УДК 519.67, 551.1.3

Д. В. МЕЛКОНЯН, канд. фіз.-мат. н., докторант

Одеський державний університет,
кафедра інженерної геології та гідрогеології
вул. Дворянська, 2, 65026 Одеса, Україна

КОМПЛЕКСНИЙ МЕТОД ГРАНИЧНИХ ЕЛЕМЕНТІВ СТОСОВНО НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВНОГО СТАНУ ЗСУВНИХ СХИЛІВ

Для розв'язання задач напружено-деформовного стану зсувних схилів запропоновано комплексний метод граничних елементів (КМГЕ). Показано, що апроксимація функцій на межі, яка використовується у КМГЕ, дає високу ефективність при моделюванні геодинамічних (потенційних) полів. Суттєвим для цього методу є використання інтегралу Коші, що зв'язує значення функції у певній внутрішній точці області на комплексній площині з інтегралом від функцій по межі цієї області.

Ключові слова: граничні елементи, комплексний метод, напружено-деформований стан, зсувний схил.

У статті представлено комплексне геодинамічне поле у масивах гірських порід зсувних схилів і комплексний метод граничних елементів (далі КМГЕ) для розв'язання плоскої задачі їхнього напружено-деформованого стану.

Геодинамічне поле — це потенційне поле, що виникає у межах масивів гірських порід схилів і укосів у результаті наявності градієнта ваги порід, і описується системою ізопотенційних і силових ліній, які, перетинаючись, утворюють геодинамічну сітку [1; 2]. Геодинамічне поле створюється напругами, що дозволяє ввести скалярну величину, яка істотно полегшує його опис і вимір. Її можна назвати потенціалом об'ємних сил θ (у випадку плоскої задачі $\theta = \sigma_x + \sigma_y$, де σ_x і σ_y — нормальні напруги), тому геодинамічне поле можна назвати потенційним [1].

Ізопотенційні лінії описуються рівнянням $\varphi = \theta = \text{const}$, а силові лінії — $\psi = \text{grad}\,\theta = const$. У випадку безвихрового та соленоїдного геодинамічного поля для потенційної функції має місце рівняння Лапласа [2, с. 87]

$$\Delta^2\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0, \tag{1}$$

і умова Коші-Рімана для φ і ψ

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{\partial\psi}{\partial y},\quad \frac{\partial\varphi}{\partial y}=-\frac{\partial\psi}{\partial x}. \tag{2}$$

Ці умови свідчать про ортогональність силових та ізопотенційних ліній у однозв'язному геодинамічному полі.

Перехресним диференціюванням рівняння (2) встановлюємо, що силова функція ψ також задовольняє рівняння Лапласа

$$\Delta^2\psi=\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=0. \tag{3}$$

Застосування функції комплексної змінної може суттєво полегшити рішення крайових задач для двовимірного рівняння Лапласа. Комплексне геодинамічне поле характеризується комплексним потенціалом ω, що залежить від комплексної змінної $z = x + iy$

$$\omega = f(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y), \tag{4}$$

де φ і ψ — дійсні функції змінних x та y і задовольняють граничним умовам на поверхні зсувного схилу.

Для того щоб функція $\omega = f(z)$ була аналітичною, необхідно і достатньо, щоб функції φ і ψ були однозначними і задовольняли рівняння Коші-Рімана. У такому випадку вони будуть гармонійними функціями, тобто будуть задовольняти рівняння Лапласа. Таким чином, функції комплексної змінної, складені з потенціалу і силової функції, за формулою (4) можна безпосередньо застосовувати для математичного моделювання плоских безвихрових полів.

У статті розглядається КМГЕ, заснований на застосуванні інтегральної формули Коші [3, с. 27]

$$\hat{\omega}(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{G_1(\xi)d\xi}{\xi-z}, \tag{5}$$

де $\hat{\omega}$ — аналітична функція і визначена в однозв'язній області Ω, обмеженій замкнутим звичайно-ламаним контуром Γ ($z \in \Omega, \xi \in \Gamma, W \cup \Gamma$); $G_1(\xi)$ — лінійна глобальна спробна функція, що визначається формулою

$$G_1(z)=\sum_{j=1}^{m}N_j\overline{\omega}_j=\sum_{j=1}^{m}N_j(z)\overline{\varphi}_j+i\sum_{j=1}^{m}N_j(z)\overline{\psi}_j, \tag{6}$$

де $\overline{\omega}_j=\overline{\omega}(z_j)=\overline{\varphi}(z_j)+i\overline{\psi}(z_i)=\overline{\varphi}_j(x,y)+i\overline{\psi}_j(x,y)$, $(j=1, 2, ..., m)$ — задане значення у вузлі z_j; $\overline{\varphi}_j$ і $\overline{\psi}_j$ — дійсні числа, що задані у вузлі z_j.

