Вісник Одеськ. нац. ун-ту. Матем. і мех. – 2009. – Т.14, вип. 20. – С. 24–34

УДК 517.9

Е. А. Булатников*, А. В. Плотников**
*Одесский национальный университет имени И. И. Мечникова
**Одесская государственная академия строительства и архитектуры

БИЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ С НЕЧЕТКОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ

Булатніков Є. О., Плотніков А. В. Білінійні системи з нечіткою правою частиною. Вводиться поняття керованого білінійного диференціального рівняння з нечіткими параметрами в правій частині та доводяться деякі властивості відповідних нечітких пучків траєкторій за допомогою переходу до керованих диференціальних включень з нечіткою правою частиною.
Ключові слова: оптимальне керування, диференційні включення, нечіткі множини.

Булатников Е. А., Плотников А. В. Билинейные системы с нечеткой правой частью. Вводится понятие управляемого билинейного дифференциального уравнения с нечеткими параметрами в правой части и доказываются некоторые свойства соответствующих нечетких пучков траекторий при помощи перехода к управляемым дифференциальным включениям с нечеткой правой частью.
Ключевые слова: оптимальное управление, дифференциальные включения, нечеткие множества.

Bulatnikov E. A., Plotnikov A. V. Bilinear systems with fuzzy right side. Notion of controlled bilinear differential equation with fuzzy parameters in the right-hand side is introduced and some properties of corresponding fuzzy pencils of trajectories are proved with using change to controlled differential inclusions with fuzzy right-hand side.
Key words: optimal control, differential inclusions, fuzzy sets.

Введение. Понятие нечеткого множества было введено в работе [1]. В работе [2] впервые рассматривалось нечеткое дифференциальное уравнение, которое в дальнейшем исследовалось в работах [3]–[7], а в работах [8]–[10] изучались дифференциальные включения с нечеткой правой частью, которые затем рассматривались в [11], [12].

Управляемые билинейные дифференциальные системы были рассмотрены в работах Celikovsky [13], [14], а их приложения в работе [15]. В данной работе вводится понятие управляемого билинейного дифференциального уравнения с нечеткими параметрами в правой части и доказываются некоторые свойства соответствующих нечетких пучков траекторий при помощи перехода к управляемым дифференциальным включениям с нечеткой правой частью.

Основные определения и обозначения. Пусть $Comp(R^n)$ (или $Conv(R^n)$) — пространство непустых (выпуклых) компактных подмножеств евклидова пространства R^n с метрикой Хаусдорфа

$$h(A,B) = min\{r \geq 0 \mid A \subset B + S_r(0),\ B \subset A + S_r(0)\},$$

где $A,\ B \subset Comp(R^n)$ (или $Conv(R^n)$), $S_r(a)$ — шар в R^n радиуса r с центром в точке a.

Определение 1. *Под нечетким множеством A понимается совокупность $A = \{(x, \mu_A(x)) \mid x \in X\}$, где X — универсальное множество, а $\mu_A(x)$ — функция принадлежности, характеризующая степень принадлежности элемента x нечеткому множеству A. Функция $\mu_A(x)$ принимает значения в некотором вполне упорядоченном множестве M. Множество M называют множеством принадлежностей, часто в качестве M выбирается интервал $[0,1]$. Если $M = \{0,1\}$, то нечеткое множество может рассматриваться как обычное, четкое множество.*

Рассмотрим следующую управляемую билинейную систему:

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u(t)x + c(t)u(t) + v(t), \tag{1}$$

$$x(t_0) = x_0, \ t \in [t_0, t_1] \subset R,$$

где $x \in R^n$ — фазовый вектор, $A(t)$, $B(t)$ — матрицы $n \times n$, $c(t)$ — n-мерный вектор, $u(t)$ — скалярное управление, $v \in R^n$ — неопределенный параметр такой, что для всех $t \in [t_0, t_1]$ $v \in V$, где V — нечеткое множество с характеристической функцией $\mu(\cdot) : R^n \to [t_0, t_1]$.

