

3. ***Кількість самодвоїстих булевих функцій n змінних дорівнює*** $\sqrt{|P_2(n)|}$

Доведення. Самодвоїста функція повністю визначається заданням її значень на половині всіх наборів значень змінних (решта значень визначаються із умови антисиметричності), тому

кількість незалежних наборів дорівнює $\frac{1}{2}2^n$. Отже, кількість всіх самодвоїстих функцій дорівнює

$$|S(n)| = 2^{\frac{1}{2}2^n} = \sqrt{2^{2^n}} = \sqrt{|P_2(n)|}.$$

Властивість 3 доведено.

4. $[S] \neq P_2$

Доведення. Розглянемо функцію $f = x\,y$. Згідно з принципом двоїстості, для неї двоїстою буде функція $f^* = x \vee y$. Аналогічно для $f = x \vee y$ двоїстою є $f^* = x\,y$. Є очевидним, що для цих функцій $f \neq f^*$. Це означає, що множина P_2 містить мінімум дві функції, що самодвоїстими не є. Із властивості 2 цього класу функцій випливає, що ці функції неможливо подати суперпозицією самодвоїстих функцій. Отже, замикання $[S]$ класу самодвоїстих функцій не збігається з множиною P_2 всіх без виключення булевих функцій, тобто клас S не є повною системою (за означенням повних систем булевих функцій). **Властивість 4 доведено**.

8.2.4. Клас L лінійних функцій

Означення. Функція $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ називається *лінійною*, тобто $f \in L$, якщо її можна подати поліномом Жегалкіна, ступінь якого не перевищує одиницю [17]. Іншими словами, НФЖ для цієї функції не містить кон'юнкцій змінних, тобто

$$L \overset{\text{def}}{=} \{f(x_1, \ldots, x_n) \in P_2 \mid f(x_1, \ldots, x_n) = a_0 \oplus a_1x_1 \oplus a_2x_2 \oplus \ldots \oplus a_nx_n,\ a_i \in \{0,1\}\}.$$

Властивість класу L:

1. $L \neq \varnothing$

Доведення. Наприклад, для заперечення **НФЖ**$(\overline{x}) = 1 \oplus x$. Є очевидним, що ступінь цього поліному дорівнює одиниці. Отже, за означенням, заперечення є лінійною функцією, тобто $\overline{x} \in L$. Це означає, що множина L лінійних функцій не є порожньою.

2. $[L] = L$, ***тобто клас L є замкненим*** [13, 20]

Доведення. Розглянемо довільну сукупність $g(y_1, y_2, \ldots, y_m)$, $f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, …, $f_m(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ функцій класу L, таких, що

$$\begin{aligned} g &= a_0 \oplus a_1x_1 \oplus a_2x_2 \oplus \ldots \oplus a_mx_m, \\ f_1 &= b_0^1 \oplus b_1^1x_1 \oplus b_2^1x_2 \oplus \ldots \oplus b_n^1x_n, \\ f_2 &= b_0^2 \oplus b_1^2x_1 \oplus b_2^2x_2 \oplus \ldots \oplus b_n^2x_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_m &= b_0^m \oplus b_1^mx_1 \oplus b_2^mx_2 \oplus \ldots \oplus b_n^mx_n, \end{aligned}$$

де $a_i \in \{0, 1\}$, b_j^i $\{0, 1\}$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$. Складемо із них деяку суперпозицію $F = g(f_1, f_2, \ldots, f_m)$. Тоді

$$F = a_0 \oplus a_1(b_0^1 \oplus b_1^1x_1 \oplus b_2^1x_2 \oplus \ldots \oplus b_n^1x_n) \oplus \ldots \oplus a_m(b_0^m \oplus b_1^mx_1 \oplus b_2^mx_2 \oplus \ldots \oplus b_n^mx_n) =$$

$$= a_0 \oplus a_1 b_0^1 \oplus a_2 b_0^2 \oplus \ldots \oplus a_m b_0^m \oplus$$
$$\oplus (a_1 b_1^1 \oplus a_2 b_1^2 \oplus \ldots \oplus a_m b_1^m)\, x_1 \oplus \ldots \oplus (a_1 b_n^1 \oplus a_2 b_n^2 \oplus \ldots \oplus a_m b_n^m)\, x_n =$$
$$= c_0 \oplus c_1 x_1 \oplus c_2 x_2 \oplus \ldots \oplus c_n x_n ,$$

де $c_j \in \{0, 1\}$, $j = \overline{1, n}$. Звідси випливає, що довільна суперпозиція лінійних функцій також є лінійною функцією, тобто належить до класу L лінійних функцій. Із цього випливає, що клас L лінійних функцій є замкненим. **Властивість 2 доведено**.

3. ***Кількість лінійних функцій n змінних дорівнює*** 2^{n+1}

Доведення. В силу того, що загальна кількість коефіцієнтів лінійного поліному Жегалкіна від n змінних дорівнює $n + 1$, кількість різних лінійних багаточленів буде дорівнювати 2^{n+1}. В силу однозначності подання функції канонічним багаточленом це число також складає і кількість лінійних булевих функцій, тобто

$$|L(n)| = 2^{n+1}.$$

Властивість 3 доведено.

4. $[L] \neq P_2$

Доведення. За означенням лінійної функції, її НФЖ не може містити кон'юнкції змінних. Отже, функція $f = x\,y$ цій умові не задовольняє і, відповідно, лінійною не є. Із властивості 2 цього класу функцій випливає, що цю функцію неможливо подати суперпозицією лінійних функцій. Таким чином, замикання $[L]$ класу лінійних функцій не збігається з множиною P_2 всіх без виключення булевих функцій, тобто клас L не є повною системою (за означенням повних систем булевих функцій). **Властивість 4 доведено**.

8.2.5. Клас *M* монотонних функцій

Розглянемо два довільні набори $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta} \in D^n$, $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\tilde{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ значень змінних із області визначення булевої функції.

Означення. Два набори $\tilde{\alpha}$ і $\tilde{\beta}$ значень змінних булевої функції називаються *порівнянними*, якщо по кожній компоненті $i = \overline{1, n}$ для них виконується одна й та сама нерівність: для всіх компонент $\alpha_i \leqslant \beta_i$ або для всіх компонент $\alpha_i \geqslant \beta_i$.

Означення. Набор $\tilde{\alpha}$ *передує* набору $\tilde{\beta}$ $(\tilde{\alpha} \preccurlyeq \tilde{\beta})$ (набор $\tilde{\alpha}$ *«менший»* за набор $\tilde{\beta}$ або набор $\tilde{\beta}$ *«більший»* за набор $\tilde{\alpha}$), якщо в кожній позиції компоненти набору $\tilde{\alpha}$ не перевищують компонент набору $\tilde{\beta}$ [15, 20], тобто

$$(\tilde{\alpha} \preccurlyeq \tilde{\beta}) \overset{\text{def}}{=} (\forall\, i = \overline{1, n} : a_i \leqslant b_i).$$

Розглянемо, наприклад, множину наборів значень аргументів функцій 3-х змінних D^3. Візьмемо набори $\tilde{\alpha}^1 = (0\ 0\ 0)$ і $\tilde{\beta}^1 = (0\ 1\ 1)$. Для цих наборів по кожній компоненті виконується однакова нерівність: $\tilde{\alpha}_1^1 \leqslant \tilde{\beta}_1^1$ $(0 = 0)$, $\tilde{\alpha}_2^1 \leqslant \tilde{\beta}_2^1$, $(0 \leqslant 1)$, $\tilde{\alpha}_3^1 \leqslant \tilde{\beta}_3^1$ $(0 \leqslant 1)$. Отже, ці набори є порівнянними, причому набор $\tilde{\alpha}^1$ «менший» за набор $\tilde{\beta}^1$, або набор $\tilde{\alpha}^1$ передує набору $\tilde{\beta}^1$, тобто $\tilde{\alpha}^1 \preccurlyeq \tilde{\beta}^1$. Тепер розглянемо набори значень змінних $\tilde{\alpha}^2 = (1\ 0\ 0)$ і $\tilde{\beta}^2 = (0\ 0\ 1)$. Для цих наборів для різних пар однойменних компонент виконуються різні нерівності: $\tilde{\alpha}_1^2 \geqslant \tilde{\beta}_1^2$

$(\mathbf{1} \geqslant \mathbf{0})$, $\tilde{\alpha}_2^2 \leqslant \tilde{\beta}_2^2$, $(\mathbf{0} = \mathbf{0})$, $\tilde{\alpha}_3^2 \leqslant \tilde{\beta}_3^2$ $(\mathbf{0} \leqslant \mathbf{1})$. Отже, ці набори взагалі не є порівнянними, тобто $\tilde{\alpha}^2 \nleqslant \tilde{\beta}^2$ і $\tilde{\beta}^2 \nleqslant \tilde{\alpha}^2$.

<u>Означення</u>. Функція $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ називається *монотонною*, тобто $f \in M$, якщо вона на «більших» наборах значень змінних приймає «не менші» значення, тобто

$$M \overset{\text{def}}{=} \{f(x_1, \ldots, x_n) \in P_2 \mid \forall\, \tilde{\alpha}, \tilde{\beta} \in D^n : (\tilde{\alpha} \preccurlyeq \tilde{\beta}) \Rightarrow f(\tilde{\alpha}) \leqslant f(\tilde{\beta})\}.$$

<u>Властивості класу M</u>:

1. $M \neq \varnothing$

<u>Доведення</u>. Є очевидним, що функції-константи $f_0 = 0$ і $f_{2^{2^n}-1} = 1$ зберігають своє значення на всіх наборах значень змінних. Таким чином, за означенням, ці функції є монотонними функціями. Це означає, що множина M монотонних функцій не є порожньою. **Властивість 1 доведено**.

2. $[M] = M$, ***тобто клас M є замкненим***

<u>Доведення</u>. Розглянемо довільну сукупність $g(y_1, y_2, \ldots, y_m)$, $f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\ldots$, $f_m(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ функцій класу M. Складемо із них деяку суперпозицію $F = g(f_1, f_2, \ldots, f_m)$. Візьмемо два такі довільні набори значень змінних $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\tilde{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$, для яких виконується відношення передування $\tilde{\alpha} \preccurlyeq \tilde{\beta}$. Підставимо в побудовану суперпозицію F обидва ці набори і порівняємо $F(\tilde{\alpha})$ і $F(\tilde{\beta})$ [20].

$$F(\tilde{\alpha}) = g(f_1(\tilde{\alpha}), f_2(\tilde{\alpha}), \ldots, f_m(\tilde{\alpha})),$$
$$F(\tilde{\beta}) = g(f_1(\tilde{\beta}), f_2(\tilde{\beta}), \ldots, f_m(\tilde{\beta})).$$

В силу монотонності функцій $f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $i = \overline{1, m}$ і з урахуванням того, що $\tilde{\alpha} \preccurlyeq \tilde{\beta}$, маємо

$$f_1(\tilde{\alpha}) \leqslant f_1(\tilde{\beta}),\ f_2(\tilde{\alpha}) \leqslant f_2(\tilde{\beta}),\ \ldots,\ f_m(\tilde{\alpha}) \leqslant f_m(\tilde{\beta}).$$

Це означає, що виконується відношення передування для наборів

$$(f_1(\tilde{\alpha}), f_2(\tilde{\alpha}), \ldots, f_m(\tilde{\alpha})) \preccurlyeq (f_1(\tilde{\beta}), f_2(\tilde{\beta}), \ldots, f_m(\tilde{\beta})).$$

В силу монотонності функції g, маємо, що

$$g(f_1(\tilde{\alpha}), f_2(\tilde{\alpha}), \ldots, f_m(\tilde{\alpha})) \leqslant g(f_1(\tilde{\beta}), f_2(\tilde{\beta}), \ldots, f_m(\tilde{\beta})),$$

тобто

$$F(\tilde{\alpha}) \leqslant F(\tilde{\beta}).$$

Отже, за означенням монотонності, довільна суперпозиція монотонних функцій також є монотонною функцією, тобто належить до класу M монотонних функцій. Це означає, що множина M монотонних функцій є замкненою. **Властивість 2 доведено**.

3. ***Загальна кількість монотонних булевих функцій n змінних визначається нерівністю***:

$$2^{C_n^{[n/2]}} \leqslant |M(n)| \leqslant 3^{C_n^{[n/2]}}.$$

Пошук кількості $M(n)$ монотонних функцій від n змінних відомий як ***проблема Дедекінда*** [25]. На відміну від інших класів Поста, для кількості монотонних функцій від n змінних, загальної формули для її пошуку не існує. Точні значення чисел Дедекінда відомі лише для $n \leqslant 8$. Для більших значень n відома лише асимптотіка.

4. $[M] \neq P_2$

Доведення. Розглянемо, наприклад, заперечення. Для цієї функції однієї змінної $f(\tilde{0}) = 1$, а $f(\tilde{1}) = 0$. Це означає, що для наборів $\tilde{0} \preccurlyeq \tilde{1}$ виконується нерівність $f(\tilde{0}) \geqslant f(\tilde{1})$, що суперечить означенню монотонності. Отже, функція $f = \overline{x}$ не є монотонною функцією, тобто $\overline{x} \notin M$. В силу властивості 2 для цього класу функцій, заперечення неможливо подати суперпозицією монотонних функцій. Таким чином, замикання $[M]$ класу монотонних функцій не збігається з множиною P_2 всіх без виключення булевих функцій, тобто клас M не є повною системою (за означенням повних систем булевих функцій). **Властивість 4 доведено**.

