УДК 534.222 + 662.612

А. Г. Гирин

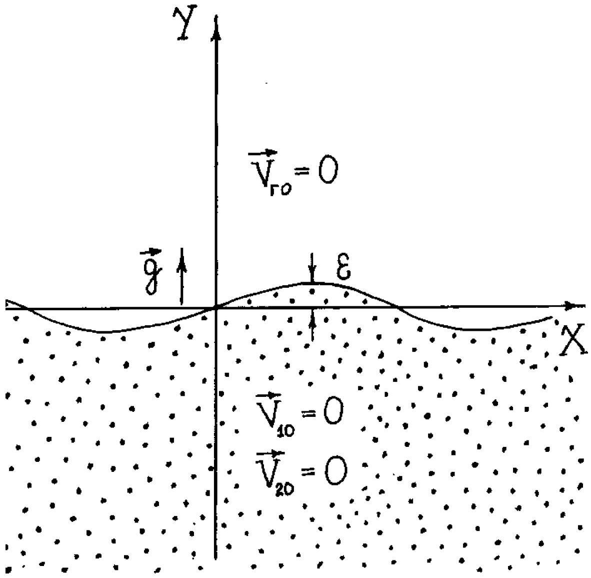
Одесский национальный университет им. И. И. Мечникова

О гидродинамической неустойчивости ускоряющейся поверхности раздела гомогенной и двухфазной сред

Рассмотрена задача о гидродинамической неустойчивости плоской поверхности раздела двух сред, движущихся с ускорением $\vec{g}$, в случае, когда одной из них является однородная идеальная несжимаемая жидкость, а другой — двухфазная монодисперсная аэровзвесь. Определено, что используемая система уравнений, описывающих движение двухфазной смеси, имеет три типа возмущений. Методом малых возмущений найдено существование неустойчивого корня, связанного с действием массовой силы (при $g \to 0$ он исчезает) в двухфазной среде (при исчезновении дисперсной фазы он также исчезает), а естественным стабилизирующим механизмом для него является действие межфазного трения, так что при увеличении вязкости несущей фазы, $\mu_1 \to \infty$, он также исчезает. При увеличении вязкости, либо уменьшении размера частичек, либо уменьшении волнового числа возмущения, либо увеличении ускорения доминирующим становится действие "классического" механизма неустойчивости Рэлея — Тейлора.

При движении двухфазной дисперсной смеси иногда возникает проблема, связанная с характером её взаимодействия с внешней гомогенной средой. Вблизи поверхности раздела возникают условия для развития гидродинамической неустойчивости обоих типов (Кельвина — Гельмгольца и Релея — Тейлора). Механизм неустойчивости, например, может оказывать влияние на дальнейшее поведение сорванных вторичных капелек, образующих аэровзвесь в аэродинамическом следе первичной капли аэрозоля [1], осуществляя механическое перемешивание компонент и ускоряя тем самым формирование гомогенной горючей смеси за фронтом детонационной волны в аэрозоле. Влияние массы частичек на устойчивость поверхности раздела может быть учтено простым увеличением плотности дисперсной среды, а вот для определения влияния других внутренних её свойств (относительного движения, межфазного взаимодействия) моделей механики гомогенной среды недостаточно и требуется привлечение двухскоростной модели. Устойчивость решений уравнений таких моделей широко исследуется в последнее время при изучении движения жидкости по трубопроводам [2], в том числе применительно к возникновению снарядных течений при транспортировке углеводородного сырья [3], при изучении двухфазных течений в слоях смешения [4]. Неустойчивость внутреннего течения в двухфазной системе может приводить к динамической коагуляции аэрозоля [5]. Проявление неустойчивости типа Релея — Тейлора при фильтрационном вытеснении одной жидкостью другой ведёт к образованию “пальцев” и нежелательному смешению вытесняющей и вытесняемой фаз [6]. Такого рода практические задачи вызывают необходимость исследовать прежде всего общие свойства исходных уравнений динамики двухфазных сред. В настоящей работе исследование устойчивости ускоряющейся границы раздела двухфазной и гомогенной сред по отношению к малым возмущениям выполнено в обычной гидродинамической постановке.

