Вісник Одеськ. держ. ун-ту.– 2003.– Т. 8, вип. 2. Фіз.-мат. науки.– С. 134–139

УДК 517.925.7

В. В. Никоненко
Одесский национальный университет им. И. И. Мечникова

О СИНГУЛЯРНОЙ ЗАДАЧЕ КОШИ ДЛЯ КОМПЛЕКСНЫХ СИСТЕМ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Доповідь зроблено на засіданні наукового семінару
"Теорія стійкості, теорія коливань у диференціальних рівняннях,
крайові задачі рівнянь математичної фізики" ОНУ 17.04.2003 р.

Одержані нові достатні ознаки існування о-розв'язків при $z \to 0$ у сингулярних у точці $z = 0$ квазілінійних диференціальних систем типу (1).

Получены новые достаточные признаки существования о-решений при $z \to 0$ у сингулярных в точке $z = 0$ квазилинейных дифференциальных систем типа (1).

The new sufficient indications of existence o-solutions under $z \to 0$ of singular in point $z = 0$ of quasilinear differential systems (1) are obtained.

Проблема существования о-решений сингулярных в точке $x = 0$ (или $x = +\infty$) вещественных систем ОДУ достаточно полно исследована в работах [1]–[4]. В случае комплексных систем с комплексным аргументом классические результаты получены Мальмквистом (см. [5, гл. IV, §14]) для систем ОДУ, правые части которых имеют особую точку $z = \infty$ типа полюс. Несмотря на имеющиеся работы по изучению комплексных систем (см. [6], библиография), задача об обобщении метода Мальмквиста на системы более общего вида оставалась неисследованной (лишь частично этот вопрос был рассмотрен в работе автора [7]). Результаты настоящей работы применимы к системам общего вида

$$X' = Q(z) + P(z)Y + F(z,Y)\,,\ X = (x_1,\dots,x_n)^T\,,\ z \in D \text{ (см. систему (1))},$$

с особенностью в точке $z = 0$, если известно преобразование $X = U(z)Y$, $Y = (y_1,\dots,y_n)^T$, где $U(z)$ аналитична в D и $\det U(z) \neq 0$, приводящее указанную систему к системе типа (1). Построение преобразований типа $U(z)$ рассмотрено в [8] $(z \in R)$, а также в работах автора (см. [7]).

1. Объект исследования. В дальнейшем исследуется комплексная система

$$\frac{dy_k}{dz} = q_k(z) + \lambda_k(z)y_k + \sum_{s=1}^{n} p_{ks}(z)y_s + F_k(z,y_1,\dots,y_n) \qquad (k = \overline{1,n}), \tag{1}$$

где

1) $z \in D = \{z \mid z = r\exp i\varphi, r \in I = (0,R],\ R \in (0,+\infty] = R_+,\ \varphi_1(r) < \varphi < \varphi_2(r)\ (r \in I)\}$,
$\varphi_j(r) \in C(\bar{I}) \cap C^1(I)\ (\bar{I} = [0,R]),\ R\exp i\varphi_j(R) = z_0\quad (j = 1,2)$,

2) $Y = (y_1,\dots,y_n) \in G = \left\{ Y \mid \|Y\| = \max\left\{ |y_k| \ (k = \overline{1,n})\right\} \le b \in R_+ \right\}$,

3) функции $q_k(z), \lambda_k(z) = u_k(z) + iv_k(z),\ p_{ks}(z) \in C^\infty(D)\quad (k,s = \overline{1,n})$,
$\left(u_k(z) = \operatorname{Re}\lambda_k(z),\ v_k(z) = \operatorname{Im}\lambda_k(z),\ (k = \overline{1,n})\right)$,

