УДК 514.75:517.53

Л. Л. Безкоровайная (Одес. нац. ун-т им. И. И. Мечникова)

ПОВЕРХНОСТИ, ОБРАЗОВАННЫЕ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОЙ И МНИМОЙ ЧАСТЯМИ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ: А-ДЕФОРМАЦИИ, ПРОИСХОДЯЩИЕ НЕЗАВИСИМО ИЛИ ОДНОВРЕМЕННО

It is proved that the surfaces generated by the real and imaginary parts of analytic functions allow nontrivial infinitesimal areal deformations of certain three types. The fields of displacements are explicitly expressed in all three cases. Given surfaces are rigid with respect to infinitesimal bendings of each type.

Доведено, що поверхні, утворені дійсною та уявною частинами аналітичної функції. допускають нетривіальні ареальні нескінченно малі деформації певних трьох типів. Поля зміщень у всіх випадках виражені явно. По відношенню до нескінченно малих згинань кожного типу задані поверхні виявилися жорсткими.

Введение. Рассмотрим пару поверхностей

$$Z = u(x, y), \tag{1}$$

$$Z = v(x, y), \tag{2}$$

ассоциированных с заданной в области G аналитической функцией

$$w(z) = u(x, y) + iv(x, y) \tag{3}$$

комплексной переменной $z = x + iy$, и поверхность

$$Z = \sqrt{u^2(x, y) + v^2(x, y)}. \tag{4}$$

Введенная здесь тройка поверхностей имеет примечательные свойства. Поверхности (1), (2), (4) над произвольной компактной подобластью области G имеют равные площади. Используя этот факт, В. К. Дзядык доказал теорему, в которой обосновал новое определение аналитической функции [1], имеющее геометрический характер. Как показал A. W. Goodman [2], в теореме В. К. Дзядыка поверхность (4) может быть заменена поверхностью $Z = \varphi(u, v)$, где $\varphi(u, v)$ — произвольная гладкая функция, удовлетворяющая условию $\varphi_u^2 + \varphi_v^2 = 1$. В работе [3] изучались решения этого уравнения.

В дополнение к предыдущему Ю. Ю. Трохимчук установил [4], что теорема В. К. Дзядыка допускает усиление. В формулировке своей обобщенной теоремы поверхность (4) он заменил поверхностью $Z = \alpha u + \beta v$, где α, β — не равные нулю постоянные, $\alpha^2 + \beta^2 = 1$. Для ее доказательства Ю. Ю. Трохимчук использовал ряд вспомогательных утверждений из [4, 5].

Геометрические свойства поверхностей (1), (2) исследовались и в работах [6, 7]. Отметим, что для современных исследователей особый интерес представляют гармонические поверхности (см., например, [8]).

Определение 1. *u-Поверхностью (v-поверхностью) будем называть поверхность, заданную уравнением вида* (1) *(вида* (2)), *где* $u(x,y)$ *— действительная часть* ($v(x,y)$ *— мнимая часть) какой-нибудь аналитической функции. Пару поверхностей* (1), (2), *ассоциированных с одной и той же аналитической функцией, назовем гармонически сопряженными поверхностями* (*ГСП*).

Очевидно, не каждые две u- и v-поверхности образуют пару ГСП.

В настоящей статье исследуются бесконечно малые (б. м.) деформации u- и v-поверхностей. Цель исследования — выяснить, допускают ли u- и v-поверхности б. м. деформации, сохраняющие свойство гармонической сопряженности (ГС), и если ответ положителен, — то с какой подвижностью.

Для решения поставленной проблемы в статье вводятся и изучаются б. м. деформации трех типов:

типа $d_t(u)$ — б. м. деформация с параметром t u-поверхности в классе u-поверхностей;

типа $d_\varepsilon(v)$ — б. м. деформация с параметром ε v-поверхности в классе v-поверхностей;

типа $d_t(u \cup v)$ — б. м. деформации, которые происходят одновременно на u- и v-поверхностях и сохраняют ГС.

Теоремы 1 – 3 содержат аналитические критерии б. м. деформации каждого типа, а теорема 4 описывает общие связи и зависимости между ними. Эти предложения в дальнейшем находят развитие в приложениях к двум специальным видам деформаций, а именно:

ареальной бесконечно малой (А-деформации), которая характеризуется условием стационарности элемента площади;

бесконечно малому изгибанию, сохраняющему длину дуги произвольной кривой на поверхности.

Математические модели ареальных б. м. деформаций рассматриваемых типов визуализируются посредством теорем 6, 8, 10. Теоремами 7, 9 обосновывается существование нетривиальных А-деформаций типов $d_t(u)$ и $d_\varepsilon(v)$, которые здесь заявлены как независимые. Деформация типа $d_t(u \cup v)$ представляет собой некий симбиоз первых двух типов деформаций при условии их одновременности. В теореме 11 устанавливается существование нетривиальных А-деформаций этого типа. Поля смещений во всех случаях определены явно. Теоремы 12, 13 дают описание некоторых свойств одной замечательной сети линий ГСП.

По отношению к бесконечно малым изгибаниям (трех типов) u- и v-поверхности оказались жесткими (теорема 14).

А-деформации изучались, например, в работах [9 – 14]. Исследования в этом направлении продолжены в [15 – 18].

1. Понятия б. м. деформаций типов $d_t(u)$ и $d_\varepsilon(v)$ и их признаки. Представим u- и v-поверхности (1), (2) в векторно-параметрическом виде

$$\overline{r} = (x, y, u(x,y)), \tag{5}$$

$$\overline{\rho} = (x, y, v(x,y)). \tag{6}$$

Допустим, что каждая из них независимо подвергается какой-нибудь б. м. деформации первого порядка

$$\overline{r}^*(x,y,t)=\overline{r}(x,y)+t\overline{y}(x,y), \tag{7}$$

$$\overline{\rho}^*(x,y,t)=\overline{\rho}(x,y)+\varepsilon\widetilde{\overline{y}}(x,y) \tag{8}$$

с параметрами $t\to 0$ и $\varepsilon\to 0$ и полями смещений $\overline{y},\widetilde{\overline{y}}\in C^3(G)$:

$$\overline{y}=(\xi(x,y),\eta(x,y),\zeta(x,y)),\quad \widetilde{\overline{y}}=\left(\widetilde{\xi}(x,y),\widetilde{\eta}(x,y),\widetilde{\zeta}(x,y)\right). \tag{9}$$

Определение 2. *Будем говорить, что б. м. деформация* (7) *u-поверхности* (*деформация* (8) *v-поверхности*) *происходит в классе u-поверхностей* (*v-поверхностей*), *т. е. является б. м. деформацией типа $d_t(u)$* ($d_\varepsilon(v)$), *если деформированная поверхность является при этом некоторой u^*-поверхностью (v^*-поверхностью) над G с точностью б. м. 1-го порядка относительно параметра деформации.*

Очевидно, в общем случае u^*- и v^*-поверхности могут быть порождены различными аналитическими функциями.

Теорема 1. *Б. м. деформация* (7) (*с параметром t*) *происходит в классе u-поверхностей тогда и только тогда, когда ее поле смещений имеет вид $\overline{y}=(0,0,\zeta(x,y))$, где ζ является действительной частью некоторой аналитической в области G функции.*

Доказательство. Пусть б. м. деформация (7) с произвольным вектором смещения $\overline{y}$ из (9) происходит в классе u-поверхностей. Найдем декартовы координаты деформированной поверхности

$$\overline{r}^*=\overline{r}+t\overline{y}=(x,y,u)+t(\xi,\eta,\zeta)=(x+t\xi,y+t\eta,u+t\zeta).$$

По условию теоремы радиус-вектор $\overline{r}^*$ осуществляет деформацию типа $d_t(u)$, поэтому он имеет вид $\overline{r}^*=(x,y,u+t\zeta)$, где $u+t\zeta$ является действительной частью некоторой аналитической функции $w^*=w+t\omega$, т. е. $u+t\zeta=u^*=\mathrm{Re}\,w^*=\mathrm{Re}\,(w+t\omega)$ $\forall t$. Отсюда следует, что $\zeta=\mathrm{Re}\,\omega(z)$. Кроме того, $t\xi=0$, $t\eta=0$, откуда получаем $\xi=0$, $\eta=0$.