Рассмотрим механическую систему, состоящую из однородной несжимаемой жидкости плотности $\rho_г$, занимающей полупространство $\sigma > 0$, и из двухфазной монодисперсной аэровзвеси частичек радиуса a в несжимаемой жидкости, занимающей полупространство $y < 0$ (рис.). Пусть вся система имеет ускорение $\vec{g}$ в направлении, перпендикулярном поверхности раздела $y = 0$. В системе координат, связанной с поверхностью раздела, обе среды покоятся, и на них действует сила инерции $-\rho \quad \vec{g}$.



Пусть в некоторый начальный момент времени $t = 0$ в системе возникли малые возмущения, так что состояния обеих сред при $t > 0$ становятся неоднородными и нестационарными. Движение жидкости при $t > 0$ описывается решениями системы уравнений гидродинамики гомогенной среды [7], а движение двухфазной смеси — решениями уравнений континуальной модели движения дисперсной двухскоростной среды с общим давлением фаз при пренебрежении процессами тепло- и массообмена между фазами. С учётом эффекта присоединённых масс, а также в предположении, что объёмная концентрация дисперсной фазы α_2 и отношение истинных плотностей фаз ρ_1^0, ρ_2^0 малы: $\alpha_2^2 << 1$, $\rho_1^0 / \rho_2^0 << 1$, эта система имеет вид [8, с.77–90]:

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + V_{1x}\frac{\partial \rho_1}{\partial x} + V_{1y}\frac{\partial \rho_1}{\partial y} + \rho_1 \frac{\partial V_{1x}}{\partial x} + \rho_1 \frac{\partial V_{1y}}{\partial y} = 0 \ ;$$

$$\frac{\partial \rho_2}{\partial t} + V_{2x}\frac{\partial \rho_2}{\partial x} + V_{2y}\frac{\partial \rho_2}{\partial y} + \rho_2 \frac{\partial V_{2x}}{\partial x} + \rho_2 \frac{\partial V_{2y}}{\partial y} = 0 \ ;$$

$$\rho_1\left(\frac{\partial V_{1x}}{\partial t} + V_{1x}\frac{\partial V_{1x}}{\partial x} + V_{1y}\frac{\partial V_{1x}}{\partial y}\right) = -\left(1-\frac{3}{2}\alpha_2\right)\frac{\partial p}{\partial x} - \left(1-\frac{3}{2}\alpha_2\right) n \quad f_{\mu\, x} +$$
$$+\left(1-\frac{1}{2}\alpha_2\right)\rho_1 g_x + \left(1-\frac{3}{2}\alpha_2\right)\frac{\rho_1^0}{2\rho_2^0}\rho_2 g_x;$$

$$\rho_1\left(\frac{\partial V_{1y}}{\partial t} + V_{1x}\frac{\partial V_{1y}}{\partial x} + V_{1y}\frac{\partial V_{1y}}{\partial y}\right) = -\left(1-\frac{3}{2}\alpha_2\right)\frac{\partial p}{\partial y} - \left(1-\frac{3}{2}\alpha_2\right) n \quad f_{\mu\, y} +$$
$$+\left(1-\frac{1}{2}\alpha_2\right)\rho_1 g_y + \left(1-\frac{3}{2}\alpha_2\right)\frac{\rho_1^0}{2\rho_2^0}\rho_2 g_y;$$

$$\rho_2\left(\frac{\partial V_{2x}}{\partial t} + V_{2x}\frac{\partial V_{2x}}{\partial x} + V_{2y}\frac{\partial V_{2x}}{\partial y}\right) = -\frac{3}{2}\alpha_2\left(1-\frac{\alpha_2}{2}\right)\frac{\partial p}{\partial x} + \left(1-\frac{3}{2}\alpha_2\right) n \quad f_{\mu\, x} +$$
$$+\rho_2 g_x + \frac{\alpha_2}{2}\left(1-\frac{\alpha_2}{2}\right)\rho_1 g_x \ ;$$