Предположение. *Будем предполагать, что система (1) удовлетворяет условиям:*

1) матрицы $A(t)$, $B(t)$ и вектор $c(t)$ — измеримы на R^1;

2) существуют константы a, b, $c > 0$ такие, что $\|A(t)\| \le a$, $\|B(t)\| \le b$, $\|c(t)\| \le c$ для почти всех $t \in [t_0, t_1]$;

3) функция $u(t)$ — измерима на каждом конечном временном интервале $[t_0, t_1]$;

4) существуют константы u_{min}, u_{max} такие, что $u(t) \in [u_{min}, u_{max}]$ для почти всех $t \in [t_0, t_1]$;

5) характеристическая функция $\mu(\cdot) : R^n \to [0,1]$ удовлетворяет условиям:

a) модальная, т. е. существует хотя бы одно $y_0 \in R^n$ такое, что $\mu(y_0) = 1$;

b) $\mu(y)$ — полунепрерывна сверху по y, т. е. $\forall y_0 \in R^n$ $\overline{\lim\limits_{y \to y_0}} \mu(y) = \mu(y_0)$;

c) для любого $\varepsilon > 0$ и $y \in R^n \setminus \{y \mid \mu(y) = 1\}$ существуют y', $y'' \in R^n$ такие, что $\|y - y'\| < \varepsilon$, $\|y - y''\| < \varepsilon$ и $\mu(y') < \mu(y) < \mu(y'')$;

d) множество $cl\{y \in R^n \mid \mu(y) > 0\}$ — компактно, $cl(P)$ — замыкание множества $P \subset R^n$.

Определение 2. *Множество всех управлений $u(t)$, удовлетворяющих Предположению, будем называть множеством допустимых управлений и обозначать U.*

Введем понятие α-срезки нечеткого множества.

Определение 3. [5] *α-срезкой нечеткого множества V ($\alpha \in [0,1]$) назовем множество $[V]^\alpha$, определяемое по следующей формуле:*

$$[V]^\alpha = \begin{cases} \{y \in R^n \mid \mu(y) \ge \alpha\}, & \text{если} \quad \alpha \in (0,1], \\ cl\{y \in R^n \mid \mu(y) > 0\}, & \text{если} \quad \alpha = 0. \end{cases}$$

Рассмотрим некоторые свойства α-срезки $[V]^\alpha$.

Свойство. *Из условия 5 Предположения следует:*
1) для любых $\alpha_1,\ \alpha_2 \in [0,1]$ таких, что $\alpha_1 > \alpha_2$ справедливо включение:

$$[V]^{\alpha_1} \subset [V]^{\alpha_2};$$

2) для любого $0 \le \alpha \le 1$ соответствующая α-срезка нечеткого множества V является компактным множеством в R^n.

Доказательство. 1) Проведем доказательство от противного. Рассмотрим произвольные $\alpha_1, \alpha_2 \in [0,1]$ такие, что $\alpha_1 > \alpha_2$. Предположим, что $[V]^{\alpha_1} \not\subset [V]^{\alpha_2}$. Это означает, что найдется по крайней мере один такой вектор $y \in R^n$, что $y \in [V]^{\alpha_1}$, но $y \notin [V]^{\alpha_2}$. Если $y \in [V]^{\alpha_1}$, то согласно определению α-срезки: $\mu(y) \ge \alpha_1$. По условию, $\alpha_1 > \alpha_2$ и, следовательно, $\mu(y) \ge \alpha_2$. Отсюда следует, что $y \in [V]^{\alpha_2}$, что противоречит нашему предположению. Значит, $[V]^{\alpha_1} \subset [V]^{\alpha}_2$.

2) Докажем замкнутость множества $[V]^\alpha$. Рассмотрим последовательность $\{y_n^\alpha\}_{n=1}^\infty \in [V]^\alpha$, сходящуюся к некоторому $y^\alpha \in R^n$. Докажем, что y^α также принадлежит $[V]^\alpha$. Так как $y_n^\alpha \in [V]^\alpha$, $\forall n = \overline{1,\infty}$, то $\mu(y_n^\alpha) \ge \alpha$. В силу полунепрерывности сверху функции $\mu(y)$ по y, получаем: $\mu(y_n^\alpha)$ сходится сверху к $\mu(y^\alpha)$ при $y_n^\alpha \to y^\alpha$. Далее, так как справедливо соотношение $\alpha \le \mu(y_n^\alpha) \le 1$ (из определения функции μ), то переходя к пределу, получим $\alpha \le \mu(y^\alpha) \le 1$. Отсюда следует, что $y^\alpha \in [V]^\alpha$, что доказывает замкнутость множества $[V]^\alpha$.