Наоборот, пусть поле $\overline{y}=(0,0,\zeta(x,y))$ и ζ — действительная часть некоторой аналитической в G функции. Тогда вектор $\overline{r}^*=(x,y,u+t\zeta)=(x,y,u^*(x,y,t))$. Таким образом, деформированная поверхность является u^*-поверхностью.

Теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Б. м. деформация* (8) (*с параметром ε*) *происходит в классе v-поверхностей тогда и только тогда, когда поле смещения этой деформации имеет вид $\widetilde{\overline{y}}=(0,0,\widetilde{\zeta}(x,y))$, где $\widetilde{\zeta}$ является мнимой частью некоторой аналитической в области G функции.*

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 1.

Отметим, что в теоремах 1, 2 функции ζ и $\widetilde{\zeta}$, вообще говоря, не принадлежат одной и той же аналитической функции.

2. Понятие б. м. деформации типа $d_t(u\cup v)$.

Определение 3. *Параметры деформации* (7), (8) *двух поверхностей назовем согласованными, если они являются эквивалентными б. м. величинами.*

Не ограничивая общности, согласованные параметры деформации пары ГСП будем считать равными: $\varepsilon=t$. В этом случае определенные над областью G деформации зависят от одного и того же параметра t, они имеют представления (7) и (10):

$$\overline{\rho}^*(x,y,t)=\overline{\rho}(x,y)+t\widetilde{\overline{y}}(x,y). \tag{10}$$

При этом параметр t можно интерпретировать как время.

Пусть $w=u+iv$ — аналитическая функция.

Определение 4. *Будем говорить, что б. м. деформация u-поверхности, $u = \operatorname{Re} w(z)$, происходит одновременно с б. м. деформацией v-поверхности, $v = \operatorname{Im} w(z)$, если:* 1) *параметр деформации u-поверхности согласован с параметром деформации v-поверхности;* 2) *обе деформации рассматриваются в один и тот же момент времени t.*

Определение 5. *Будем говорить, что при одновременных б. м. деформациях пары u- и v-поверхностей сохраняется гармоническая сопряженность (или, что то же самое, ГС стационарна), если для каждого значения параметра t, одного и того же для u- и v-поверхностей, деформированные поверхности также образуют над G пару ГСП (с точностью б. м. 1-го порядка).*

Б. м. деформации u- и v-поверхностей при ограничениях, оговоренных в определении 5, назовем *б. м. деформациями типа $d_t(u \cup v)$.*

Теорема 3. *Пусть б. м. деформации пары u- и v-поверхностей, ассоциированных с аналитической в области G функцией $w = u + iv$, происходят одновременно. Для того чтобы при этих деформациях сохранялась ГС, необходимо и достаточно, чтобы их поля смещений имели вид*

$$\overline{y} = (0, 0, \zeta(x, y)), \quad \widetilde{\overline{y}} = (0, 0, \widetilde{\zeta}(x, y)), \tag{11}$$

где функции $\zeta(x, y)$ и $\widetilde{\zeta}(x, y)$ соответственно являются действительной и мнимой частью некоторой аналитической в G функции.

Доказательство. *Необходимость.* Зададим в области G аналитическую функцию (3). Предположим, что на u- и v-поверхностях одновременно происходят б. м. деформации, при которых стационарна ГС. Докажем формулы (11). Для этого введем комплексный радиус-вектор некоторой виртуальной поверхности

$$\overline{R}(x, y) = \overline{r}(x, y) + i\overline{\rho}(x, y),$$

представленный через радиусы-векторы заданных ГСП (5), (6), и найдем его декартовы координаты:

$$\overline{R}(x, y) = (x, y, u) + i(x, y, v) = (x(1 + i), y(1 + i), u + iv) = (x(1 + i), y(1 + i), w). \tag{12}$$

Здесь абсцисса и ордината содержат множитель $(1 + i)$, а аппликата является аналитической функцией $w(z)$. Легко видеть, что полученная для вектор-функции $\overline{R}(x, y)$ координатная структура (12) является характерной для произвольной пары ГСП.

Рассмотрим б. м. деформацию поверхности $\overline{R} = \overline{R}(x, y)$:

$$\overline{R}^*(x, y, t) = \overline{r}^* + i\overline{\rho}^* = \overline{R}(x, y) + i\overline{Y}(x, y)$$

с комплексным полем смещений $\overline{Y} = \overline{y} + i\widetilde{\overline{y}}$, где $\overline{y}$ и $\widetilde{\overline{y}}$ — произвольные векторные поля (9). Декартовы координаты вектора $\overline{R}^*$ таковы:

$$\overline{R}^* = \overline{r} + t\overline{y} + i(\overline{\rho} + t\widetilde{\overline{y}}) = \overline{r} + i\overline{\rho} + t(\overline{y} + i\widetilde{\overline{y}}) =$$

$$= (x(1 + i), y(1 + i), w) + t\left(\xi + i\widetilde{\xi}, \eta + i\widetilde{\eta}, \zeta + i\widetilde{\zeta}\right) =$$

$$= \left(x(1 + i) + t(\xi + i\widetilde{\xi}), y(1 + i) + t(\eta + i\widetilde{\eta}), w + t(\zeta + i\widetilde{\zeta})\right). \tag{13}$$

Очевидно, координатное представление $\overline{R}^*$ в (13) реализует требование одновременности произвольных б. м. деформаций поверхностей (5), (6) над областью G.

Потребуем теперь, чтобы в процессе деформации выполнялось условие стационарности ГС. Для этого достаточно, чтобы координатная структура функции $\overline{R}^*$ в (13) (после деформации) была аналогичной координатной структуре (12) функции $\overline{R}$ (до деформации). Из сравнения абсцисс и ординат в (12), (13) заключаем, что по необходимости $\xi + i\tilde{\xi} = 0$, $\eta + i\tilde{\eta} = 0$, откуда $\xi = \tilde{\xi} = \eta = \tilde{\eta} = 0$ и из (9) получаем равенство (11). Поскольку аппликата вектор-функции $\overline{R}^*$ к тому же является аналитической функцией по z, то

$$w^*(z,t) = w(z) + t\left(\zeta + i\tilde{\zeta}\right) = w(z) + t\omega(z),$$

где $\omega(z)$ — также аналитическая в G функция, причем $\zeta = \operatorname{Re}\omega$, $\tilde{\zeta} = \operatorname{Im}\omega$.

Достаточность. Пусть векторы смещения $\overline{y}$, $\tilde{\overline{y}}$ одновременных деформаций пары ГСП заданы формулами (11), где $\zeta = \operatorname{Re}\omega$, $\tilde{\zeta} = \operatorname{Im}\omega$, $\omega(z)$ — некоторая аналитическая в G функция. Докажем, что б. м. деформация сохраняет ГС.

В самом деле, положим в (9) $\xi = \tilde{\xi} = \eta = \tilde{\eta} = 0$, тогда формула (13) примет вид

$$\overline{R}^* = \left(x(1+i), y(1+i), w + t\left(\zeta + i\tilde{\zeta}\right)\right) = \left(x(1+i), y(1+i), w^*(z,t)\right),$$

откуда следует, что при каждом допустимом значении t аппликата w^* является аналитической по z функцией.

