Вiсник Одеськ. нац. ун-ту. Матем. i мех. – 2012 . – Т. 17, вип. 3 (15). – С. 99–106

УДК 539.1

Н. Д. Вайсфельд, А. В. Реут
Одесский национальный университет имени И. И. Мечникова

ОСЕСИММЕТРИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ КРУГОВОГО КОНУСА С ОСТРИЕМ ПРИ УЧЕТЕ ЕГО СОБСТВЕННОГО ВЕСА

Вайсфельд Н. Д., Реут А. В. Вiсесиметрична задача теорiї пружностi для кругового конуса з вiстрем при врахуваннi його власної ваги. Метод розв'язання базується на редукцiї вихiдної крайової задачi методом iнтегральних перетворень до векторної крайової задачi. Особливiсть застосування iнтегрального перетворення полягає в тому, що воно застосовується безпосередньо до рiвнянь Ламе. Векторна задача розв'язується точно з використанням апарата матричного диференцiального числення.
Ключовi слова: круговий конус, векторна крайова задача, iнтегральне перетворення.

Вайсфельд Н. Д., Реут А. В. Осесимметричная задача теории упругости для кругового конуса с острием при учете его собственного веса. Метод решения базируется на сведении исходной задачи методом интегральных преобразований к векторной краевой задаче. Особенность применения интегрального преобразования состоит в том, что оно применяется непосредственно к уравнениям Ламе. Векторная задача решается точно с использованием аппарата матричного дифференциального исчисления.
Ключевые слова: круговой конус, векторная краевая задача, интегральное преобразование.

Vaysfeld N. D., Reut A. V. Axisymmetric problem of elasticity for a circular cone with a edge, taking into account its own weight. The solving method is based on the reduction of the initial boundary problem with the integral transformations' method to the vector boundary problem. The feature of the transformation application consists of the directly applying of the transformations to the Lame's equations. The vector boundary problem is solved exactly with the use of the matrix differential calculus.
Key words: circular cone, vector boundary value problem, the integral transformation.

Введение. Часто встречающейся задачей инженерной практики является пенетрация обьекта, возникающая при производстве различного вида деталей. При этом требуется учет собственного веса объекта пенетрации. Математические модели таких задач встречаются нечасто [1, 2], что обьясняется как геометрической сложностью обьекта (наличие острия, необходимость привлечения сферической системы координат), так и математическими проблемами, связанными с характером краевых условий, задаваемых на конической поверхности тела. Новый подход к решению такого рода задач предложен в [3]. На основе него в предлагаемой работе строится точное решение задачи о напряженном состоянии конуса с острием, на конической поверхности которого заданы условия скользящей заделки.

1. Постановка задачи.

Упругий (коэффициент Пуассона μ, модуль сдвига G) конус, ось которого направлена вниз, и занимаемая им область в сферической системе координат определена соотношениями

$$0 \le r \le a, 0 \le \theta \le \omega, -\pi \le \varphi \le \pi. \tag{1}$$

На сферической поверхности $r = a, 0 \le \theta \le \omega$ заданы напряжения

$$\sigma_r(a,\theta) = 0, \tau_{r\theta}(a,\theta) = 0. \tag{2}$$

На конической поверхности $0 \le r \le a, \theta = \omega$ выполнены условия скользящей заделки:

$$V(r,\omega) = 0, \tau_{r\theta}(r,\omega) = 0. \tag{3}$$

Смещения $U(r,\theta) = 2GU_r(r,\theta)$ и $V(r,\theta) = 2GU_\theta(r,\theta)$ удовлетворяют уравнениям Ламе:

$$(r^2U')' - 2U + \frac{1}{\mu_*}\frac{(\sin\theta U)^\bullet}{\sin\theta} - \frac{\mu'}{\mu_*}\frac{(V\sin\theta)^\bullet}{\sin\theta} + \frac{\mu_0}{\mu_*}r\frac{(V'\sin\theta)^\bullet}{\sin\theta} = -\frac{2r^2}{\mu_*}q_r(r,\theta),$$

$$(r^2V')' + \mu_*[\frac{(\sin\theta V^\bullet)^\bullet}{\sin\theta} - \frac{V}{\sin^2\theta}] + \mu_0 rU^\bullet + 2\mu_*U^\bullet = -2r^2q_\theta(r,\theta). \tag{4}$$

Здесь $q_r(r,\theta) = -\gamma\cos\theta, q_\theta = -\gamma\sin\theta, \gamma$ — удельный вес материала конуса, $\mu_0 = (1-2\mu)^{-1}, \mu_* = 2(1-\mu)\mu_0, \mu' = 2 + \mu_0$.