Тогда, так как для любого $0 < \alpha \le 1$ $[V]^\alpha \subset [V]^0 \in Comp(R^n)$, также принадлежит $Comp(R^n)$. Свойство доказано. □

Рассмотрим следующее нечеткое дифференциальное включение

$$\dot{x} \in A(t)x + B(t)u(t)x + c(t)u(t) + V,\ x(t_0) = x_0, \tag{2}$$

которое получается из системы (1), благодаря замене параметра $v(t)$ на нечеткое множество V.

Системе (2) поставим в соответствие систему

$$\dot{x} \in A(t)x + B(t)u(t)x + c(t)u(t) + [V]^\alpha,\ x(t_0) = x_0, \tag{3}$$

где $[V]^\alpha$ — некоторая α-срезка($\alpha \in [0,1]$) нечеткого множества V.

В результате получаем управляемую дифференциальную систему с многозначной правой частью.

Обозначим через $[X(u)]^\alpha$ — пучок траекторий системы (3), соответствующих допустимому управлению $u(t)$, а через $[X(t,u)]^\alpha$ соответствующее сечение пучка $[X(u)]^\alpha$ в момент $t \in [t_0, t_1]$ ($\alpha \in [0,1]$).

Введем понятия нечеткого пучка траекторий для системы (2).

Определение 4. *Нечетким пучком траекторий системы (2) назовем нечеткое множество $X(u)$ такое, что для любого $t \in [t_0, t_1]$ α-срезки $X(t,u)$ совпадают с сечением пучка траекторий $[X(u)]^\alpha$ системы (3).*

Определение 5. *Нечетким измеримым многозначным отображением назовем отображение, любая α-срезка которого является измеримым многозначным отображением по Лебегу.*

Определение 6. [5] *Интегралом от нечеткого множества $F(t)$ назовем множество $\int\limits_0^t F(s)ds$, α-срезки которого совпадают с интегралом Ауманна [16] от α-срезки нечеткого множества $F(t)$, т. е. выполняется условие*

$$\left[\int\limits_0^t F(s)ds\right]^\alpha = \int\limits_0^t [F(s)]^\alpha ds = \left\{ \int\limits_0^t f(s)ds \;\middle|\; f : R^1 \to R^n,\ f(\cdot) \in [F(\cdot)]^\alpha \right\}.$$

Рассмотрим следующую лемму.

Лемма. *Если матричная функция $D(t)$, $t \in [t_0, t_1]$ и нечеткое множество V с характеристической функцией $\mu(\cdot)$ удовлетворяет условиям:*

1) $D(\cdot)$ — измерима по t на $[t_0, t_1]$;

2) существует функция $d(\cdot) \in L_1([t_0, t_1])$ такая, что для почти всех $t \in \in [t_0, t_1]$ выполняется неравенство $\|D(t)\| \le d(t)$;

3) характеристическая функция $\mu(\cdot)$ удовлетворяет условию 5 из Предположения, то $\int\limits_0^t D(s)Vds$ существует для всех $t \in [t_0, t_1]$.

Доказательство. Согласно ([5], теорема 2.3) интеграл $\int\limits_0^t D(s)Vds$ существует для всех $t \in [t_0, t_1]$, если нечеткое многозначное отображение $L(t) = D(t)V$ измеримо и ограничено некоторой интегральной функцией $p(t)$. Согласно условию 1), нечеткое многозначное отображение $L(t)$ измеримо, а из условий 2) и 3), и Свойства следует, что существует $p(t) = d(t)v_0$, где $v_0 \ge \left|[V]^0\right|$. Лемма доказана. □

Определение 7. *Нечетким абсолютно непрерывным многозначным отображением назовем отображение, любая α-срезка которого является абсолютно непрерывным многозначным отображением.*

Определение 8. *Нечеткое множество назовем компактным, если его любая α-срезка является компактным множеством.*

Определение 9. *Нечеткое множество назовем выпуклым, если его любая α-срезка является выпуклым множеством.*

Дадим определение множества достижимости для управляемой системы (3) с многозначной правой частью.

Определение 10. [17] *Множеством достижимости $[Y(t_1)]^\alpha$ системы (3) назовем множество всех множеств $Comp(R^n)$, в которые можно перевести систему (3) из начального состояния x_0 при помощи допустимых управлений в состояние t_1, т. е.*

$$[Y(t_1)]^\alpha = \{\, [X(t_1, u)]^\alpha \mid u(\cdot) \in U \} .$$

На основании данного определения введем определение множества достижимости для нечеткой системы (2).