Выделим действительную и мнимую части функции $\overline{R}^*$:

$$\overline{R}^* = (x, y, u + t\zeta) + i\left(x, y, v + t\tilde{\zeta}\right) = \overline{r}^* + i\overline{\rho}^*,$$

$$\overline{r}^* = (x, y, u^*(x,y,t)), \quad \overline{\rho}^* = (x, y, v^*(x,y,t)).$$

Очевидно, после деформации получили пару u^*- и v^*-поверхностей с уравнениями

$$Z = u(x,y) + t\zeta(x,y), \quad Z = v(x,y) + t\tilde{\zeta}(x,y). \tag{14}$$

Таким образом, деформированные поверхности с точностью 1-го порядка являются ГСП над G, ассоциированными с аналитической функцией $w^* = u^* + iv^*$, где $u^* = u + t\zeta = \operatorname{Re} w^*$, $v^* = v + t\tilde{\zeta} = \operatorname{Im} w^*$.

Теорема 3 доказана.

Отметим, что в теореме 3 параметры деформаций u- и v-поверхностей предполагаются согласованными, тогда как в теоремах 1, 2 это требование отсутствует. Отсюда следует, что объединение какой-либо деформации с параметром t из класса u-поверхностей и какой-либо деформации с параметром ε из класса v-поверхностей в общем случае не является б. м. деформацией со стационарной ГС:

$$d_t(u) \cup d_\varepsilon(v) \neq d_t(u \cup v).$$

Однако при одновременно происходящих деформациях пары u- и v-поверхностей имеет место следующая теорема.

Теорема 4. *Пусть $u = \operatorname{Re} w$, $v = \operatorname{Im} w$, где w — аналитическая функция в G, и бесконечно малая деформация u-поверхности происходит одновременно с б. м. деформацией v-поверхности. Тогда следующие утверждения являются эквивалентными:*

1) *бесконечно малые деформации пары u- и v-поверхностей сохраняют ГС,* $(d_t(u \cup v))$;

2) *u-поверхность деформируется в классе u-поверхностей,* $(d_t(u))$, *и v-поверхность — в классе v-поверхностей,* $(d_t(v))$;

3) *поля смещений б. м. деформаций u- и v-поверхностей соответственно имеют координаты*

$$\overline{y} = (0, 0, \zeta), \quad \overline{\overline{y}} = \left(0, 0, \tilde{\zeta}\right),$$

где ζ *и* $\tilde{\zeta}$ *— действительная и мнимая части некоторой аналитической в* G *функции.*

Утверждения этой теоремы чрезвычайно наглядны в схематическом варианте:

$$d_t(u \cup v) \Longleftrightarrow d_t(u) \cup d_t(v) \Longleftrightarrow y = (0, 0, \zeta), \quad \tilde{y} = \left(0, 0, \tilde{\zeta}\right).$$

Доказательство легко следует из сопоставления теорем 1–3.

Специфика функций ζ и $\tilde{\zeta}$ проявится вместе с привлечением специальных видов деформаций. Далее рассмотрим два вида б. м. деформаций — ареальную и изгибание, сначала в общей постановке.

3. Об А-деформации поверхности. Пусть $\overline{r} = \overline{r}\left(x^1, x^2\right)$, $x^1 = x$, $x^2 = y$, — уравнение поверхности $F \in C^3$ E^3-пространства. Рассмотрим б. м. деформацию F^* 1-го порядка:

$$\overline{r}^*\left(x^1, x^2, t\right) = \overline{r}\left(x^1, x^2\right) + t\overline{y}\left(x^1, x^2\right). \tag{15}$$

Геометрические характеристики деформированной поверхности F^*, в отличие от таковых для поверхности F, будем отмечать символом * Предполагаем, что эти величины можно разлагать в ряд по степеням $t \to 0$. Коэффициент при t в таком разложении называется *вариацией* геометрической величины исходной поверхности. Вариации будем обозначать через δ. Например, представим разложение элемента площади $d\sigma^*$ поверхности F^* по степеням t:

$$d\sigma^* = d\sigma + t\delta d\sigma + o(t^2),$$

где $d\sigma$ — элемент площади поверхности F, через $o(t^2)$ обозначены величины 2-го порядка и выше относительно t, которыми будем пренебрегать.

Б. м. деформация (15) поверхности F называется *ареальной (А-деформацией)*, если элемент площади поверхности сохраняется (стационарен) с точностью 1-го порядка относительно параметра t : $d\sigma^* = d\sigma + o(t^2)$. Для того чтобы б. м. деформация была ареальной, необходимо и достаточно, чтобы вариация элемента площади

$$\delta d\sigma = 0. \tag{16}$$

Следующая лемма содержит некоторую необходимую для дальнейшего информацию [14].

Лемма 1. *Векторное поле* $\overline{y}$ *является деформирующим полем А-деформации произвольной поверхности* $F \in C^3$ *тогда и только тогда, когда оно удовлетворяет системе уравнений*

$$\begin{gathered} \overline{r}_i\overline{y}_j + \overline{r}_j\overline{y}_i = 2\varepsilon_{ij}, \\ \varepsilon_{ij}g^{ij} = 0, \end{gathered} \tag{17}$$

где через $2\varepsilon_{ij} = \delta g_{ij}$ *обозначены вариации коэффициентов* $g_{ij} = \overline{r}_i\overline{r}_j$ *первой квадратичной формы исходной поверхности,* $\overline{r}_i = \dfrac{\partial \overline{r}}{\partial x^i}$, $g_{i\alpha}g^{\alpha j} = \delta_i^j$, δ_i^j *— символы Кронекера. Все индексы принимают значения* 1, 2.

Доказательство. Найдем разложения следующих величин поверхности F^* в ряды по степеням t :

$$g^*_{ij} = \overline{r}^*_i \overline{r}^*_j = (\overline{r}_i + t\overline{y}_i)\left(\overline{r}_j + t\overline{y}_j\right) = \overline{r}_i\overline{r}_j + t\left(\overline{r}_i\overline{y}_j + \overline{r}_j\overline{y}_i\right) + o(t^2) = g_{ij} + t2\varepsilon_{ij} + o(t^2),$$

$$ds^{*2} = g^*_{ij}dx^i dx^j = g_{ij}dx^i dx^j + t2\varepsilon_{ij}dx^i dx^j + o(t^2) = ds^2 + t\left(\delta ds^2\right) + o(t^2),$$

$$g^* = g^*_{11}g^*_{22} - g^{*2}_{12} = g_{11}g_{22} - g^2_{12} + 2t(\varepsilon_{11}g_{22} - 2\varepsilon_{12}g_{12} + \varepsilon_{22}g_{11}) + o(t^2) =$$
$$= g + 2tg\varepsilon_{\alpha\beta}g^{\alpha\beta} + o(t^2), \tag{18}$$
$$\sqrt{g^*} = \sqrt{g} + t\sqrt{g}\varepsilon_{\alpha\beta}g^{\alpha\beta} + o(t^2),$$
$$d\sigma^* = \sqrt{g^*}dx^1dx^2 = d\sigma + t\varepsilon_{\alpha\beta}g^{\alpha\beta}d\sigma + o(t^2).$$

Отсюда следует, что вариация элемента площади $\delta d\sigma = \varepsilon_{\alpha\beta}g^{\alpha\beta}d\sigma$, и равенство (16) имеет место тогда и только тогда, когда выполняется второе из равенств (17).

