

В.А. Гришин

**Методические указания
к выполнению индивидуальных заданий №2
по теории вероятностей и математической статистике**

Министерство образования и науки Украины
Одесский национальный университет им И.И. Мечникова
Институт математики экономики и механики
Кафедра методов математической физики

В.А. Гришин

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
К ВЫПОЛНЕНИЮ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ №1
ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ
СТАТИСТИКЕ

для студентов специальности 123
«Компьютерная инженерия»направления

Одесса 2017

УДК: 519.21

Рекомендовано в печать Ученым советом ИМЭМ

протокол № 3 заседания Ученого совета ИМЭМ от 16.12. 2016г.

року Печатается по решению кафедры методов математической физики
ОНУ им. И.И.Мечникова

Рецензенты:

зам директора института математики экономики и механики,
канд. физ.-мат. наук, доцент Вартамян Г.М.

канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры методов математической
физики Процеров Ю.С.

Гришин В.А. Методические указания к выполнению индивидуальных заданий №2 по теории вероятностей и математической статистике. - Одесский национальный университет им И.И. Мечникова. Одесса, 2017. – 38с.

Методические указания содержат 16 вариантов по 9 задач в каждом стандартного курса теории вероятностей из разделов: Распределения дискретной случайной величины: табличное (заданное рядом распределения), биномиальное, Пуассона, геометрическое, гипергеометрическое, полиномиальное, вычисляемое по формулам сложения-умножения вероятностей; распределения непрерывных случайных величин, нормальный закон распределения; первичная обработка выборки; обработка выборки двумерной случайной величины; ранговая корреляция. Приведены примеры решения и оформления типовых задач индивидуального задания.

Оглавление

| | |
|---|----|
| Указания к выполнению | 4 |
| Варианты заданий | 5 |
| Задача №1 Законы распределения дискретных случайных величин | 5 |
| Задача №2 Биномиальный закон распределения. | 7 |
| Задача №3 Распределение по Закону Пуассона. | 7 |
| Задача №4 Распределение дискретной случайной величины | 8 |
| Задача №5 Распределения непрерывных случайных величин..... | 11 |
| Задача №6 Нормальный закон распределения | 14 |
| Задача №7 Первичная обработка выборки. | 16 |
| Задача №8. Обработка выборки двумерной случайной величины..... | 23 |
| Задача №9 Ранговая корреляция Спирмена и Кендалла. | 28 |
| Литература | 32 |
| Приложение 1 Значения* функции Гаусса | 33 |
| Приложение 2 Значения* функции Лапласа | 34 |
| Приложение 3 Таблица значений функции Пуассона | 36 |
| Приложение 4 Образец титульного листа. | 37 |
| Приложение 5 Образец заполнения листа №2. | 38 |

Указания к выполнению.

- Каждая задача выполняется на отдельном листе с пояснениями и указанием используемых теорем и записью формул в общем виде.
- Все члены формул записанных в общем виде должны быть разъяснены.
- Результаты (ответы) должны быть сведены в таблицу на листе №2 (приложение 5)
- Результаты (ответы) в таблице должны быть даны в десятичных дробях.

Варианты заданий

Задача №1 Законы распределения дискретных случайных величин

((Вариант.1)) Среди 10 изготовленных приборов 3 неточных. Составить закон распределения числа неточных приборов среди взятых наудачу 4 приборов. Найти математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины. Составить функцию распределения случайной величины и построить ее график.

((Вариант.2)) В билете три задачи. Вероятность правильного решения первой задачи равна 0,9, второй — 0,8, третьей — 0,7. Составить закон распределения числа правильно решенных задач в билете и вычислить математическое ожидание и дисперсию.

((Вариант.3)) В городе 4 коммерческих банка. У каждого риск банкротства в течение года составляет 10 %. Составить закон распределения числа банков, которые могут обанкротиться в течение следующего года и найти числовые характеристики этого распределения.

((Вариант.4)) Вероятность поражения земляники вирусным заболеванием равна 0,2. Составить закон распределения числа кустов земляники, зараженных вирусом, из четырех посаженных кустов. Найти математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины. .

((Вариант.5)) Производится стрельба из орудия по удаляющейся цели. При первом выстреле вероятность попадания равна 0,8, при каждом следующем выстреле вероятность попадания уменьшается в 2 раза. Случайная величина X — число попаданий в цель при трех выстрелах. Составить закон распределения случайной величины X .

((Вариант. 6)) Стрелок дважды стреляет по мишени, состоящей из трех концентрических кругов. За попадание в центральный круг дается три очка, в окружающее его кольцо — два и за попадание во внешнее кольцо — одно очко. Вероятности попадания в эти части мишени равны соответственно 0,2, 0,3 и 0,3. Найти закон распределения общего числа набранных очков.

((Вариант. 7)) В урне 5 белых и 3 черных шара. Из нее наудачу

вынимают 3 шара. Найти закон распределения случайного числа белых шаров среди отобранных.

((Вариант. 8)) Студент знает 15 из 25 экзаменационных вопросов. В билете 3 вопроса. Найти закон распределения и математическое ожидание случайной величины X — числа вопросов, на которые студент готов ответить.

((Вариант. 9)) Из колоды в 52 карты выбираются 4 карты. Для случайной величины X — количества карт червонной масти среди отобранных — Составить функцию распределения случайной величины и построить ее график. Найти математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.

((Вариант. 10)) В партии арбузов 10 % незрелых. Найти закон распределения и дисперсию случайного числа незрелых арбузов среди трех купленных.

((Вариант. 11)) Устройство состоит из 4 независимо работающих элементов. Вероятность отказа каждого элемента в одном опыте равна 0,2. Найти закон распределения случайного числа отказавших элементов в одном опыте и построить ее график. Найти математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.

((Вариант. 12)) Из урны, содержащей 5 белых и 6 черных шаров, наудачу извлечены 4 шара. Найти закон распределения и математическое ожидание случайной величины X — числа белых шаров среди отобранных

((Вариант. 13)) Стрелок дважды стреляет по мишени, состоящей из трех концентрических кругов. За попадание в центральный круг дается три очка, в окружающее его кольцо — два, и за попадание во внешнее кольцо — одно очко. Вероятности попадания в эти части мишени равны соответственно 0,3, 0,3 и 0,1. Найти закон распределения общего числа набранных очков.

((Вариант. 14)) В партии из 12 деталей имеется 3 бракованных. Из партии случайным образом извлечены 3 детали. Составить ряд распределения числа доброкачественных деталей среди отобранных.