Определение 11. *Нечетким множеством достижимости* $Y(t_1)$ *системы (2) назовем множество всех нечетких множеств,* α*-срезки которого совпадают с* $[Y(t_1)]^\alpha$ *для всех* $\alpha \in [0,1]$.

Основные результаты. Докажем теорему о свойствах нечеткого пучка траекторий $X(u)$ системы (2).

Теорема 1. *При выполнении условий Предположения для любого допустимого управления* $u(\cdot)$ *соответствующий нечеткий пучок* $X(u)$ *системы (2) удовлетворяет условиям:*

1) для всех $t \in [t_0, t_1]$ *нечеткое многозначное отображение* $X(t,u)$ *представимо в виде*

$$\begin{gathered}X(t,u) = \Phi(t)\left(x_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)A(s)E_w(s)\exp\left(B(s)w(s)\right)c(s)ds - \right.\\ \left. - \int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)E_w(s)\exp\left(B(s)w(s)\right)\left(B'(s)w(s)c(s) + c'(s)\right)ds\right) + \\ + E_w(t)\exp\left(B(t)w(t)\right)c(t) + \Phi(t)\int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)V ds,\end{gathered} \tag{4}$$

где интегралы, кроме последнего, понимаются в смысле Лебега, а последний — в смысле определения 6; $E_w(t)$ *— следующая матричная функция (в зависимости от* $w(t) = \int_{t_0}^{t} u(s)ds$, $t \in [t_0, t_1]$*):*

$$E_w(s) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{B^i(s)w(s)^{i+1}}{(i+1)!}(-1)^i + \sum_{i=0}^{\infty} i \int_{t_0}^{t} (-B(\alpha))^{i-1}B'(\alpha)\frac{w(\alpha)^{i+1}}{(i+1)!}d\alpha$$

и $\Phi(t), \Phi^{-1}(t)$ *даны следующими формулами:*

$$\begin{aligned}\Phi(t) = {} & \exp\left(\int_{t_0}^{t} B(s)u(s)ds\right) \times \\ & \times \left(I + \sum_{k=1}^{\infty} \int_{t_0}^{t=\tau_{k+1}} \cdots \int_{t_0}^{\tau_2} \prod_{j=1}^{k} \left\{\exp\left(-\int_{t_0}^{\tau_{k+1-j}} B(s)u(s)ds\right) A(\tau_{k+1-j}) \times \right.\right. \\ & \left.\left. \times \exp\left(\int_{t_0}^{\tau_{k+1-j}} B(s)u(s)ds\right)\right\} d\tau_1 \ldots d\tau_k\right)\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}\Phi^{-1}(t) = {} & \left(I + \sum_{k=1}^{\infty} \int_{t_0}^{t=\tau_{k+1}} \cdots \int_{t_0}^{\tau_2} \prod_{j=1}^{k} \left\{\exp\left(-\int_{t_0}^{\tau_j} B(s)u(s)ds\right)(-A(\tau_j)) \times \right.\right. \\ & \left.\left. \times \exp\left(\int_{t_0}^{\tau_j} B(s)u(s)ds\right)\right\} d\tau_1 \ldots d\tau_k\right) \exp\left(-\int_{t_0}^{t} B(s)u(s)ds\right).\end{aligned}$$

2) для всех $t \in [t_0, t_1]$ $X(t,u)$ является выпуклым и компактным нечетким множеством;

3) при каждом допустимом $u(\cdot)$ многозначная траектория $X(\cdot,u)$ является нечетким абсолютно непрерывным многозначным отображением;

4) для почти всех $t \in [t_0, t_1]$ и любых $\alpha_1, \alpha_2 \in [0,1]$ таких, что $\alpha_1 > \alpha_2$, соответствующие α-срезки нечеткого множества $X(t,u)$ удовлетворяют условию:

$$[X(t,u)]^{\alpha_1} \subset [X(t,u)]^{\alpha_2}.$$

Доказательство. 1) Функция $\Phi^{-1}(s)$ измерима как сумма, произведение и предел измеримых функций. В работе Celikovsky [14] показано, что $\max\limits_{t\in[t_0,t_1]} \|\Phi^{-1}(t)\|_S \le K_2$, где $K_2 = e^{(A^M + B^M u_p)(t_1 - t_0)}$, $A^M = \max\limits_{t\in[t_0,t_1]} \|A(t)\|_S$, $B^M = \max\limits_{t\in[t_0,t_1]} \|B(t)\|_S$, $u_p = \max\{|u_{min}|, |u_{max}|\}$, $\|\cdot\|_S$-спектральная матричная норма. Следовательно, в последнем слагаемом в правой части выражения (4) интеграл существует, так как нечеткое многозначное отображение $\Phi^{-1}V$ удовлетворяет предположениям Леммы. Значит, выражение (4) имеет смысл.