8.2.6. Приналежність до класів Поста функції, яку задано таблично

Для дослідження функції на монотонність за її таблицею істинності треба порівняти значення функції на всіх парах порівнянних наборів значень змінних. Якщо нерівність для кожної пари наборів зберігається і для значень функції на цих наборах, то функція є монотонною. Однак, як вже зазначалося, зі збільшенням кількості змінних різко збільшується кількість наборів їх значень. Тому при великій кількості змінних процедура такого дослідження стає дуже громіздкою. Але виявляється, що кількість таких порівнянь можна суттєво скоротити.

Означення. Два набори значень булевих змінних називаються *сусідніми*, якщо вони відрізняються значенням лише однієї змінної, тобто

$$\tilde{\alpha}, \tilde{\beta} - \text{є сусідніми} \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} \tilde{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, 0, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n), \\ \tilde{\beta} = (\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, 1, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n). \end{cases}$$

Теорема 32 (*про «стрибок» немонотонної функції*). *Формулювання*. Якщо функція не є монотонною, то існує пара сусідніх наборів, на яких ця функція виконує «стрибок», тобто змінює своє значення з **1** (на «меншому» наборі) на **0** (на «більшому» наборі), тобто [2, 20]

$$f_{\overline{M}} \notin M \Rightarrow \exists\ \tilde{\alpha}, \tilde{\beta} \in D^n : ((\tilde{\alpha}, \tilde{\beta} - \text{є сусідніми}) \,\&\, (\tilde{\alpha} \prec \tilde{\beta}) \,\&\, (f(\tilde{\alpha}) > f(\tilde{\beta}))).$$

Доведення. Нехай функція $f_{\overline{M}} \notin M$, тобто не є монотонною. Тоді існує така пара наборів значень змінних $\tilde{\alpha}$ і $\tilde{\beta}$, для яких виконується відношення передування $\tilde{\alpha} \preccurlyeq \tilde{\beta}$, але при цьому $f(\tilde{\alpha}) > f(\tilde{\beta})$. Це є можливим лише в тому випадку, коли $f(\tilde{\alpha}) = 1$, а $f(\tilde{\beta}) = 0$. Будемо вважати, що ці набори відрізняються значеннями перших k ($k = \overline{1, n-1}$) компонент. Тоді в силу того, що $\tilde{\alpha} \preccurlyeq \tilde{\beta}$, в наборі $\tilde{\alpha}$ ці компоненти будуть дорівнювати **0**, а в наборі $\tilde{\beta}$ вони будуть дорівнювати **1**. Тоді

$$\tilde{\alpha} = (0, 0, \dots, 0, \alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n), \tilde{\beta} = (1, 1, \dots, 1, \alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n).$$

Перегрупуємо тепер набори значень змінних не в порядку збільшення їх номерів, а в наступний спосіб. Вставимо між наборами $\tilde{\alpha}$ і $\tilde{\beta}$ інші $k-1$ набори так, щоб в отриманій

послідовності наборів будь-які два набори, що розташовані поряд, були сусідніми і кожний набор послідовності передував нижче розташованим наборам. При цьому отримуємо:

$$\tilde{\alpha} = (\mathbf{0}, \mathbf{0}, \ldots, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_n),$$
$$\tilde{\alpha}_1 = (\mathbf{1}, \mathbf{0}, \ldots, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_n),$$
$$\tilde{\alpha}_2 = (\mathbf{1}, \mathbf{1}, \ldots, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_n),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\tilde{\alpha}_{k-1} = (\mathbf{1}, \mathbf{1}, \ldots, \mathbf{1}, \mathbf{0}, \alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_n),$$
$$\tilde{\beta} = (\mathbf{1}, \mathbf{1}, \ldots, \mathbf{1}, \alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_n).$$

На початковому наборі цієї послідовності (на наборі $\tilde{\alpha}$) функція $f(\tilde{\alpha}) = \mathbf{1}$, а на останньому наборі (на наборі $\tilde{\beta}$) – відповідно $f(\tilde{\beta}) = \mathbf{0}$. Якщо на всіх проміжних наборах досліджувана функція $f_{\overline{M}} = \mathbf{1}$, то «стрибок» відбувається при переході до набору $\tilde{\beta}$ від сусіднього з ним набору $\tilde{\alpha}_{k-1}$. Якщо на всіх проміжних наборах функція $f_{\overline{M}} = \mathbf{0}$, то «стрибок» відбувається при переході від набору $\tilde{\alpha}$ до сусіднього з ним набору $\tilde{\alpha}_1$. Якщо на проміжних наборах значення функції $f_{\overline{M}}$ не є сталим, то «стрибок» відбувається між якимись з цих проміжних наборів. Але в будь-якому випадку в цій послідовності наборів обов'язково знайдеться пара сусідніх наборів, на яких ця функція виконує «стрибок» (змінює свої значення з **1** на меншому наборі на **0** на більшому). **Теорему доведено**.

Виходячи зі всього сказаного, можна сформулювати ***<u>алгоритм розподілу за класами Поста булевої функції, яку задано таблично</u>***.

- За таблицею істинності визначається значення функції на нульовому наборі. Якщо $f(\tilde{\mathbf{0}}) = \mathbf{0}$, то функція зберігає константу **0**, тобто $f \in T_0$. В іншому випадку $f \notin T_0$.
- За таблицею істинності визначається значення функції на останньому, одиничному наборі. Якщо $f(\tilde{\mathbf{1}}) = \mathbf{1}$, то функція зберігає константу **1**, тобто $f \in T_1$. В іншому випадку $f \notin T_1$.
- Визначається середина таблиці істинності та порівнюються значення функції на всіх парах протилежних (розташованих на рівній відстані від країв таблиці) наборів. При цьому можна рухатися як від середини таблиці до її країв, так і від країв таблиці до її середини. Якщо в ході такого порівняння з'ясовується, що на всіх парах протилежних наборів функція приймає протилежні значення (стовпець значень функції є антисиметричним відносно своєї середини), то функція є самодвоїстою, тобто $f \in S$. В іншому випадку, тобто якщо хоча б на одній парі протилежних наборів умова антисиметричності стовпця значень функції порушується, то $f \notin S$. Таким чином, порівняти значення функції на всіх парах протилежних наборів доводиться лише в тому випадку, коли досліджувана функція є самодвоїстою. Якщо виявлено хоча б одну пару протилежних наборів, на яких ця умова порушується, подальші порівняння можна вже не проводити, тому що вже є очевидним, що функція не є самодвоїстою.
- Методом невизначених коефіцієнтів визначаються коефіцієнти НФЖ для цієї функції. Якщо всі коефіцієнти при кон'юнкціях змінних виявляються рівними **0**, то така функція є лінійною, тобто $f \in L$. В іншому випадку, тобто якщо хоча б один коефіцієнт при кон'юнкції змінних виявився рівним **1**, то $f \notin L$. При цьому слід зазначити, що при дослідженні на лінійність таблично заданої функції нема потреби обчислювати всі коефіцієнти поліному Жегалкіна. Відповідь на питання про лінійність функції дає наявність або відсутність в поліномі кон'юнкцій. Тому якщо хоча б один коефіцієнт при

кон'юнкції змінних виявився рівним **1**, то решту коефіцієнтів НФЖ вже можна не обчислювати, тому що вже є очевидним, що функція не є лінійною. Безумовно, що у випадку лінійності досліджуваної функції треба обчислити всі коефіцієнти, щоб показати, що жодної кон'юнкції в поліномі не буде.

- В таблиці істинності порівнюються значення функції на всіх парах <u>сусідніх</u> наборів. Якщо для всіх таких пар для $\tilde{\alpha} \preccurlyeq \tilde{\beta}$ має місце нерівність $f(\tilde{\alpha}) \leqslant f(\tilde{\beta})$, то функція є монотонною, тобто $f \in M$. В іншому випадку, тобто якщо виявлено хоча б один «стрибок» на парі сусідніх наборів, то $f \notin M$. Таким чином, як і при дослідженні на самодвоїстість та на лінійність, порівнювати всі пари сусідніх наборів доведеться лише у випадку монотонності функції. Якщо виявлено хоча б один «стрибок», подальші порівняння можна не проводити, тому що вже є очевидним, що функція не є монотонною.

Розглянутий алгоритм можна подати у вигляді блок-схеми на рис. 9.

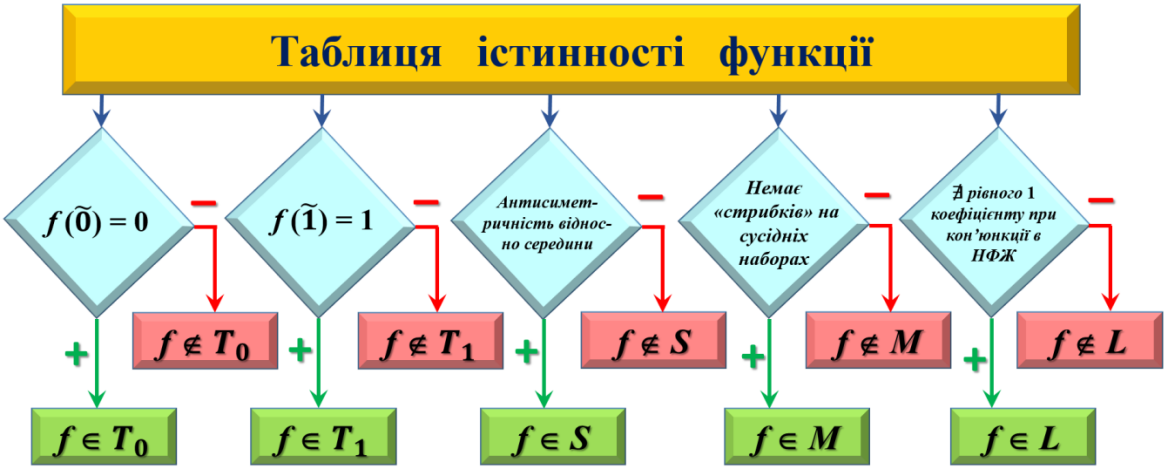


Рис. 9. – Розподіл за класами Поста функції, яку задано таблично

Користуючись цим алгоритмом, можна розподілити за класами Поста всі елементарні булеві функції. Для дослідження на лінійність були використані співвідношення (30) – (30), а для розподілу за рештою класами – таблиця 2 (загальна таблиця відповідності булевих функцій двох змінних). В підсумку було отримано наступний розподіл:

№ набору	x_1	x_2	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
2	1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
3	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
Позначення			0	$\wedge$	$\leftarrow$	x_1	$\not\subset$	x_2	$\oplus$	$\vee$	$\downarrow$	$\sim$	$\overline{x_2}$	$\subset$	$\overline{x_1}$	$\rightarrow$	/	1
			$\in T_0$ $\notin T_1$ $\in L$ $\notin S$ $\in M$	$\in T_0$ $\in T_1$ $\notin L$ $\notin S$ $\in M$	$\in T_0$ $\notin T_1$ $\notin L$ $\notin S$ $\notin M$	$\in T_0$ $\in T_1$ $\in L$ $\in S$ $\in M$			$\in T_0$ $\notin T_1$ $\in L$ $\notin S$ $\notin M$	$\in T_0$ $\in T_1$ $\notin L$ $\notin S$ $\in M$	$\notin T_0$ $\notin T_1$ $\notin L$ $\notin S$ $\notin M$	$\notin T_0$ $\in T_1$ $\in L$ $\notin S$ $\notin M$	$\notin T_0$ $\notin T_1$ $\in L$ $\in S$ $\notin M$			$\notin T_0$ $\in T_1$ $\notin L$ $\notin S$ $\notin M$	$\notin T_0$ $\notin T_1$ $\notin L$ $\notin S$ $\notin M$	$\notin T_0$ $\in T_1$ $\in L$ $\in S$ $\in M$

Цей результат можна звести в так звану ***Таблицю Поста***.

Таблиця 5

Таблиця Поста для елементарних булевих функцій

Клас / f	T_0	T_1	L	S	M
0	+	-	+	-	+
1	-	+	+	-	+
$\overline{x}$	-	-	+	+	-
$x \wedge y$	+	+	-	-	+
$x \vee y$	+	+	-	-	+
$x \to y$	-	+	-	-	-
$x \sim y$	-	+	+	-	-
$x \leftarrow y$	+	-	-	-	-
$x \oplus y$	+	-	+	-	-
x / y	-	-	-	-	-
$x \downarrow y$	-	-	-	-	-

<u>Приклад 44</u>. Розподілити за класами Поста функцію ***f*=(1 1 0 1 1 1 0 1)**.

<u>Розв'язання</u>. Запишемо таблицю істинності цієї функції та будемо обчислювати коефіцієнти НФЖ доти, поки не отримаємо якійсь коефіцієнт при кон'юнкції, що дорівнює одиниці, або не покажемо, що всі коефіцієнти при кон'юнкціях змінних дорівнюють нулю.