Из (18_1) выразим вариации для метрического тензора g_{ij} через частные производные поля смещения, а именно $2\varepsilon_{ij} = \overline{r}_i\overline{y}_j + \overline{r}_j\overline{y}_i$.

Лемма 1 доказана.

4. Математическая модель А-деформации u-поверхности в классе u-поверхностей. Сначала составим основную систему уравнений для общей А-деформации u-поверхности.

Теорема 5. *Векторное поле $\overline{y} = (\xi, \eta, \zeta)$ является полем смещения общей А-деформации u-поверхности тогда и только тогда, когда его декартовы координаты удовлетворяют системе уравнений*

$$\begin{gathered} \xi_x + u_x\zeta_x = \varepsilon_{11}, \\ \xi_y + \eta_x + u_x\zeta_y + u_y\zeta_x = 2\varepsilon_{12}, \\ \eta_y + u_x\zeta_y = \varepsilon_{22}, \\ \varepsilon_{11}\left(1 + u^2_y\right) - 2\varepsilon_{12}u_xu_y + \varepsilon_{22}\left(1 + u^2_x\right) = 0. \end{gathered} \tag{19}$$

Доказательство. В качестве поверхности F возьмем u-поверхность (5) и с учетом (9) найдем следующие величины:

$$\overline{r}_1 = (1, 0, u_x), \qquad \overline{r}_2 = (0, 1, u_y), \qquad u_x \equiv \frac{\partial u}{\partial x},$$

$$g_{11} = \overline{r}^2_1 = 1 + u^2_x, \qquad g_{12} = \overline{r}_1\overline{r}_2 = u_xu_y, \qquad g_{22} = \overline{r}^2_2 = 1 + u^2_y,$$

$$g = g_{11}g_{22} - g^2_{12} = 1 + u^2_x + u^2_y, \qquad g^{11} = \frac{g_{22}}{g} = \frac{1 + u^2_x}{g}, \tag{20}$$

$$g^{12} = -\frac{g_{12}}{g} = -\frac{u_xu_y}{g}, \qquad g^{22} = \frac{g_{11}}{g} = \frac{1 + u^2_y}{g},$$

$$\overline{y}_1 = \frac{\partial \overline{y}}{\partial x} = (\xi_x; \eta_x; \zeta_x), \qquad \overline{y}_2 = \frac{\partial \overline{y}}{\partial y} = (\xi_y; \eta_y; \zeta_y).$$

Подставив соответствующие величины в (17), получим искомую систему уравнений (19).

Теорема 5 доказана.

В математических моделях ареальной деформации особо выделяется случай $\varepsilon_{ij} = 0$. Этим условием характеризуется б. м. изгибание. Б. м. изгибание — такая б. м. деформация, при которой, как следует из (18_2), линейный элемент ds^2 сохраняется в любом направлении: $\delta ds^2 \equiv \equiv 0$. В этом случае система уравнений (19) А-деформаций для u-поверхности сводится к трем уравнениям относительно трех искомых функций:

$$\xi_x + u_x\zeta_x = 0, \qquad \xi_y + \eta_x + u_x\zeta_y + u_y\zeta_x = 0, \quad \eta_y + u_y\zeta_y = 0. \tag{21}$$

Систему уравнений типа (21) использовал И. Н. Векуа при доказательстве теоремы об изгибаниях скольжения [19, с. 315]. Ее использовал также А. В. Погорелов в IV разделе монографии [20], где доказал ряд теорем для выпуклых поверхностей.

Отметим, что ГСП не являются выпуклыми поверхностями. Наоборот, все они имеют отрицательную гауссову кривизну [1] (плоскости мы не рассматриваем).

При исследованиях А-деформаций бесконечно малое изгибание иногда исключают. Для определенности далее будем называть его тривиальной А-деформацией.

Теорема 6. *Для того чтобы бесконечно малая деформация u-поверхности в классе u-поверхностей была ареальной, необходимо и достаточно, чтобы координата ζ поля смещения $\overline{y} = (0, 0, \zeta)$ была решением системы дифференциальных уравнений*

$$\zeta_x = \frac{\varepsilon_{11}}{u_x}, \qquad \zeta_y = -\frac{\varepsilon_{11}}{u_y}, \tag{22}$$

$$\varepsilon_{22} = -\varepsilon_{11}, \qquad 2\varepsilon_{12} = \frac{u_y^2 - u_x^2}{u_x u_y}\varepsilon_{11}. \tag{23}$$

Доказательство. *Необходимость.* Предположим, что u-поверхность претерпевает б. м. деформацию в классе u-поверхностей с полем смещения $\overline{y} = (0, 0, \zeta)$, и при этом б. м. деформация является ареальной. Докажем, что тогда имеют место уравнения (22), (23).

Действительно, при общей А-деформации u-поверхности выполняются уравнения (19). Полагая в них $\xi = \eta = 0$, получаем

$$\begin{gathered} u_x\zeta_x = \varepsilon_{11}, \qquad u_x\zeta_y + u_y\zeta_x = 2\varepsilon_{12}, \qquad u_y\zeta_y = \varepsilon_{22}, \\ \varepsilon_{11}\left(1 + u_y^2\right) - 2\varepsilon_{12}u_x u_y + \varepsilon_{22}\left(1 + u_x^2\right) = 0. \end{gathered} \tag{24}$$

Подставив выражения для компонент тензора ε_{ij} из первых трех уравнений в четвертое, получим соотношение

$$u_x\zeta_x + u_y\zeta_y = 0.$$

Заметим, что оно представляет собой признак А-деформации для u-поверхности, выраженный через функцию $\zeta(x, y)$. Соотношение (23_1) получим при сложении первого и третьего уравнений из (24). Для получения (23_2) подставим ζ_x и ζ_y из (24_1), (24_3) в (24_2).

Достаточность. Пусть компонента ζ поля смещения $\overline{y} = (0, 0, \zeta)$ при деформации в классе u-поверхностей является решением системы уравнений (22), причем величины ε_{11}, ε_{12}, ε_{22} связаны равенствами (23). Докажем, что б. м. деформация является ареальной.

Подставим в систему уравнений общей А-деформации (19) значения $\xi = \eta = 0$ и ζ_x, ζ_y из (22). Непосредственной проверкой убедимся, что с учетом (23) система уравнений (19) обращается в тождество. Таким образом, б. м. деформация является ареальной.

Теорема 6 доказана.

Очевидно, система уравнений (22), (23) служит математической моделью задачи, обозначенной в названии п. 4.

5. Решение системы уравнений (22) и его геометрическая интерпретация.

Лемма 2. *Если действительная часть аналитической функции $w = u + iv$ является решением уравнения $u_{xy} = 0$, то*

$$u(x, y) = c_1 \left(x^2 - y^2\right) + c_2 x + c_3 y + c_4, \tag{25}$$

$$v(x, y) = c_1 2xy - c_3 x + c_2 y + c_5, \tag{26}$$

где c_i, $i = \overline{1, 5}$, — произвольные постоянные.

Доказательство. Общим решением уравнения $u_{xy} = 0$, $u_{xy} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$, является $u(x, y) = p(x) + q(y)$, где $p(x)$, $q(y)$ — произвольные функции одной переменной. Функции $u(x, y)$ геометрически соответствует поверхность переноса [21] (§ 32). В [22] проведена их классификация. Составим уравнение такой поверхности в рассматриваемом случае.

В силу гармоничности u имеем $p''(x) + q''(y) = 0$. Это уравнение на плоскости представляет некоторую кривую. В области G оно удовлетворяется тогда и только тогда, когда $p''(x) = 2c_1$, $q''(y) = -2c_1$, где c_1 — произвольная постоянная. Отсюда с помощью интегрирования получаем

$$p(x) = c_1 x^2 + c_2 x + \tilde{c_4}, \qquad q(y) = -c_1 y^2 + c_3 y + \tilde{c_5},$$

вследствие чего приходим к (25).