Слід відзначити, що у вузлі z_j задається тільки одне з пари вузлових значень $(\overline{\varphi}_j, \overline{\psi}_j)$. Отже, визначення вузлових значень, яких не вистачає, є частиною задачі математичного моделювання [4, с. 164], тобто для H_1 апроксимувальної функції $\hat{\omega}(z_j)$ маємо

$$\hat{\omega}(z_j)=\hat{\varphi}(z_j)+i\hat{\psi}(z_j)=\begin{cases}\hat{\varphi}(z_j)+i\overline{\psi}_j, & j=1, 2, ..., k;\\ \overline{\varphi}_j+i\hat{\psi}(z_j), & j=k+1, ..., m.\end{cases}$$

У рівнянні (6) є базисна функція, відповідна вузлу φ, вона визначається виразом

$$N_j(z)=\begin{cases}(z-z_{j-1})/(z_j-z_{j-1}), \ z\in\Gamma_{j-1};\\ (z_{j+1}-z)/(z_{j+1}-z_j), \ z\in\Gamma_j;\\ 0, \ z\in\Gamma_{j-1}\cup\Gamma_j.\end{cases} \tag{7}$$

Формула (5) зв'язує значення функцій у деякій внутрішній точці області на комплексній точці з інтегралом від функції по межі області. Звідси слідує, що значення функції в області, де вона є аналітичною, повністю визначаються її значеннями на межі.

Досліджуємо властивості апроксимуючої функції. Запишемо $\hat{\omega}(z_j)$ у вигляді суми інтегралів за граничними елементами

$$\hat{\omega}(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{G_1(\xi)d\xi}{\xi-z_0}=\frac{1}{2\pi i}\sum_{j=1}^{m}\int_{\Gamma_j}\frac{G_1(\zeta)d\xi}{\xi-z_0},\quad z_0\notin\Gamma,\ z_0\in\Omega. \tag{8}$$

На кожному елементі Γ_j функція $G_1(z)$ має вигляд

$$G_1(z)=N_j\overline{\omega}_j+N_{j+1}\overline{\omega}_{j+1}=(N_j\overline{\varphi}_j+N_{j+1}\overline{\varphi}_{j+1})+(N_j\overline{\psi}_j+N_{j+1}\overline{\psi}_{j+1}),\quad z\in\Gamma_j, \tag{9}$$

де $\overline{\omega}_j=\overline{\varphi}_j+\overline{\psi}_j$, а $N_j\equiv N_j(z)$. Використовуючи співвідношення (9) і (7), оцінимо вклад кожного граничного елемента Γ_j

$$\int_{\Gamma}\frac{G_1(\xi)d\xi}{\xi-z_0}=\int_{\Gamma_j}\frac{[(z_{j+1}-\xi)\overline{\omega}_j+(\xi-z_j)\overline{\omega}_{j+1}]d\xi}{(z_{j+1}-z_j)(\xi-z_0)},\quad z_0\notin\Gamma,\ z_0\in\Omega. \tag{10}$$

Наведене рівняння можна спростити

$$\int_{\Gamma}\frac{G_1(\xi)d\xi}{\xi-z_0}=\frac{z_{j+1}\overline{\omega}_j-z_j\overline{\omega}_{j+1}}{z_{j+1}-z_j}\int_{\Gamma_j}\frac{d\xi}{\xi-z_0}+\frac{\overline{\omega}_{j+1}-\overline{\omega}_j}{z_{j+1}-z_j}\int_{\Gamma_j}\frac{\xi d\xi}{\xi-z_0},$$

$$\int_{\Gamma_j}\frac{d\xi}{\xi-z_0}=\int_{\Gamma_j}(1+\frac{z_0}{\xi-z_0})d\xi=(z_{j+1}-z_j)+z_0\int_{\Gamma_j}\frac{d\xi}{\xi-z_0},$$

$$\int_{\Gamma_j}\frac{d\xi}{\xi-z_0}=\ln(\xi-z_0)\Big|_{z_j}^{z_{j+1}}=\ln\left|\frac{z_{j+1}-z_0}{z_j-z_0}\right|+i\theta(j+1,j),$$

де $\theta(j+1,j)$ — кут між променями, що з'єднують вузли z_j і z_{j+1} з точкою $z_0\in\Omega$, (рис. 1).