№ з/п	x	y	z	f	*Коефіцієнти НФЖ*	
0	0	0	0	1	$= a_0$	$a_0=1$
1	0	0	1	1	$= a_0 + a_3 = 1 + a_3$	$a_3=0$
2	0	1	0	0	$= a_0 + a_2 = 1 + a_2$	$a_2=1$
3	0	1	1	1	$= a_0 + a_2 + a_3 + a_{23} = 1 + 1 + 0 + a_{23} = 0 + a_{23}$	$a_{23}=1$
4	1	0	0	1		
5	1	0	1	1		
6	1	1	0	0		
7	1	1	1	1		

Із таблиці було знайдено коефіцієнт при кон'юнкції змінних $a_{23} = 1$. Це означає, що для цієї функції НФЖ буде містити кон'юнкцію $y\,z$. Подальше обчислення решти коефіцієнтів поліному Жегалкіна для цієї функції можна не проводити. Наявності вже отриманої кон'юнкції достатньо для висновку про ***нелінійність*** функції, тобто $f \notin L$.

Із таблиці видно, що $f(\tilde{0}) = 1$ і $f(\tilde{1}) = 1$. Це означає, що дана функція ***зберігає константу*** **1** і ***не зберігає константу*** **0**, тобто $f \notin T_0$, $f \in T_1$.

Для дослідження функції на самодвоїстість будемо рухатися від середини таблиці до її країв. При цьому перша ж пара протилежних наборів (**№ 3** і **№ 4**) дають нам однакові значення функції: ***f*(0 1 1) = *f*(1 0 0) = 1**. Як наслідок, ця функція ***не є самодвоїстою***, тобто $f \notin S$. Набори, на яких порушується умова антисиметричності стовпця значень функції в таблиці позначені зеленою дугою. Подальші порівняння значень функції на решті протилежних наборах можна вже не проводити.

Для дослідження функції на монотонність треба порівняти значення функції на парах сусідніх наборів. Візьмемо набор **№ 0**. Наступний в таблиці набор **№ 1** є для нього сусіднім (вони відрізняються лише значенням змінної ***z***), причому набор **№ 0** «менший» за набор **№ 1**, а ***f*(0 0 0) = *f*(0 0 1)**, тобто при переході до сусіднього набору функція своє значення зберегла. Це означає, що «стрибок» не відбувся, монотонність функції на цих наборах не порушено. Набор **№ 2** також є для набору **№ 0** сусіднім (вони відрізняються лише значенням змінної ***y***), причому набор **№ 0** «менший» за набор **№ 2**, а ***f*(0 0 0) = 1 > 0 = *f*(0 1 0)**. Таким чином, при переході від «меншого» набору (**№ 0**) до «більшого» (**№ 2**) функція змінила своє значення з більшого на менше, тобто зміна номерів сусідніх наборів і зміна значення функції на них відбулися в протилежних напрямках. Ця ситуація і є «стрибком», що порушує монотонність функції. Набори, на яких відбувся цей «стрибок», позначено в таблиці червоною дугою. Наявність цього «стрибка» дозволяє зробити висновок про те, що функція ***не є монотонною***, тобто $f \notin M$. Подальші порівняння значень функції на решті парах сусідніх наборів можна вже не проводити.

Відповідь. $f \notin T_0, f \in T_1, f \notin S, f \notin L, f \notin M.$

8.2.7. Приналежність до класів Поста функції, яку задано аналітично

Якщо функцію задано аналітично, то для неї можна побудувати таблицю Квайна і скористатися вже розглянутим алгоритмом розподілу за класами Поста. Однак це не завжди доцільно. Якщо формула, що задає функцію, є достатньо складною, то раціональніше використати аналітичний метод розподілу.

Означення. ДНФ булевої функції називається *позитивною*, якщо вона не містить заперечень змінних.

Теорема 33 (*аналітичний критерій монотонності функції*). *Формулювання*. Булева функція є монотонною тоді й лише тоді, коли для неї існує позитивна ДНФ, тобто [20]

$$(f \in M) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f = 1\ ; \\ f = 0\ ; \\ \text{ДНФ}(f) - \text{позитивна}\ . \end{array}\right.$$

Доведення. Якщо функція є будь-якою константою (***константою* 0** або ***константою* 1**), то її значення не змінюються при переході між порівнянними наборами. Тому для будь-яких двох наборів $\tilde{\alpha}$ і $\tilde{\beta}$, таких, що $\tilde{\alpha} \preccurlyeq \tilde{\beta}$ для значень функції на цих наборах буде виконуватися рівність $f(\tilde{\alpha}) = f(\tilde{\beta})$, що припустимо за означенням монотонної функції. Тому функції-константи є монотонними функціями. Цей же результат можна отримати і із таблиці Поста (таблиці 5) для елементарних булевих функцій.

Розглянемо тепер довільну булеву функцію від n змінних. Спочатку покажемо, що існування позитивної ДНФ ***достатньо*** для того, щоб функція була монотонною, тобто

$$(\text{ДНФ}(f)\ \textit{є позитивною}) \Rightarrow (f \in M).$$

Нехай у функції $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ існує позитивна ДНФ. Розглянемо довільний набор значень змінних $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in D^n$. Якщо $f(\tilde{\alpha}) = 0$, то для всіх наборів $\tilde{\beta}$, таких, що $\tilde{\alpha} \preccurlyeq \tilde{\beta}$, нерівність $f(\tilde{\alpha}) \leqslant f(\tilde{\beta})$ виконується незалежно від того, яким буде значення $f(\tilde{\beta})$. Якщо $f(\tilde{\beta}) = 0$, то $f(\tilde{\alpha}) = f(\tilde{\beta})$, тобто виконується рівність. Якщо ж $f(\tilde{\beta}) = 1$, то $f(\tilde{\alpha}) < f(\tilde{\beta})$, тобто

виконується сувора нерівність. У випадку, коли $f(\tilde{\alpha}) = 1$, в позитивній ДНФ(f) існує така елементарна кон'юнкція $x_{i_1}\, x_{i_2} \ldots x_{i_k}$, що на наборі $\tilde{\alpha}$ буде дорівнювати **1**. Це означає, що в наборі $\tilde{\alpha}$ компоненти $\alpha_{i_1} = 1$, $\alpha_{i_2} = 1$, …, $\alpha_{i_k} = 1$. Тоді в будь-якому наборі $\tilde{\beta}$, для якогоо $\tilde{\alpha} \preccurlyeq \tilde{\beta}$, компоненти β_{i_1}, β_{i_2}, …, β_{i_k} також мають дорівнювати **1**. Отжено, на такому наборі $\tilde{\beta}$ елементарна кон'юнкція $x_{i_1}\, x_{i_2} \ldots x_{i_k}$ також буде дорівнювати **1**, що призводить до того, що $f(\tilde{\beta}) = 1$. Таким чином, і в цьому випадку нерівність $f(\tilde{\alpha}) \leqslant f(\tilde{\beta})$ виконується для будь-якого набору $\tilde{\beta}$, для якого $\tilde{\alpha} \preccurlyeq \tilde{\beta}$. Із цього випливає, що для функції, яка має позитивну ДНФ, виконується умова

$$\forall\, \tilde{\alpha}, \tilde{\beta} \in D^n \;:\; (\tilde{\alpha} \preccurlyeq \tilde{\beta}) \Rightarrow (f(\tilde{\alpha}) \leqslant f(\tilde{\beta})),$$

що відповідає означенню монотонної функції. Отже, якщо у функції існує позитивна ДНФ, то така функція є монотонною. ***Достатність доведено***.

Доведемо тепер, що для того, щоб функція була монотонною, ***<u>необхідно</u>***, щоб у неї існувала позитивна ДНФ, тобто якщо функція є монотонною, то у неї існує позитивна ДНФ:

$$(f \in M) \;\Rightarrow (\exists\ \text{ДНФ}(f),\ \textit{яка є позитивною}).$$

Доведення цієї необхідності будемо проводити методом <u>математичної індукції</u>.

<u>При $n = 0$</u> функція вироджується в одну із функцій-констант, для яких це твердження є вірним.

<u>Нехай</u> це твердження є вірним для будь-якої монотонної булевої функції, для якої **<u>$n = k$</u>**, тобто якщо функція від k суттєвих змінних $f(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ є монотонною, то у неї існує позитивна ДНФ(f).

<u>Припустимо</u>, що функція від **<u>$n = k + 1$</u>** суттєвих змінних $f(x_1, x_2, \ldots, x_k, x_{k+1})$ є монотонною. Запишемо диз'юнктивний розклад цієї функції за однією змінною x_{k+1}:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_k, x_{k+1}) = x_{k+1} \cdot f(x_1, x_2, \ldots, x_k, 1) \vee \overline{x_{k+1}} \cdot f(x_1, x_2, \ldots, x_k, 0).$$

Розглянемо тепер функції

$$f_0(x_1, x_2, \ldots, x_k) = f(x_1, x_2, \ldots, x_k, 0),$$

$$f_1(x_1, x_2, \ldots, x_k) = f(x_1, x_2, \ldots, x_k, 1)$$

отриманого диз'юнктивного розкладу і покажемо, що вони монотонні. Візьмемо два довільні набори $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k) \in D^k$ і $\tilde{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k) \in D^k$ такі, що $\tilde{\alpha} \preccurlyeq \tilde{\beta}$. Тоді

$$\tilde{\alpha}_i = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k, i) \preccurlyeq (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k, i) = \tilde{\beta}_i$$

для будь-якого значення $i \in \{0, 1\}$. В силу того, що функція $f \in M$, із цього відношення для наборів $\tilde{\alpha}_i \preccurlyeq \tilde{\beta}_i$ випливає, що

$$f_i(\tilde{\alpha}) = f(\tilde{\alpha}_i) \leqslant f(\tilde{\beta}_i) = f_i(\tilde{\beta}).$$

Із цієї нерівності випливає, що функції $f_0(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ і $f_1(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ є монотонними. Розглянемо тепер імплікацію $f_0 \to f_1$. Якщо $f_0 \to f_1 \not\equiv 1$, то це означає, що існує такий набор значень змінних $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k) \in D^k$, на якому $f_0(\tilde{\alpha}) \to f_1(\tilde{\alpha}) = 0$. Імплікація може дорівнювати нулю лише в одному єдиному випадку, коли посилка дорівнює **1**, а наслідок дорівнює **0**, тобто

$$\begin{cases} f_0(\tilde{\alpha}) = f_0(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_k) = f(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_k,\ 0) = 1, \\ f_1(\tilde{\alpha}) = f_0(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_k) = f(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_k,\ 1) = 0. \end{cases}$$

Виконання цих умов означає, що для наборів $\tilde{\alpha}_i \preccurlyeq \tilde{\beta}_i$ виконується нерівність $f(\tilde{\alpha}_i) > f(\tilde{\beta}_i)$, що суперечить монотонності функції f. З цього випливає, що не існує такого набору $\tilde{\alpha}$, на якому $f_0(\tilde{\alpha}) \to f_1(\tilde{\alpha}) = 0$. Це означає, що $f_0(\tilde{\alpha}) \to f_1(\tilde{\alpha}) \equiv 1$. Тоді, в силу властивості $x \wedge 1 = x$, для наведеного диз'юнктивного розкладу функції f можна виконати наступні тотожні перетворення:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_k, x_{k+1}) = x_{k+1} \cdot f(x_1, x_2, \ldots, x_k, 1) \vee \overline{x_{k+1}} \cdot f(x_1, x_2, \ldots, x_k, 0) =$$
$$= x_{k+1} \cdot f_1 \vee \overline{x_{k+1}} \cdot f_0 = (x_{k+1} \cdot f_1 \vee \overline{x_{k+1}} \cdot f_0)\,(f_0 \to f_1) =$$
$$= (x_{k+1} \cdot f_1 \vee \overline{x_{k+1}} \cdot f_0)\,(\overline{f_0} \vee f_1) =$$
$$= x_{k+1} \cdot f_1 \cdot \overline{f_0} \vee x_{k+1} \cdot f_1 \vee \overline{x_{k+1}} \cdot f_0 \cdot \overline{f_0} \vee \overline{x_{k+1}} \cdot f_0 \cdot f_1 =$$
$$= x_{k+1} \cdot f_1 \cdot \overline{f_0} \vee x_{k+1} \cdot f_1 \vee \overline{x_{k+1}} \cdot f_0 \cdot f_1 = \overline{x_{k+1}} \cdot f_0 \cdot f_1 \vee x_{k+1} \cdot f_1(\overline{f_0} \vee 1) =$$
$$= \overline{x_{k+1}} \cdot f_0 \cdot f_1 \vee x_{k+1} \cdot f_1 = f_1(\overline{x_{k+1}} \cdot f_0 \vee x_{k+1}) = f_1(f_0 \vee x_{k+1}).$$

Як було показано, функції f_0 і f_1, що залежать від k суттєвих змінних, є монотонними. Це означає, що для них існують позитивні ДНФ(f_0) і ДНФ(f_1). Підставляючи ці позитивні ДНФ до формули $f_1(f_0 \vee x_{k+1})$, отримаємо також позитивну ДНФ для функції від $k + 1$ суттєвих змінних $f(x_1, x_2, \ldots, x_k, x_{k+1})$.

Отже, якщо функція довільної кількості змінних є монотонною, то у неї існує позитивна ДНФ. ***Необхідність доведено***.

Теорему доведено.