((Вариант. 15)) Во время эстафетных соревнований по биатлону спортсмену требуется поразить на огневом рубеже 5 мишеней, имея для

этого 7 патронов. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле составляет 0,6. Найти закон распределения и математическое ожидание числа пораженных мишеней.

((Вариант. 16)) Вероятность появления события A в первом опыте равна 0,8, а в каждом последующем опыте она уменьшается вдвое по сравнению с предыдущим. Найти закон распределения и математическое ожидание случайной величины X — числа появлений события A в четырех опытах.

ЗАДАНИЕ к задачам №2-№4

По заданному или построенному закону распределения случайной величины ξ для каждого из 3-х видов распределений:

- 1). построить ряд распределения,
- 2). построить многоугольник распределения и график функции распределения;
- 3). вычислить математическое ожидание $M\xi$;
- 4). вычислить дисперсию $D\xi$ и среднее квадратическое отклонение;

Задача №2 БИНОМИАЛЬНЫЙ ЗАКОН РАСПРЕДЕЛЕНИЯ.

Случайная величина ξ распределена по биномиальному закону:

$$P(\xi = k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}, \quad 0 < p < 1, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

| | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|-----|------|------|------|------|
| Вариант | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |
| n | 5 | 4 | 6 | 9 | 7 | 7 | 8 | 7 | 6 | 12 | 8 | 5 | 9 | 5 | 6 | 7 |
| p | 0,37 | 0,28 | 0,53 | 0,46 | 0,18 | 0,67 | 0,32 | 0,87 | 0,25 | 0,31 | 0,77 | 0,5 | 0,21 | 0,71 | 0,37 | 0,44 |

Задача №3 РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПО ЗАКОНУ ПУАССОНА.

Случайная величина ξ распределена по Закону Пуассона:

$$P(\xi = k) = \frac{a^k}{k!} e^{-a}, \quad a > 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

| | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|----|----|----|----|
| Вариант | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |
|---------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|----|----|----|----|

| | | | | | | | | | | | | | | | | |
|-----|-------|------|-------|-------|------|------|------|-------|-------|------|-------|------|-------|------|------|------|
| a | 0,026 | 0,38 | 0,033 | 0,218 | 0,65 | 0,81 | 0,74 | 0,015 | 0,671 | 0,32 | 0,026 | 0,39 | 0,035 | 0,21 | 0,65 | 0,84 |
|-----|-------|------|-------|-------|------|------|------|-------|-------|------|-------|------|-------|------|------|------|

Задача №4 РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ДИСКРЕТНОЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

Во время эстафетных соревнований по биатлону спортсмену требуется поразить на 4 огневых рубежах 4 мишени (по одной на каждом рубеже), имея для этого 1 патрон на одну мишень (всего 4 патрона). Вероятность попадания в мишень составляет p_n ($n = \overline{1,4}$) на n -ом рубеже. Найти закон распределения математическое ожидание и дисперсию случайной величины ξ — числа пораженных мишеней.

| Вариант | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |
|---------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| P_1 | 0,6 | 0,9 | 0,6 | 0,9 | 0,9 | 0,6 | 0,6 | 0,8 | 0,9 | 0,9 | 0,5 | 0,9 | 0,6 | 0,5 | 0,6 | 0,9 |
| P_2 | 0,7 | 0,7 | 0,7 | 0,8 | 0,5 | 0,7 | 0,7 | 0,8 | 0,8 | 0,4 | 0,7 | 0,8 | 0,7 | 0,8 | 0,7 | 0,6 |
| P_3 | 0,8 | 0,7 | 0,8 | 0,7 | 0,9 | 0,8 | 0,8 | 0,5 | 0,7 | 0,7 | 0,8 | 0,7 | 0,8 | 0,7 | 0,8 | 0,8 |
| P_4 | 0,9 | 0,6 | 0,8 | 0,6 | 0,7 | 0,9 | 0,9 | 0,6 | 0,6 | 0,6 | 0,3 | 0,9 | 0,9 | 0,6 | 0,8 | 0,9 |

Примеры решения задач №1-4

© Пример №1.1 Клиенты банка, не связанные друг с другом, не возвращают кредиты в срок с вероятностью 0,1. Составить закон распределения числа возвращенных в срок кредитов из 5 выданных. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение этой случайной величины. .

Решение. X : 0, 1, 2, 3, 4, 5 -число кредитов, возвращенных в срок.

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m},$$

$$P(X=0) = P_5(0) = C_5^0 \cdot 0,9^0 \cdot 0,1^5 = 0,1^5 = 0,00001,$$

$$P(X=1) = P_5(1) = C_5^1 \cdot 0,9^1 \cdot 0,1^4 = 5 \cdot 0,9 \cdot 0,1^4 = 0,00045,$$

$$P(X=2) = P_5(2) = C_5^2 \cdot 0,9^2 \cdot 0,1^3 = 10 \cdot 0,9^2 \cdot 0,1^3 = 0,0081,$$

$$P(X=3) = P_5(3) = C_5^3 \cdot 0,9^3 \cdot 0,1^2 = 10 \cdot 0,9^3 \cdot 0,1^2 = 0,0729,$$

$$P(X = 4) = P_5(4) = C_5^4 \cdot 0,9^4 \cdot 0,1^1 = 5 \cdot 0,9^4 \cdot 0,1 = 0,32805,$$

$$P(X = 5) = P_5(5) = C_5^5 \cdot 0,9^5 \cdot 0,1^0 = 0,9^5 = 0,59049.$$

Запишем закон распределения в виде таблицы

| | | | | | | |
|---|---------|---------|--------|--------|---------|---------|
| X | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| P | 0,00001 | 0,00045 | 0,0081 | 0,0729 | 0,32805 | 0,59049 |

$$M(X) = np = 5 \cdot 0,9 = 4,5. \quad D(X) = npq = 5 \cdot 0,1 \cdot 0,9 = 0,45.$$

◎ **Пример №1.2** Построить функцию распределения $F_\xi(x)$ и найти вероятность попадания случайной величины в промежуток $[2, 4)$.