$$\rho_2\left(\frac{\partial V_{2y}}{\partial t} + V_{2x}\frac{\partial V_{2y}}{\partial x} + V_{2y}\frac{\partial V_{2y}}{\partial y}\right) = -\frac{3}{2}\alpha_2\left(1-\frac{\alpha_2}{2}\right)\frac{\partial p}{\partial y} + \left(1-\frac{3}{2}\alpha_2\right) n \quad f_{\mu\, y} +$$
$$+\rho_2 g_y + \frac{\alpha_2}{2}\left(1-\frac{\alpha_2}{2}\right)\rho_1 g_y \ ;$$

$$\rho_1\left(\frac{\partial e_1}{\partial t}+V_{1x}\frac{\partial e_1}{\partial x}+V_{1y}\frac{\partial e_1}{\partial y}\right)-\frac{\alpha_1 p}{\rho_1^0}\frac{d_1\rho_1^0}{d\ \ t}=$$
$$=\left(\left(1-\frac{3}{2}\alpha_2\right)\ n\ \ \vec{f}_\mu+\frac{\alpha_2}{2}\left(\rho_1\vec{g}-\nabla\ \ p\right)\right)\cdot\left(\vec{V}_1-\vec{V}_2\right)\ ;$$
$$\rho_2\left(\frac{\partial e_2}{\partial t}+V_{2x}\frac{\partial e_2}{\partial x}+V_{2y}\frac{\partial e_2}{\partial y}\right)=0\ ;$$
$$\frac{\partial n}{\partial t}+V_{2x}\frac{\partial n}{\partial x}+V_{2y}\frac{\partial n}{\partial y}=0\quad .$$

Здесь ρ, V_x, V_y, p, e, α, n, $\vec{f}_\mu$, $\vec{g}$ — соответственно, среднеобъёмная плотность, компоненты вектора скорости, общее давление, внутренняя энергия, объёмная концентрация, количество частичек в единице объёма, сила вязкого трения для частички, однородная массовая сила. Нижний индекс " 1 " относится к несущей фазе, " 2 " — к дисперсной фазе частичек, верхний индекс. Первые два уравнения выражают закон сохранения массы для первой и второй фаз, соответственно, третье — шестое — закон сохранения импульса, седьмое — закон сохранения энергии несущей фазы, восьмое — условие отсутствия притока тепла к частицам, девятое — условие сохранения плотности количества неразрушающихся частичек дисперсной фазы. Девятое уравнение эквивалентно второму в силу соотношения $\rho_2 = 4/3\ \pi\ a^3\ \rho_2^0\ n$ и предположения о несжимаемости материала частичек системы. При $\alpha_2 \to 0$ ($\rho_2 \to 0$) эти уравнения переходят в уравнения гидродинамики для гомогенной среды.

Нетрудно убедиться в том, что уравнения движения допускают простейшее решение в виде состояния покоя обеих сред $\vec{V}_{10}=\vec{V}_{20}=0$ с постоянным значением градиента давления, уравновешиваемого силой инерции: $p_0=-(\rho_{10}+\rho_{20})g\ \ y+const$, нижний индекс " 0 " относится к начальным невозмущённым значениям параметров.

Предполагая амплитуды возмущений параметров, описывающих состояния сред, малыми, произведём линеаризацию уравнений движения около начального состояния покоя. Положим, что сила взаимодействия дисперсных частиц с несущей фазой определена формулой Стокса: $\vec{f}_\mu = 6\pi\mu_1 a\left(\vec{V}_1-\vec{V}_2\right)$. В результате получим:

$$\frac{\partial\rho_1'}{\partial\ t}+\rho_{10}\frac{\partial V_{1x}'}{\partial x}+\rho_{10}\frac{\partial V_{1y}'}{\partial y}=0\ ;$$

$$\frac{\partial\rho_2'}{\partial\ t}+\rho_{20}\frac{\partial V_{2x}'}{\partial x}+\rho_{20}\frac{\partial V_{2y}'}{\partial y}=0\ ;$$