Наслідок із теореми 33. *Формулювання*. Булева функція, яка залежить від $n \geqslant 1$ суттєвих змінних, монотонна тоді й лише тоді, коли її мінімальна ДНФ є позитивною, тобто [27, 28]

$$(f \in M) \Leftrightarrow (\text{ДНФ}_{min}(f)\ \textit{є позитивною}).$$

Доведення. В силу доведеної теореми 33, існування позитивної ДНФ є необхідною і достатньою умовою монотонності булевої функції. Однак подання функції у вигляді ДНФ не є єдиним. Тотожність різних ДНФ, що реалізують одну й ту саму функцію, не завжди вдається довести за допомогою тотожних перетворень. Таким чином, аналітичним шляхом може бути отримана деяка ДНФ, що не є позитивною і не може бути спрощеною виключно за допомогою тотожних перетворень, але може бути суттєво спрощеною за допомогою алгоритмів мінімізації. Алгоритм мінімізації булевої функції гарантує отримання ДНФ найменшої складності. Якщо мінімальна ДНФ містить заперечення, то позбутися них за допомогою будь-яких тотожних перетворень вже неможливо. Але в силу доведеної теореми 33, у монотонної функції має існувати позитивна ДНФ. Як було показано вище, $\bar{x} \notin M$. В силу замкненості класу M монотонних функцій (властивість 2 класу M), суперпозиція, яку неможливо спростити, і яка реалізує монотонну функцію, може складатися лише із монотонних функцій. Отже, *мінімальна ДНФ монотонної функції обов'язково буде позитивною*. І навпаки, якщо мінімальна ДНФ деякої логічної функції є позитивною, то вона складається лише із операцій диз'юнкції та кон'юнкції, які, як вже було показано, є монотонними. Із замкненості класу M (властивість 2 класу M) випливає, що суперпозиція, що складається лише із монотонних функцій, може реалізовувати лише функцію того ж самого класу, тобто також монотонну.

Отже, *якщо мінімальна ДНФ деякої булевої функції є позитивною, то ця функція є монотонною*. **Наслідок доведено**.

Доведену теорему 33 і наслідок з неї слід розуміти таким чином, що якщо в ході тотожних перетворень для деякої функції було отримано позитивну ДНФ, то можна зробити висновок про монотонність цієї функції. Якщо отриманая ДНФ містить заперечення, то слід знайти мінімальну ДНФ. Висновок про те, що функція не є монотонною, можна зробити лише в тому випадку, якщо мінімальна ДНФ для неї виявилася не позитивною. Якщо вдалося отримати позитивну мінімальну ДНФ, то функція є монотонною.

Теорема 34 (*аналітичний критерій приналежності до класу T_0*). *Формулювання*. Функція $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ зберігає **константу 0** тоді й лише тоді, коли її НФЖ(*f*) не містить одиницю, тобто в НФЖ(*f*) $a_0 = 0$:

$$(f \in T_0) \Leftrightarrow (\text{НФЖ}(f) = a_1K_1^+ \oplus \ldots \oplus a_{2^n-1}K_{2^n-1}^+).$$

Доведення. Спочатку доведемо, що для того, щоб функція зберігала **константу 0** ***необхідно***, щоб її НФЖ не містила вільний член, тобто

$$(f \in T_0) \Rightarrow (\text{НФЖ}(f) = a_1K_1^+ \oplus \ldots \oplus a_{2^n-1}K_{2^n-1}^+).$$

Нехай функція $f \in T_0$. Тоді, за означенням функції, що зберігає **константу 0**, $f(\tilde{0}) = 0$. Підставляючи набор $\tilde{0} = (0\ 0\ \ldots\ 0)$ до форми з коефіцієнтами для такої функції та дорівнюючи її нулю, маємо:

$$f(\tilde{0}) = a_0K_0^+ \oplus a_1K_1^+ \oplus \ldots \oplus a_{2^n-1}K_{2^n-1}^+ = a_0 \oplus a_1K_1^+ \oplus \ldots \oplus a_{2^n-1}K_{2^n-1}^+ =$$
$$= a_0 \oplus a_1 \cdot 0 \oplus a_2 \cdot 0 \oplus \ldots \oplus a_{2^n-1} \cdot 0 = a_0 = 0.$$

Таким чином, із того, що $f \in T_0$, випливає, що в НФЖ(*f*) для цієї функції $a_0 = 0$. ***Необхідність доведено***.

Доведемо тепер, що рівності нулю вільного члену в НФЖ(*f*) ***достатньо*** для того, щоб функція зберігала **константу 0**, тобто

$$(\text{НФЖ}(f) = a_1K_1^+ \oplus \ldots \oplus a_{2^n-1}K_{2^n-1}^+) \Rightarrow (f \in T_0).$$

Нехай для функції $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в НФЖ(*f*) $a_0 = 0$, тобто $\text{НФЖ}(f) = a_1K_1^+ \oplus \ldots \oplus a_{2^n-1}K_{2^n-1}^+$. Знайдемо значення цієї функції на наборі $\tilde{0} = (0\ 0\ \ldots\ 0)$:

$$f(\tilde{0}) = a_1K_1^+ \oplus \ldots \oplus a_{2^n-1}K_{2^n-1}^+ = a_1 \cdot 0 \oplus a_2 \cdot 0 \oplus \ldots \oplus a_{2^n-1} \cdot 0 = 0.$$

Таким чином, із того, що в НФЖ(*f*) відсутній вільний член, тобто $a_0 = 0$, випливає, що ця функція зберігає **константу 0**, тобто $f \in T_0$. ***Достатність доведено***.

Таким чином, саме значення вільного члену a_0 визначає значення функції на нульовому наборі і, відповідно, приналежність функції до класу T_0. **Теорему доведено**.

Теорема 35 (*аналітичний критерій приналежності до класу T_1*). *Формулювання*. Функція $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ зберігає **константу 1** тоді й лише тоді, коли довжина її НФЖ(*f*) є непарним числом, тобто

$$(f \in T_1) \Leftrightarrow (\text{ДОВЖИНА}_{\text{НФЖ}(f)} = 2k + 1,\ k \in \mathbb{N}).$$

Доведення. Покажемо, що для того, щоб функція зберігала **константу 1**, ***необхідно***, щоб її НФЖ(*f*) складалася із непарної кількості доданків, тобто

$$(f \in T_1) \Rightarrow (\text{ДОВЖИНА}_{\text{НФЖ}(f)} = 2k + 1,\ k \in \mathbb{N}).$$

Нехай функція $\boldsymbol{f \in T_1}$. Тоді, за означенням функції, що зберігає **константу 1**, $\boldsymbol{f(\tilde{1}) = 1}$. Підставляючи набор $\boldsymbol{\tilde{1} = (1\ 1\ \ldots\ 1)}$ до форми з коефіцієнтами для такої функції та дорівнюючи її одиниці, маємо:

$$\boldsymbol{f(\tilde{1}) = a_0K_0^{+} \oplus a_1K_1^{+} \oplus \ldots \oplus a_{2^n-1}K_{2^n-1}^{+} = a_0 \oplus a_1 \cdot 1 \oplus a_2 \cdot 1 \oplus \ldots \oplus a_{2^n-1} \cdot 1 =}$$
$$\boldsymbol{= a_0 \oplus a_1 \oplus a_2 \oplus \ldots \oplus a_{2^n-1} = 1}.$$

Цей вираз є загальним виглядом поліному Жегалкіна на наборі $\boldsymbol{\tilde{1} = (1\ 1\ \ldots\ 1)}$ для будь-якої функції, що зберігає **константу 1**. Для кожної конкретної функції цей вираз буде відрізнятися наявністю або відсутністю якихось з цих коефіцієнтів. Є очевидним, що цей вираз для кожної конкретної функції буде складатися лише із тих коефіцієнтів, що для цієї функції дорівнюють **1**, тобто складатися із якоїсь кількості одиничних доданків. З урахуванням правила приведення подібних в алгебрі Жегалкіна $\boldsymbol{x \oplus x = 0}$, однакові доданки в поліномі Жегалкіна попарно знищуються. Отже, якщо одиничних доданків парна кількість, то їх сума за модулем 2 буде дорівнювати нулю. Якщо кількість одиничних доданків є непарною, то після приведення подібних ця сума буде складатися із одного єдиного одиничного доданку, який забезпечить рівність одиниці всього виразу. Звідси можна зробити висновок, що якщо цей вираз дорівнює одиниці, то він складається із непарної кількості одиничних доданків. Це означає, що із того, що функція $\boldsymbol{f \in T_1}$, випливає, що для неї поліном Жегалкіна складається із непарної кількості доданків, тобто $\text{ДОВЖИНА}_{\text{НФЖ}(f)} = \boldsymbol{2k + 1}$, $\boldsymbol{k \in \mathbb{N}}$. ***Необхідність доведено***.

Покажемо тепер, що непарної кількості доданків, із яких складається НФЖ(*f*) ***<u>достатньо</u>*** для того, щоб функція зберігала **константу 1**, тобто

$$(\text{ДОВЖИНА}_{\text{НФЖ}(f)} = \boldsymbol{2k + 1},\ \boldsymbol{k \leqslant 2^{n-1} - 1},\ \boldsymbol{k \in \mathbb{N}}) \Rightarrow (\boldsymbol{f \in T_1}).$$

Нехай НФЖ(*f*) функції $\boldsymbol{f(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$ складається із непарної кількості доданків. Знайдемо значення цієї функції на наборі $\boldsymbol{\tilde{1} = (1\ 1\ \ldots\ 1)}$:

$$\boldsymbol{f(\tilde{1}) = a_0K_0^{+} \oplus a_1K_1^{+} \oplus \ldots \oplus a_{2^n-1}K_{2^n-1}^{+} = a_0 \oplus a_1 \cdot 1 \oplus a_2 \cdot 1 \oplus \ldots \oplus a_{2^n-1} \cdot 1 =}$$
$$\boldsymbol{= a_0 \oplus a_1 \oplus a_2 \oplus \ldots \oplus a_{2^n-1} =}$$

залишаємо лише одиничні доданки, кількість яких є непарною

$$\boldsymbol{= a_{i_1} \oplus a_{i_2} \oplus \ldots \oplus a_{i_{2k-1}} \oplus a_{i_{2k}} \oplus a_{i_{2k+1}} = a_{i_{2k+1}} = 1}.$$

Всі доданки з $\boldsymbol{a_{i_1} = 1}$ до $\boldsymbol{a_{i_{2k}} = 1}$ попарно знищилися. Отже, вся сума буде складатися із одного єдиного доданку $\boldsymbol{a_{i_{2k+1}} = 1}$. Таким чином, із того, що в НФЖ(*f*) міститься непарна кількість доданків, тобто із того, що $\text{ДОВЖИНА}_{\text{НФЖ}(f)} = \boldsymbol{2k + 1}$, випливає, що значення цієї функції на наборі $\boldsymbol{\tilde{1} = (1\ 1\ \ldots\ 1)}$ дорівнює **1**. Це означає, що за означенням функції, що зберігає **константу 1**, досліджувана функція $\boldsymbol{f \in T_1}$. ***Достатність доведено***.

Теорему доведено.

З урахуванням доведених теорем 33 – 35, можна сформулювати **<u>алгоритм розподілу за класами Поста функції, яку задано аналітично</u>:**

- Функція спрощується до ДНФ. Якщо отримана ДНФ, для якої неможливе подальше спрощення за допомогою тотожних перетворень, є позитивною, $\boldsymbol{f \in M}$. В іншому випадку треба знайти мінімальну ДНФ. Якщо вона є позитивною, то $\boldsymbol{f \in M}$, в іншому випадку $\boldsymbol{f \notin M}$.

- За отриманою на попередньому кроці ДНФ(f) будується НФЖ(f). Якщо НФЖ(f) не містить кон'юнкцій змінних, $f \in L$. В іншому випадку $f \notin L$.
- За отриманою на першому кроці ДНФ(f) або за отриманою на другому кроці НФЖ(f) будується f^*. Якщо вона збігається з ДНФ(f) або з НФЖ(f), тобто якщо $f^* = f$, то $f \in S$. В іншому випадку, тобто коли $f^* \neq f$, $f \notin S$.
- Якщо НФЖ(f) не містить одиницю ($a_0 = 0$), то $f \in T_0$. В іншому випадку $f \notin T_0$.
- Якщо НФЖ(f) містить непарну кількість доданків, $f \in T_1$. Якщо кількість доданків є парною – $f \notin T_1$.

Цей алгоритм можна подати у вигляді наступної блок-схеми.

