

Одеський національний університет імені І. І. Мечникова
Факультет математики, фізики та інформаційних технологій
Кафедра комп'ютерної алгебри та дискретної математики

Дипломна робота

на здобуття ступеня вищої освіти «магістр»

на тему: «**Узагальнена теорема Kátai-Subbarao**»

«Generalized theorem Kátai-Subbarao»

Виконав: студент денної форми навчання
спеціальності 111 Математика

Сухінін Артем Олександрович

Керівник: д. ф.-м. н., проф. Варбанець П. Д.

Рецензент: к. ф.-м. н., доц. Савастру О. В.

Рекомендовано до захисту:
Протокол засідання кафедри
№ ____ від «____» _____ р.
Завідувач кафедри

Захищено на засіданні ЕК № _____

Протокол № ____ від «____» ____ р.

Оцінка _____ / _____ / _____

Голова ЕК

ЗМІСТ

Вступ	3
1 Допоміжні відомості	6
1.1 Леми для основного результату	6
1.2 Леми для оцінок суматорних функцій	10
2 Оцінки суматорних функцій	16
3 Основна теорема	25
Висновки	36
Список літератури	38

ВСТУП

Робота присвячена вивченню та побудуванню асимптотичних формул для суматорних функцій, що визначені на основі спеціального класу арифметичних функцій. Результатом є узагальнення досягнень Катаї та Суббарао [10].

Арифметичною функцією називається будь-яка функція f , яка визначена на множині натуральних чисел $\mathbb{N}$ та приймає значення в множині комплексних чисел $\mathbb{C}$.

$$f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$$

Відповідною сумматорною функцією є $A_f(x) = \sum_{n \leq x} f(n)$.

Арифметична функція $f(n)$ називається мультиплікативною, якщо

$$f(n_1 \cdot n_2) = f(n_1) \cdot f(n_2), (n_1, n_2) = 1$$

Нехай $e(n)$ - довільна арифметична функція. Будемо вважати, що $e(n) \geq 0$, $e(n) \leq n^\varepsilon$ для кожного малого ε . Отже, ряд $\sum_1^\infty \frac{e(n)}{n^s}$ збігається абсолютно в напівплощині $\Re(s) > 1$ і виконується наступна рівність:

$$\prod_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{e(n)}{n^s}\right)^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} \quad (1)$$

де нескінченний добуток і ряд також збігаються абсолютно в напівплощині $\Re(s) > 1$.

Така рівність не є рідкістю в аналітичній теорії чисел. Наприклад, визначимо $e(n)$ наступним чином

$$e(n) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } n - \text{просте число} \\ 0, & \text{в інших випадках} \end{cases}$$

Тоді рівність (1) представляє тотожність Ейлера, яка визначає дзета-функцію Рімана $\zeta(s)$.

В роботі Мак Магона [14], була введена арифметична функція $X(n)$,

яка визначала кількість мультиплікативних розкладів числа n . Також він зазначив, що функція $X(n)$ має наступну твірну функцію

$$G(s) = \sum_{n=1}^{\infty} X(n)n^{-s} = \prod_{m=2}^{\infty} (1 - m^{-s})^{-1}, \quad \Re(s) > 1$$

Використовуючи це відношення Оппенгейм в своїх роботах [15], [16] визначив асимптотичну формулу для відповідної суматорної функції

$$\sum_{n \leq x} X(n) = \frac{x e^{2\sqrt{\ln x}}}{2\sqrt{\pi}(\ln x)^{3/4}} \left\{ 1 + \sum_{k=1}^{N-1} \frac{\varepsilon_k}{(\ln x)^{k/2}} + O_N \left(\frac{1}{(\ln x)^{N/2}} \right) \right\},$$

де ε_k - це обчислювальні константи для кожного N і всіх великих x . Також Оппенгейм отримав кращу апроксимацію

$$\sum_{n \leq x} X(n) = x \sum_{k=0}^{\infty} d_k \frac{I_{k+1}(2\sqrt{\ln x})}{(\sqrt{\ln x})^{k+1}} + O \left(x \frac{e^{\sqrt{\ln x}}}{(\ln x)^{3/8}} \right)$$

де $I_k(z)$ - функції Беселля першого роду і числа d_k - коефіцієнти в розкладі в ряд Тейлора

$$\frac{G(s)}{s} e^{-1/(s-1)} = \sum_{k=0}^{\infty} d_k (s-1)^k, \quad |s-1| < \frac{1}{2}.$$

Також, в роботі Мак Магона [14] було зазначено, що розклад числа у задану кількість множників може бути вивчений за допомогою функції

$$\prod (1 + an^{-s}) \tag{2}$$

В даній роботі буде розглянуто узагальнення функції (2), яка зв'язана з довільною арифметичною функцією $g(n)$ наступною рівністю

$$\prod_{n=2}^{\infty} \left(1 + \frac{e(n)}{n^s} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g(n)}{n^s}, \quad \Re(s) > 1$$