4) $F_k(z,Y)\in C^{\infty}_{(z,Y)}(D\times G)$ $(k=\overline{1,n})$, $F_k(z,0)\equiv 0$ $(k=\overline{1,n})$ и выполняется условие Липшица $(r=|z|)$

$$\|F_k(z,Y_2)-F_k(z,Y_1)\|\le L_k(r,b)\|Y_2-Y_1\|,\ (z,Y_k)\in D\times G\ (k=\overline{1,n}),$$

$$L_k(r,b)\in C(I):I\to R_+\ (k=\overline{1,n}),$$

5) функции $\Lambda_k(z,z_0)=\operatorname{Re}\int\limits_{z_0}^{z}\lambda_k(\tau)d\tau$ $(k=\overline{1,n};z\in D)$ таковы, что:

$$\varliminf_{z\to 0}\Lambda_k(z,z_0)>-\infty\ \left(k\in K_1=\{1,\dots,\nu_1\}\right),\ \lim_{z\to 0}\Lambda_k(z,z_0)=-\infty\ \left(k\in K_2=\{\nu_1+1,\dots,n\}\right)$$

$\left(\nu_1\le n;K_2=\varnothing,\text{ если }\nu_1=n\right)$, $\forall k\in K_1$ $(\forall k\in K_2)$ и $\forall z\in D$ $\exists$ линия $\mathscr{L}_k=l^k_{0,z}$ $(\mathscr{L}_k=l^k_{z_0,z})$, имеющая уравнение $\zeta=\rho\exp i\varphi_{\varpi}(\rho)=x_{\varpi}(\rho)+iy_{\varpi}(\rho)$, где $\varpi=(k,z)$, $\rho\in I_z=[0,|z|]$ $(k\in K_1)$, $\rho\in I_z=[|z|,R]$ $(k\in K_2)$, $\dfrac{d}{d\rho}\varphi_{\varpi}(\rho)-R$ -интегрируема в I_z,

$$\Lambda_k(\zeta,z)=\operatorname{Re}\int\limits_{\zeta}^{z}\lambda_k(\tau)d\tau\le 0\ \ (\zeta,\tau\in\mathscr{L}_k)\ \ (k=\overline{1,n}).$$

Будем исследовать вопрос о непустоте множества W_1 аналитических в D решений $Y=(y_1(z),\dots,y_n(z))$ системы (1) с условием $Y(z)=o(1)$ $(z\to 0,z\in D)$.

2. Обозначения, леммы.

1. Если $f(z)\in C^{\infty}(D)$, то $f^*(r)\overset{def}{=}\sup\limits_{0\le\varphi\le 2\pi}|f(r\exp i\varphi)|$ $(r=|z|,\ \varphi=\arg z)$.
2. $f(z)\in R(D)$ означает в дальнейшем выполнение условий:

$$f(z)\in C^{\infty}(D),\ \int\limits_0^R f^*(r)dr<+\infty.$$

3. Через W_2 условимся обозначать множество типа W_1 для уравнения (2).
4. Если $q(z)\in C^{\infty}(D)$, то условимся обозначать (формально)

$$I_k(q,\lambda_k)=\int\limits_{\mathscr{L}_k}q(\zeta)\exp\int\limits_{\zeta}^{z}\lambda_k(\tau)d\tau d\zeta,\ \ J_k(q,\lambda_k)=\int\limits_{\mathscr{L}_k}q^*(|\zeta|)\exp\operatorname{Re}\int\limits_{\zeta}^{z}\lambda_k(\tau)d\tau\,|d\zeta|,$$

$$I^0_k(q,\lambda_k)=\sup_D J_k(q,\lambda_k)\ \ (k=\overline{1,n}).$$

Очевидно, что $|I_k(q,\lambda_k)|\le J_k(q,\lambda_k)\le I^0_k(q,\lambda_k)$ $(k=\overline{1,n})$.

5. В дальнейшем $\varphi'_{\omega}(\rho)$, $x'_{\omega}(\rho)$, $y'_{\omega}(\rho)$ означают производные по ρ.

Лемма 1. *Пусть* $f(z)\in R(D)$. *Тогда функция* $I(z)=\int_{l^k_{0,z}}f(\zeta)d\zeta\in C^{\infty}(D)$ $(k\in K_1)$ (а), $I(z)=o(1)$ $(z\to 0,z\in D)$ (б), $I'(z)\equiv f(z)$ $(z\in D)$ (с).