Дискретная случайная величина задана рядом распределения

| | | | | | | | |
|-------|------|------|------|-----|-----|------|------|
| x_i | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| p_i | 0,05 | 0,10 | 0,20 | 0,3 | 0,1 | 0,15 | 0,10 |

Решение. По определению функция распределения случайной величины $F_\xi(x) = P(\xi < x)$. Поэтому

$$F_\xi(-1) = P(\xi < -1) = 0;$$

$$F_\xi(0) = P(\xi < 0) = P(\xi < -1) + P(\xi = -1) = 0 + 0,05 = 0,05;$$

$$F_\xi(1) = P(\xi < 1) = P(\xi < 0) + P(\xi = 0) = 0,05 + 0,1 = 0,15;$$

$$F_\xi(2) = P(\xi < 2) = P(\xi < 1) + P(\xi = 1) = 0,15 + 0,2 = 0,35;$$

$$F_\xi(3) = P(\xi < 3) = P(\xi < 2) + P(\xi = 2) = 0,35 + 0,3 = 0,65;$$

$$F_\xi(4) = P(\xi < 4) = P(\xi < 3) + P(\xi = 3) = 0,65 + 0,1 = 0,75;$$

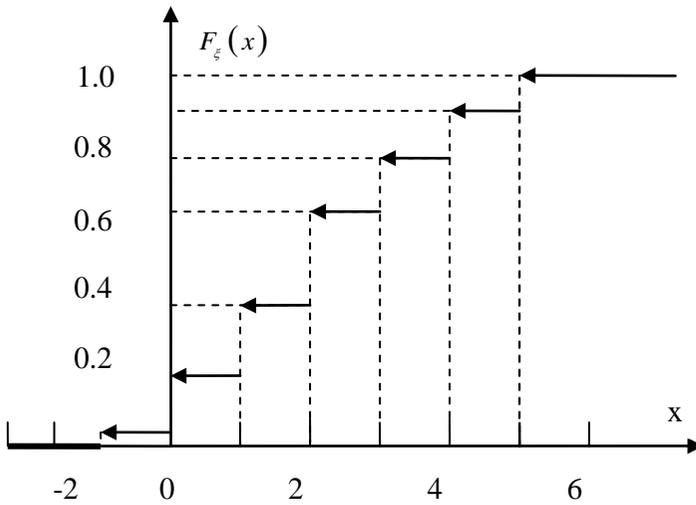
$$F_\xi(5) = P(\xi < 5) = P(\xi < 4) + P(\xi = 4) = 0,75 + 0,15 = 0,9$$

$$F_\xi(> 5) = P(\xi = 5 + \varepsilon) = P(\xi < 5) + P(\xi = 5) = 0,9 + 0,1 = 1$$

При этом согласно свойству функции распределения она непрерывна в каждой точке слева. Справа она может иметь разрыв 1-го рода. Скачок здесь равен

$$F_\xi(x+0) - F_\xi(x-0) = P(\xi = x). \quad F_\xi(x)$$

График функции распределения показан на рисунке ниже.



Вероятность попадания случайной величины в промежуток $[2,4)$ определяется с помощью функции распределения: $P(2 \leq \xi < 4) = F_\xi(4) - F_\xi(2) = 0,4$.

© Пример №1.3 Астроном в благоприятную ночь наблюдает метеорный поток на определённом участке неба, регистрируя количество пролетевших метеоритов за каждые 15 минут.

Полагая, что поток метеоритов *пуассоновский* (закон редких событий), и что в среднем можно наблюдать $\lambda = 3$ метеорита, рассчитать вероятность наблюдать m метеоритов за данные 15 минут для $m = \overline{0,7}$. Результаты свести в таблицу и отобразить графически.

Ответ: Искомая вероятность рассчитывается по формуле Пуассона, которая в рассматриваемом частном случае $\forall m = \overline{0,7} \quad \lambda = 3$ даёт *пуассоновский ряд* распределения в форме:

$$P_n(m) = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda} = \frac{3^m}{m!} e^{-3}. \quad (*)$$

При этом расчёты по формуле (*) дают такие результаты:

| m | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|--------------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| $P_n(m \lambda=3)$ | 0.0498 | 0.1494 | 0.2240 | 0.2240 | 0.1680 | 0.1008 | 0.0504 | 0.0216 |

ЗАДАЧА №5 РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НЕПРЕРЫВНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

ЗАДАНИЕ к задаче №5

По заданной плотности вероятности $f(x)$ непрерывной случайной величины X :

а) Найти значение параметра a .

б) Построить график функции распределения $F(x)$.

в) Найти $M(x)$, $D(x)$ и $\sigma(x)$.

г) Найти вероятность того, что случайная величина X примет значения из интервала $(\alpha; \beta)$.

| вариант | $f(x)$ | α | β | $(\alpha; \beta)$ |
|---------|--|----------|---------|-------------------|
| 1 | $f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ ae^{-5x}, & x > 0. \end{cases}$ | | | $(0,2; 1,2)$ |
| 2 | $f(x) = \begin{cases} ax^2, & x \in [-3,0] \\ 0, & x \notin [-3,0] \end{cases}$ | | | $(-4; -1)$. |
| 3 | $f(x) = \begin{cases} ax(4-x), & x \in [1,4] \\ 0, & x \notin [1,4] \end{cases}$ | | | $(3; 5)$. |
| 4 | $f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 2, \\ ax^{-9/2}, & x > 2. \end{cases}$ | | | $(5; 6)$. |
| 5 | $f(x) = \begin{cases} a(x-1)^{-1/3}, & x \in [1,9] \\ 0, & x \notin [1,9] \end{cases}$ | | | $(2; 3)$. |
| 6 | $f(x) = \begin{cases} ax^{1/3}, & x \in [1,8] \\ 0, & x \notin [1,8] \end{cases}$ | | | $(7; 9)$. |
| 7 | $f(x) = \begin{cases} ax(4-x^2), & x \in [0,2] \\ 0, & x \notin [0,2] \end{cases}$ | | | $(-1; 1)$. |
| 8 | $f(x) = \begin{cases} x^2/9, & x \in [0,a] \\ 0, & x \notin [0,a] \end{cases}$ | | | $(0,1; 0,7)$. |