$$\rho_{10}\frac{\partial V_{1x}'}{\partial\ t}=-\left(1-\frac{3}{2}\alpha_{20}\right)\frac{\partial p'}{\partial x}-\left(1-\frac{3}{2}\alpha_{20}\right)\ \tilde f_0\left(V_{1x}'-V_{2x}'\right)\ ;$$

$$\rho_{10}\frac{\partial V_{1y}'}{\partial\ t}=-\left(1-\frac{3}{2}\alpha_{20}\right)\frac{\partial p'}{\partial y}-\left(1-\frac{3}{2}\alpha_{20}\right)\ \tilde f_0\ \left(V_{1y}'-V_{2y}'\right)+$$

$$+\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{4}\alpha_{2\,0}+\frac{3}{4}\alpha_{1\,0}\frac{\rho_{2\,0}}{\rho_{1\,0}}\right)\rho_1'g\ ;$$

$$\rho_{2\,0}\frac{\partial V_{2x}'}{\partial\ t}=-\frac{3}{2}\alpha_{2\,0}\left(1-\frac{\alpha_{2\,0}}{2}\right)\frac{\partial p'}{\partial x}+\left(1-\frac{3}{2}\alpha_{2\,0}\right)\ \tilde f_0\left(V_{1x}'-V_{2x}'\right)\ ;$$

$$\rho_{2\,0}\frac{\partial V_{2\,y}'}{\partial\ t}=-\frac{3}{2}\alpha_{2\,0}\left(1-\frac{\alpha_{2\,0}}{2}\right)\frac{\partial p'}{\partial y}+\left(1-\frac{3}{2}\alpha_{2\,0}\right)\ \tilde f_0\left(V_{1y}'-V_{2y}'\right)+$$

$$+\left(1-\frac{3}{2}\alpha_{2\,0}\right)\frac{\rho_{2\,0}}{\rho_{1\,0}}\rho_1'g\ \ ;$$

$$\rho_{1\,0}T_{1\,0}\frac{\partial S'}{\partial\ t}=\frac{\alpha_{2\,0}}{2}\rho_{2\,0}g\left(V_{1y}'-V_{2y}'\right)\ .$$

Здесь $\tilde f_0\equiv 9\mu_1\alpha_{2\,0}/2a^2$, S — энтропия, T — температура, штрих вверху обозначает возмущение соответствующего параметра. Уравнение производства энтропии получается из уравнения притока тепла газовой фазы с использованием соотношения Гиббса $T_1\frac{d_1S}{d\ t}=\frac{d_1e}{d\ t}+p\frac{d_1}{d\ t}\left(\frac{1}{\rho_1^0}\right)$ и соотношения совместного деформирования фаз $\frac{\alpha_1}{\rho_1^0}\frac{d\rho_1^0}{d\ t}=-\nabla\cdot\left(\alpha_1\vec V_1+\alpha_2\vec V_2\right)$.

Учитывая, что $\alpha_1+\alpha_2=1$, (т.е. $\rho_1/\rho_1^0+\rho_2/\rho_2^0=1$), а вещества фаз несжимаемы: $\rho_1^0=const,\quad \rho_2^0=const$, исключим из этой системы ρ_2'. Разыскивая решение линеаризованной системы уравнений для возмущений в виде

$$\rho_1'=\rho_{1\,0}\sum_k R_k\Psi_k\ ;\ V_{1x}'=V_*\sum_k A_k\Psi_k\ ;\ V_{1y}'=V_*\sum_k B_k\Psi_k\ ;$$

$$V'_{2x} = V_* \sum_k D_k \Psi_k \; ; \; V'_{2y} = V_* \sum_k G_k \Psi_k \; ; \; p' = \rho_{1\,0} V_*^2 \sum_k P_k \Psi_k \; ; \qquad (1)$$

$$S' = c_{\text{р}} \sum_k C_k \Psi_k \; ; \; \Psi_k = \exp \; (\gamma_k h y) \;\; \Psi_0 \; ; \; \Psi_0 = \exp(ihx - i\omega \;\; t),$$

где k — индекс типа возмущения, h — волновое число, ω — комплексная частота возмущения, V_* — некоторое характерное значение скорости, получим систему *линейных однородных уравнений* относительно амплитудных констант $R, \; A, \; B, \; D, \; G, \; P, \; C$. Условие существования нетривиального решения этой системы распадается на два.