Мнимую часть функции w находим из уравнений Коши – Римана

$$u_x = v_y, \qquad u_y = -v_x, \tag{27}$$

т. е. $v_x = 2c_1 y - c_3$, $v_y = 2c_1 x + c_2$. Поскольку $v_{xy} = v_{yx}$ и $dv = v_x dx + v_y dy$, то

$$v(x, y) = \int (2c_1 y - c_3) dx + (2c_1 x + c_2) dy = 2c_1 xy - c_3 x + c_2 y + c_5,$$

что и требовалось доказать.

Лемма 2 доказана.

Функции (25), (26) составляют аналитическую функцию $w(z) = c_1 z^2 + (c_2 + ic_3) z + c_4 + ic_5$. Легко видеть, что связанные с ней поверхности являются гиперболическими параболоидами. Путем параллельного переноса системы координат Oxy и растяжения вдоль оси Oz при $c_1 \neq 0$ легко добиться, чтобы постоянные c_i получили значения $c_1 = 1$, $c_2 = c_3 = c_4 = c_5 = 0$. Тогда аналитическая функция $w(z) = z^2$, а ее ГСП имеют простейший вид $Z = x^2 - y^2$ и $Z = 2xy$.

Теорема 7. *Любая u-поверхность ($u = \operatorname{Re} w$), определенная над областью G, допускает над ней нетривиальные A-деформации в классе u-поверхностей. При этом деформирующее поле представляется явно:*

$$\overline{y} = \left(0, 0, -\int \Phi(v(x, y)) dv + C_1\right), \tag{28}$$

где $\Phi(v)$ — произвольная непрерывно дифференцируемая в области G функция от $v(x, y) = \operatorname{Im} w(z)$.

Доказательство. Система (22) – это система двух дифференциальных уравнений относительно одной неизвестной функции $\zeta(x,y)$. Ее решение существует тогда и только тогда, когда выполняется условие интегрируемости $\zeta_{xy} = \zeta_{yx}$, которое в развернутом виде представляет собой линейное неоднородное уравнение с частными производными 1-го порядка относительно функции $\varepsilon_{11}(x,y)$:

$$u_x^2 u_y \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial x} + u_y^2 u_x \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial y} = \left(u_x^2 + u_y^2\right) u_{xy} \varepsilon_{11}. \tag{29}$$

При решении этого уравнения возникают 2 случая: $u_{xy} \neq 0$ и $u_{xy} = 0$.

Предположим сначала, что $u_{xy} \neq 0$. С целью получения решения уравнения (29) составим систему дифференциальных уравнений [23] (гл. 5, § 2), определяющую характеристики уравнения (29):

$$\frac{dx}{u_x^2 u_y} = \frac{dy}{u_x u_y^2} = \frac{d\varepsilon_{11}}{\left(u_x^2 + u_y^2\right) u_{xy} \varepsilon_{11}}. \tag{30}$$

Упростим первое дифференциальное уравнение из (30) и найдем его первый интеграл:

$$\frac{dx}{u_x} = \frac{dy}{u_y} \Longleftrightarrow u_y dx - u_x dy = 0 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow v_x dx + v_y dy = 0 \Longleftrightarrow dv = 0 \Longleftrightarrow v(x,y) = \widetilde{C_1}, \quad v = \operatorname{Im} w(z). \tag{31}$$

Здесь мы использовали систему уравнений Коши–Римана (27). Итак, первый интеграл уравнения (31) равен $\psi_1(x,y) \equiv v(x,y) = \widetilde{C_1}$.

Найдем теперь первый интеграл дифференциального уравнения

$$\frac{dx}{u_x^2 u_y} = \frac{d\varepsilon_{11}}{\left(u_x^2 + u_y^2\right) u_{xy} \varepsilon_{11}} \Longleftrightarrow \frac{d\varepsilon_{11}}{\varepsilon_{11}} = \frac{u_x^2 u_{xy} dx + u_y^2 u_{xy} dx}{u_x^2 u_y}. \tag{32}$$

С учетом (31) и тождества $u_{xx} + u_{yy} = 0$ преобразуем его правую часть:

$$\frac{u_{xy} dx}{u_y} + \frac{u_y u_{xy}}{u_x} \frac{dx}{u_x} = \frac{u_{xy} dx}{u_y} + \frac{u_y u_{xy}}{u_x} \frac{dy}{u_y} + \frac{(u_{xx} + u_{yy}) dx}{u_x} =$$

$$= \frac{u_{xx} dx + u_{xy} dy}{u_x} + \frac{u_{xy} dx + u_{yy} dy}{u_y} =$$

$$= d \ln |u_x| + d \ln |u_y| \Rightarrow \ln |\varepsilon_{11}| = \ln |\widetilde{C_2} u_x u_y| \Rightarrow \varepsilon_{11} = \widetilde{C_2} u_x u_y.$$

Отсюда следует, что первый интеграл уравнения (32) имеет вид $\psi_2(x,y,\varepsilon_{11}) \equiv \dfrac{\varepsilon_{11}}{u_x u_y} = \widetilde{C_2}$.

Общее решение уравнения (29) можно представить в неявном виде через два независимых первых интеграла $\widetilde{F}\left(\psi_1(x,y), \psi_2(x,y,\varepsilon_{11})\right) = 0$, где $\widetilde{F}$ – любая функция, имеющая в области G непрерывные производные по ψ_1, ψ_2. Поскольку первый интеграл ψ_1 не зависит от неизвестной функции ε_{11}, то полученное общее решение можно представить явно через произвольную непрерывно дифференцируемую функцию $\Phi(v(x,y))$ от v :

$$\varepsilon_{11} = u_x u_y \Phi(v(x,y)). \tag{33}$$

Это выражение ε_{11} является общим решением уравнения (29) в окончательном виде. Если теперь его подставим в систему уравнений (22), то сможем найти и ее решение.

Действительно, с учетом уравнений (27) находим

$$\begin{cases} \zeta_x = u_y \Phi(v), \\ \zeta_y = -u_x \Phi(v), \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \zeta_x = -v_x \Phi(v), \\ \zeta_y = -v_y \Phi(v), \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d\zeta = \zeta_x dx + \zeta_y dy \Rightarrow \zeta(x, y) = \int d\zeta + C_1 =$$

$$= -\int \Phi(v)(v_x dx + v_y dy) + C_1 = -\int \Phi(v) dv + C_1.$$

Значит, общее решение системы уравнений (22) имеет вид

$$\zeta(x, y) = -\int \Phi(v(x, y)) dv + C_1. \tag{34}$$

Через найденную функцию ζ теперь легко выразить в виде (28) и поле смещений А-деформации.

Наконец, покажем, что полученные решения (33), (34) определяют нетривиальные А-деформации u-поверхности в классе u-поверхностей. Напомним, что при тривиальной А-деформации $\varepsilon_{ij} \equiv 0$ и поле А-деформации является полем изгибания. Однако из (33) следует, что компонента ε_{11} тензора ε_{ij} вариаций коэффициентов первой квадратичной формы в общем случае отлична от нуля.

Таким образом, при условии $u_{xy} \neq 0$ теорема 7 доказана.