| | | | | | |
|----|--|--|--|--|--------------|
| 9 | $f(x) = \begin{cases} ax, & x \in [0,1) \\ 1/2, & x \in [1,2] \\ 0, & x \notin [0,2] \end{cases}$ | | | | (0,5; 3). |
| 10 | $f(x) = \begin{cases} \frac{5}{2}ax, & x \in [1,2] \\ 0, & x \notin [1,2] \end{cases}$ | | | | (1,5; 1,7). |
| 11 | $f(x) = \begin{cases} 1/2, & x \in [0,1) \\ 1/4, & x \in [1,a] \\ 0, & x \notin [0,a] \end{cases}$ | | | | (0,8; 3,2). |
| 12 | $f(x) = \begin{cases} 1/3, & x \in [-1,0) \\ 1/6, & x \in [0,a] \\ 0, & x \notin [-1,a] \end{cases}$ | | | | (-0,4; 1,6). |
| 13 | $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4\sqrt{x}}, & x \in (0,a] \\ 0, & x \notin [0,a] \end{cases}$ | | | | (-1; 1). |
| 14 | $f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1 \\ ax^{-10/3}, & x > 1 \end{cases}$ | | | | (2; 3). |
| 15 | $f(x) = \begin{cases} ax + ax^3, & x \in [0,2] \\ 0, & x \notin [0,2] \end{cases}$ | | | | (-0,5; 1,5). |
| 16 | $f(x) = \begin{cases} ax^{-1/4}, & x \in [0,1] \\ 0, & x \notin [0,1] \end{cases}$ | | | | (1/4; 3/4). |

Примеры решения задач №5

© Пример №5.1 Равномерное распределение.

СВ X равномерно распределена на интервале $[2; 8]$. Найти:

- дифференциальную и интегральную функции распределения;
- основные числовые характеристики;

с) вероятность попадания СВ X на интервал $[5; 10]$

Решение. По формулам равномерного распределения имеем:

| | |
|--|---|
| | $f(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 0, & x > b \end{cases} = \begin{cases} 0, & x \notin (2; 8), \\ \frac{1}{6}, & x \in [2; 8]. \end{cases}$ |
| | $F(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 1, & x > b \end{cases} = \begin{cases} 0, & x < 2, \\ \frac{x-2}{6}, & 2 \leq x \leq 8, \\ 1, & x > 8. \end{cases}$ |

$$M[X] = \frac{a+b}{2} = \frac{10}{2} = 5, \quad D[X] = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{36}{12} = 3.$$

По формуле $P(\alpha \leq X \leq \beta) = \frac{\beta - \alpha}{b - a}$, где $(\alpha; \beta) \subset (a; b)$, тогда

$$P(5 \leq X \leq 10) = P(5 \leq X \leq 8) = \frac{8-5}{8-2} = \frac{3}{6} = 0,5, \text{ где } (5; 8) \subset (2; 8).$$

© Пример №5.2 Показательное распределение

СВ X имеет показательный закон распределения, заданный интегральной функцией $F(x) = 1 - e^{-5x}$, $x \geq 0$. Найти:

- дифференциальную функцию распределения;
- основные числовые характеристики;
- вероятность попадания СВ X на интервал $[5; +\infty)$.

Решение. Для показательного распределения:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x}, & 0 \leq x \end{cases} = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 5e^{-5x}, & 0 \leq x \end{cases}$$

$$M[X] = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{5}, \quad D[X] = \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{25}$$

Так как $P(\alpha < X < \beta) = e^{-\alpha\lambda} - e^{-\beta\lambda}$, то:

$$P(X > 2) = P(2 < X < +\infty) = e^{-2 \cdot 5} - e^{-\infty} = e^{-10} - 0 = e^{-10} \approx 0,45 \cdot 10^{-4}.$$

ЗАДАЧА №6 НОРМАЛЬНЫЙ ЗАКОН РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

ЗАДАНИЕ к задаче №6

Заданы математическое ожидание a и среднее квадратичное отклонение σ нормально распределенной непрерывной СВ. Найти:

- ① вероятность $P(\alpha < x < \beta)$;
- ② вероятность $P(|x - a| < \delta)$;
- ③ симметричный, относительно a , интервал, в который попадает величина X с вероятностью γ ;
- ④ интервал, в котором практически окажутся все значения величины X .
- ⑤ Построить кривую плотности нормального распределения.

| вариант | a | σ | α | β | δ | γ |
|---------|-----|----------|----------|---------|----------|----------|
| 1 | 15 | 2 | 9 | 19 | 3 | 0,6872 |
| 2 | 13 | 4 | 11 | 21 | 8 | 0,7699 |
| 3 | 11 | 13 | 13 | 23 | 6 | 0,8385 |
| 4 | 9 | 3 | 9 | 18 | 6 | 0,6872 |
| 5 | 7 | 2 | 6 | 10 | 4 | 0,9281 |
| 6 | 10 | 2 | 14 | 22 | 4 | 0,9545 |
| 7 | 10 | 3 | 7 | 13 | 2 | 0,9722 |
| 8 | 10 | 2 | 13 | 15 | 1 | 0,9836 |
| 9 | 6 | 2 | 6 | 9 | 1 | 0,4515 |
| 10 | 5 | 1 | 3 | 6 | 1 | 0,5763 |
| 11 | 7 | 2 | 7 | 9 | 1 | 0,6827 |
| 12 | 7 | 3 | 6 | 10 | 1 | 0,5223 |
| 13 | 12 | 4 | 8 | 10 | 2 | 0,1581 |
| 14 | 14 | 2 | 10 | 12 | 1 | 0,3108 |
| 15 | 16 | 4 | 8 | 12 | 2 | 0,3899 |
| 16 | 14 | 4 | 10 | 20 | 4 | 0,7287 |

Примеры решения задач №6

Особый интерес для практики представляет непрерывная случайная величина, имеющая так называемый *нормальный закон распределения*, плотность вероятности которой имеет вид:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}},$$

где m и σ — параметры. Числовые характеристики случайной величины X , распределенной по нормальному закону, совпадают с параметрами распределения: $M(X) = m$, $D(X) = \sigma^2$, а вероятность попадания X в интервал (α, β) подсчитывается по формуле:

$$P\{\alpha < X < \beta\} = \Phi\left(\frac{\beta-m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha-m}{\sigma}\right), \quad \text{где} \quad \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2/2} dt$$
 —

функция Лапласа, значения которой можно найти в таблицах.

⊙ Пример №6.1 Найти вероятность попадания в интервал $(-2; 3)$ для нормально распределенной случайной величины с параметрами $m = 2$, $\sigma = 3$.

Решение.

$$P\{-2 < X < 3\} = \Phi\left(\frac{3-2}{3}\right) - \Phi\left(\frac{-2-2}{3}\right) =$$

$$= \Phi(0,33) - \Phi(-1,33) = 0,1293 + 0,4082 = 0,5375.$$

Известно («правило трех сигм»), что практически все возможные значения нормально распределенной случайной величины сосредоточены в интервале $(m - 3\sigma; m + 3\sigma)$. Действительно, вероятность попадания в этот интервал равна 0,9973, то есть выход за его границы можно считать событием практически невозможным ($p = 0,27\%$).