Доказательство. Существование $I(z)$ и свойства (а), (б) следуют из оценки

$$|I(z)|\le\int\limits_o^{|z|}f^*(\rho)\left|e^{i\varphi_{\omega}(\rho)}+\rho e^{i\varphi_{\omega}(\rho)}\varphi'_{\omega}(\rho)\right|d\rho\le\left(1+|z|\sup_{[0,|z|]}|\varphi'_{\omega}(\rho)|\right)\int\limits_0^{|z|}f^*(\rho)d\rho.$$

Пусть, далее, $z \in D$, $z+\Delta z \in D$, $z_1 \in l_{0,z}^k$ $z_2 \in l_{0,z+\Delta z}^k$, $|z_j| = r_1 > 0$ $(j=1,2)$. Тогда по теореме Коши

$$\int_{z_1}^{z_2} f(\zeta_1)d\zeta_1 + \int_{z_2}^{z+\Delta z} f(\zeta)d\zeta + \int_{z+\Delta z}^{z} f(\zeta)d\zeta + \int_{z}^{z_1} f(\zeta)d\zeta = 0,$$

где будем считать $\zeta_1 = r_1 \exp i\varphi$, $\varphi \in [\arg z_1, \arg z_2]$, а отрезок $[z, z+\Delta z]$ прямолинейным. Фиксируя z и полагая $r_1 \to 0$, в пределе получим

$$\Delta I(z) = \int_{z}^{z+\Delta z} f(\zeta)d\zeta = \int_{z}^{z+\Delta z} (f(z) + (f(\zeta) - f(z)))d\zeta = f(z)\Delta z + o(|\Delta z|)$$

откуда следует свойство (c).

Лемма 2. *Для того чтобы скалярное уравнение*

$$\frac{dy}{dz} = q(z) + \lambda_k(z)y \quad (k \in K_1, z \in D),\ q(z) \in C^\infty(D), \tag{2}$$

обладало свойством $W_2 \neq \varnothing$, *необходимо, чтобы* $\forall z \in D$ $\exists$ *интеграл* $I_k(q,\lambda_k)$ *и достаточно, чтобы выполнялись свойства:*

$$J_k(q,\lambda_k) = o(1) \quad (z \to 0, z \in D),\ \varphi(z) = q(z)\exp\left(-\int_{z_0}^{z} \lambda_k d\tau\right) \in R(D).$$

При этом $I_k(q,\lambda_k) \in W_2$ *и является единственным элементом этого множества.*

Доказательство. Общее решение уравнения (2)

$$y(z) = y(z, y(z_0)) = \exp\int_{z_0}^{z} \lambda_k\, d\tau \left(y(z_0) + \int_{l_{z_0,z}^k} \varphi(\zeta)d\zeta\right). \tag{3}$$

Фиксируя $z \in D$, рассмотрим вспомогательное выражение $y(z_1, y(z_0))$ $(z_1 \in l_{0,z}^k)$. Полагая в последнем $z_1 \to 0$ и учитывая свойство 5), получим необходимое условие

$$y(z_0) = -\int_{l_{z_0,z}^k} \varphi(\zeta_1)d\zeta_1 - \int_{l_{z,0}^k} \varphi(\zeta)d\zeta \tag{4}$$

для выполнения свойства $y(z) \in W_2$. Подставляя (4) в (3), получим $y(z) = I_k(q,\lambda_k)$. Из леммы 1 легко следует, что $I_k(z,\lambda_k)$ удовлетворяет уравнению (2).

Лемма 3. *Для того чтобы все решения уравнения* (2), *где* $k \in K_2$, *обладали свойством* $y(z) \in W_2$, *необходимо и достаточно, чтобы* $I_k(q,\lambda_k) = o(1)$ $(z \to 0,\ z \in D)$, *и достаточно, чтобы* $J_k(q,\lambda_k) = o(1)$ $(z \to 0,\ z \in D)$.

Доказательство. Справедливость леммы непосредственно следует из формулы общего решения уравнения (2)

$$y(z, y(z_0)) = y(z_0)\exp\int_{z_0}^{z} \lambda_k d\tau + I_k(q,\lambda_k).$$

3. Теорема 1, леммы 4, 5, теорема 2.