При

$$\gamma \;\; \alpha_{2\,0} \Gamma \;\; \left(1 - 3\alpha_{2\,0}\right) \neq Z \;\; \left(\alpha_{1\,0} \Omega_2 + \alpha_{2\,0} \Omega_1\right) \frac{\rho_1^0}{\rho_2^0}, \qquad (2)$$

где $\Omega_1 = \frac{3}{2} \alpha_{2\,0} \left(1 - \frac{\alpha_{2\,0}}{2}\right) \; Z - \left(1 - \frac{3}{2} \alpha_{2\,0}\right) \; F$,

$\Omega_2 = \left(1 - \frac{3}{2} \alpha_{2\,0}\right) \left(\frac{\rho_{2\,0}}{\rho_{1\,0}} Z - F\right)$, $Z \equiv \frac{i\omega}{V_* \;\; h}$, $\Gamma \equiv \frac{g}{V_*^2 h}$, $F \equiv \frac{\tilde{f}_0}{\rho_{1\,0} V_* \;\; h}$, приравнивая определитель системы нулю, получим характеристическое уравнение в виде:

$$\gamma_{1,2}^2 = 1.$$

Для этих значений γ имеем:

$$iA_{1,2} + \gamma_{1,2} \;\; B_{1,2} = 0 \,, \; P_{1,2} = \gamma_{1,2} \left(\left(1 + \frac{3}{2} \alpha_{2\,0}\right) Z - \frac{\Omega_2 - \Omega_1}{\Omega_2} F \right) \; B_{1,2} \,,$$

$$iD_{1,2} + \gamma_{1,2} G_{1,2} = 0 \,, \; \Omega_2 G_{1,2} = \Omega_1 B_{1,2} \,, \; R_{1,2} = 0 \,.$$

Вычисляя вихрь векторов скоростей фаз, получим

$$rot \; \vec{V}_1' = 0 \,, \; rot \; \vec{V}_2' = 0$$

Таким образом, *возмущения, соответствующие* $k = 1, \;\; 2$ *являются акустическими, для которых среднеобъёмная плотность фаз не изменяется*, а *возмущённое течение остаётся безвихревым*. Можно утверждать, что характер этих возмущений в двухфазной среде сохраняется таким же, как и в гомогенной среде, в частности, при $\alpha_2 \to \;\; 0$ они переходят в акустические возмущения для несжимаемой жидкости.

При

$$\gamma_3 = Z \frac{\left(\alpha_{1\,0}\Omega_2 + \alpha_{2\,0}\Omega_1\right)}{\alpha_{2\,0}\Gamma\ \left(1-3\alpha_{2\,0}\right)} \frac{\rho_1^0}{\rho_2^0}$$

($k=3$) возмущаются все параметры, а $rot\ \vec{V}'_{1,2} \neq 0$.

Таким образом, *возмущённое течение в двухфазной среде состоит из трёх типов возмущений, а в гомогенной — из двух.*

Сформулируем краевую задачу для возмущений. В области **I** ($y<0$), занятой двухфазной смесью, реализация условия ограниченности возмущений на бесконечности приводит к требованию $\mathrm{Re}(\gamma)>0$, что оставляет две ветви возмущений: $\gamma_1=1$ и γ_3. Возмущения гидродинамических параметров имеют вид:

$$\begin{aligned}
V'_{1x} &= V_*\left(A_{11}\exp(hy)+A_{31}\exp(\gamma_3 hy)\right)\ \Psi_0;\\
V'_{1y} &= V_*\left(B_{11}\exp(hy)+B_{31}\exp(\gamma_3 hy)\right)\ \Psi_0;\\
V'_{2x} &= V_*\left(D_{11}\exp(hy)+D_{31}\exp(\gamma_3 hy)\right)\ \Psi_0;\\
V'_{2y} &= V_*\left(G_{11}\exp(hy)+G_{31}\exp(\gamma_3 hy)\right)\ \Psi_0;\\
P' &= \rho_{1\,0}V_*^2\Psi_0\left(P_{11}\exp(hy)+P_{31}\exp(\gamma_3 hy)\right);\\
\rho'_1 &= \rho_{1\,0}\Psi_0\left(R_{11}\exp(hy)+R_{31}\exp(\gamma_3 hy)\right);
\end{aligned} \tag{3}$$