⊙ Пример №6.2 Найти математическое ожидание и дисперсию нормально распределенной случайной величины, принимающей значения от 3,5 до 10,1.

Решение. Будем считать границы интервала равными $m - 3\sigma$ и $m + 3\sigma$. Тогда $m - 3\sigma = 3,5$, $m + 3\sigma = 10,1$, и следовательно, $M(X) = m = 6,8$, $\sigma = 1,1$, $D(X) = \sigma^2 = 1,21$.

⊙ Пример №6.3 Случайная величина X распределена по нормальному закону с параметрами $a = 30$; $\sigma = 10$. Найти вероятность того, что:

а) случайная величина попадет в интервал $[30; \infty)$;

б) случайная величина попадет в интервал $[10; 40]$;

в) случайная величина примет значение $X = 30$.

Р е ш е н и е

а) График нормального закона распределения симметричен относительно математического ожидания $x = a = 30$. Случайная величина с равной возможностью может оказаться больше или меньше числа $=30$. Поэтому $P(x \geq 30) = 0,5$.

б) Вероятность того, что случайная величина попадет в интервал $[\alpha; \beta]$ находится по формуле:

$$P(\alpha \leq x \leq \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right).$$

В нашем случае:

$$\begin{aligned} P(10 \leq x \leq 40) &= \Phi\left(\frac{40 - 30}{10}\right) - \Phi\left(\frac{10 - 30}{10}\right) = \\ &= \Phi(1) + \Phi(2) = 0,3413 + 0,4772 = 0,8185; \end{aligned}$$

в) $P(x = 30) = P(30 \leq x \leq 30) = \Phi(0) - \Phi(0) = 0$.

$P(x = 30) = 0$ - этот результат еще раз подтверждает тот факт, что непрерывная случайная величина принимает каждое возможное свое значение с нулевой вероятностью.

Практически это значит, что принятие определенного изолированного значения непрерывной случайной величиной почти невозможно. Частота такого события близка к нулю.

ЗАДАЧА №7 ПЕРВИЧНАЯ ОБРАБОТКА ВЫБОРКИ.

ЗАДАНИЕ к задаче №7

По данным выборки

- 1) построить статистический ряд распределения;
- 2) изобразить гистограмму относительных частот;

3) вычислить выборочное среднее;

4) вычислить выборочную дисперсию.

Вариант 1.

2.0 4.8 5.2 3.8 3.5 3.2 3.2 3.9 4.9 2.8 3.7 1.8 3.4 2.3 3.2 4.5 0.5
3.3 2.8 2.5 1.4 3.2 3.5 2.2 2.3 3.5 3.5 4.1 4.4 2.3 1.9 2.2 3.8 3.4
2.2 3.1 2.1 2.1 3.2 2.5 2.1 2.9 2.8 3.1 4.3 2.8 4.0 2.3 2.7 2.4 2.4
2.3 2.4 2.9 2.2 3.6 2.1 3.2 2.3 2.9 2.0 4.7 3.5 2.8 3.0 -0.2 3.6 3.1
3.3 1.4 2.6 2.6 1.8 4.3 1.8 0.7 4.6 3.0 1.9 3.7 3.2 2.6 2.6 4.2 2.9
2.3 5.4 3.3 3.1 2.8 2.7 2.7 1.8 2.8 4.6 2.7 1.4 3.9 3.7 2.5

Вариант 2.

34.0 36.1 34.3 34.4 34.1 35.6 35.9 34.4 35.2 34.2 35.8 35.2 34.3 34.8 35.1
34.5 34.6 34.2 34.4 34.2 34.8 35.0 34.8 37.7 34.3 36.0 36.0 35.1 34.2 34.2
34.4 34.3 34.0 34.0 36.4 34.1 35.1 34.7 34.1 34.1 34.2 34.2 34.6 35.0 36.5
34.1 34.4 34.2 34.6 35.0 34.1 35.0 34.6 34.3 34.3 34.3 34.1 36.5 34.2 34.8
34.5 34.8 34.1 36.2 34.0 34.2 34.7 35.8 35.1 35.3 34.4 35.2 35.9 35.7 34.7
34.9 35.0 35.8 35.1 35.5 34.8 34.8 36.4 34.9 34.5 34.5 34.6 34.4 35.0 34.1
35.2 34.6 34.3 34.9 34.1 34.2 35.1 37.5 35.1 34.0

Вариант 3.

12.8 12.3 14.7 12.2 13.2 12.0 15.2 13.2 12.3 13.7 14.3 12.5 12.2 13.9 16.2
14.4 13.0 12.3 12.3 15.1 14.2 12.5 15.9 12.0 14.8 12.1 19.9 12.8 12.8 12.8
14.4 15.7 12.2 12.2 15.0 12.4 12.5 12.9 13.6 12.2 13.4 12.1 13.1 12.6 14.2
13.6 12.0 16.4 12.3 14.2 14.1 12.2 13.3 12.4 12.6 13.5 14.8 12.6 21.8 12.9
14.1 12.5 13.8 19.1 15.8 13.8 14.8 15.1 12.0 13.3 17.5 15.8 13.3 12.3 12.8
14.0 12.9 12.7 16.2 14.5 19.0 20.0 13.5 13.3 13.1 12.7 13.0 17.0 18.7 17.0
12.6 13.1 12.9 12.2 12.9 15.3 13.7 12.6 12.3 18.8

Вариант 4.

40.2 31.8 31.2 29.1 25.7 37.5 49.1 28.9 36.7 30.6 44.1 31.1 44.9 40.0 31.0
50.9 41.3 46.0 33.8 28.0 30.9 34.5 48.8 32.3 40.9 35.8 43.8 28.1 27.0 33.0
29.8 28.5 28.8 33.4 32.5 46.6 39.4 38.6 41.6 41.4 36.1 31.8 47.6 34.0 28.2
28.2 42.1 39.2 42.0 24.0 24.2 28.1 48.4 37.7 36.4 38.9 35.3 38.9 44.1 45.3
28.9 26.4 46.4 35.4 36.6 36.6 29.3 33.7 25.0 33.3 28.0 46.2 28.0 41.7 31.3
24.1 26.7 31.0 33.3 30.8 32.2 29.3 36.2 45.8 26.6 45.2 49.9 33.6 46.1 47.8
41.6 24.6 47.4 25.7 31.2 38.2 42.5 40.3 26.6 39.8

Вариант 5.