Рассмотрим теперь случай $u_{xy} = 0$. Тогда дифференциальное уравнение (29) станет однородным

$$u_x \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial x} + u_y \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial y} = 0, \tag{35}$$

а соответствующее уравнение характеристик совпадает с дифференциальным уравнением (31). Его первый интеграл был найден ранее и имеет вид $v(x, y) = C_1$. Что касается общего решения дифференциального уравнения (35), то оно имеет вид

$$\varepsilon_{11} = F(v(x, y)), \tag{36}$$

где функция $F(v)$ является произвольной непрерывно дифференцируемой относительно v в области G.

Покажем еще, что решение (36), полученное при условии $u_{xy} = 0$, включено в решение вида (33). Действительно, в силу леммы 2 и выражения (26) для функции $v(x, y)$ в случае $u_{xy} = 0$ произведение

$$-u_x u_y = (2c_1 y - c_3)(2c_1 x + c_2) = 2c_1 v(x, y) - c_2 c_3$$

является функцией от v. Значит, решение ε_{11} из (33) является общим для какой-либо u-поверхности.

Теорема 7 полностью доказана.

6. А-деформации в классе v-поверхностей.

Теорема 8. *Для того чтобы бесконечно малая деформация v-поверхности в классе v-поверхностей была ареальной, необходимо и достаточно, чтобы координата $\widetilde{\zeta}$ поля смещения $\widetilde{\overline{y}} = \left(0, 0, \widetilde{\zeta}\right)$ была решением системы дифференциальных уравнений*

$$\widetilde{\zeta}_x = \frac{\widetilde{\varepsilon}_{11}}{v_x}, \qquad \widetilde{\zeta}_y = -\frac{\widetilde{\varepsilon}_{11}}{v_y}, \tag{37}$$

$$\widetilde{\varepsilon}_{22} = -\widetilde{\varepsilon}_{11}, \qquad 2\widetilde{\varepsilon}_{12} = \frac{v_y^2 - v_x^2}{v_x v_y}\,\widetilde{\varepsilon}_{11}, \tag{38}$$

где $2\widetilde{\varepsilon}_{ij}$ — вариации коэффициентов первой квадратичной формы v-поверхности.

Доказательство для v-поверхности вполне аналогично доказательству теоремы 6 для u-поверхности. Все соотношения для v-поверхности можно получить из соответствующих соотношений, записанных для u-поверхности, путем замены $\zeta \to \widetilde{\zeta}$, $\varepsilon_{ij} \to \widetilde{\varepsilon}_{ij}$, $u_x \to v_x$, $u_y \to v_y$.

Теорема 9. *Любая v-поверхность, $v = \operatorname{Im} w(z)$, определенная над областью G, допускает нетривиальные А-деформации в классе v-поверхностей. Поле деформаций при этом явно выражается через произвольную непрерывно дифференцируемую функцию Ψ от $u(x,y) = \operatorname{Re} w(z)$:*

$$\widetilde{\overline{y}} = \left(0, 0, \int \Psi(u(x,y))du + C_2\right). \tag{39}$$

Доказательство. Поскольку система уравнений (37) аналогична (22), то ее исследование и решение аналогичны таковым в доказательстве теоремы 7 для u-поверхности.

Окончательно получаем следующие общие решения соответствующих систем дифференциальных уравнений для v-поверхности:

$$\widetilde{\varepsilon}_{11} = v_x v_y \Psi(u(x,y)), \tag{40}$$

$$\widetilde{\zeta}(x,y) = \int \Psi(u(x,y))du + C_2. \tag{41}$$

Теорема 9 доказана.

Отметим, что при исследовании А-деформаций в классах u- и v-поверхностей (теоремы 6–9), в силу независимости постановок этих задач, согласование параметров деформаций двух поверхностей не требуется. Но в следующих теоремах 10, 11 предположение согласованности параметров и одновременности деформаций u- и v-поверхностей обязательно.

7. Одновременные А-деформации со стационарной ГС пары u- и v-поверхностей: математическая модель задачи и ее решение.

Теорема 10. *Пусть бесконечно малые деформации u- и v-поверхностей, $v = \operatorname{Re} w$, $v = \operatorname{Im} w$, происходят одновременно и сохраняют ГС. Для того чтобы эти б. м. деформации были ареальными и на u-, и на v-поверхности, необходимо и достаточно, чтобы имели место системы уравнений* (22), (23), (37), (38).

Доказательство. *Необходимость.* Пусть для деформаций u- и v-поверхностей выполнены условия первого предложения теоремы 10. Тогда в силу теоремы 4 в случае стационарности ГС u-поверхность деформируется в классе u-поверхностей, а v-поверхность — в классе v-поверхностей. Потребуем, чтобы на обеих поверхностях эти деформации были ареальными. Но по теоремам 6, 8 при А-деформациях этих поверхностей имеют место все четыре системы уравнений, указанные в теореме 10.

Достаточность. Если при б. м. деформациях пары ГСП выполняются условия первого предложения теоремы 10, то, как мы убедились при доказательстве первой части теоремы, рассматриваемые ГСП деформируются в классах u- и v-поверхностей соответственно. Если же, кроме того, имеют место системы уравнений (22), (23), (37), (38), то, согласно теоремам 6, 8, такие деформации будут ареальными и на u-, и на v-поверхности.

Теорема 10 доказана.

Система уравнений (22), (23), (37), (38) в своей совокупности представляет математическую модель одновременных А-деформаций со стационарной ГС пары u- и v-поверхностей.

Теорема 11. *Две u- и v-поверхности, ассоциированные с аналитической в области G функцией $w = u + iv$, одновременно допускают нетривиальные А-деформации, при которых остается стационарной гармоническая сопряженность. Поля смещений представляются в явном виде через функции $v(x, y)$, $u(x, y)$ соответственно:*

$$\overline{y} = (0, 0, -cv(x, y) + c_1) \quad \widetilde{\overline{y}}(x, y) = (0, 0, cu(x, y) + c_2), \tag{42}$$

где c, c_1, c_2 — произвольные постоянные.

Доказательство. Докажем существование А-деформаций, одновременных, нетривиальных и сохраняющих ГС, пары u- и v-поверхностей. Для этого на первом этапе найдем общее решение систем уравнений (22), (37). При этом учтем, что в случае деформаций, происходящих одновременно на u- и v-поверхностях и сохраняющих ГС, функции $\zeta(x, y)$ и $\widetilde{\zeta}(x, y)$ будут зависимыми, так как они являются действительной и мнимой частями для некоторой (одной и той же) аналитической в G функции $\omega(z) = \zeta + i\widetilde{\zeta}$ (теорема 3). Значит, они подчиняются условиям Коши – Римана вида

$$\zeta_x = \widetilde{\zeta}_y, \qquad \zeta_y = -\widetilde{\zeta}_x.$$

Найдем частные производные функций $\zeta(x, y)$, $\widetilde{\zeta}(x, y)$ из их выражений (34), (41):

$$\zeta_x = \zeta_v v_x = -\Phi(v)v_x, \qquad \zeta_y = \zeta_v v_y = -\Phi(v)v_y,$$

$$\widetilde{\zeta}_x = \widetilde{\zeta}_u u_x = \Psi(u)u_x, \qquad \widetilde{\zeta}_y = \widetilde{\zeta}_u u_y = \Psi(u)u_y.$$

В силу уравнений Коши – Римана получаем равенства

$$-\Phi(v)v_x = \Psi(u)u_y = -\Psi(u)v_x,$$

$$-\Phi(v)v_y = -\Psi(u)u_x = -\Psi(u)v_y.$$

Отсюда имеем $\Phi(v(x, y)) = \Psi(u(x, y))$. Это уравнение при заданных функциях $\Phi(v)$ и $\Psi(u)$ представляет собой некоторую кривую в плоскости Oxy. Например, для функции $w = z^2 = (x^2 - y^2) + i2xy$ уравнение $v(x, y) = u(x, y)$ геометрически изображает две пересекающиеся в точке $(0, 0)$ прямые.