Теорема 1. *Пусть система* (1) *удовлетворяет условиям* 1)–5) *и следующим условиям:*

6) $I_k^0(q_k,\lambda_k) \le Q_0 \in R_+$, $I_k^0\left(\sum_{s=1}^{n} |p_{ks}|, \lambda_k\right) \le P_0 \in R_+$,

$I_k^0\left(L_k(|z|,b),\lambda_k\right)\le \mathscr{L}_0(b)\in R_+ \quad (k=\overline{1,n})$,

7) $P_0+\mathscr{L}_0(b)<1$, $Q_0<b(1-P_0-\mathscr{L}_0(b))$,

8) $J_k\left(|q_k|+\left(\sum_{s=1}^{n}|p_{ks}|+\mathscr{L}_k(|z|,b)\right)|\varepsilon(z)|,\lambda_k\right)=o(1)$

$(z\to 0,\ k=\overline{1,n})$ *при любой функции* $\varepsilon(z)=o(1)$ $(z\to 0,\ z\in D)$. *Тогда множество* $W_1\ne\varnothing$ *и зависит от* $n-\nu_1$ *произвольных постоянных* $y_i(z_0)$ $(i\in K_2)$, *таких, что*

$$(M\delta+Q_0)(1-P_0-\mathscr{L}_0(b))^{-1}<b \tag{5}$$

где $M=\max_{k\in K_2}\sup_D \exp\operatorname{Re}\int_{z_0}^{z}\lambda_k d\tau$, $\delta=\max\{|y_i(z_0)|\,(i\in K_2)\}$.

Доказательство. Каждое решение системы (1) из множества W_1 является также решением системы интегральных уравнений

$$y_k(z)=c_k\exp\int_{z_0}^{z}\lambda_k d\tau+I_k\left(q_k+\sum_{s=1}^{n}p_{ks}y_s+F_k(z,y_1,\dots,y_n),\ \lambda_k\right)\quad (k=\overline{1,n}), \tag{6}$$

где $c_k=0$ $(k\in K_1)$, $c_k=y_k(z_0)$ $(k\in K_2)$, или в операторной форме,

$$Y(z)=I(z,Y(z)). \tag{7}$$

Рассмотрим вспомогательное банахово множество

$$\Omega=\{Y(z)\,|\,Y(z)\in C^\infty(D),\ Y(z)=o(1)\ (z\to 0),\ \|Y(z)\|\le b\}$$

и отображение $Y_2(z)=I(z,Y_1(z))$ $(Y_1(z)\in\Omega)$. Оператор J отображает Ω в себя. Действительно,

$$\|Y_2(z)\|\le M\delta+Q_0+P_0b+\mathscr{L}_0(b)b<b$$

в силу неравенства (5). Свойства $Y_2(z)\in C^\infty(D)$, $Y_2(z)=o(1)$ $(z\to 0)$ вытекают из лемм 2, 3 и условия 8). Оператор Ω обладает свойством сжатия, т.к. если $Y_1(z)$, $Y_3(z)$ – образы, а $Y_2(z)$, $Y_4(z)$ – их прообразы соответственно, то очевидно, что

$$\|Y_2(z)-Y_4(z)\|\le(P_0+\mathscr{L}_0(b))\|Y_1(z)-Y_3(z)\|.$$

Поэтому при фиксированных $y_i(z_0)$ $(i\in K_2)$ система (6) допускает единственное решение $Y(z)\in\Omega$. Теорема доказана.

Приведем леммы, позволяющие получать оценки для постоянных Q_0, P_0 и проверять выполнимость свойства 8).

Лемма 4. *Если* $k\in K_1$ *и при этом* $\Lambda_k(\zeta,z)\le 0$ $(\zeta\in l_{0.z}^k)$, $q(z)\in R(D)$, *то*

$$|I_k(q,\lambda_k)|\le\int_0^{|z|}q^*(r_1)dr_1=S(|z|),\quad I_k^0(q,\lambda_k)\le\int_0^{R}q^*(r_1)dr_1.$$

Доказательство этой леммы очевидно.

Введём дополнительно к 5) обозначения: $\overline{V}_1=(u_\omega(\rho),-v_\omega(\rho))$, $\overline{V}_2=(x'_\omega(\rho),y'_\omega(\rho))$, $(\rho\in I_z)$, $A_\omega(\rho)=(\overline{V}_1,\overline{V}_2)$.