Теперь покажем, что нечеткое сечение пучка $X(t,u)$ системы (2) представимо в виде (4). Введем обозначение

$$G(t) = \Phi(t)\left(x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)A(s)E_w(s)\exp\left(B(s)w(s)\right)c(s)ds - \right.$$
$$\left. - \int\limits_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)E_w(s)\exp\left(B(s)w(s)\right)\left(B'(s)w(s)c(s) + c'(s)\right)ds\right) +$$
$$+ E_w(t)\exp\left(B(t)w(t)\right)c(t).$$

Рассмотрим произвольную α-срезку правой части выражения (4):

$$\left[G(t) + \Phi(t)\int\limits_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)V ds\right]^{\alpha} = [G(t)]^{\alpha} + \left[\Phi(t)\int\limits_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)V ds\right]^{\alpha} =$$
$$= G(t) + \Phi(t)\int\limits_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)[V]^{\alpha} ds.$$

Тогда получим

$$\left[G(t) + \Phi(t)\int\limits_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)V ds\right]^{\alpha} = G(t) + \Phi(t)\int\limits_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)[V]^{\alpha} ds. \qquad (5)$$

Правая часть выражения (5) является сечением пучка траекторий $[X(t,u)]^{\alpha}$ системы (3), что следует из определения самого множества $[X(t,u)]^{\alpha}$. А значит, согласно определению 3, нечеткое многозначное отображение $X(t,u)$ представимо в виде (4).

2) Для всех $t \in [t_0, t_1]$ и любого $\alpha \in [0,1]$ покажем выпуклость и компактность α-срезки $[X(t,u)]^\alpha$ нечеткого множества $X(t,u)$.

Согласно выражению (5) $[X(t,u)]^\alpha = G(t) + \Phi(t) \int\limits_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)[V]^\alpha ds$. Так как подынтегральное выражение является измеримым и ограниченным многозначным отображением, то, согласно теореме Аумана [18] о непустоте, выпуклости и компактности интеграла от многозначного отображения, получаем, что для всех $t \in [t_0, t_1]$ и $\alpha \in [0,1]$ α-срезка $[X(t,u)]^\alpha$ является компактным и выпуклым множеством, что влечет за собой компактность и выпуклость нечеткого множества $X(t,u)$ в силу определения 8 и определения 9.

3) Рассмотрим выражение (5) в виде:

$$[X(t,u)]^\alpha = G(t) + \Phi(t) \int\limits_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)[V]^\alpha ds.$$

Функция $G(t)$ есть сумма трех абсолютно непрерывных функций, где первые две являются таковыми как интегралы от измеримых функций, а третья — произведение $E_w(t)$ на экспоненту ($E_w(t)$ абсолютно непрерывна как сумма абсолютно непрерывных функций).

Рассмотрим интеграл $\int\limits_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)[V]^\alpha ds$. Под знаком интеграла содержится многозначное измеримое отображение и, следовательно, является абсолютно непрерывным многозначным отображением [19]. Тогда α-срезка $[X(t,u)]^\alpha$ нечеткого множества $X(t,u)$ представляет собой абсолютно непрерывное многозначное отображение. В силу определения 7 отображение $X(t,u)$ является нечетким абсолютно непрерывным многозначным отображением, что и требовалось доказать.