Требуется построить решение краевой задачи (2)-(4), регулярное при r=0 в области (1).

2. Сведение поставленной задачи к одномерной. Применим к уравнениям (4) интегральное преобразование Г. Я. Попова [3] по схеме

$$\begin{aligned} U_k(r) &= \int_0^\omega P_{\nu_k}(\cos\theta)\sin\theta U(r,\theta)d\theta, \\ V_k(r) &= \int_0^\omega P^1_{\nu_k}(\cos\theta)\sin\theta V(r,\theta)d\theta \end{aligned} \tag{5}$$

с формулами обращения

$$\begin{aligned} U(r,\theta) &= \sum_{k=0}^\infty U_k(r)\frac{P_{\nu_k}(\cos\theta)}{||P_{\nu_k}(\cos\theta)||^2}, \\ V(r,\theta) &= \sum_{k=1}^\infty V_k(r)\frac{P^1_{\nu_k}(\cos\theta)}{||P_{\nu_k}(\cos\theta)||^2}. \end{aligned} \tag{6}$$

Здесь $\nu = \nu_k$ — корни трансцендентного уравнения

$$P^1_\nu(\cos\omega) = 0, \nu = \nu_k, k = 0,1,2.... \tag{7}$$

С учетом краевых условий (3), переформулированных в терминах смещений, уравнения Ламе (4) примут вид

$$\begin{aligned} &(r^2U_k'(r))' - 2U_k(r) - \mu_*^{-1}[N_\nu U_k(r) - \mu' V_k(r) + \mu_0 r V_k^1(r)] = f_k^1(r), \\ &(r^2V_k'(r))' - \mu_* N_\nu V_\nu(r) + \mu_0 r N_\nu U_k'(r) + 2\mu_* N_\nu U_k(r) = f_k^2(r), \end{aligned} \tag{8}$$

где $N_v = \nu_k(\nu_k+1), f_k^1(r) = -2\mu_*^{-1}r^2\int_0^\omega \sin\theta q_r(r,\theta)P_{v_k}(\cos\theta)d\theta$,
$f_k^2(r) = -2r^2\int\limits_0^w \sin\theta q_\theta(r,\theta)P_{\nu_k}^1(\cos\theta)d\theta$. Краевые условия (2), сформулированные в терминах смещений, запишутся следующим образом

$$\begin{aligned} &(1-\mu)aU_k^{'}(a)+2\mu U_k(a)-\mu V_k(a)=0,\\ &aV_k^{'}(a)-V_k(a)+N_kU_k(a)=0. \end{aligned} \tag{9}$$

Требуется найти регулярное в нуле решение краевой одномерной задачи (8), (9).

3. Сведение одномерной краевой задачи к векторной краевой задаче и ее решение.

Сделаем замену переменных $r=a\rho, \rho=\frac{r}{a}, p\in[0;1]$. Введем обозначения $U_k(r)=U_k(a\rho)=\widetilde{U_k}(\rho), V_k(r)=V_k(a\rho)=\widetilde{V_k}(\rho)$, а также введем вектора $\overline{f_k}(\rho) = = \begin{pmatrix} \widetilde{f_k^1(\rho)} \\ \widetilde{f_k^2(\rho)} \end{pmatrix}$ и $\overline{y_k}(\rho) = \begin{pmatrix} \widetilde{U_k}(\rho) \\ \widetilde{V_k}(\rho) \end{pmatrix}$, $\widetilde{f_{k_1}^1}(\rho)=f_k^1(a\rho), \widetilde{f_k^2}(\rho)=f_k^2(a\rho)$. Тогда систему уравнений (8) можно записать в виде векторного уравнения

$$[\rho^2\overline{y_k^{'}}(\rho)]^{'}+\rho\mu_0 Q\overline{y_k^{'}}(\rho)+p\overline{y_k}(\rho)=\overline{f_k}(\rho), \tag{10}$$