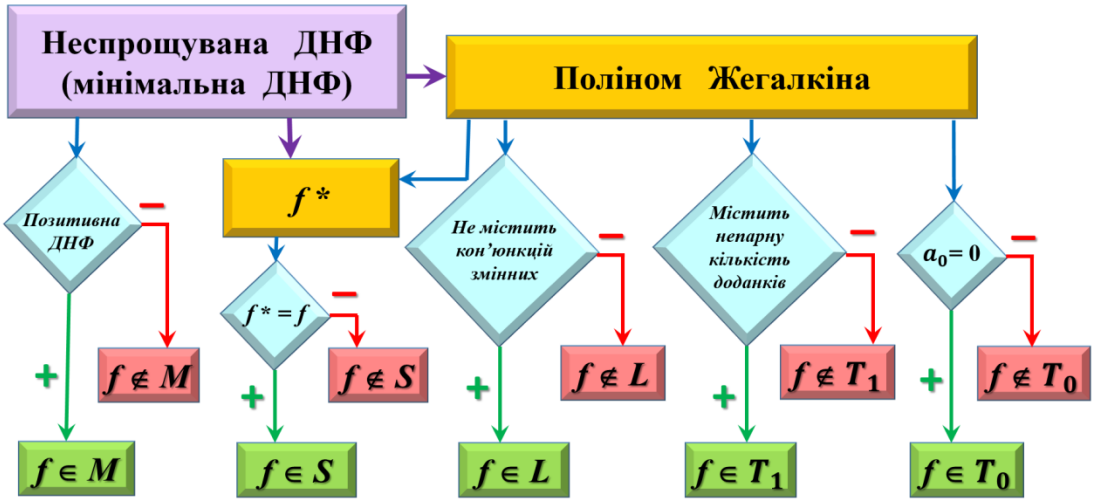


Рис. 10. – Розподіл за класами Поста функції, яку задано аналітично

<u>Приклад 45</u>. Розподілити за класами Поста функцію $f=(\bar{x}\,\bar{z} \leftarrow (\bar{y}z \oplus x\,y)) \downarrow (x \oplus y\,z)$.
<u>Розв'язання</u>.

1. *Спростимо цю функцію до ДНФ*.

$$f = (\bar{x}\,\bar{z} \leftarrow (\bar{y}z \oplus xy)) \downarrow (x \oplus yz) = \overline{(\bar{x}\,\bar{z} \leftarrow (\bar{y}\,z \oplus x\,y)) \vee (x \oplus y\,z)} =$$

$$= \overline{\bar{x}\,\bar{z} \leftarrow (\bar{y}\,z \oplus xy)} \wedge \overline{x \oplus yz} = (\bar{x}\,\bar{z} \rightarrow (\bar{y}\,z \oplus x\,y))\,(x \sim y\,z) =$$

$$= (\overline{\bar{x}\,\bar{z}} \vee (\bar{y}\,z \oplus x\,y))\,(x\,y\,z \vee \bar{x}\,\overline{y\,z}) =$$

$$= (\bar{\bar{x}} \vee \bar{\bar{z}} \vee \bar{y}\,z\,\overline{xy} \vee x\,y\,\overline{\bar{y}\,z})\,(x\,y\,z \vee \bar{x}\,(\bar{y} \vee \bar{z})) =$$

$$= (x \vee z \vee \bar{y}\,z\,(\bar{x} \vee \bar{y}) \vee x\,y\,(\bar{\bar{y}} \vee \bar{z}))\,(x\,y\,z \vee \bar{x}\,\bar{y} \vee \bar{x}\,\bar{z}) =$$

$$= (x \vee z \vee \bar{x}\,\bar{y}\,z \vee \bar{y}\,z \vee x\,y\,(y \vee \bar{z}))\,(x\,y\,z \vee \bar{x}\,\bar{y} \vee \bar{x}\,\bar{z}) =$$

$$= (x \vee z \vee x\,y \vee x\,y\,\bar{z})\,(x\,y\,z \vee \bar{x}\,\bar{y} \vee \bar{x}\,\bar{z}) = (x \vee z)\,(x\,y\,z \vee \bar{x}\,\bar{y} \vee \bar{x}\,\bar{z}) =$$

$$= x\,y\,z \vee x\,\bar{x}\,\bar{y} \vee x\,\bar{x}\,\bar{z} \vee x\,y\,z \vee \bar{x}\,\bar{y}\,z \vee \bar{x}\,\bar{z}\,z =$$

$$= x\,y\,z \vee \bar{x}\,\bar{y}\,z = \text{ДНФ}(f).$$

Отримана ДНФ містить заперечення, тобто не є позитивною. Тому слід знайти мінімальну ДНФ для цієї функції. Є очевидним, що отримана ДНФ є одночасно і ДДНФ(f), що складається із двох конституент одиниці, які не є суміжними, і склеювання яких в зв'язку з цим неможливе. Таким чином, ці конституенти одиниці є простими імплікантами для досліджуваної функції.

Як наслідок, отримана ДДНФ(*f*) одночасно є й скороченою, і єдиною мінімальною ДНФ(*f*), тобто

$$f_{min} = x\,y\,z \vee \overline{x}\,\overline{y}\,z.$$

Ця мінімальна ДНФ не є позитивною. Отже, у цієї функції не існує позитивної ДНФ. Тому дана функція ***не є монотонною***, тобто $f \notin M$.

2. ***За отриманою мінімальною ДНФ будуємо НФЖ(f)***. Для цього скористаємось методом переходу від ДДНФ до НФЖ:

$$f = x\,y\,z \vee \overline{x}\,\overline{y}\,z = x\,y\,z \oplus \overline{x}\,\overline{y}\,z \oplus x\,y\,z\,\overline{x}\,\overline{y}\,z =$$
$$= x\,y\,z \oplus z\,(1 \oplus x)\,(1 \oplus y) = x\,y\,z \oplus z \oplus x\,z \oplus y\,z \oplus x\,y\,z =$$
$$= z \oplus x\,z \oplus y\,z = \text{НФЖ}(f).$$

Отримана *НФЖ*(*f*) містить кон'юнкції змінних. Отже, дана функція ***не є лінійною***, тобто $f \notin L$.

3. ***За отриманою НФЖ(f) будуємо двоїсту функцію***. Для цього скористаємось означенням двоїстої функції.

$$f^* = \overline{\overline{z} \oplus \overline{x}\,\overline{z} \oplus \overline{y}\,\overline{z}} = 1 \oplus \overline{z} \oplus \overline{x}\,\overline{z} \oplus \overline{y}\,\overline{z} =$$
$$= 1 \oplus 1 \oplus z \oplus (1 \oplus x)\,(1 \oplus z) \oplus (1 \oplus y)\,(1 \oplus z) =$$
$$= z \oplus 1 \oplus x \oplus z \oplus x\,z \oplus 1 \oplus y \oplus z \oplus y\,z =$$
$$= x \oplus y \oplus z \oplus x\,z \oplus y\,z = \text{НФЖ}(f^*) \neq \text{НФЖ}(f).$$

Той же самий результат дає побудова двоїстої функції із мінімальної ДНФ. Таку побудову зручно проводити з використанням принципу двоїстості.

$$f^* = (x\,y\,z \vee \overline{x}\,\overline{y}\,z)^* = (x \vee y \vee z)\,(\overline{x} \vee \overline{y} \vee z) =$$
$$= x\,\overline{x} \vee x\,\overline{y} \vee x\,z \vee \overline{x}\,y \vee y\,\overline{y} \vee y\,z \vee \overline{x}\,z \vee \overline{y}\,z \vee z =$$
$$= x\,\overline{y} \vee \overline{x}\,y \vee z \neq f.$$

В силу того, що $f^* \neq f$, функція ***f не є самодвоїстою***, тобто $f \notin S$.

4. ***Визначимо довжину НФЖ(f) для цієї функції***. Отримана на другому кроці НФЖ(*f*) складається із трьох доданків, тобто для даної функції

$$\text{ДОВЖИНА}_{(z \oplus x\,z \oplus y\,z)} = 3.$$

Число «3» є непарним. Це означає, що дана функція ***зберігає константу*** **1**, тобто $f \in T_1$.

5. ***Визначимо значення коефіцієнту a_0 в НФЖ(f) для цієї функції***. В отриманій на другому кроці НФЖ(*f*) для цієї функції відсутній вільний член, тобто $a_0 = 0$. Отже, дана функція ***зберігає константу*** **0**, тобто $f \in T_0$.

Відповідь. $f \in T_0, f \in T_1, f \notin S, f \notin L, f \notin M.$

8.3. Другий критерій повноти систем булевих функцій (критерій Поста)

Як було доведено, розглянуті класи булевих функцій замкнені відносно операції суперпозиції, тобто суперпозиція будь-якої кількості булевих функцій даного класу є функцією того ж самого класу. Виходячи з цього, можна довести наступні леми.

Лема (*про функції, які не зберігають константи*). *Формулювання*. За допомогою суперпозиції функцій $f_{\bar{0}} \notin T_0$, $f_{\bar{1}} \notin T_1$ і селектора (тотожної функції $f = x$) можуть бути побудовані або обидві константи, або одна із констант і функція-заперечення $\bar{x}$, або функція-заперечення $\bar{x}$, тобто [20]

$$\left.\begin{matrix} f_{\bar{0}} \notin T_0 \\ f_{\bar{1}} \notin T_1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left[\begin{matrix} \{0,\ 1\} \subseteq [\{f_{\bar{0}},\ f_{\bar{1}}\}]\,; \\ \{const,\ \bar{x}\} \subseteq [\{f_{\bar{0}},\ f_{\bar{1}}\}]\,; \\ \{\bar{x}\} \subseteq [\{f_{\bar{0}},\ f_{\bar{1}}\}]\,. \end{matrix}\right.$$

Доведення. Розглянемо функцію $f_{\bar{0}} \notin T_0$, що не зберігає **константу 0**, і тотожну функцію $f = x$. Використовуючи суперпозицію цих функцій, можна ототожнити всі змінні функції $f_{\bar{0}}$ з функцією x. В результаті отримаємо функцію однієї змінної $g(x) = f_{\bar{0}}(x, x, \ldots, x)$. Із того, що $f_{\bar{0}} \notin T_0$, випливає, що $g(\tilde{0}) = g(0) = 1$. При цьому на одиничному наборі, який залишився, можливі обидва варіанти значень, тобто як $g(\tilde{1}) = g(1) = 1$, так і $g(\tilde{1}) = g(1) = 0$. При цьому, якщо $g(0) = 1$ і $g(1) = 0$, то це означає, що функція приймає значення, протилежні значенням свого аргументу, тобто $g(x) = \bar{x}$. Якщо ж $g(0) = 1$ і $g(1) = 1$, то це означає, що функція не змінює свого одиничного значення при зміні значень аргументу, тобто є ***тотожною одиницею***. Таким чином, маємо:

$$\left[\begin{matrix} \begin{cases} g(0) = 1 \\ g(1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \ g(x) = \bar{x}\,, \\ \begin{cases} g(0) = 1 \\ g(1) = 1 \end{cases} \Rightarrow \ g(x) = 1\,. \end{matrix}\right. \Rightarrow \ \{1, \bar{x}\} \subseteq [f_{\bar{0}}, x].$$

тобто за допомогою суперпозиції селектора та функції, що не зберігає **константу 0**, можна побудувати ***константуу* 1** або ***заперечення***. Як вже зазначалося, будь-яка система функцій, до складу якої входять не лише константи, обов'язково містить селектор $f = x$. Таким чином, $\{1, \bar{x}\} \subseteq [f_{\bar{0}}]$.

Тепер в аналогічний спосіб розглянемо функцію $f_{\bar{1}} \notin T_1$, що не зберігає **константу 1**, і тотожну функцію $f = x$. Використовуючи суперпозицію цих функцій, можна ототожнити всі змінні функції $f_{\bar{1}}$ з функцією x. В результаті також отримаємо функцію однієї змінної $g(x) = f_{\bar{1}}(x, x, \ldots, x)$. Із того, що $f_{\bar{1}} \notin T_1$, випливає, що $g(\tilde{1}) = g(1) = 0$. При цьому на нульовому наборі, який залишився, можливі обидва варіанти значень, тобто як $g(\tilde{0}) = g(0) = 1$, так і $g(\tilde{0}) = g(0) = 0$. При цьому, якщо $g(1) = 0$ і $g(0) = 1$, то це означає, що функція приймає значення, протилежні значенню свого аргументу, тобто $g(x) = \bar{x}$. Якщо ж $g(1) = 0$ і $g(0) = 0$, то це означає, що функція не змінює свого нульового значення при зміні значень аргументу, тобто є ***тотожним нулем***. Таким чином, маємо:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\mathbf{g(1)=0}\\ \mathbf{g(0)=1}\end{cases} \Rightarrow \mathbf{g}(x)=\overline{x}\,,\\ \begin{cases}\mathbf{g(1)=0}\\ \mathbf{g(0)=0}\end{cases} \Rightarrow \mathbf{g}(x)=\mathbf{0}\,.\end{array}\right. \Rightarrow \{\mathbf{0},\overline{x}\}\subseteq[f_{\overline{1}},x].$$

тобто за допомогою суперпозиції селектора і функції, що не зберігає **константу 1**, можна побудувати ***константу* 0** або ***заперечення***. Таким чином, $\{\mathbf{0},\overline{x}\}\subseteq[f_{\overline{1}}]$.

Із наведених співвідношень випливає, що за допомогою суперпозиції довільної функції, що не зберігає **константу 0**, і довільної функції, що не зберігає **константу 1**, можна побудувати чотири різних системи функцій:

$$\left.\begin{array}{l}f_{\overline{0}}\notin T_0\\ f_{\overline{1}}\notin T_1\end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\{\mathbf{0},\mathbf{1}\}\subseteq[\{f_{\overline{0}},f_{\overline{1}}\}];\\ \{\mathbf{0},\overline{x}\}\subseteq[\{f_{\overline{0}},f_{\overline{1}}\}];\\ \{\mathbf{1},\overline{x}\}\subseteq[\{f_{\overline{0}},f_{\overline{1}}\}];\\ \{\overline{x}\}\subseteq[\{f_{\overline{0}},f_{\overline{1}}\}].\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{c}\{\mathbf{0},\ \mathbf{1}\}\subseteq[\{f_{\overline{0}},f_{\overline{1}}\}]\,;\\ \{const,\ \overline{x}\}\subseteq[\{f_{\overline{0}},f_{\overline{1}}\}]\,;\\ \{\overline{x}\}\subseteq[\{f_{\overline{0}},f_{\overline{1}}\}]\,.\end{array}\right.$$

Лему доведено.