4) Используя введенные выше обозначения и определение интеграла Ауманна [16] сечения пучков $[X(t,u)]^{\alpha_1}$ и $[X(t,u)]^{\alpha_2}$ запишем в виде:

$$[X(t,u)]^{\alpha_1} = G(t) + \Phi(t) \int\limits_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)[V]^{\alpha_1} ds$$

и

$$[X(t,u)]^{\alpha_2} = G(t) + \Phi(t) \int\limits_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)[V]^{\alpha_2} ds.$$

Согласно Свойству, справедливо условие: $[V]^{\alpha_1} \subset [V]^{\alpha_2}$. Это значит, что множество $\Phi^{-1}(s)[V]^{\alpha_2}$ содержит все ветви множества $\Phi^{-1}(s)[V]^{\alpha_1}$. Отсюда вытекает, что $[X(t,u)]^{\alpha_1} \subset [X(t,u)]^{\alpha_2}$, что и требовалось доказать. Теорема доказана. $\square$

Рассмотрим теорему о равенстве сечений нечетких пучков траекторий.

Теорема 2. *При выполнении условий предположения для любых двух нечетких множеств V_1 и V_2 таких, что для любого $\alpha \in [0,1]$ $conv[V_1]^\alpha = conv[V_2]^\alpha$, любого допустимого управления $u(\cdot)$ соответствующие нечеткие пучки $X_1(u)$ и $X_2(u)$ системы (2) удовлетворяют условию: $X_1(t,u) = X_2(t,u)$ для всех $t \in [t_0, t_1]$.*

Доказательство. В силу выражения (5) и свойства интеграла Ауманна [16], согласно которому для любого многозначного отображения $F(\cdot) : R^1 \to \to Comp(R^n)$, интегрируемого по Ауманну, выполняется свойство:

$$\int_0^T F(t)dt = \int_0^T convF(t)dt.$$

Получаем, что $[X_1(t,u)]^\alpha = [X_2(t,u)]^\alpha$ для любого $\alpha \in [0,1]$. Это в свою очередь влечет за собой равенство соответствующих нечетких пучков, то есть $X_1(t,u) = = X_2(t,u)$, что и требовалось доказать. □

Рассмотрим и докажем следующие свойства нечеткого множества достижимости.

Теорема 3. *При выполнении условий Предположения нечеткое множество достижимости $Y(t_1)$ системы (2) является выпуклым и компактным.*

Доказательство. 1) Докажем вначале выпуклость множества $Y(t_1)$. Рассмотрим $X(t,u)$ в виде $X(t,u) = \Phi(t)x_0 + \Phi(t)\int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)\left(c(s)u(s) + V\right) ds$. Рассмотрим произвольные допустимые управления $u_1(t),\ u_2(t) \in U(t)$. Данным управлениям соответствуют нечеткие сечения пучков траекторий $X(t_1,u_1),\ X(t_1,u_2) \in \in Y(t_1)$ соответственно.

Тогда

$$X(t,u_1) = \Phi(t)x_0 + \Phi(t)\int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)c(s)u_1(s)ds + \Phi(t)\int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)Vds,$$

$$X(t,u_2) = \Phi(t)x_0 + \Phi(t)\int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)c(s)u_2(s)ds + \Phi(t)\int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)Vds.$$

Рассмотрим выпуклую комбинацию $X_\beta = \beta X(t_1,u_1) + (1-\beta)X(t_1,u_2)$, $\beta \in \in (0,1)$ и покажем, что $X_\beta \in Y(t_1)$:

$$\begin{aligned}
&\beta X(t_1,u_1) + (1-\beta)X(t_1,u_2) = \\
&= \beta\left(\Phi(t)x_0 + \Phi(t)\int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)c(s)u_1(s)ds + \Phi(t)\int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)Vds\right) + \\
&+(1-\beta)\left(\Phi(t)x_0 + \Phi(t)\int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)c(s)u_2(s)ds + \Phi(t)\int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)Vds\right) = \\
&= \Phi(t)\int_{t_0}^{t} \beta\Phi^{-1}(s)c(s)u_1(s)ds + \Phi(t)\int_{t_0}^{t} (1-\beta)\Phi^{-1}(s)c(s)u_2(s)ds + \\
&+\beta\Phi(t)\int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)Vds + (1-\beta)\Phi(t)\int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)Vds + \Phi(t)x_0.
\end{aligned}$$

Рассмотрим первые два слагаемые:

$$\Phi(t)\int\limits_{t_0}^{t}\beta\Phi^{-1}(s)c(s)u_1(s)ds+\Phi(t)\int\limits_{t_0}^{t}(1-\beta)\Phi^{-1}(s)c(s)u_2(s)ds=$$
$$=\Phi(t)\int\limits_{t_0}^{t}\Phi^{-1}(s)c(s)\beta u_1(s)ds+\Phi(t)\int\limits_{t_0}^{t}\Phi^{-1}(s)c(s)(1-\beta)u_2(s)ds=$$
$$=\Phi(t)\int\limits_{t_0}^{t}\Phi^{-1}(s)c(s)\left(\beta u_1(s)+(1-\beta)u_2(s)\right)ds.$$

В силу выпуклости множества $U(t)$ для почти всех $t\in[t_0,t_1]$ существует некоторое управление $u_\beta(t)$ такое, что $u_\beta(t)=\beta u_1(t)+(1-\beta)u_2(t)$.