Таким образом, в общем виде условие $\Phi(v) = \Psi(u)$ в области G невыполнимо. Однако оно выполняется тождественно, если положить $\Phi = c$, $\Psi = c$, где c — произвольная постоянная. Тогда из (34) и (41) получим общее решение системы уравнений (22), (37) в окончательном виде

$$\zeta(x, y) = -cv(x, y) + c_1, \quad \widetilde{\zeta}(x, y) = cu(x, y) + c_2. \tag{43}$$

С учетом решения (43) легко найдем и поля смещений (42), которые определяют одновременные А-деформации u- и v-поверхностей, сохраняющие ГС. Здесь постоянные c_1, c_2 описывают б. м. движение u- и v-поверхностей в пространстве (параллельный перенос), а $c \neq 0$ свидетельствует о растяжении векторов $\overline{y}$ и $\widetilde{\overline{y}}$ вдоль оси OZ.

Осталось показать, что поля смещений (42) определяют нетривиальные А-деформации. Действительно, для u-поверхности в силу (33) и (23) имеем

$$\varepsilon_{11} = cu_x u_y, \qquad 2\varepsilon_{12} = c\left(u_y^2 - u_x^2\right), \qquad \varepsilon_{22} = -cu_x u_y, \tag{44}$$

откуда при $c \neq 0$ следует, что $\varepsilon_{ij} \neq 0$ в области G. Аналогично для v-поверхности, учитывая (40) и (38), находим

$$\widetilde{\varepsilon}_{11} = cv_x v_y, \qquad 2\widetilde{\varepsilon}_{12} = c\left(v_y^2 - v_x^2\right), \qquad \widetilde{\varepsilon}_{22} = -cv_x v_y. \tag{45}$$

Теорема 11 доказана.

8. О свойствах линий $u(x,y) = c_1$, $v(x,y) = c_2$ ГСП. Предварительно заметим, что каждой точке с декартовыми координатами $(x,y) \in G$ соответствует точка с внутренними координатами (x,y) на u-поверхности и еще одна точка с теми же внутренними координатами на v-поверхности. Поэтому уравнение вида $\psi(x,y) = 0$, $x, y \in G$, определяет некоторую линию в области G плоскости Oxy, а также соответствующие линии на u- и v-поверхностях. Например, однопараметрические семейства линий $u(x,y) = c_1$, $v(x,y) = c_2$ определены как на u-поверхности, так и на v-поверхности.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 12. *Пусть $Z = u(x,y)$, $w = u + iv$ — некоторая u-поверхность. Тогда семейство линий $v(x,y) = c_2$, принадлежащее этой поверхности, представляет собой ортогональные траектории семейства линий уровня $u(x,y) = c_1$ u-поверхности. Аналогично, семейство линий $u(x,y) = c_1$, принадлежащее v-поверхности $Z = v(x,y)$, является ортогональными траекториями семейства линий уровня $v(x,y) = c_2$, заданных на v-поверхности.*

Доказательство. Докажем теорему для случая u-поверхности (5). Найдем ортогональные траектории ее линий уровня $u(x,y) = c_1$.

Условие ортогональности двух семейств линий на u-поверхности получим из равенства $(\delta\overline{r}, d\overline{r}) = 0$, где вектор $\delta\overline{r} = \overline{r}_1\delta x + \overline{r}_2\delta y$ направлен по касательной к линии уровня, а $d\overline{r} = \overline{r}_1 dx + \overline{r}_2 dy$ является направлением линии ортогональной траектории. Отсюда следует, что в произвольной точке u-поверхности с учетом формул (20) равенство $(\delta\overline{r}, d\overline{r}) = 0$ принимает вид

$$\left(1 + u_x^2\right) dx\delta x + u_x u_y (dx\delta y + dy\delta x) + \left(1 + u_y^2\right) dy\delta y = 0. \tag{46}$$

Исходя из уравнения $u(x,y) = c_1$, найдем зависимость между дифференциалами $\delta x, \delta y$: $u_x\delta x + u_y\delta y = 0$, $\delta y = -\dfrac{u_x}{u_y}\delta x$. Подставим полученное выражение δy в (46). После ряда простых преобразований получим дифференциальное уравнение искомых ортогональных траекторий

$$u_y dx - u_x dy = 0. \tag{47}$$

В нашем изложении оно встречалось под номером (32). Там же найдено его общее решение в неявном виде $v(x,y) = c_2$.

Итак, для u-поверхности теорема 12 справедлива. Легко видеть, что линии уровня u-поверхности и их ортогональные траектории на этой поверхности образуют регулярную ортогональную сеть. В случае v-поверхности доказательство теоремы аналогично.

Теорема 12 доказана.

Теорема 13. *Если $w = u + iv$ — аналитическая функция, то при одновременных A-деформациях пары ГСП, сохраняющих ГС, линии уровня u-поверхности $u(x,y) = c_1$ и их ортогональные траектории $v(x,y) = c_2$ образуют сеть линий стационарной длины. Что касается v-поверхности, то на ней сеть линий стационарной длины образуют линии уровня $v(x,y) = c_2$ заданной v-поверхности и их ортогональные траектории $u(x,y) = c_1$.*

Доказательство. Напомним, что в процессе A-деформации площадь области остается неизменной (с точностью 1-го порядка), хотя длина дуги кривой на поверхности, вообще говоря, изменяется. Однако при этом на каждой поверхности существует сеть линий стационарной длины [13]. Найдем линии стационарной длины u- и v-поверхностей в случае их одновременных A-деформаций, сохраняющих ГС, т. е. типа $d_t\,(u \cup v)$.

Дифференциальное уравнение линий стационарной длины получим из соотношения (18_3):

$$\varepsilon_{ij} dx^i dx^j = 0 \Longleftrightarrow \varepsilon_{11} dx^2 + 2\varepsilon_{12} dx dy + \varepsilon_{22} dy^2 = 0.$$

Для u-поверхности с учетом равенств (44) при $c \neq 0$ будем иметь

$$u_x u_y dy^2 + \left(u_x^2 - u_y^2\right) dx dy - u_x u_y dx^2 = 0.$$

В случае $dx = 0$ или $dy = 0$ это дифференциальное уравнение исчезает. Полагая $dx \neq 0$. преобразуем его к виду квадратного алгебраического уравнения

$$u_x u_y \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(u_x^2 - u_y^2\right) \frac{dy}{dx} - u_x u_y = 0$$

с дискриминантом $D = \left(u_x^2 + u_y^2\right)^2 > 0$ и различными действительными корнями

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_1 = -\frac{u_x}{u_y}, \qquad \left(\frac{dy}{dx}\right)_2 = \frac{u_y}{u_x}. \tag{48}$$

Общее решение каждого из дифференциальных уравнений (48) дает аналитическое выражение однопараметрического семейства линий. Из первого дифференциального уравнения легко найдем его общее решение в неявном виде

$$u_x dx + u_y dy = 0 \Longleftrightarrow du = 0 \Longleftrightarrow u(x,y) = c_1.$$

Второе уравнение из (48) совпадает с (47), а его общим решением является $v(x,y) = c_2$.

Итак, мы доказали первую часть теоремы для u-поверхности.