где Q и P — матрицы порядка 2x2.

$$Q=\begin{pmatrix} 0 & -\mu_*^{-1} \\ N_k & 0 \end{pmatrix}, P=\begin{pmatrix} -2-\mu_*^{-1}N_k & \mu_*^{-1}N_k \\ 2\mu_*N_k & -\mu_*N_k \end{pmatrix}.$$

Граничные условия (9) сформулируем в виде краевого функционала

$$\begin{aligned} &V[\overline{y}(\rho)]=B\overline{y}^{'}(1)+A\overline{y}(1)=0,\\ &B=\begin{pmatrix} 1-\mu & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A=\begin{pmatrix} 2\mu & -\mu \\ N_k & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Окончательный вид векторной краевой задачи в пространстве трансформант будет следующим

$$\begin{cases} L_2[\overline{y_k(p)}]=\overline{f_k}(\rho), \rho\in(0,1), \\ V[\overline{y_k}(p)]=0. \end{cases} \tag{11}$$

4. Решение векторной задачи для случая $k=0$.

В этом случае лишь $U_0(\rho)\neq 0$, потому требуется решить следующую задачу

$$\begin{cases} [\rho^2\widetilde{U}_0^{'}(\rho)]^{'}-2\widetilde{U}_0(\rho)=\widetilde{f_0^1}(\rho), \rho\in[0,1], \\ 2\mu\widetilde{U}_.(1)+(1-\mu)\widetilde{U_0^{'}}(1)=0. \end{cases} \tag{12}$$

Данное уравнение — это уравнение Эйлера, решение которого строим как сумму общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного. Легко проверить, что

$$\widetilde{U}_0(\rho)=D\rho+a\rho^2 q_{r_0}(\rho) \tag{13}$$

$q_0(\rho) = -2\int_0^{\omega} \frac{\sin\theta q_r(r,\theta)}{\mu_*} d\theta$. Удовлетворив граничному условию в (12) найдем вид постоянной D. Тогда окончательное решение задачи (12) запишется так:

$$\begin{aligned} &\widetilde{U_0}(\rho) = -\tfrac{a^2 q_0}{2}[\tfrac{\rho}{1+\mu} - \tfrac{\rho^2}{2}], \sigma_{\theta 0}(\rho) = \tfrac{a q_0(\rho)}{4(1-2\mu)(1-\cos\omega)}[2-(1+2\mu)\rho],\\ &q_0(p) = \tfrac{\gamma}{2\mu_*}(1-\cos 2\omega). \end{aligned} \tag{14}$$

5. Решение векторной краевой задачи для случая $k \geq 1$.

В этом случае сначала следует решить однородное матричное уравнение

$$L_2[Y(\rho)] = 0, 0 < \rho < 1 \tag{15}$$

и построить его решение, регулярное при $\rho = 0$, где $Y(\rho)$ — матрица порядка 2x2. Решение согласно подхода предложенного в [4], будем искать в виде $Y(\rho) = \rho^s I$, где I — единичная матрица. Подстановка его в уравнение (15) приведет к результату:

$$L_2[\rho^s I] = M(s)p^s. \tag{16}$$

Откуда согласно (16) решение уравнения (15) будет иметь вид

$$Y(\rho) = \frac{1}{2\pi} \oint_c \rho^s \frac{M^c(\rho)}{\Delta(s)} ds. \tag{17}$$

Тут приняты следующие обозначения:

$$\Delta(s) = s^4 + 2s^3 - (2N_k+1)s^2 - 2(N_k+1)s - N_k(N_k-2), \tag{18}$$

$$M(s) = \begin{pmatrix} s(s+1) - 2 - \mu_*^{-1} N_k & -\mu_*^{-1} s\mu_0 + \mu_*^{-1}\mu' \\ s\mu_0 N_k + 2\mu_* N_k & s(s+1) - \mu_* N_k \end{pmatrix},$$

$$M^{-1}(s) = M^c(s)[\Delta(s)]^{-1}, M^c(s) = \begin{pmatrix} s(s+1) - \mu_* N_k & \mu_*^{-1}(\mu_0 s - \mu') \\ -\mu_0 N_k s - 2\mu_* N_k & s(s+1) - 2 - \mu_* N_k \end{pmatrix}.$$