Перепишемо інтеграл (10) у вигляді

$$\int_{\Gamma}\frac{G_1(\xi)d\xi}{\xi-z_0}=\overline{\omega}_{j+1}-\overline{\omega}_j+\omega_{j+1}\frac{z_0-z_j}{z_{j+1}-z_j}h_j-\overline{\omega}_j\frac{z_0-z_{j+1}}{z_{j+1}-z_j}h_j,$$

$$h_j=\ln\frac{|z_{j+1}-z_0|}{|z_j-z_0|}+i\theta(j+1,j). \tag{11}$$

Комплексне число $\hat{\omega}(z_0)$ визначається сумою виразів вигляду (11) за всіма Γ_j, так що

$$2\pi i\hat{\omega}(z_0)=\sum_{j=1}^{m}(\overline{\omega}_{j+1}-\overline{\omega}_j)+\sum_{j=1}^{m}\frac{\overline{\omega}_{j+1}(z_0-z_j)-\overline{\omega}_j(z_0-z_{j+1})h_j}{z_{j+1}-z_j}, \tag{12}$$

де розуміється, що $\overline{\omega}_{m+1}=\overline{\omega}_1$, а $z_{m+1}=z_1$.

Перша сума у правій частині формули (12) дорівнює нулю, тому

$$2\pi i\hat{\omega}(z_0)=\sum_{j=1}^{m}\frac{\overline{\omega}_{j+1}(z_0-z_j)-\overline{\omega}_j(z_0-z_{j+1})h_j}{z_{j+1}-z_j}. \tag{13}$$

Рівняння (13) може бути записаним у вигляді

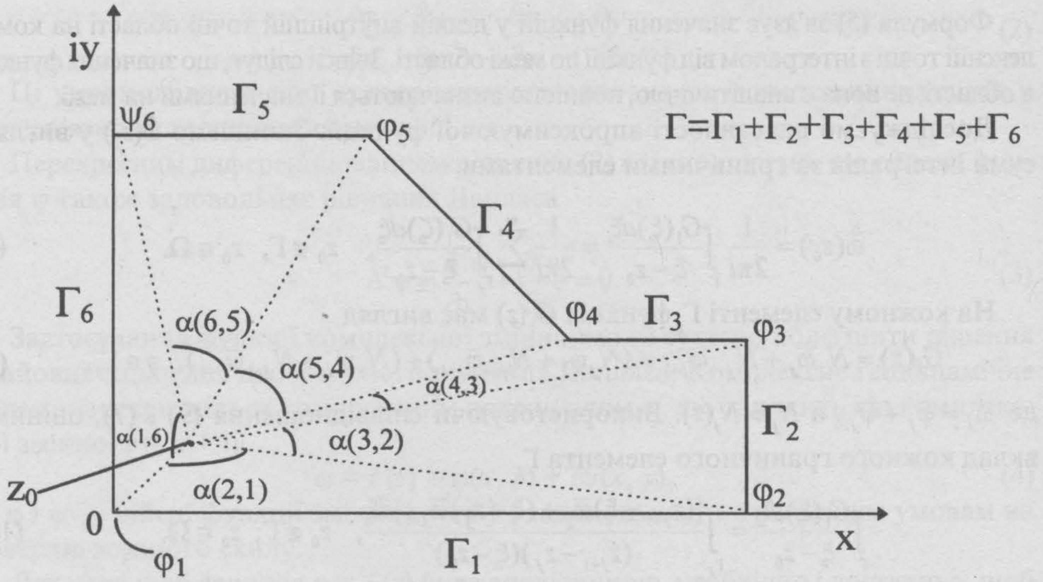

Рис. 1. Взаємне розташування точки z_0 і граничного елемента Γ_1 у межах зсувного схилу з крутістю 45°.