Линии стационарной длины v-поверхности можно найти аналогично, исходя из дифференциального уравнения

$$\widetilde{\varepsilon}_{11} dx^2 + 2\widetilde{\varepsilon}_{12} dx dy + \widetilde{\varepsilon}_{22} dy^2 = 0.$$

В силу (45) и $c \neq 0$ алгебраическое уравнение типа (46) для v-поверхности имеет вид

$$v_x v_y \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(v_x^2 - v_y^2\right) \frac{dy}{dx} - v_x v_y = 0.$$

Его дискриминант $D = \left(v_x^2 + v_y^2\right)^2 > 0$, а корни

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_1 = -\frac{v_x}{v_y} = \frac{u_y}{u_x}, \qquad \left(\frac{dy}{dx}\right)_2 = \frac{v_y}{v_x} = -\frac{u_x}{u_y}$$

совпадают с корнями квадратного уравнения (46). Следовательно, уравнения линий стационарной длины v-поверхности совпадают с уравнениями линий стационарной длины u-поверхности.

Теорема 13 доказана.

9. Б. м. изгибания типов $d_t(u)$, $d_\varepsilon(v)$ и $d_t\,(u \cup v)$.

Теорема 14. *Любая u-поверхность является жесткой относительно б. м. изгибаний типа $d_t(u)$. Любая v-поверхность является жесткой относительно б. м. изгибаний типа $d_\varepsilon(v)$. Если $w = u + iv$ — аналитическая функция, то пара u- и v-поверхностей не допускает нетривиальных б. м. изгибаний, происходящих на них одновременно, типа $d_t\,(u \cup v)$.*

Доказательство. Докажем теорему для случая изгибаний типа $d_t(u)$. При изгибаниях u-поверхности компоненты тензора ε_{ij} тождественно равны нулю (п. 4). Поскольку А-деформация обобщает понятие б. м. изгибания, то математическую модель данной задачи получим из (22), (23) при условии $\varepsilon_{ij} \equiv 0$. Тогда система уравнений (23) исчезает, а из (22) будем иметь $\zeta_x = 0$, $\zeta_y = 0$. Отсюда общее решение $\zeta(x, y) = c$, $c = \mathrm{const}$, а вектор смещения $\overline{y} = (0, 0, c)$ выражает тривиальное б. м. изгибание [19, с. 307].

Таким образом, u-поверхность является жесткой в отношении изгибаний указанного типа.

Для остальных двух типов изгибаний доказательство теоремы аналогично.

Теорема 14 доказана.

Примером нежесткой поверхности является поверхность Гауди [24]. Она не является гармонической, но однозначно проектируется на плоскость.

Заключение. В статье изучены А-деформации трех типов ГСП. В общей постановке каждая из поставленных задач имеет самостоятельное значение. Но при условиях согласованности параметров деформаций на двух заданных поверхностях, а также их одновременности все три типа деформации оказываются взаимозависимыми.

Каждая поставленная в статье задача получила, по мнению автора, исчерпывающее решение. Кроме того, установлено, что на u-поверхности (v-поверхности) существует регулярная действительная ортогональная сеть линий, одно семейство которой представляет линии уровня, а другое состоит из их ортогональных траекторий. Обнаружены особенности ее деформирования.

Заметим, что в данной работе мы ограничились рассмотрением свойств вариативности исключительно метрических форм ГСП. Здесь не затронуты вопросы приложения рассматриваемых б. м. деформаций в безмоментной теории оболочек и др.

Литература

1. *Дзядык В. К.* Геометрическое определение аналитических функций // Успехи мат. наук. – 1960. – **15**, вып. 1(91). – С. 191 – 194.
2. *Goodman A. W.* On a characterization of analytic function // Amer. Math. Mon. — 1964. — **71**, № 3. – P. 265 – 267.
3. *Goodman A. W.* A partial differential equation and parallel plane curves // Amer. Math. Mon. – 1964. – **71**, № 3. – P. 257 – 264.
4. *Трохимчук Ю. Ю.* Об одном критерии аналитичности функций // Укр. мат. журн. – 2007. – **59**, № 10. – С. 1410 – 1418.
5. *Трохимчук Ю. Ю., Сафонов В. М.* Об одном критерии постоянства комплексной функции // Укр. мат. журн. – 1999. – **51**, № 8. – С. 1096 – 1104.

6. *Jerrard Richard.* Curvatures of surfaces associated with holomorphic functions // Colloq. Math. – 1970. – **21**, № 1. – P. 127 – 132.
7. *Kreyszig Erwin, Pendl Alois.* Über die Gauss Krümmung der Real und Imaginär — teilflächen analytischer Funktionen // Elem. Math. – 1973. – **28**, № 1. – P. 10 – 13.
8. *Kalaj D., Mateljevic M.* On quasiconformal harmonic surfaces with rectifiable boundary // Complex Anal. and Oper. Theory. – 2011. – **5**, № 3. – P. 633 – 646.
9. *Vincensini P.* Sur les probleme des transformations equivalentes infinitesimales d'une surface, et ses relations avec la theorie de congruences de spheres // Ann. sci. Ecole norm. super. – 1962. – **79**, № 4. – P. 299 – 319.
10. *Roger Boudet.* Sur quelques proprietes geometriques des transformations infinitesimales des surfaces: These doct. sci. math. – Univ. Aix-Marseille, 1961. – 78 p.
11. *Rosca Radu.* Asupra transformărilor infinitezimale de dilatate superficială nulă din spatiul eliptic // Stud. cerc. mat. Acad. RSR. – 1967. – **19**, № 2. – P. 165 – 175.
12. *Тихонов В. А.* О бесконечно малых p-изгибаниях // Изв. вузов. Математика. – 1971. – № 7. – С. 94 – 98.
13. *Колобов П. Г.* О бесконечно малых деформациях поверхности с сохранением площади // Уч. зап. Кабардино-Балкар. ун-та. Сер. мат. – 1966. – Вып. 30. – С. 65 – 68.
14. *Безкоровайна Л. Л.* Ареальні нескінченно малі деформації і врівноважені стани пружної оболонки. – Одеса: Астропринт, 1999. – 168 с.
15. *Souam Robah.* On stable constant mean curvature surfaces in $S^2 \times R$ and $H^2 \times R$ // Trans. Amer. Math. Soc. – 2010. – **362**, № 6. – P. 2845 – 2857.
16. *Hurtado Ana, Ritore Manuel, Rosales Cesar.* The classification of complete stable area-stationary surfaces in the Heisenberg group H^1 // Adv. Math. – 2010. – **224**, № 2. – P. 501 - 600.
17. *Qiu Lianghua.* On a special class of prescribed scolar courvature problems with volume element preserving deformations // Shuxue wuli xuebao. Ser. A. Acta math. sci. – 2011. – **31**, № 5. – P. 1317 – 1322.
18. *Tian Daping, Li Guanghan, Wu Chuanxi.* The surface area preserving mean curvature flow in quasi-Fuchsian manifolds // Acta math. sci. B. – 2012. – **32**, № 6. – P. 2191 – 2202.
19. *Векуа И. Н.* Обобщенные аналитические функции. – М.: Наука, 1988. – 512 с.
20. *Погорелов А. В.* Внешняя геометрия выпуклых поверхностей. – М.: Наука, 1969. – 760 с.
21. *Каган В. Ф.* Основы теории поверхностей. – М.: ОГИЗ, 1947. – Ч. 1. – 512 с.
22. *Yang Yun, Yu Yanhua, Liu Huili.* Linear Weingarten centroaffine translation surfaces in R^3 // J. Math. Anal. and Appl. – 2011. – **375**, № 2. – P. 458 – 466.
23. *Эльсгольц Л. Э.* Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. – М.: Наука, 1969. – 424 с.
24. *Velimirovic Ljubica S., Cvetkovic Milica D., Ciric Marija S., Velimirovic Nicola.* Analysis of Gaudi surfaces at small deformations // Appl. Math. and Comput. – 2012. – **218**, № 13. – P. 6999 – 7004.

Получено 11.02.17