c — замкнутый контур, окружающий нули знаменателя $\Delta(s) = 0$, которые находятся точно

$$s_1 = \nu + 1, s_2 = \nu - 1, s_3 = -\nu, s_4 = -\nu - 2. \tag{19}$$

Учитывая требование регулярности решения в нуле по теореме о вычетах, вычислим интеграл в (17) по контуру, содержащему простые нули $s = \nu + 1$ и $s = \nu - 1$. Это приведет к решению вида

$$Y(\rho) = \rho^{\nu+1} R_{\nu+1} A(\nu) - \rho^{v-1} R_\nu B(\nu), \tag{20}$$

где

$$R_\nu = [(2\nu+1)(2\nu-1)2]^{-1},$$

$$A(\nu) = \begin{pmatrix} 2(\nu+1) - \mu_0 N_\nu & \mu_*^{-1}(\mu_0\nu - 2) \\ -\mu_0 N_\nu(\nu+\chi+2) & \mu_1 N_k + 2\nu \end{pmatrix},$$

$$B(\nu) = \begin{pmatrix} -\mu_0 N_\nu - 2\nu & 2 - \mu_1\nu \\ \mu_0 N_\nu(\nu+\chi) & \mu_1 N_\nu - 2(\nu+1) \end{pmatrix}, \mu_1 = \frac{1}{2(1-\mu)}.$$

В приведенных формулах под ν следует понимать собственные числа ν_k, $k = 1, 2 ....$

Построение частного решения уравнения (11) проведем без использования аппарата функции Грина, для чего отыщем решение уравнения по виду правой части:

$$\widetilde{U}_k(\rho) = D_1\rho^2, \widetilde{V_k}(\rho) = D_2\rho^2, \tag{21}$$

где D_1, D_2 — неизвестные постоянные. Подставив представление (21) в краевые условия (11) получим систему линейных алгебраических уравнений относительно D_1, D_2. Их вид следующий

$$\overline{D} = \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \end{pmatrix} = \frac{a}{\mu_*(N_k - 12)(N_k - 2)} \begin{pmatrix} -\mu_0(f_k^2 + l_k + 2f_k^2 - 6l_k - lkN_k \\ -4\mu_0(f_k^2 + l_kN_k) - 4f_k^2 - 2l_k + f_k^2 N_k \end{pmatrix},$$

$$l_k = \mu_* N_k.$$

Частное решение уравнения (17) примет вид

$$\overline{y_r}(\rho) = \rho^2 \overline{D}. \tag{22}$$

Тогда общее решение неоднородного уравнения (11) запишется в виде суммы решений, определяемых формулами (20) и (22):

$$\overline{y}(\rho) = Y(\rho) \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} + \rho^2 \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \end{pmatrix}. \tag{23}$$

С тем, чтобы найти неизвестные постоянные C_1 и C_2 удовлетворим краевым условиям при $\rho = 1$ и решим полученную систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = R_\nu^{-1} z_\nu^{-1},$$

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} N & -1 \\ 2\mu & -\mu \end{pmatrix}, \widetilde{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-\mu & 0 \end{pmatrix},$$

$$b_\nu = R_\nu^{-1} R_{\nu+1}(\widetilde{A}D + 2\widetilde{B}D), \tag{24}$$

$$z_\nu = \widetilde{A}[b_\nu A_+(\nu) - B_+(\nu)] + \widetilde{B}[(v+1)b_\nu A_+(\nu) - (v-1)B_+(\nu)].$$

Таким образом, трансформанты смещений, которые являются решениями краевой задачи (11) найдены точно по формулам (22)-(24).

С тем, чтобы получить решение задачи в оригиналах применим к трансформантам $\widetilde{U_k}(\rho), \widetilde{V_k}(\rho)$ обратное интегральное преобразование (6), (7) соответственно. Полученные при этом ряды нужно исследовать при больших значениях индекса суммирования k.