2.0 4.8 5.2 3.8 3.5 3.2 3.2 3.9 4.9 2.8 3.7 1.8 3.4 2.3 3.2 4.5 0.5
3.3 2.8 2.5 1.4 3.2 3.5 2.2 2.3 3.5 3.5 4.1 4.4 2.3 1.9 2.2 3.8 3.4
2.2 3.1 2.1 2.1 3.2 2.5 2.1 2.9 2.8 3.1 4.3 2.8 4.0 2.3 2.7 2.4 2.4

2.3 2.4 2.9 2.2 3.6 2.1 3.2 2.3 2.9 2.0 4.7 3.5 2.8 3.0 -0.2 3.6 3.1
3.3 1.4 2.6 2.6 1.8 4.3 1.8 0.7 4.6 3.0 1.9 3.7 3.2 2.6 2.6 4.2 2.9
2.3 5.4 3.3 3.1 2.8 2.7 2.7 1.8 2.8 4.6 2.7 1.4 3.9 3.7 2.5

Вариант 6.

34.0 36.1 34.3 34.4 34.1 35.6 35.9 34.4 35.2 34.2 35.8 35.2 34.3 34.8 35.1
34.5 34.6 34.2 34.4 34.2 34.8 35.0 34.8 37.7 34.3 36.0 36.0 35.1 34.2 34.2
34.4 34.3 34.0 34.0 36.4 34.1 35.1 34.7 34.1 34.1 34.2 34.2 34.6 35.0 36.5
34.1 34.4 34.2 34.6 35.0 34.1 35.0 34.6 34.3 34.3 34.3 34.1 36.5 34.2 34.8
34.5 34.8 34.1 36.2 34.0 34.2 34.7 35.8 35.1 35.3 34.4 35.2 35.9 35.7 34.7
34.9 35.0 35.8 35.1 35.5 34.8 34.8 36.4 34.9 34.5 34.5 34.6 34.4 35.0 34.1
35.2 34.6 34.3 34.9 34.1 34.2 35.1 37.5 35.1 34.0

Вариант 7.

12.8 12.3 14.7 12.2 13.2 12.0 15.2 13.2 12.3 13.7 14.3 12.5 12.2 13.9 16.2
14.4 13.0 12.3 12.3 15.1 14.2 12.5 15.9 12.0 14.8 12.1 19.9 12.8 12.8 12.8
14.4 15.7 12.2 12.2 15.0 12.4 12.5 12.9 13.6 12.2 13.4 12.1 13.1 12.6 14.2
13.6 12.0 16.4 12.3 14.2 14.1 12.2 13.3 12.4 12.6 13.5 14.8 12.6 21.8 12.9
14.1 12.5 13.8 19.1 15.8 13.8 14.8 15.1 12.0 13.3 17.5 15.8 13.3 12.3 12.8
14.0 12.9 12.7 16.2 14.5 19.0 20.0 13.5 13.3 13.1 12.7 13.0 17.0 18.7 17.0
12.6 13.1 12.9 12.2 12.9 15.3 13.7 12.6 12.3 18.8

Вариант 8.

40.2 31.8 31.2 29.1 25.7 37.5 49.1 28.9 36.7 30.6 44.1 31.1 44.9 40.0 31.0
50.9 41.3 46.0 33.8 28.0 30.9 34.5 48.8 32.3 40.9 35.8 43.8 28.1 27.0 33.0
29.8 28.5 28.8 33.4 32.5 46.6 39.4 38.6 41.6 41.4 36.1 31.8 47.6 34.0 28.2
28.2 42.1 39.2 42.0 24.0 24.2 28.1 48.4 37.7 36.4 38.9 35.3 38.9 44.1 45.3
28.9 26.4 46.4 35.4 36.6 36.6 29.3 33.7 25.0 33.3 28.0 46.2 28.0 41.7 31.3
24.1 26.7 31.0 33.3 30.8 32.2 29.3 36.2 45.8 26.6 45.2 49.9 33.6 46.1 47.8
41.6 24.6 47.4 25.7 31.2 38.2 42.5 40.3 26.6 39.8

Вариант 9.

2.0 4.8 5.2 3.8 3.5 3.2 3.2 3.9 4.9 2.8 3.7 1.8 3.4 2.3 3.2 4.5 0.5
3.3 2.8 2.5 1.4 3.2 3.5 2.2 2.3 3.5 3.5 4.1 4.4 2.3 1.9 2.2 3.8 3.4
2.2 3.1 2.1 2.1 3.2 2.5 2.1 2.9 2.8 3.1 4.3 2.8 4.0 2.3 2.7 2.4 2.4
2.3 2.4 2.9 2.2 3.6 2.1 3.2 2.3 2.9 2.0 4.7 3.5 2.8 3.0 -0.2 3.6 3.1
3.3 1.4 2.6 2.6 1.8 4.3 1.8 0.7 4.6 3.0 1.9 3.7 3.2 2.6 2.6 4.2 2.9
2.3 5.4 3.3 3.1 2.8 2.7 2.7 1.8 2.8 4.6 2.7 1.4 3.9 3.7 2.5

Вариант 10.

34.0 36.1 34.3 34.4 34.1 35.6 35.9 34.4 35.2 34.2 35.8 35.2 34.3 34.8 35.1
34.5 34.6 34.2 34.4 34.2 34.8 35.0 34.8 37.7 34.3 36.0 36.0 35.1 34.2 34.2

34.4 34.3 34.0 34.0 36.4 34.1 35.1 34.7 34.1 34.1 34.2 34.2 34.6 35.0 36.5
34.1 34.4 34.2 34.6 35.0 34.1 35.0 34.6 34.3 34.3 34.3 34.1 36.5 34.2 34.8
34.5 34.8 34.1 36.2 34.0 34.2 34.7 35.8 35.1 35.3 34.4 35.2 35.9 35.7 34.7
34.9 35.0 35.8 35.1 35.5 34.8 34.8 36.4 34.9 34.5 34.5 34.6 34.4 35.0 34.1
35.2 34.6 34.3 34.9 34.1 34.2 35.1 37.5 35.1 34.0

Вариант 11.