В силу выпуклости интеграла $\int\limits_{t_0}^{t}\Phi^{-1}(s)Vds$ (по Теореме 1) справедливо следующее:

$$\beta\Phi(t)\int\limits_{t_0}^{t}\Phi^{-1}(s)Vds+(1-\beta)\Phi(t)\int\limits_{t_0}^{t}\Phi^{-1}(s)Vds=\Phi(t)\int\limits_{t_0}^{t}\Phi^{-1}(s)Vds.$$

Отсюда следует

$$\beta X(t_1,u_1)+(1-\beta)X(t_1,u_2)=$$
$$=\Phi(t)x_0+\Phi(t)\int\limits_{t_0}^{t}\Phi^{-1}(s)c(s)u_\beta(s)ds+\Phi(t)\int\limits_{t_0}^{t}\Phi^{-1}(s)Vds,$$

т. е. так как $u_\beta(\cdot)\in U$, то существует некоторое сечение $X(t_1,u_\beta)=X_\beta\in\in Y(t_1)$. Значит, множество $Y(t_1)$ является выпуклым, что и требовалось доказать.

2) Докажем компактность множества $Y(t_1)$. По определению 8 нечеткое множество компактно, если компактна любая его α-срезка. Для произвольного $\alpha\in[0,1]$ рассмотрим множество $[Y(t_1)]^\alpha=\{\,[X(t_1,u)]^\alpha\mid u(\cdot)\in\in U(\cdot)\}$.

Рассмотрим произвольную последовательность $\{[X(t_1,u_k)]^\alpha\}_{k=1}^\infty\in\in[Y(t_1)]^\alpha$, сходящуюся к некоторому $\widetilde{X}$. Также рассмотрим соответствующую последовательность управлений $\{u_k(\cdot)\}_{k=1}^\infty\in U$. В силу теоремы Асколи-Арцела [20] из нее можно выделить слабо сходящуюся подпоследовательность $\{u_{k_p}(\cdot)\}_{p=1}^\infty$, из которой, в свою очередь, по теореме Мазура [21] можно выделить последовательность $\{u_{k_{p_s}}(\cdot)\}_{s=1}^\infty$, сильно сходящуюся к некоторому управлению $\widetilde{u}(\cdot)$.

Рассмотрим предел $\lim\limits_{u_{k_{p_s}}\to\widetilde{u}}[X(t_1,u_{k_{p_s}})]^\alpha=[X(t_1,\widetilde{u})]^\alpha=\widetilde{X}\in[Y(t_1)]^\alpha$, что означает замкнутость множества $[Y(t_1)]^\alpha$.

Далее, рассмотрим дифференциальное включение:

$$\dot{x}\in A(t)x+B(t)u(t)x+c(t)U(t)+[V]^\alpha \tag{6}$$

Обозначим $[Z(t_1)]^\alpha$ сечение пучка траекторий дифференциального включения (6). Очевидно, что

$$[Z(t_1)]^\alpha = \Phi(t)x_0 + \Phi(t)\int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)c(s)U(s)ds + \Phi(t)\int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)[V]^\alpha ds,$$

и $[Z(t_1)]^\alpha \subset Conv(R^n)$. Через Ω обозначим множество, элементами которого являются все компактные множества, входящие в $[Z(t_1)]^\alpha$. Множество Ω является компактным ([6], стр. 102). А так как $[Y(t_1)]^\alpha$ является замкнутым подмножеством множества Ω, то множество $[Y(t_1)]^\alpha$ является компактным.

Из первой и второй частей доказательства следует, что нечеткое множество достижимости $Y(t_1)$ является выпуклым и компактным нечетким множеством. Теорема доказана. □

Заключение. В статье получены условия при которых множество достижимости нечетких управляемых билинейных дифференциальных включений компактно и выпукло.