Справедливо следующее утверждение.

Лемма 5. *Пусть* $k \in \{1,...,n\}$ *и фиксировано,* $\lambda_k(\zeta) = u_\omega(\rho) + iv_\omega(\rho)$ $(\zeta \in \mathscr{L}_k$, $\zeta = x_\omega(\rho) + iy_\omega(\rho)$, $\omega = (k,z)$, $\rho = |\zeta|)$ *и существует не зависящая от* z *функция* $\beta_k(\rho_1)$ $(\rho_1 \in [0,R])$ *такая, что*

$$|(\overline{V}_1, \overline{V}_2)| \geq \beta_k(\rho) > o(\rho \in I_z), \quad \int_0^R \beta_k(\rho_1)d\rho_1 = +\infty, \quad \sup_{[0,R]} \frac{q^*(\rho)|\overline{V}_2(\rho)|}{\beta_k(\rho)} = S^0(q,\lambda_k).$$

Тогда $I_k^0(q,\lambda_k) \leq S^0(q,\lambda_k)$. *Если* $q^*(\rho)|\overline{V}_2(\rho)| = o(\beta_k(\rho))$ $(\rho \to 0)$, *то* $I_k(q,\lambda_k) = o(1)$ $(z \to 0,\, z \in D)$.

Доказательство. Пусть для определенности $k \in K_1$, $z \in D$ и фиксировано, $\zeta \in l^k_{z_0,z}$, $\tau \in l^k_{z_0,z}$. Тогда

$$|I_k(q,\lambda_k)| \leq \int_{l^k_{z_0,z}} q^*(\rho) \exp \operatorname{Re} \int_\zeta^z \lambda_k d\tau\, |d\zeta| \leq \left| \int_{|z_0|}^{|z|} q^*(\rho)|\overline{V}_2(\rho)| \exp \int_\rho^{|z|} A_\omega(\rho_1)d\rho_1 d\rho \right| =$$

$$= \left| \int_{|z_0|}^{|z|} S(\rho,|z|)d\rho \right| = S_k(|z|).$$

Функция $S_k(|z|)$ является вещественной функцией типа $\int_{x_0}^{x} q(t) \exp \int_t^x p(\tau)d\tau dt$ $(0 < x \leq x_0)$, к которой применимы оценки, рассмотренные, например, в [3, гл. II] в случае $x \to +\infty$. Последнее различие несущественно, оценки и метод их получения остаются в силе и при $x \to +0$. Случай $k \in K_2$ рассматривается аналогично. Отличие от случая $k \in K_1$ состоит в том, что $S_k(|z|)$ будет выражаться в виде $\int_0^{|z|} S(\rho,|z|)d\rho$. В этом случае также применимы результаты из [3].

Из лемм 4, 5 и теоремы 1 вытекает справедливость такого утверждения.

Теорема 2. *Пусть система* (1) *удовлетворяет условиям* 1)–5) *из п.* 1, *а также условиям* 6)–7) *теоремы* 1, *причем оценки* Q_0, P_0, $\mathscr{L}_o(b)$ *в условиях* 6)–7) *получены применением лемм* 4, 5, *а в условие* 6) *добавлено требование* $I_k(q_k,\lambda_k) = o(1)$ $(z \to 0,\; z \in D,\; k = \overline{1,n})$. *Тогда остается в силе утверждение теоремы* 1.

Доказательство этого утверждения очевидно. Условия теоремы 2 обеспечивают выполнение всех условий 1)–8) теоремы 1.

4. Комплексный аналог теоремы Мателя – Левинсона.

Рассмотрим линейную однородную систему

$$\frac{dy_k}{dz} = \lambda_k(z)y_k + \sum_{s=1}^n p_{ks}(z)y_s \qquad (k = \overline{1,n}), \tag{8}$$

где $\lambda_k(z)$, $p_{ks}(z) \in C^\infty(D)$ $(k,s = \overline{1,n})$. Ставится вопрос (задача Мателя) о существовании у системы (8) хотя бы одного частного решения вида

$$y_k = (c_k + \xi_k(z)) \exp \int_{z_0}^z \lambda_j(\tau)d\tau \quad (k = \overline{1,n}), \tag{9}$$

где $j \in \{1,...,n\}$ и фиксировано, $c_j = 1$, $c_k = 0$ $(k \neq j)$; $\xi_k(z) \in C^\infty(D)$, $\xi_k(z) = o(1)$, $(z \to 0,\ k = \overline{1,n})$.