<u>Лема (*про побудову константи*)</u>. <u>*Формулювання*</u>. За допомогою суперпозиції функції $f_{\overline{S}}\notin S$, яка не є самодвоїстою, селектора (тотожної функції $f=x$) і функції-заперечення $f=\overline{x}$ може бути побудована функція-константа, тобто [15, 20]

$$\left.\begin{array}{l}f_{\overline{S}}\notin S\\ \overline{x}\end{array}\right\} \Rightarrow const\in[\{f_{\overline{S}},\overline{x}\}].$$

<u>*Доведення*</u>. Розглянемо функцію $f_{\overline{S}}\notin S$, яка не є самодвоїстою. Тоді, у відповідності з табличним означенням самодвоїстої функції, існує така пара протилежних наборів значень змінних $\tilde{\alpha}=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$ і $\overline{\tilde{\alpha}}=(\overline{\alpha}_1,\overline{\alpha}_2,\ldots,\overline{\alpha}_n)$, на яких функція $f_{\overline{S}}$ приймає однакові значення, тобто $f_{\overline{S}}(\tilde{\alpha})=f_{\overline{S}}(\overline{\tilde{\alpha}})$. З урахуванням правила піднесення до ступеню булевих змінних, маємо [13]:

$$f_{\overline{S}}(\tilde{\alpha})=f_{\overline{S}}(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)=f_{\overline{S}}(\alpha_1^1,\alpha_2^1,\ldots,\alpha_n^1)=f_{\overline{S}}(1^{\alpha_1},1^{\alpha_2},\ldots,1^{\alpha_n}),$$
$$f_{\overline{S}}(\overline{\tilde{\alpha}})=f_{\overline{S}}(\overline{\alpha}_1,\overline{\alpha}_2,\ldots,\overline{\alpha}_n)=f_{\overline{S}}(\alpha_1^0,\alpha_2^0,\ldots,\alpha_n^0)=f_{\overline{S}}(0^{\alpha_1},0^{\alpha_2},\ldots,0^{\alpha_n}).$$

Використовуючи суперпозицію функції $f_{\overline{S}}\notin S$ і селектора $f=x$, можна ототожнити всі змінні функції $f_{\overline{S}}$ з функцією x. В результаті отримаємо функцію однієї змінної $g(x)=f_{\overline{S}}(x^{\alpha_1},x^{\alpha_2},\ldots,x^{\alpha_n})$. З урахуванням наведених співвідношень для $f_{\overline{S}}(\tilde{\alpha})$ і $f_{\overline{S}}(\overline{\tilde{\alpha}})$ і рівності $f_{\overline{S}}(\tilde{\alpha})=f_{\overline{S}}(\overline{\tilde{\alpha}})$, отримуємо [15]:

$$g(0)=f_{\overline{S}}(0^{\alpha_1},0^{\alpha_2},\ldots,0^{\alpha_n})=f_{\overline{S}}(\overline{\tilde{\alpha}})=f_{\overline{S}}(\tilde{\alpha})=f_{\overline{S}}(1^{\alpha_1},1^{\alpha_2},\ldots,1^{\alpha_n})=g(1).$$

Це означає, що незалежно від значень змінних, на всіх їх наборах функція приймає однакові значення, тобто є однією з функцій-констант (або ***тотожною одиницею***, або ***тотожним нулем***). Отже, за допомогою суперпозиції довільної несамодвоїстої функції, селектора і заперечення може бути побудована ***функція-константа***. **Лему доведено**.

<u>Лема (*про побудову заперечення*)</u>. <u>*Формулювання*</u>. За допомогою функцій-констант, селектора (тотожної функції $f=x$) і немонотонної функції $f_{\overline{M}}\notin M$ може бути побудована функція-заперечення $\overline{x}$, тобто [15, 20]

$$f_{\overline{M}} \notin M \Rightarrow \overline{x} \in [\{f_{\overline{M}}, 0, 1\}].$$

Доведення. В силу теореми 32 про «стрибок» немонотонної функції, із того, що $f_{\overline{M}} \notin M$, випливає, що існує така пара сусідніх наборів значень змінних $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{i-1}, 0, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n)$ і $\widetilde{\beta} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{i-1}, 1, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n)$, для яких $\widetilde{\alpha} \preccurlyeq \widetilde{\beta}$ і при цьому $f_{\overline{M}}(\widetilde{\alpha}) > f_{\overline{M}}(\widetilde{\beta})$. Це є можливим лише в тому випадку, коли $f_{\overline{M}}(\widetilde{\alpha}) = 1$, а $f_{\overline{M}}(\widetilde{\beta}) = 0$ [2]. Використовуючи суперпозицію функції $f_{\overline{M}} \notin M$, селектора $f = x$ і функцій-констант, можна побудувати функцію однієї змінної $g(x) = f_{\overline{M}}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{i-1}, x, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n)$. В силу того, що $f_{\overline{M}} \notin M$, маємо $g(0) = 1$ і $g(1) = 0$. Отже, ця функція приймає значення, протилежні значенням своєї змінної, тобто $g(x) = \overline{x}$. Це означає, що за допомогою суперпозиції функцій-констант, селектора і довільної немонотонної функції може бути побудована функція-***заперечення***. **Лему доведено**.

Лема (*про побудову кон'юнкції*). *Формулювання*. За допомогою функцій-констант, селектора (тотожної функції $f = x$), нелінійної функції $f_{\overline{L}} \notin L$ і функції-заперечення $\overline{x}$ може бути побудована функція-кон'юнкція $x \wedge y$, тобто. [15, 20]

$$\left.\begin{matrix} f_{\overline{L}} \notin L \\ \overline{x} \end{matrix}\right\} \Rightarrow x\,y \in [\{f_{\overline{L}}, 0, 1, \overline{x}\}].$$

Доведення. В зв'язку з тим, що $f_{\overline{L}} \notin L$, то, за означенням, НФЖ($f_{\overline{L}}$) буде містити хоча б один доданок, що є кон'юнкцією якоїсь кількості змінних. Нехай такими змінними будуть x_1 і x_2, тобто будь-яка кон'юнкція обов'язково містить або одну з цих змінних, або обидві, і при цьому в НФЖ($f_{\overline{L}}$) відсутні кон'юнкції, що утворені без участі вказаних змінних. Тоді можна згрупувати всі доданки НФЖ($f_{\overline{L}}$), в яких присутня кон'юнкція x_1x_2, і винести цю кон'юнкцію за дужки як спільний множник. Потім аналогічно можна згрупувати всі доданки, що містять x_1, але не містять x_2. Для них можна винести за дужки спільний множник x_1. Ту ж саму процедуру повторюємо з доданками, що містять змінну x_2, але не містять змінну x_1. Для них можна винести за дужки спільний множник x_2. Всі решта доданки також згрупуємо. Ця група вже не буде містити кон'юнкції змінних. В підсумку отримаємо наступний вираз [13]:

$$f_{\overline{L}}(x_1, x_2, \ldots, x_n) =$$
$$= x_1x_2f_1(x_3, x_4, \ldots, x_n) \oplus x_1f_2(x_3, x_4, \ldots, x_n) \oplus x_2f_3(x_3, x_4, \ldots, x_n) \oplus f_4(x_3, x_4, \ldots, x_n).$$

В цьому виразі функція $f_1(x_3, x_4, \ldots, x_n) \in$ **ЗД**, тобто не є тотожним нулем. В іншому випадку, тобто при $f_1(x_3, x_4, \ldots, x_n) \equiv 0$ також і $x_1x_2f_1(x_3, x_4, \ldots, x_n) \equiv 0$. Це означає, що побудований вираз не буде містити кон'юнкцію x_1x_2, що суперечить умові нелінійності функції $f_{\overline{L}}$. Із цього випливає, що існує такий набор значень змінних $\widetilde{\alpha} = (\alpha_3, \alpha_4, \ldots, \alpha_n)$, на якому $f_1(\alpha_3, \alpha_4, \ldots, \alpha_n) = 1$. Нехай тоді на цьому наборі

$$f_2(\alpha_3, \alpha_4, \ldots, \alpha_n) = a,\ \ f_3(\alpha_3, \alpha_4, \ldots, \alpha_n) = b,\ \ f_4(\alpha_3, \alpha_4, \ldots, \alpha_n) = c,$$

де $a, b, c \in \{0, 1\}$ – деякі булеві константи. Тоді, використовуючи суперпозицію нелінійної функції $f_{\overline{L}}$ і функцій-констант, можна побудувати функцію двох змінних

$$g(x_1, x_2) = f_{\overline{L}}(x_1, x_2, \alpha_3, \alpha_4, \ldots, \alpha_n) = x_1x_2 \oplus a\,x_1 \oplus b\,x_2 \oplus c.$$

У випадку, коли $a = 0$ і $b = 0$, отримуємо $g(x_1, x_2) = x_1x_2$ і, таким чином, функцію-кон'юнкцію побудовано. Нехай тепер хоча б одна з цих булевих констант дорівнює **1**. Тоді або $x_1 \oplus b = x_1 \oplus 1 = \overline{x}_1$, або $x_2 \oplus a = x_2 \oplus 1 = \overline{x}_2$, або мають місце обидва ці співвідношення. Тоді,

використовуючи суперпозицію функції-заперечення і побудованої раніше функції $g(x_1, x_2)$, можна побудувати функцію [15]

$$h(x_1, x_2) = g(x_1 \oplus b, x_2 \oplus a) \oplus ab \oplus c.$$

Для цієї функції

$$h(x_1, x_2) = (x_1 \oplus b)(x_2 \oplus a) \oplus a(x_1 \oplus b) \oplus b(x_2 \oplus a) \oplus c \oplus ab \oplus c =$$
$$= x_1x_2 \oplus a\,x_1 \oplus b\,x_2 \oplus ab \oplus a\,x_1ab \oplus b\,x_2 \oplus ab \oplus c \oplus ab \oplus c = x_1x_2,$$

тобто в цьому випадку також побудовано функцію-кон'юнкцію. Отже, в загальному випадку за допомогою суперпозиції довільної нелінійної функції, функцій-констант і заперечення може бути побудована функція-***кон'юнкція***. **Лему доведено**.

Доведені леми дозволяють сформулювати ще один критерій повноти довільної системи булевих функцій.

Теорема 36 (*критерій Поста, або другий критерій повноти систем БФ*). *Формулювання*. Система булевих функцій $H = \{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ є повною тоді й лише тоді, коли вона повністю не міститься в жодному із класів Поста [2], тобто

$$([H] = P_2) \Leftrightarrow (\forall\, K \in \{T_0, T_1, L, S, M\} \;:\; H \nsubseteq K).$$

Доведення. Спочатку доведемо, що для того, щоб система функцій H була повною, ***необхідно***, щоб вона не містилася повністю в жодному із класів Поста, тобто

$$([H] = P_2) \Rightarrow (\forall\, K \in \{T_0, T_1, L, S, M\} \;:\; H \nsubseteq K).$$

Нехай система функцій H є повною, тобто $[H] = P_2$. Якщо б для деякого класу Поста K_i, $i \in \{0, 1, L, S, M\}$ задовольнялась умова $H \subseteq K_i$, то в силу замкненості всіх цих класів (властивість 4 для кожного з них) за допомогою суперпозиції функцій такої системи можна було б побудувати лише функції, що належать до цього класу. Однак, як видно із таблиці 5 (таблиці Поста для елементарних булевих функцій), серед елементарних булевих функцій є такі, що не належать жодному з класів Поста – це стрілка Пірса $x \downarrow y$ та штрих Шеффера x / y. Отже, ці функції буде неможливо подати суперпозицією функцій системи H, що суперечить її повноті. Таким чином, якщо система функцій є повною, то вона не міститься повністю в жодному з класів Поста. ***Необхідність доведено***.

Доведемо тепер, що для повноти системи функцій H ***достатньо***, щоб вона повністю не містилася в жодному з класів Поста, тобто

$$(\forall\, K \in \{T_0, T_1, L, S, M\} \;:\; H \nsubseteq K) \Rightarrow ([H] = P_2).$$

Умова $(\forall\, K \in \{T_0, T_1, L, S, M\} : H \nsubseteq K)$ означає, що задовольняється система умов

$$\begin{cases} H \nsubseteq T_0, \\ H \nsubseteq T_1, \\ H \nsubseteq L, \\ H \nsubseteq S, \\ H \nsubseteq M. \end{cases}$$

Із цієї системи умов випливає, що серед функцій системи $\boldsymbol{H}$ присутня хоча б одна функція $\boldsymbol{f_{\overline{0}} \notin T_0}$, що не зберігає **константу 0**, хоча б одна функція $\boldsymbol{f_{\overline{1}} \notin T_1}$, що не зберігає **константу 1**, хоча б одна нелінійна функція $\boldsymbol{f_{\overline{L}} \notin L}$, хоча б одна несамодвоїста функція $\boldsymbol{f_{\overline{S}} \notin S}$ і хоча б одна немонотонна функція $\boldsymbol{f_{\overline{M}} \notin M}$. Побудуємо із цих функцій підсистему системи $\boldsymbol{H}$:

$$\{f_{\overline{0}}, f_{\overline{1}}, f_{\overline{L}}, f_{\overline{S}}, f_{\overline{M}}\} \subseteq H.$$

За лемою про функції, що не зберігають константи, із системи функцій $\{f_{\overline{0}}, f_{\overline{1}}\}$ може бути побудована система, що складається із функцій-констант і заперечення, тобто $\{0, 1, \overline{x}\} \subseteq [\{f_{\overline{0}}, f_{\overline{1}}\}]$. За лемою про побудову кон'юнкції із системи $\{0, 1, \overline{x}\}$ і функції $f_{\overline{L}}$ можна отримати систему, що складається із функцій-констант, заперечення і кон'юнкції, тобто $\{0, 1, \overline{x}, xy\} \subseteq [\{f_{\overline{0}}, f_{\overline{1}}, f_{\overline{L}}\}]$.