причём все коэффициенты A_{11}, D_{11}, G_{11}, P_{11} выражаются через B_{11}, а A_{31}, B_{31}, D_{31}, P_{31}, R_{31} удобно выразить через G_{31}.

В области **II** ($y>0$), занятой гомогенной средой, возмущения гидродинамических параметров запишутся так:

$$V'_{\text{г}x} = V_* A_2 \Psi_0 \exp(-hy);\ V'_{\text{г}y} = V_* B_2 \Psi_0 \exp(-hy);$$

$$p'_{\text{г}} = \rho_{\text{г}\,0}\quad V_*^2 P_2 \Psi_0 \exp(-hy), \tag{4}$$

здесь также оставлено только то возмущение, которое ограничено на бесконечности. Возмущённые состояния сред сопрягаются на возмущённой поверхности раздела $y=\varepsilon(x,t)$ посредством граничных условий, которые заключаются в непроницаемости этой поверхности для сред, а также в равенстве нормальных составляющих напряжений:

$$V'_{1y}=\frac{\partial\varepsilon}{\partial\ t};\ V'_{2y}=\frac{\partial\varepsilon}{\partial\ t};\ V'_{г}=\frac{\partial\varepsilon}{\partial\ t};$$

$$p'-p'_{г}+\sigma\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial\ x^2}+\left(\rho_{г\,0}-\rho_0\right)\ g\ \ \varepsilon=0, \qquad (5)$$

где $\rho_0=\rho_{1\,0}+\rho_{2\,0}$, σ — коэффициент поверхностного натяжения. Рассматривая элементарное возмущение поверхности раздела в виде $\varepsilon=E_0\exp\left(ihx-i\omega\ \ t\right)$ и подставляя в граничные условия (5) выражения для возмущений параметров в обеих областях (3–4), получим систему четырёх линейных однородных уравнений относительно четырёх амплитудных констант B_{11}, G_{31}, B_2, E_0, для существования нетривиального решения которой необходимо обращение в нуль определителя. Это приводит к характеристическому уравнению относительно безразмерной "частоты" Z вида:

$$\left[1-Z\frac{Z-\dfrac{\rho_1^0}{\rho_2^0}\dfrac{F}{\alpha_{2\,0}}}{\left(1-\dfrac{3}{2}\alpha_{2\,0}\right)\Gamma}\right]\left\{Z^2\left[1+Z\frac{Z-\left(1-\dfrac{3}{2}\alpha_{2\,0}\right)\left(1+\dfrac{\rho_{1\,0}}{\rho_{2\,0}}\right)\ F}{\alpha_{1\,0}\left(1-\dfrac{3}{2}\alpha_{2\,0}\right)\ \Gamma}\right]-\right.$$

$$\left.-\left(1-\frac{3}{2}\alpha_{2\,0}\right)\left(\Sigma-\frac{\rho_{г\,0}}{\rho_{1\,0}}Z^2\right)\left[1+Z\frac{\alpha_{1\,0}Z-\dfrac{\rho_{1\,0}}{\rho_{2\,0}}\ \ F}{\alpha_{1\,0}\left(1-\dfrac{3}{2}\alpha_{2\,0}\right)\ \Gamma}\right]\right\}=0\ ,$$

где $\Sigma\equiv\dfrac{\rho_{г\,0}-\rho_0}{\rho_{1\,0}}$, $\Gamma-\dfrac{\sigma\ \ h}{\rho_{1\,0}V_*^2}$. Выражения в квадратных скобках, стоящих внутри фигурных, при малых $\alpha_{2\,0}$ близки между собой, а при $\alpha_{2\,0}=0$ равны. Поэтому равенство нулю фигурной скобки определяет "обычный" корень классической неустойчивости Релея — Тейлора:

$$\frac{\rho_{г\,0}+\rho_{1\,0}}{\rho_{1\,0}}Z^2_{гоц}=\ \ \Sigma. \qquad (6)$$

В соответствии с видом возмущений (1) неустойчивые возмущения определены такими значениями Z, для которых $\mathrm{Re}\ \ (Z)\ >\ 0$.