Система относительно $\xi_k(z)$ $(k = \overline{1,n})$ имеет вид

$$\frac{d\xi_k}{dz} = p_{kj}(z) + (\lambda_k(z) - \lambda_j(z))\xi_k + \sum_{s=1}^{n} p_{ks}(z)\xi_s \quad (k = \overline{1,n}). \tag{10}$$

Из теоремы 2 вытекает следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть система* (10) *удовлетворяет условиям* 1)–3) *и* 5) *из п.* 1, $p_{ks}(z) \in R(D)$ $(k,s = \overline{1,n})$ *и* $p_k = \int_0^R \sum_{s=1}^{n} p_{ks}^*(\rho)\,d\rho < 1$ $(k = \overline{1,n})$. *Тогда хотя бы одно решение вида* (9) *существует.*

Доказательство. В данном случае можно взять $Q_0 = \max_k \int_0^R p_{kj}^*(\rho)d\rho$, $P_o = \max_k p_k < 1$, $\mathcal{L}_0(b) = 0$. Условие $Q_0 < b(1-P_0)$ выполняется, если b выбрать так, чтобы было $b > Q_0(1-P_0)^{-1}$. Свойства $I_k(q_k, \lambda_k) = o(1)$, $I_k(|\,p_{ks}\,|, \lambda_k) = o(1)$ $(z \to 0,\ k,s = \overline{1,n})$ выполняются при выборе классов индексов K_1 и K_2 по правилам, указанным в п. 2. При этом в роли $\lambda_k(z)$ $(k = \overline{1,n})$ здесь необходимо рассматривать $\lambda_k(z) - \lambda_j(z)$ $(k = \overline{1,n})$. Теорема доказана.

Теорема 3 является комплексным аналогом теоремы Мателя – Левинсона (см. [8, гл. I, § 1]). Эта теорема дополняет соответствующий результат М. В. Федорюка (см. [6, гл. V, § 5]), сформулированный в более сложной форме (определение класса $R(D)$ заменено в [6] более сложным определением). Очевидно также, что в случае фиксированного j теорема 2 позволяет получать теоремы более общие, чем теорема 3, которые можно применять при нарушении условия $p_{ks}(z) \in R(D)$ $(k \neq j;\ s = \overline{1,n})$. Используя теоремы 1, 2, несложно сформулировать аналог теоремы 3 для квазилинейных систем.

1. **Чечик В. А.** Исследование систем обыкновенных дифференциальных уравнений с сингулярностью // Труды Московского матем. об-ва.– 1959.– Т. 8.– С. 155–197.
2. **Кигурадзе И. Т.** О задаче Коши для сингулярных систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения.– 1965.– Т. 1, № 10.– С. 1271–1291.
3. **Костин А. В.** Устойчивость и асимптотика квазилинейных неавтономных дифференциальных систем.– Одесса: Изд-во ОГУ, 1984.– 95 с.
4. **Костин А. В.** К вопросу существования у системы обыкновенных дифференциальных уравнений ограниченных частных решений и частных решений, стремящихся к нулю при $t \to +\infty$ // Дифференц. уравнения.– 1965.– Т. 1, № 5.– С. 585–604.
5. **Вазов В.** Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений.– М.: Мир, 1968.– 464 с.
6. **Федорюк М. В.** Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений.– М.: Наука, 1983.– 352 с.
7. **Никоненко В. В.** Об асимптотических представлениях решений квазилинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений: Дис. … канд. физ.-мат. наук.– Одесса, 1988.– 189 с.
8. **Рапопорт И. М.** О некоторых асимптотических методах в теории дифференциальных уравнений.– К.: Изд-во АН УССР, 1954.– 289 с.

Получено 12.05.2003 г.