12.8 12.3 14.7 12.2 13.2 12.0 15.2 13.2 12.3 13.7 14.3 12.5 12.2 13.9 16.2
14.4 13.0 12.3 12.3 15.1 14.2 12.5 15.9 12.0 14.8 12.1 19.9 12.8 12.8 12.8
14.4 15.7 12.2 12.2 15.0 12.4 12.5 12.9 13.6 12.2 13.4 12.1 13.1 12.6 14.2
13.6 12.0 16.4 12.3 14.2 14.1 12.2 13.3 12.4 12.6 13.5 14.8 12.6 21.8 12.9
14.1 12.5 13.8 19.1 15.8 13.8 14.8 15.1 12.0 13.3 17.5 15.8 13.3 12.3 12.8
14.0 12.9 12.7 16.2 14.5 19.0 20.0 13.5 13.3 13.1 12.7 13.0 17.0 18.7 17.0
12.6 13.1 12.9 12.2 12.9 15.3 13.7 12.6 12.3 18.8

Вариант 12.

40.2 31.8 31.2 29.1 25.7 37.5 49.1 28.9 36.7 30.6 44.1 31.1 44.9 40.0 31.0
50.9 41.3 46.0 33.8 28.0 30.9 34.5 48.8 32.3 40.9 35.8 43.8 28.1 27.0 33.0
29.8 28.5 28.8 33.4 32.5 46.6 39.4 38.6 41.6 41.4 36.1 31.8 47.6 34.0 28.2
28.2 42.1 39.2 42.0 24.0 24.2 28.1 48.4 37.7 36.4 38.9 35.3 38.9 44.1 45.3
28.9 26.4 46.4 35.4 36.6 36.6 29.3 33.7 25.0 33.3 28.0 46.2 28.0 41.7 31.3
24.1 26.7 31.0 33.3 30.8 32.2 29.3 36.2 45.8 26.6 45.2 49.9 33.6 46.1 47.8
41.6 24.6 47.4 25.7 31.2 38.2 42.5 40.3 26.6 39.8

Вариант 13.

2.0 4.8 5.2 3.8 3.5 3.2 3.2 3.9 4.9 2.8 3.7 1.8 3.4 2.3 3.2 4.5 0.5
3.3 2.8 2.5 1.4 3.2 3.5 2.2 2.3 3.5 3.5 4.1 4.4 2.3 1.9 2.2 3.8 3.4
2.2 3.1 2.1 2.1 3.2 2.5 2.1 2.9 2.8 3.1 4.3 2.8 4.0 2.3 2.7 2.4 2.4
2.3 2.4 2.9 2.2 3.6 2.1 3.2 2.3 2.9 2.0 4.7 3.5 2.8 3.0 -0.2 3.6 3.1
3.3 1.4 2.6 2.6 1.8 4.3 1.8 0.7 4.6 3.0 1.9 3.7 3.2 2.6 2.6 4.2 2.9
2.3 5.4 3.3 3.1 2.8 2.7 2.7 1.8 2.8 4.6 2.7 1.4 3.9 3.7 2.5

Вариант 14.

34.0 36.1 34.3 34.4 34.1 35.6 35.9 34.4 35.2 34.2 35.8 35.2 34.3 34.8 35.1
34.5 34.6 34.2 34.4 34.2 34.8 35.0 34.8 37.7 34.3 36.0 36.0 35.1 34.2 34.2
34.4 34.3 34.0 34.0 36.4 34.1 35.1 34.7 34.1 34.1 34.2 34.2 34.6 35.0 36.5
34.1 34.4 34.2 34.6 35.0 34.1 35.0 34.6 34.3 34.3 34.3 34.1 36.5 34.2 34.8
34.5 34.8 34.1 36.2 34.0 34.2 34.7 35.8 35.1 35.3 34.4 35.2 35.9 35.7 34.7
34.9 35.0 35.8 35.1 35.5 34.8 34.8 36.4 34.9 34.5 34.5 34.6 34.4 35.0 34.1
35.2 34.6 34.3 34.9 34.1 34.2 35.1 37.5 35.1 34.0

Вариант 15.

12.8 12.3 14.7 12.2 13.2 12.0 15.2 13.2 12.3 13.7 14.3 12.5 12.2 13.9 16.2
 14.4 13.0 12.3 12.3 15.1 14.2 12.5 15.9 12.0 14.8 12.1 19.9 12.8 12.8 12.8
 14.4 15.7 12.2 12.2 15.0 12.4 12.5 12.9 13.6 12.2 13.4 12.1 13.1 12.6 14.2
 13.6 12.0 16.4 12.3 14.2 14.1 12.2 13.3 12.4 12.6 13.5 14.8 12.6 21.8 12.9
 14.1 12.5 13.8 19.1 15.8 13.8 14.8 15.1 12.0 13.3 17.5 15.8 13.3 12.3 12.8
 14.0 12.9 12.7 16.2 14.5 19.0 20.0 13.5 13.3 13.1 12.7 13.0 17.0 18.7 17.0
 12.6 13.1 12.9 12.2 12.9 15.3 13.7 12.6 12.3 18.8

Вариант 16.

40.2 31.8 31.2 29.1 25.7 37.5 49.1 28.9 36.7 30.6 44.1 31.1 44.9 40.0 31.0
 50.9 41.3 46.0 33.8 28.0 30.9 34.5 48.8 32.3 40.9 35.8 43.8 28.1 27.0 33.0
 29.8 28.5 28.8 33.4 32.5 46.6 39.4 38.6 41.6 41.4 36.1 31.8 47.6 34.0 28.2
 28.2 42.1 39.2 42.0 24.0 24.2 28.1 48.4 37.7 36.4 38.9 35.3 38.9 44.1 45.3
 28.9 26.4 46.4 35.4 36.6 36.6 29.3 33.7 25.0 33.3 28.0 46.2 28.0 41.7 31.3
 24.1 26.7 31.0 33.3 30.8 32.2 29.3 36.2 45.8 26.6 45.2 49.9 33.6 46.1 47.8
 41.6 24.6 47.4 25.7 31.2 38.2 42.5 40.3 26.6 39.8

Примеры решения задач №7

Если из генеральной совокупности извлечена выборка, состоящая из n чисел (при этом n называется *объемом выборки*), в которой число x_1 повторяется n_1 раз, число x_2 – n_2 раза, ..., число x_k – n_k раз (то есть выборка содержит k различных значений случайной величины), то числа x_i называются *вариантами*, соответствующие им n_i – *частотами*, а последовательность вариант, записанных в порядке возрастания, и относящихся к ним частот – *статистическим рядом*. При этом вместо абсолютных частот n_i можно

задавать распределение относительных частот $\omega_i = \frac{n_i}{n}$.