Приравнивая нулю первую квадратную скобку, имеем неустойчивый корень, *присущий только поведению ускоряющейся поверхности раздела двухфазной и гомогенной сред*:

$$Z_{\text{гет}} = \frac{\rho_1^0}{\rho_2^0} \frac{F}{2 \ \alpha_{2\,0}} - \sqrt{\left(\frac{\rho_1^0}{\rho_2^0}\right)^2 \frac{F^2}{4 \ \alpha_{2\,0}^2} + \left(1 - \frac{3}{2}\alpha_{2\,0}\right) \Gamma} \tag{7}$$

который исчезает при исчезновении дисперсной фазы

$(Z \to 0 \quad \textit{при} \quad \alpha_{20} \to 0)$. Отсутствие мнимой части корня определяет *апериодический характер неустойчивости*, как и для классического корня (6). Поверхностное натяжение не влияет на развитие неустойчивых возмущений по этому механизму. Этот корень вызван действием массовой силы, т.к. при $g \to 0$ он исчезает, а естественным стабилизирующим механизмом для него является действие межфазного трения, так что при увеличении вязкости несущей фазы, $\mu_1 \to \infty$, он также исчезает. Если рассмотреть случай, когда двухфазная смесь находится в верхней полуплоскости, то, согласно (2) и (7) гетерогенный механизм неустойчивости (7) существует, если ускорение $\vec{g}$ направлено в сторону гомогенной среды.

Отношение инкрементов нарастания амплитуды для двух упомянутых корней $\Pi \equiv Z_{\text{гет}} / Z_{\text{гоμ}}$ (при отсутствии поверхностного натяжения) определено безразмерным критерием K, который включает в себя ускорение, кинематический коэффициент вязкости несущей фазы, размер частичек, а также безразмерным волновым числом и отношением истинных плотностей фаз:

$$\Pi = \sqrt{\frac{\rho_{\text{г}\,0}}{\rho_{\text{г}\,0} - \rho_0}} \left[\sqrt{K^2 + \left(1 - \frac{3}{2}\alpha_{2\,0}\right)} - K\right], \quad K \equiv \frac{9\mu_1}{4\rho_{1\,0} a^2 \sqrt{gh}} \quad \frac{\rho_1^0}{\rho_2^0}.$$

При увеличении вязкости, либо уменьшении размера частичек, либо увеличении длины волны возмущения, либо уменьшении ускорения доминирующим становится действие “классического” механизма неустойчивости. При изменении параметров в обратном направлении отношение инкрементов двух корней стремится к конечному пределу

$$\sqrt{\left(1 - \frac{3}{2}\alpha_{2\,0}\right) \frac{\rho_{\text{г}\,0}}{\rho_{\text{г}\,0} - \rho_0}}.$$

Как следует из (7), для механизма неустойчивости, связанного с гетерогенностью среды, инкремент нарастания амплитуды для коротких волн неограниченно возрастает при $h \to \infty$. Естественно, что длины волн возмущений должны быть ограничены снизу такими значениями, при которых они сравнимы с размером (радиусом a) дисперсных частичек, когда становятся непригодными сами исходные уравнения движения континуальной модели двухфазной среды. Тогда для “самых быстрорастущих” возмущений, соответствующих этому механизму, можно принять такие значения волнового числа h, для которых $ha \approx 0,1$. Принимая для частичек аэрозоля значения $a = 10^{-5}$ μ, а для ускорения системы $g = 9,8$ μ / ρеê^2, получим для самых быстрорастущих возмущений значение характерного времени роста их амплитуды в e раз: $\tau \approx 10^{-2}$ ρеê. Если положить $g = 10^5$ μ / ρеê, что приблизительно соответствует значению ускорения мельчайшей пелены вторичных капелек при детонации в аэрозолях, то получим $\tau \approx 3 \cdot 10^{-5}$ ρеê, причём в этом случае значения инкрементов нарастания для обоих корней сопоставимы. Это значение сравнимо с величиной времени испарения таких капелек и перемешивания паров горючего с окислителем. Последнее может означать влияние механизма гидродинамической неустойчивости на процесс формирования гомогенной горючей смеси в двухфазной детонации.