1. **Zadeh L. A.** Fuzzy Sets [text] / Zadeh L. A. // Inf. Control. – 1965. – V. 8. – P. 338–353.
2. **Kaleva O.** Fuzzy differential equations [text] / Kaleva O. // Fuzzy Sets and Systems. – 1987. – V. 3. – P. 301–317.
3. **Kaleva O.** A note on fuzzy differential equations [text] / Kaleva O. // Nonlinear Anal. – 2006. – V. 64. – P. 895–900.
4. **Lakshmikantham V.** Theory of set differential equations in metric spaces [text] / V. Lakshmikantham, T. Granna Bhaskar, J. Vasundhara Devi. – Cambridge Sci. Publ., 2006. – 204 p.
5. **Park J. Y.** Existence and uniqueness theorem for solution of fuzzy differential equations [text] / J. Y. Park, H. K. Han // Int. J. Math. And Math. Sci. – 1999. – 22, No. 2. – P. 271–279.
6. **Park J. Y** Fuzzy differential equations [text] / J. Y. Park, H. K. Han. // Fuzzy Sets and Systems. – 2000. – V. 110. – P. 69–77.
7. **Vorobiev D.** Towards the theory of fuzzy differential equations [text] / D. Vorobiev, S. Seikkala. // Ibid. – 2002. – V. 125. – P. 231–237.
8. **Aubin J. P.** Fuzzy differential inclusions [text] / Aubin J. P. // Prob. Control and Inform. Theory. – 1990. – 19. No. 1. – P. 55–67.
9. **Baidosov V. A.** Differential inclusions with fuzzy right-hand side [text] / Baidosov V. A. // Sov. Math. – 1990. – 40. No. 3. – P. 567–569.
10. **Baidosov V. A.** Fuzzy differential inclusions [text] / Baidosov V. A. // J. Appl. Math. and Mech. – 1990. – 54. No. 1. – P. 8–13.
11. **Hullermeier E.** An approach to modeling and simulation of uncertain dynamical systems [text] / Hullermeier E. // Int. J. Uncertainly Fuzziness Knowledge Based Systems. – 1997. – V. 5. – P. 117–137.

12. **Lakshmikantham V.** Theory of fuzzy differential equations and inclusions [text] / V. Lakshmikantham, R. Mohapatra. – Ser. Math. Anal. and Appl., London: Taylor and Francis, Ltd., 2003. – 143 p.

13. **Celikovsky S.** On the representation of trajectories of bilinear systems and its applications [text] / Celikovsky S. // Kybernetika. – 1987. – V. 23, No. 3. – P. 198–213.

14. **Celikovsky S.** On the continuous dependence of trajectories of bilinear systems on controls and its applications [text] / Celikovsky S. // Kybernetika. – 1988. – V. 24, No. 4. – P. 278–292.

15. **Рудик А. П.** Ядерные реакторы и принцип максимума Понтрягина [текст] / А. П. Рудик. – М.: Атомиздат, 1971. – 208 с.

16. **Aumann R. J.** Integrals of the set-valued functions [text] / Aumann R. J. // J. Math. Anal. Appl. – 1965. – V. 12. – P. 1–12.

17. **Плотников А. В.** Исследование некоторых дифференциальных уравнений с многозначной правой частью : дис. на соискание уч. степ. докт. физ.-матем. наук. [текст] / А. В. Плотников. – Одесса, 1994. – 198 с.

18. **Aumann R. J.** Measurable utility and the measurable choise theorem [text] / Aumann R. J. // Proc. Internat. Colloq. La Decision, C.N.R.S. Aix-en-Provence. – 1967. – P. 15–26.

19. **Arstein Z.** Integration of compact set-valued functions [text] / Arstein Z., Burne J. A. // Pacific J. of math. – 1975. – 58, No. 2. – P. 296–307.

20. **Иосида К.** Функциональный анализ [текст] / К. Иосида. – М.: Наука, 1967. – 624 с.

21. **Люстерник Л. А.** Краткий курс функционального анализа [текст] / Л. А. Люстерник, В. И. Соболев. – М.: Высшая школа, 1982. – 271 с.

22. **Половинкин Е. С.** Элементы теории многозначных отображений [текст] / Е. С. Половинкин. – М.: Изд-во МФТИ, 1982. – 127 с.