Якщо із системи функцій $\{f_{\overline{0}}, f_{\overline{1}}\}$ за лемою про функції, що не зберігають константи, було отримано систему, що складається лише із констант, тобто $\{0, 1\}$, то отримати із неї функцію-заперечення (яка, згідно з таблицією 5, не є монотонною), згідно з теоремою 32 (про «стрибок» немонотонної функції), можна лише з використанням функції $f_{\overline{M}}$, тобто $\{0, 1, \overline{x}\} \subseteq [\{f_{\overline{0}}, f_{\overline{1}}, f_{\overline{M}}\}]$ Далі, як було показано, із системи $\{f_{\overline{0}}, f_{\overline{1}}, \overline{x}\}$ може бути отримана $\{0, 1, \overline{x}, xy\}$.

Якщо із системи функцій $\{f_{\overline{0}}, f_{\overline{1}}\}$ за лемою про функції, що не зберігають константи, було отримано систему, що складається лише із заперечення, тобто $\{\overline{x}\}$, то отримати із цієї системи функції константи, згідно з лемою про побудову констант, можна лише з використанням функції $f_{\overline{S}}$, тобто $\{0, 1, \overline{x}\} \subseteq [\{f_{\overline{0}}, f_{\overline{1}}, f_{\overline{S}}\}]$. Далі, як було показано, із системи $\{0, 1, \overline{x}\}$ можна отримати систему $\{0, 1, \overline{x}, xy\}$. Отже, з урахуванням 2-ї властивості замикання, маємо:

$$\{0, 1, \overline{x}, xy\} \subseteq ([\{f_{\overline{0}}, f_{\overline{1}}, f_{\overline{M}}\}] \cup [\{f_{\overline{0}}, f_{\overline{1}}, f_{\overline{S}}\}] \cup [\{f_{\overline{0}}, f_{\overline{1}}, f_{\overline{L}}\}]) \subseteq [\{f_{\overline{0}}, f_{\overline{1}}, f_{\overline{L}}, f_{\overline{S}}, f_{\overline{M}}\}].$$

Звідси, з урахуванням транзитивності відношення включення [22], випливає, що:

$$\{0, 1, \overline{x}, xy\} \subseteq [\{f_{\overline{0}}, f_{\overline{1}}, f_{\overline{L}}, f_{\overline{S}}, f_{\overline{M}}\}].$$

При розгляданні залежностей між булевими функціями (п.2.2) було показано, що будь-яку булеву функцію можна виразити через заперечення і кон'юнкцію. Отже, система функцій $\{\overline{x}, xy\}$ є повною. При цьому $0 = x\,\overline{x}$, $1 = \overline{x\,\overline{x}}$. Таким чином, всі функції системи $\{0, 1, \overline{x}, xy\}$ виражаються через функції повної системи $\{\overline{x}, xy\}$. Це означає, що за 1-м критерієм повноти система$\{0, 1, \overline{x}, xy\}$ також є повною. Із повноти цієї системи за 1-м критерієм повноти випливає повнота системи $\{f_{\overline{0}}, f_{\overline{1}}, f_{\overline{L}}, f_{\overline{S}}, f_{\overline{M}}\}$. Таким чином, якщо система функцій не міститься повністю в жодному з класів Поста, то така система є повною. ***Достатність доведено***.

Теорему доведено.

Виходячи із доведеної теореми 36, можна дати альтернативне формулювання 2-го критерію повноти.

<u>Критерій Поста</u>. Для того, щоб система булевих функцій була функціонально повною, необхідно і достатньо, щоб вона містила хоча б одну функцію $f_{\overline{0}}$, що не зберігає **константу 0**, хоча б одну функцію $f_{\overline{1}}$, що не зберігає **константу 1**, хоча б одну несамодвоїсту функцію $f_{\overline{S}}$, хоча б одну нелінійну функцію $f_{\overline{L}}$ і хоча б одну немонотонну функцію $f_{\overline{M}}$, тобто

$$[H] = P_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \exists\, f_{\overline{0}} : (f_{\overline{0}} \in H) \wedge (f_{\overline{0}} \notin T_0)\,; \\ \exists\, f_{\overline{1}} : (f_{\overline{1}} \in H) \wedge (f_{\overline{1}} \notin T_1)\,; \\ \exists\, f_{\overline{L}} : (f_{\overline{L}} \in H) \wedge (f_{\overline{L}} \notin L)\,; \\ \exists\, f_{\overline{S}} : (f_{\overline{S}} \in H) \wedge (f_{\overline{S}} \notin S)\,; \\ \exists\, f_{\overline{M}} : (f_{\overline{M}} \in H) \wedge (f_{\overline{M}} \notin M)\,. \end{cases}$$

<u>Наслідок із критерія Поста</u>. *<u>Формулювання</u>*. Будь-який замкнений клас $\boldsymbol{R}$, відмінний від множини всіх без виключення булевих функцій $\boldsymbol{P_2}$, міститься принаймні в одному із класів Поста [15, 20].

<u>Доведення</u>. Скористаємось тим фактом, що із рівності $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$ випливає рівність $\overline{\boldsymbol{A}} = \overline{\boldsymbol{B}}$. Тоді це формулювання є рівносильним твердженню [20], що $[\boldsymbol{R}] \neq \boldsymbol{P_2}$ тоді й лише тоді, коли існує такий клас булевих функцій $\boldsymbol{K} \notin \{\boldsymbol{T_0}, \boldsymbol{T_1}, \boldsymbol{L}, \boldsymbol{S}, \boldsymbol{M}\}$, що $\boldsymbol{R} \subseteq \boldsymbol{K}$. **Наслідок доведений**.

<u>Приклад 46</u>. Дослідити на повноту за критерієм Поста систему із двох функцій, що були розглянуті раніше в прикладі 44 і в прикладі 45:

$$f_1 = (1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1),$$
$$f_2 = (\overline{x}\,\overline{z} \leftarrow (\overline{y}z \oplus x\,y)) \downarrow (x \oplus y\,z).$$

<u>Розв'язання</u>. Для цих функцій в прикладах 44 і 45 було отримано наступний розподіл за класами Поста:

$$f_1 \notin T_0, f_1 \in T_1, f_1 \notin S, f_1 \notin L, f_1 \notin M,$$
$$f_2 \in T_0, f_2 \in T_1, f_2 \notin S, f_2 \notin L, f_2 \notin M.$$

Побудуємо для цих функцій таблицю Поста.

Клас / f	T_0	T_1	L	S	M
f_1	-	+	-	-	-
f_2	+	+	-	-	-

Є очевидним, що ця система функцій є неповною, тому що вона повністю міститься в класі $\boldsymbol{T_1}$. Таким чином, за критерієм Поста, для повноти їй не вистачає функції $\boldsymbol{f_{\overline{1}}}$, що не зберігає **константу 1**. В силу того, що система не є повною, то й базисів в ній немає. Однак, використовуючи одну або декілька (за потреби) елементарних булевих функцій, цю систему можна доповнити таким чином, щоб вона стала функціонально повною. При цьому неможна використовувати стрілку Пірса або штрих Шеффера, тому що вони самі по собі вже є функціонально повними системами. З урахуванням таблиці 5, дану систему булевих функцій можна доповнити в декілька способів.

Клас / f	T_0	T_1	L	S	M
f_1	-	+	-	-	-
f_2	+	+	-	-	-
0	+	-	+	-	+
$\overline{x}$	-	-	+	+	-
$x \leftarrow y$	+	-	-	-	-
$x \oplus y$	+	-	+	-	-

Досліджувана в даному прикладі система функцій є випадком, коли множина класів Поста, до яких належить функція $\boldsymbol{f_1}$, є підмножиною класів, до яких належить функція $\boldsymbol{f_2}$. В цьому випадку, якими б елементарними функціями ми не доповнювали систему із функцій $\{\boldsymbol{f_1}, \boldsymbol{f_2}\}$, функція $\boldsymbol{f_2}$ до базису не ввійде. Це пов'язане з тим, що щойно з'являється функція $\boldsymbol{f_{\overline{1}}}$, система із функцій $\boldsymbol{f_1}$ і $\boldsymbol{f_{\overline{1}}}$ буде функціонально повною і без участі $\boldsymbol{f_2}$. Таким чином, система $\{\boldsymbol{f_1}, \boldsymbol{f_2}, \boldsymbol{f_{\overline{1}}}\}$ є повною, але надлишковою. Єдиним для цього прикладу виключенням є випадок, коли до системи додається функція $\boldsymbol{f_{\overline{1}}} = \overline{\boldsymbol{x}}$, тому що вона одночасно не зберігає і **константу 0** також і тому може утворювати базис і з функцією $\boldsymbol{f_2}$ без участі функції $\boldsymbol{f_1}$. Але в жодному базисі обидві функції системи $\{\boldsymbol{f_1}, \boldsymbol{f_2}\}$ одночасно міститися не можуть. Таким чином, в системі функції $\{\boldsymbol{f_1}, \boldsymbol{f_2}, \boldsymbol{f_{\overline{1}}}\}$ можна виділити наступні базиси (в дужках позначено класи, не приналежність до яких забезпечує вказана функція):

$$\{\boldsymbol{f_1}, \mathbf{0}\} : \boldsymbol{f_1}\ (\overline{\boldsymbol{T}}_0, \overline{\boldsymbol{L}}, \overline{\boldsymbol{M}}),\ \ \mathbf{0}\ (\overline{\boldsymbol{T}}_1);$$

$$\{\boldsymbol{f_1}, \overline{\boldsymbol{x}}\} : \boldsymbol{f_1}\ (\overline{\boldsymbol{T}}_0, \overline{\boldsymbol{L}}, \overline{\boldsymbol{S}}),\ \ \overline{\boldsymbol{x}}\ (\overline{\boldsymbol{T}}_1);$$

$$\{\boldsymbol{f_1}, \leftarrow\} : \boldsymbol{f_1}\ (\overline{\boldsymbol{T}}_0),\ \ \leftarrow (\overline{\boldsymbol{T}}_1);$$

$$\{\boldsymbol{f_1}, \oplus\} : \boldsymbol{f_1}\ (\overline{\boldsymbol{T}}_0, \boldsymbol{L}),\ \ \oplus\ (\overline{\boldsymbol{T}}_1);$$

$$\{\boldsymbol{f_2}, \overline{\boldsymbol{x}}\} : \boldsymbol{f_1}\ (\overline{\boldsymbol{L}}, \overline{\boldsymbol{S}}),\ \ \overline{\boldsymbol{x}}\ (\overline{\boldsymbol{T}}_0, \overline{\boldsymbol{T}}_1).$$

Відповідь. Система функцій $\{\boldsymbol{f_1}, \boldsymbol{f_2}\}$ є неповною, тому базиси в ній виділити неможливо. Для повноти цієї системи до неї можна додати одну із систем елементарних булевих функцій $\{\mathbf{0}\}$, $\{\overline{\boldsymbol{x}}\}$, $\{\leftarrow\}$, $\{\oplus\}$. При цьому можливе отримання наступних базисів: $\{\boldsymbol{f_1}, \mathbf{0}\}$, $\{\boldsymbol{f_1}, \overline{\boldsymbol{x}}\}$, $\{\boldsymbol{f_1}, \leftarrow\}$, $\{\boldsymbol{f_1}, \oplus\}$, $\{\boldsymbol{f_2}, \overline{\boldsymbol{x}}\}$.

Розглянутий приклад показує, що одна й та сама логічна функція може представляти в функціонально повній системі одразу декілька необхідних властивостей. Тому мінімальна кількість функцій, що складають функціонально повну систему, дорівнює одиниці. В таких системах одна єдина функція має всі необхідні п'ять властивостей [8]. Прикладами таких систем можуть служити системи, що складаються лише із стрілки Пірса або лише із штриха Шеффера, тобто $\boldsymbol{H_1} = \{x \downarrow y\}$ і $\boldsymbol{H_2} = \{x \,/\, y\}$.

Теорема 37. *Формулювання*. Із будь-якої повної системи булевих функцій можна виділити повну підсистему, що містить не більше, ніж чотири функції.