Как установлено ранее в [5] асимптотика собственных чисел преобразования $\nu = \nu_k$ определяется соотношением

$$v_k \sim \frac{\pi k}{\omega}, k = 0, 1, 2, ... \tag{25}$$

Использование асимптотических формул для определения характера поведения присоединенных функций Лежандра при больших значениях порядка приводит к определению асимптотического поведения соотношений:

$$\begin{aligned}\frac{P_\nu(\cos\theta)}{\|P_\nu(\cos\theta)\|^2} &= \frac{\sqrt{2\pi}\nu^{-1/2}\cos[(\nu+1/2)\theta-\frac{\pi}{4}]}{\omega\sqrt{\sin\theta}}[1+0(\tfrac{1}{\nu})],\\ \frac{P^1_\nu(\cos\theta)}{\|P^1_\nu(\cos\theta)\|^2} &= \frac{\sqrt{2\pi}\nu^{-1/2}}{\omega\sqrt{\sin\theta}}\cos((\nu+\tfrac{1}{2})\theta+\tfrac{\pi}{4})[1+0(\tfrac{1}{\nu})].\end{aligned} \tag{26}$$

Подставив в (26) асимптотическое разложение корней ν_k получим

$$\frac{P_\nu(\cos\theta)}{\|P_\nu(\cos\theta)\|^2} = \sqrt{k}\frac{\pi}{\omega^{3/2}\sqrt{\sin\theta}}[\cos\frac{k\pi}{\omega}\theta(\cos\frac{\theta}{2}+\sin\frac{\theta}{2})+$$

$$+\sin\frac{k\pi}{\omega}\theta(\cos\frac{\theta}{2}-\sin\frac{\theta}{2})](1+0(\frac{1}{k})),$$

$$\frac{P^1_\nu(\cos\theta)}{\|P^1_\nu(\cos\theta)\|^2} = k^{1/2}\frac{1}{\sqrt{\omega\sin\theta}}[\cos\frac{k\pi}{\omega}\theta(\cos\frac{\theta}{2}-\sin\frac{\theta}{2})+$$

$$+\sin\frac{k\pi}{\omega}\theta(-\cos\frac{\theta}{2}-\sin\frac{\theta}{2})](1+0(\frac{1}{k})). \tag{27}$$

Отыскав асимптотические разложения трансформант $\widetilde{U_k}(\rho), \widetilde{V_k}(\rho)$ и подставив их, а также соотношения (27) в формулу обратного преобразования учтем, что ряды, состоящие из асимптотик, сходятся по признаку Лейбница, а значит численное суммирование рядов, от которых взята асимптотика — законно.
Окончательно получаем расчетные формулы для смещений в виде:

$$\widetilde{U}(\rho,\theta) = U_0(\rho,\theta) + \frac{\gamma a^2}{\pi^2}\omega\sqrt{\frac{\sin\omega}{\sin\theta}}\sin\omega h(\omega)*$$

$$*\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k k^{-3}B^+(k,\theta)\left\{\rho^{\frac{k\pi}{\omega}}\frac{a^2}{2}(\rho+\rho^{-1}q(\mu))-2\rho^2\right\},$$

$$\widetilde{V}(\rho,\theta) = \frac{\gamma a^2}{\pi^2}\omega\sqrt{\frac{\sin\omega}{\sin\theta}}\sin\omega h(\omega)\sum_{k=1}^{\infty}(-1)k^{-3}B^-(k,\theta)\rho^{\frac{k\pi}{w}}(\rho+\rho^{-1}\frac{1}{2}q(\mu)),$$

$$h(\omega) = \cos\frac{w}{2}+\sin\frac{w}{2}; q(\mu) = \frac{(4\mu-3)(1-\mu)+2\mu(1-2\mu)}{5\mu-3},$$

$$B^{\pm}(k,\theta) = \cos(\frac{k\pi}{\omega})\theta(\cos\frac{\theta}{2}\pm\sin\frac{\theta}{2})+\sin\frac{k\pi}{\omega}\theta(\pm\cos\frac{\theta}{2}-\sin\frac{\theta}{2}). \tag{28}$$