Литература

1. Асланов С. К., Гирин А. Г. К построению теории детонации аэрозолей // Физика горения и взрыва. — 1988. — № 4. — С. 101–109.
2. Рудяк В.Я., Исаков Е.Б. Устойчивость течения Пуазейля двухфазной жидкости с неоднородным распределением частиц // ПМТФ. — 1996. — 37, № 1. — С.95–105.
3. Bernicot M., Deheuvels P. A unified model for slug flow generation // Rev. Inst. Fr. Petrole. — 1995. — 50, № 2. — P. 219–236.
4. Yang Y.-q, Chung J.N., Troutt T.R., Crowe C.T. The influence of particles on the spatial stability of two-phase mixing layers // Phys. Fluids. — 1990. — 2, № 10. — P. 1839–1845.
5. Котюсов А.Н., Немцов Б.Е. Неустойчивость равномерного распределения твёрдых частиц в потоке газа // Изв. ВУЗов. Радиофиз. — 1990. — 33, № 12. — С. 1320–1326.
6. Ентов В.М. О неустойчивом вытеснении в пористой среде // Сб. науч. тр. Моск. ин-та нефти и газа. — 1991. — № 228. — С. 74–84.
7. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Гидродинамика. — М.: Наука. 1986. — 736 с.
8. Нигматулин Р. И. Динамика многофазных сред. — М.: Наука, 1987. — Ч. 1. — 464 с.

О. Г. Гирін

Про гідродинамічну нестійкість поверхні поділу гомогенного та двофазового середовищ, що прискорюється

АНОТАЦІЯ

Розглянуто задачу про гідродинамічну нестійкість плоскої поверхні поділу двох середовищ, що рухаються з прискоренням $\vec{g}$, у випадку, коли одна з них є однородною ідеальною нестисливою рідиною, а інша — двофазовою монодисперсною аеросумішшю. Визначено, що використовувана система рівнянь, що описують рух двофазової суміші, має три типа збурень. Методом малих збурень знайдено існування нестійкого кореня характеристичного рівняння, який пов'язаний з дією масової сили (при $g \to 0$ він зникає) у двофазовому середовищі (при зникненні дисперсної фази він також зникає), а природним стабілізуючим механізмом для нього є дія міжфазного тертя, тому при збільшенні в'язкості несучої фази, $\mu_1 \to \infty$, він також зникає. При збільшенні в'язкості, або зменшенні розміру частинок, або зменшенні хвильового числа збурення, або збільшенні прискорення домінуючою стає дія "класичного" механізму нестійкості Релея — Тейлора.

Girin A. G.

About hydrodynamic instability of accelerating surface of separation between homogenious and two-phase media

SUMMARY

The problem of hydrodynamic instability of plane surface, which separates two media moving with acceleration $\vec{g}$, is considered in the case when one of those media is homogeneous ideal incompressible fluid while another is two-phase monodisperse aerosol. It is determined, that system of equations of motion for two-phase medium possesses three types of disturbances. It is found by the small perturbations method the existence of unstable root of characteristic equation, which is connected with the action of mass force (at $g \to 0$ it vanishes) in two-phase medium (when disperse phase is disappeared it disappears too), and the action of interphase friction is the natural stabilizing mechanism for it, so, as viscosity of dispersive phase increases, $\mu_1 \to \infty$, it disappears too. As viscosity increases, or size of particles decreases, or wavenumber of disturbance decreases, or acceleration increases the action of "classic" mechanism of Rayleigh — Taylor instability becomes dominant.