Доведення. В силу критерія Поста, із кожної повної системи булевих функцій можна виділити повну підсистему із п'яти функцій $\{\boldsymbol{f_{\overline{0}}}, \boldsymbol{f_{\overline{1}}}, \boldsymbol{f_{\overline{L}}}, \boldsymbol{f_{\overline{S}}}, \boldsymbol{f_{\overline{M}}}\}$. Для функції $\boldsymbol{f_{\overline{0}}}$, що не зберігає **константу 0**, однозначно визначається її значення $\boldsymbol{f_{\overline{0}}}(\widetilde{\mathbf{0}}) = \mathbf{1}$. Однак на одиничному наборі для неї можливі два варіанти: $\boldsymbol{f_{\overline{0}}}(\widetilde{\mathbf{1}}) = \mathbf{0}$ або $\boldsymbol{f_{\overline{0}}}(\widetilde{\mathbf{1}}) = \mathbf{1}$. У випадку, коли $\boldsymbol{f_{\overline{0}}}(\widetilde{\mathbf{1}}) = \mathbf{0}$, цю функцію

можна використовувати також і як функцію $f_{\overline{1}}$, що не зберігає **константу 1**. Крім того, в цьому випадку маємо $f_{\overline{0}}(\widetilde{0}) > f_{\overline{0}}(\widetilde{1})$, тобто має місце «стрибок». Це означає, що функцію $f_{\overline{0}}$ можна також використовувати і як немонотонну функцію $f_{\overline{M}}$. Таким чином, в цьому випадку виявляється, що за критерієм Поста система функцій $\{f_{\overline{0}}, f_{\overline{L}}, f_{\overline{S}}\}$ є повною. У випадку, коли $f_{\overline{0}}(\widetilde{1}) = 1$, отримуємо $f_{\overline{0}}(\widetilde{0}) = f_{\overline{0}}(\widetilde{1})$, що порушує умову антисиметричності стовпця значень функції відносно його середини. Таким чином, в цьому випадку функцію $f_{\overline{0}}$ можна також використовувати і як несамодвоїсту функцію $f_{\overline{S}}$. Отже, в цьому випадку отримуємо, що за критерієм Поста повною є система функцій $\{f_{\overline{0}}, f_{\overline{1}}, f_{\overline{L}}, f_{\overline{M}}\}$. Таким чином, в будь-якому випадку для повноти системи булевих функцій достатньо не більш, ніж чотири функції [15]. **Теорему доведено**.

Із всього вище сказаного також випливає, що незалежно від того, як саме задано кожну з функцій (таблично або аналітично), дослідження на функціональну повноту за допомогою критерію Поста системи, що з них складено, завжди є можливим (рис. 11).

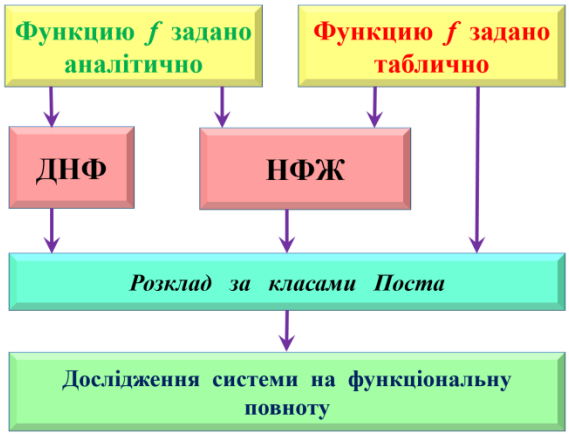


Рис. 11 – Дослідження на функціональну повноту систем булевих функцій

Означення. Замкнений клас A булевих функцій називається *передповним* (*максимальним*) *класом*, якщо замикання об'єднання цього класу з будь-якою булевою функцією, що не належить до цього класу, породжує всю множину P_2 [15], тобто

$$A - \textit{передповний} \overset{\text{def}}{=} \forall f_i \in P_2, f_i \notin A: \ [A \cup \{f_i\}] = P_2 .$$

Теорема 38. *Формулювання*. Класи Поста є вичерпним переліком передповних (максимальних) класів булевих функцій.

Доведення. Покажемо спочатку, що жоден з класів Поста не міститься в іншому. Для цього достатньо для кожного класу вказати таку систему функцій, яка належить даному класу, але не входить повністю в жоден із решти класів [20]. Результати зведемо в наступну таблицю, де для кожної функції таблиці рядок, що її містить, визначає клас, до якого вона належить, а стовпець – клас, до якого вона не належить.

Клас	$\overline{T_0}$	$\overline{T_1}$	$\overline{L}$	$\overline{S}$	$\overline{M}$
T_0		0	xy	0; xy; $x \oplus y$	$x \oplus y$
T_1	1; $1 \oplus x \oplus y$		xy	1; xy; $1 \oplus x \oplus y$	$1 \oplus x \oplus y$
L	1	0		0; 1; $x \oplus y$	$x \oplus y$
S	$\overline{x}$	$\overline{x}$	$xy \oplus xz \oplus yz$		$\overline{x}$
M	1	0	xy	1; 0; xy	

Із наведеної таблиці видно, що система функцій **{0, *xy*, *x*⊕*y*}** повністю міститься в класі T_0 (кожна з функцій цієї системи зберігає **константу 0**), але при цьому не міститься повністю в жодному з решти класів (**константа 0** не зберігає **константу 1** і не є самодвоїстою, функція ***xy*** не є лінійною і не є самодвоїстою, а функція ***x*⊕*y*** – не є самодвоїстою і не є монотонною). Система функцій **{1, *xy*, 1⊕*x*⊕*y*}** повністю міститься в класі T_1 (кожна функція цієї системи зберігає **константу 1**але при цьому не міститься повністю в жодному іншому класі (**константа 1** не зберігає **константу 0** і не є самодвоїстою, функція ***xy*** не є лінійною і не є самодвоїстою, а функція **1⊕*x*⊕*y*** – немонотонна і не зберігає **константу 0**). Система лінійних функцій **{0, 1, *x*⊕*y*}** не належить повністю жодному з решти чотирьох класів (**константа 0** не зберігає **константу 1**, **константа 1** не зберігає **константу 0**, функція ***x*⊕*y*** є немонотонною, самодвоїстою не є жодна з функції цієї системи). Система самодвоїстих функцій **{$\overline{x}$, *xy*⊕*xz*⊕*yz*}** не належить повністю жодному іншому класу Поста (функція $\overline{x}$ не зберігає жодну з констант і немонотонна, а функція ***xy*⊕*xz*⊕*yz*** – нелінійна). Система монотонних функцій **{0, 1, *xy*}** також не належить повністю жодному з решти чотирьох класів Поста (**константа 0** не зберігає **константу 1**, **константа 1** не зберігає **константу 0**, функція ***xy*** є нелінійною, самодвоїстою не є жодна з функцій цієї системи). Таким чином, жоден з класів Поста не міститься повністю в жодному іншому з решти класів Поста.

Доведемо тепер, що всі класи Поста є передповними. Розглянемо клас функцій ***K***, що є одним з класів Поста, тобто $K \in \{T_0, T_1, L, S, M\}$, і довільну функцію $f \notin K$. В силу того, що клас ***K*** не міститься повністю в жодному іншому із решти чотирьох класів Поста, система функцій ***K*∪{*f*}** буде повною за 2-м критерієм повноти (критерієм Поста). Повнота цієї системи, згідно з означенням, означає, що $[K \cup \{f\}] = P_2$. Звідси випливає, що ***K*** – передповний клас. Таким чином, будь-який із класів Поста є передповним.

Доведемо тепер, що не існує інших передповних класів, крім класів Поста. Доведення будемо проводити методом від протилежного. Припустимо, що існує деякий передповний клас функцій ***R***, що не збігається з жодним із класів Поста. Тоді, в силу замкненості класу ***R*** і наслідку із критерію Поста, існує такий клас $K \in \{T_0, T_1, L, S, M\}$, що $R \subseteq K$. Якщо $R \neq K$, то існує така функція $f \notin R$, яка при цьому $f \in K$. Тоді $(R \cup \{f\}) \subseteq K$, і, у відповідності з 2-ю властивістю замикання, $[R \cup \{f\}] \subseteq [K]$. Але в силу того, що ***K*** є одним із класів Поста, $[K] \neq P_2$ (властивість 4 всіх класів Поста). Але це означає, що $[R \cup \{f\}] \neq P_2$, що суперечить тому, що клас ***R*** є передповним. Отримане протиріччя доводить, що будь-який передповний клас ***R*** збігається з одним із класів Поста. **Теорему доведено**.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Задорожна А. В. Дискретний аналіз: конспект лекцій. – Львів: ЛНУ, 2017. – 52 с.
2. Капітонова Ю. В., Кривий С. Л., Летичевський О. А., Луцький Г. М., Печурін М. К. Основи дискретної математики. – Київ: Наукова думка, 2002. – 580 с.
3. Драган Г. С., Федоровський С. В. Елементи алгебри висловлювань і логіки предикатів: навчально-методичний посібник. – Одеса: «Одеський національний університет ім. І. І. Мечникова», 2014. – 100 с.
4. Якімова Н. А. Курс лекцій з «Математичної логіки»: Курс лекцій для студентів усіх форм навчання спеціальності «Прикладна лінгвістика» - Одеса: Астропринт. – 2004.
5. Якімова Н. А. Математична логіка: методичний посібник для студентів усіх форм навчання спеціальності «Прикладна лінгвістика». – Одеса: Астропринт. – 2006.
6. Бондаренко М. Ф., Гвоздинський А. М. Оптимізаційні задачі в системах прийняття рішень. – Харків: ХТУРЕ, 1998. – 216 с.
7. Михайленко В. М., Федоренко Н. Д., Демченко В. В. Дискретна математика. – Київ: Видавництво Європейського університету, 2003. – 318 с.
8. Матвієнко М. П. Комп’ютерна логіка. Навчальний посібник. – К.: Видавництво Ліра-К, 2012. – 288 с.
9. Гвоздинський А. М., Губін В. О., Шергін В. Л. Методи оптимізації в організаційному управлінні. – Харків: ХНУРЕ. – 2014. – 396 с.
10. Дементьєва В. І. Лінійна алгебра: Конспект лекцій. – Одеса: «Астропринт», 1999. – 256 с.
11. Шабанов-Кушнаренко Ю. П. Теорія інтелекту. Математичні засоби. – Харків: Вища школа. Вид-во при Харківському університеті, 1984. – 144 с.
12. Якімова Н. А. Логічна алгебра: методичний посібник. – Одеса: «Освіта України», 2019.– 40 с.
13. Шабанов-Кушнаренко Ю. П. Теорія інтелекту. Технічні засоби. – Харків: Вища школа. Вид-во при Харківському університеті, 1986. – 136 с.
14. Шабанов-Кушнаренко Ю. П. Теорія інтелекту. Проблеми та перспективи. – Харків: Вища школа. Вид-во при Харківському університеті, 1987. – 160 с.
15. Коцовський В. М. Дискретна математика та теорія алгоритмів. - Ужгород: УНУ. – 2016.
16. Вербицький О. В. Вступ до криптології. – Львів: Вид-во науково-технічної літератури, 1998. – 248 с.
17. Ямненко Р. Є. Дискретна математика. – К.: Четверта хвиля, 2010. – 104 с.
18. Булитко В. К. Елементи теорії дискретних систем. – Одеса: «Астропринт», 1997. – 80 с.
19. Борисенко А. А. Лекції з дискретної математики (множини і логіка): Навчальний посібник. – Суми: СумДУ, 1998. – 136 с.
20. Федоровський С. В. Теорія булевих функцій. Повні системи булевих функцій: конспект лекцій. – Одеса: ОНУ ім. І. І.Мечникова, 2012. – 24 с.
21. Федоровський С. В. Теорія булевих функцій. Нормальні форми алгебри логіки: конспект лекцій. – Одеса: ОНУ ім. І. І.Мечникова, 2011. – 46 с.
22. Якімова Н. А. Дискретна математика. Частина 1. Теорія множин. Теорія графів. (Курс лекцій). – Одеса: ОНУ ім. І. І. Мечникова, 2022. – 102 с.
23. Зиков. О. О. Лекції з алгебри. – Одеса: «Астропринт», 2007. – 400 с.
24. https://uk.wikipedia.org/wiki/Замкнений_клас_функцій_алгебри_логіки

25. Темнікова О. Л. Дискретна математика. Конспект лекцій. Частина 1. – Київ: КПІ, 2021. – 154 с.
26. Гвоздинський А. М., Якімова Н. А, Губін В. О. Методи оптимізації в системах прийняття рішень: навч. посібник. – Харків: ХНУРЕ, 2006. – 324 с.
27. Гвоздинський А. М. Проектування динамічних АСУ. – Харків: ХТУРЕ, 1996. – 216 с.
28. https://matica.org.ua/metodichki-i-knigi-po-matematike/diskretnaia-matematika-kurs-lektcii-v-n-semenchuk/tema-6-minimizatciia-bulevykh-funktcii

Навчальне видання

Якімова Наталья Анатольевна

ДИСКРЕТНА МАТЕМАТИКА
Частина 2
БУЛЕВІ ФУНКЦІЇ

КУРС ЛЕКЦІЙ

В авторській редакції

Підп. до друку 20.12.2023. Формат 60х84/8.
Ум.-друк. арк. 14,88. Наклад 20 пр.
Зам. № 2723.

Видавець і виготовлювач
Одеський національний університет імені І. І. Мечникова
Свідоцтво суб’єкта видавничої справи ДК № 4215 від 22.11.2011 р.
65082, м. Одеса, вул. Єлісаветинська, 12, Україна
Тел.: (048) 723 28 39, e-mail: druk@onu.edu.ua