Если угол раствора конуса положить равным $\omega = \frac{\pi}{2}$, то задача сведется к отысканию напряженного состояния шара. Такая задача была рассмотрена в работе [6]. Предложенный здесь подход позволит получить решение такой задачи как решение частного случая исходной. В этом случае корни трансцендентного уравнения $P_\nu^1(\cos\omega) = 0, \nu = \nu_k, k = 0, 1, 2...$ находятся в явном виде. Уравнение для определения корней переходит в уравнение вида

$$P_\nu^1(0) = 0.$$

Воспользуемся представлением присоединенной функции Лежандра через гамма-функцию

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\cos(\frac{\pi}{2} + \nu\frac{\pi}{2})\frac{\Gamma(1+\frac{\nu}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{\nu}{2})} = 0. \tag{29}$$

Серия корней определяется равенством $\cos(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\nu) = 0, v = 2k, k = 0, 1, 2....$
Из равенства $\Gamma(1+\frac{\nu}{2}) = 0$ вытекает, что $\nu < -2$. Кроме того, область допустимых решений уравнения (29) должна удовлетворить требованию $\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{\nu}{2}) \neq 0$, из чего следует, что $\nu > -1$. Таким образом, корни $\nu = 2k, k = 0, 1, 2...$ удовлетворяют этому требованию.
Как указано в [1], в этом случае вместо интегрального преобразования (6, 7) можно применить интегральное преобразование, ядром которого будут многочлены Гегенбауэра, так как для целых значений $\nu = \nu_k = 2k, k = 0, 1, 2...$ функции Лежандра можно представить в виде:

$$P_{2k}(x) = C_{2k}^{1/2}(x), P_{2k}^1(x) = \frac{C_{2k+1}^{-1/2}(x)}{2k(2k+1)}.$$

Все формулы асимптотик в этом случае существенно упрощаются.

$$\sigma_\theta(\rho, \frac{\pi}{2}) = \sigma_{0\theta}(\rho,\theta) + \frac{\gamma a}{\rho(1-2\mu)\pi}\left\{\sum_{k=1}^{\infty} k^{-3}[m_k(\rho) - 2\rho^2] + \right.$$

$$\left. +\mu\sum_{k=1}^{\infty} k^{-3}[m_k(\rho) - 4\rho^2] - (1-\mu)\sum_{k=1}^{\infty} k^{-3} m_k(\rho)\right\}. \tag{30}$$

Выражение $\sigma_{o\theta}(\rho,\theta)$ в виду громадности здесь не приводим.

Заключение.

1. Получено точное решение осесимметричной задачи для конуса с острием с учетом собственного веса при выполнении условий скользящей заделки на конической поверхности.

2. Построено точное решение осесимметричной задачи для полушара с учетом собственного веса тела, полученное из решения исходной задачи в случае, когда угол раствора конуса $w = \frac{\pi}{2}$.

3. Предложенный подход позволяет решить осесимметричную задачу для дважды усеченного по сферическим поверхностям конуса, с учетом его собственного веса.

1. **Попов Г. Я.** Об осесимметричных задачах теории упругости для усеченного полого конуса [текст] / Г. Я. Попов // Прикладная математика и механика. – 2005. – Т. 69, № 3. – С. 458–468.
2. **Александров В. М.** Неклассические пространственные задачи механики контактных взаимодействий упругих тел [текст] / В. М. Александров, Д. А. Пожарский. – Москва: Факториал. – 1998. -– 588 с.
3. **Popov G. Ya.** Exact Solution of the Mixed Boundary-Value problem of the Theory of Elasticity for a Wedge-Shaped Plate ofFinite Length [text] / G. Ya. Popov, C. Kebli // Doklady Physics. – 2011. – V. 56, No 3. – P. 167-173.
4. **Попов Г. Я.** О новых преобразованиях разрешающих уравнений теории упругости и новых интегральных преобразованиях и их применении к краевым задачам механики [текст] / Г. Я. Попов // Прикладная механика. — 2003. — Т. 39. – № 12. – С. 46–73.
5. **Бейтмен Г.** Высшие трансцендентные функции [текст] / Г. Бейтмен, А. Эрдейи. – М.: Наука, 1965. — 340 с.
6. **Бондарева В. Ф.** О действии осесимметричной нормальной нагрузки на упругий шар [текст] / В. Ф. Бондарева // Прикл. математика и механика. – 1969. – Т. 33. – Вып. 6. – С. 1029–2033.