$$\hat{\omega}(z_0) = \hat{\varphi}(z_0) + i\hat{\psi}(z_0) = \hat{\varphi}(z_0, \overline{\varphi}_1, \overline{\varphi}_2, \ldots, \varphi_m, \overline{\psi}_1, \overline{\psi}_2, \ldots, \overline{\psi}_m) + \\ + i\hat{\psi}(z_0, \overline{\varphi}_1, \overline{\varphi}_2, \ldots, \varphi_m, \overline{\psi}_1, \overline{\psi}_2, \ldots, \overline{\psi}_m), \tag{14}$$

де z_0 — довільна точка області Ω, а дійсні функції $\hat{\varphi}$ і $\hat{\psi}$ — відповідно дійсна і уявна частини функції $\hat{\omega}(z_j)$. Якщо значення $\overline{\omega}_j = \overline{\varphi}_j + i\overline{\psi}_j$ відомі у кожному вузлі z_j (j = 1, 2,..., m), то вираз (14) визначає аналітичну в області Ω функцію комплексної змінної, а $\hat{\varphi}(x, y)$ і $\hat{\psi}(x, y)$ задовольняють в Ω рівняння Лапласа. Якщо $\hat{\omega}(z) = \omega(z)$ на Γ (де $\omega(z)$— точне розв'язання крайової задачі), то $\hat{\omega}(z) = \omega(z)$ в Ω і $\hat{\omega}(z)$ є точним розв'язанням крайової задачі.

При чисельному розв'язанні задачі враховується багато важливих властивостей глобальної функції $G_1(z)$ і $\hat{\omega}(z) - H_1$ — апроксимувальної функції при граничному переході від точок області до точок на поверхні.

Наступним кроком задачі є визначення похибки чисельного розв'язання задачі для аналізу і подальшого уточнення розрахункової схеми.

Таким чином, якщо уявити геодинамічне поле у масивах гірських порід зсувних схилів і укосів як комплексне поле, то для розв'язання плоскої крайової задачі для такого поля можна застосовувати КМГЕ, що є компактним в ідеї інтегрування по межі і може бути прийняте в інженерно-геологічних розрахунках.

Література

1. *Зелинский И. П. Вопросы теории геодинамического поля в связи с решением инженерно-геологических задач // Инженерная геология. — 1987. — № 6. — С. 28-35.*
2. *Зелинский И. П., Мелконян Д. В. Применение теории геодинамического поля в решении задач инженерной геологии // Геоэкология. — 1998. — № 3. — С. 85-93.*

3. *Hromadka II T. V., Guymon G. L. A complex variable boundary element method: development // Int. J. for Numerical Methods in Engineering. — 1984. — V. 20. — P. 25-37.*

4. *Hromadka II T. V., Lai C. The complex variable boundary element method in engineering analysis. New York: Springer-Verlag, 1987. — 389 p.*

Комплексный метод граничных элементов применительно к напряженно-деформируемому состоянию оползневых склонов

Мелконян Д. В.
Одесский государственный университет,
кафедра инженерной геологии и гидрогеологии
ул. Дворянская, 2, 65026 Одесса, Украина

Резюме

Представление геодинамического поля оползневого склона как потенциального поля и применение КМГЭ для решения краевой задачи позволяет найти комплексный потенциал геодинамического поля и строить геодинамическую сетку, по деформации которой можно судить о структуре оползневого склона. Обнаружив жесткие и слабые слои можно найти зоны пластических деформаций и, следовательно, прогнозировать образование разрывов.

Ключевые слова: граничные элементы, комплексный метод, напряженно-деформированное состояние, оползневый склон.

The complex variable boundary element method applied to the landslides stress strain

D. V. Melkonyan
Odessa State University
Department of Engineering Geology and Hydrogeology
Dvorianskaja St., 2, Odessa, 65026, Ukraine

Summary

The landslide geodynamic field representation as a potential field and CVBEM application for the boundary value problem solution allows to define the geodynamic field's complex potential value, then to construct the geodynamic field grid by the deformation of which the landslide structure can be defined.Finding out the rigid and loose layers it is possible to predict the plastic deformation zones and, therefore, the faulting.

Key words: boundary elements, complex method, stress strain, landslide.