та побудована асимптотична формула для $A_g(x)$ відносно загального твірного ряду

$$G(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g(n)}{n^s}, \quad \Re(s) > 1$$

ВИСНОВКИ

Отже, для спеціального класу арифметичних функцій, а саме функцій що задовільняють умові

$$\prod_{n=2}^{\infty} \left(1 + \frac{e(n)}{n^s} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$$

побудована асимптотична формула для суматорної функції

$$A_f(x) = \sum_{n \leq x} f(n),$$

що узагальнює результат Катаі і Суббарао:

$$A_f(x) = \sum_{n \leq x} f(n) = x \sum_{j=0}^k D_j \exp \left(\gamma_j (\ln x)^{-\frac{\beta_j}{\beta_j+1}} (1 + O((\ln x)^{-\varepsilon_0})) \right),$$

де D_j - обчислювальні позитивні сталі, а $\varepsilon_0 \geq \frac{1}{l} \min_j \left(\frac{\beta_j}{\beta_j+1} \right)$.

Також покращений результат Опенгейма для мультиплікативної функції розбиття, а саме

$$G(s) = \sum_{n=1}^{\infty} X(n) n^{-s} = \prod_{m=2}^{\infty} (1 - m^{-s})^{-1}, \quad \Re(s) > 1$$

$$\sum_{n \leq x} X(n) = x \sum_{k=0}^{\infty} d_k \frac{I_{k+1}(2\sqrt{\ln x})}{(\sqrt{\ln x})^{k+1}} + O \left(x e^{-A\sqrt{\ln x}} \right).$$

де I_k - функції Беселя.

Була розглянута арифметична функція $q(n)$, яка задовільняє рівності

$$F(s) = 1 + \sum_2^{\infty} \frac{q(n)}{n^s} = \prod_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n^s} \right).$$

та відповідна суматорна функція

$$Q(x) = \sum_{n \leq x} q(n) .$$

Отриманий результат

$$Q(x) = \sum_{l=0}^t d_l \cdot (\sqrt{x_1})^{-(l+1)} I_{-(l+1)}(2\sqrt{x_1}) + O\left(x \cdot (\sqrt{x_1})^{-(t+2)}\right) ,$$

де I_ν - функції Беселля.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Карацуба А. А. Основы аналитической теории чисел / А. А. Карацуба // М.: Наука, 1983. – 240 с.
2. Прахар К. Распределение простых чисел / К. Прахар // М.: Мир, 1967. – 513 с.
3. Чанга М. Е. Методы аналитической теории чисел. — М.: МЦНМО, 2019. — 208 с. ISBN 978-5-4439-1394-0.
4. Apostol, T.M. Introduction to Analytic Number Theory. Springer, New York, (1976)
5. Chandrasekharan, K., Arithmetical Functions, Springer-Verlag, Berlin, 1970.
6. E. R. Canfield, P. Erdos and C. Pomerance, On a problem of Oppenheim concerning Factorisatio Numerorum, J. Number Theory, 17 (1983), 1–28.
7. G. N. Watson, A Treatise on the Theory of Bessel Functions (2nd edition), Cambridge University Press (Cambridge, 1944).
8. Harris, V.C. and Subbarao, M.V. On product partitions of integers. Canadian Mathematical Bulletin, 34(4):474–479,(1991).
9. Ivic, A. (1985). The Riemann zeta-function. Theory and Applications, New York — Wiley, 517 p.
10. I. Katai and M. V. Subbarao On product partitions and asymptotic formulas, Proc. Of the Intern. Conference on analytic number theory, Bangalore, India. December 13-15, 2003. Mysore: Ramanujan Math. Soc., Ramanujan Math. Soc. Lecture Notice. (2006), no. 2, 99–114.
11. Kaneiwa, Ryuji. On the multiplicative partition function. Tsukuba J. Math. 7 (1983), no. 2, pp. 355–365.
12. K. Broughan, Quadrafree factorization numerorum, Rocky Mountain J. Math. (2014), no. 40(3), 791–807.
13. M. V. Subbarao and A. Verma, Some remarks on a product expansion: an unexplored partition function, in: Conference on Number Theory etc. (Gainesville, Florida, 1999), Valter.
14. Mac Mahon P. Diruhlet series and theory of partitions [text] // P. Mac Mahon // Proc. London Math. Soc. 2 . – 1924. – 22. – P. 401–411.

15. Oppenheim, A. (1926). On the arithmetic function. J. of the London Math. Soc., s1-1(4), pp. 205–211.
16. Oppenheim, A. (1927). On the arithmetic function, II. J. of the London Math. Soc., s1-2(2), pp. 123–130.
17. Sklar, A. (1952). On the factorization of squarefree integers. Proc. Amer. Math. Soc., 3, pp. 701–705.