© Пример №7.1 Составить статистический ряд распределения частот.

Дана выборка, состоящая из чисел: 3.2, 4.1, 8.1, 8.1, 6.7, 4.4, 4.4, 3.2, 5.0, 6.7, 6.7, 7.5, 3.2, 4.4, 6.7, 6.7, 5.0, 5.0, 4.4, 8.1. Составить статистический ряд распределения абсолютных и относительных частот.

Решение. Объем выборки $n = 20$. Перепишем варианты в порядке возрастания:

3.2, 3.2, 3.2, 4.4, 4.4, 4.4, 4.4, 4.4, 5.0, 5.0,

5.0, 6.7, 6.7, 6.7, 6.7, 6.7, 7.5, 8.1, 8.1, 8.1.

Составлен так называемый *вариационный ряд*, который показывает, что выборка состоит из шести вариант (3,4,5,6,7,8). Составим статистический ряд:

| | | | | | | |
|-------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| x_i | 3.2 | 4.4 | 5.0 | 6.7 | 7.5 | 8.1 |
| n_i | 3 | 5 | 3 | 5 | 1 | 3 |

| | | | | | | |
|------------|------|------|------|------|------|------|
| ω_i | 0,15 | 0,25 | 0,15 | 0,25 | 0,05 | 0,15 |
|------------|------|------|------|------|------|------|

(относительная частота $\omega_i = \frac{n_i}{n}$). Если получена выборка значений непрерывной случайной величины, где число вариантов очень велико, составляется *сгруппированный статистический ряд*. Для его получения интервал (a, b) , содержащий все варианты, делится на k равных частей длины $h = \frac{b-a}{k}$, и в качестве абсолютных частот выступают количества вариантов, попавших на данный интервал.

Наглядное представление о поведении случайной величины, исследуемой по выборке, дает *гистограмма* – столбчатая диаграмма, состоящая из прямоугольников, основания которых – частичные интервалы длины h , а высоты – плотности абсолютных $\left(\frac{n_i}{h}\right)$ или относительных $\left(\frac{n_i}{hn}\right)$ частот. При этом общая площадь гистограммы абсолютных частот равна объему выборки, а гистограммы относительных частот – единице.

© Пример №7.2 Составить статистический ряд и построить гистограмму частот. Дана выборка, вариационный ряд которой имеет вид:

10,8; 11,1; 11,7; 12,2; 13,1; 13,4; 13,9; 14,3; 14,3; 14,4; 14,8; 16,5; 17,7; 18,2; 19,9; 20,0; 20,3; 20,8; 23,1; 24,2; 25,1; 25,1; 25,7; 28,4; 28,5; 29,3; 29,8; 29,9; 30,2; 30,4.

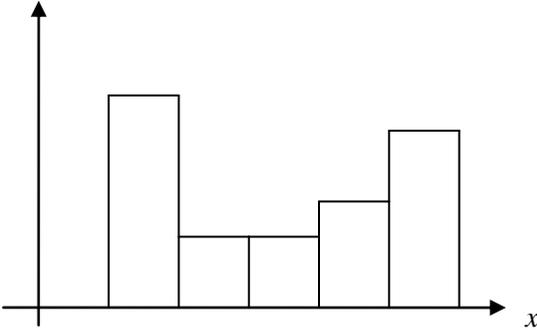
Составить статистический ряд распределения абсолютных и относительных частот, состоящий из пяти интервалов, и построить гистограмму относительных частот.

Решение. Объем выборки $n = 30$. Выберем в качестве границ интервала $a = 10,5$ и $b = 30,5$. Тогда $h = \frac{30,5 - 10,5}{5} = 4$, и (a, b) разбивается на части $(10,5; 14,5)$, $(14,5; 18,5)$, $(18,5; 22,5)$, $(22,5; 26,5)$ и $(26,5; 30,5)$. Статистический ряд при этом имеет вид:

| Номер интервала | Границы интервала | Абсолютные частоты | Относительные частоты |
|-----------------|-------------------|--------------------|-----------------------|
| 1 | 10,5; 14,5 | 10 | 1/3 |
| 2 | 14,5; 18,5 | 4 | 2/15 |
| 3 | 18,5; 22,5 | 4 | 2/15 |
| 4 | 22,5; 26,5 | 5 | 1/6 |

| | | | |
|---|------------|---|------|
| 5 | 26,5; 30,5 | 7 | 7/30 |
|---|------------|---|------|

Построим гистограмму: $\frac{n_i}{120}$



Точечные оценки параметров распределения

По имеющейся выборке можно дать оценку математического ожидания и дисперсии генеральной совокупности. Оценкой математического ожидания служит *выборочное среднее*

$$\bar{x}_B = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_k}{n},$$

то есть среднее арифметическое всех элементов выборки, а оценкой дисперсии – *выборочная дисперсия*

$$D_B = \sum_{i=1}^k \frac{(x_i - \bar{x}_B)^2}{n}.$$

Заданная таким образом оценка математического ожидания является *несмещенной*, то есть математическое ожидание выборочного среднего равно оцениваемому параметру (математическому ожиданию исследуемой случайной величины). Выборочная дисперсия, напротив, смещенная оценка генеральной дисперсии, и $M(D_B) = \frac{n-1}{n} D_G$. Поэтому вводится несмещенная оценка генеральной дисперсии – *исправленная выборочная дисперсия*

$$s^2 = \frac{n}{n-1} D_B.$$

Соответственно число $s = \sqrt{s^2}$ является несмещенной точечной оценкой среднего квадратического отклонения.

© Пример №7.3 Точечные оценки параметров распределения

Найти выборочное среднее, исправленную выборочную дисперсию и исправленное среднее выборочное отклонение для выборок, заданных в примерах 7.1 и 7.2.

Решение.

$$1) \bar{x}_B = \frac{3,2 \cdot 3 + 4,4 \cdot 5 + 5 \cdot 3 + 6,7 \cdot 5 + 7,5 \cdot 1 + 8,1 \cdot 3}{20} = 5,595;$$

$$s^2 = \frac{(3,2 - 5,595)^2 \cdot 3 + \dots + (8 - 5,595)^2 \cdot 3}{19} = 2,84; \quad s = \sqrt{2,84} = 1,69.$$

2) В выборке из примера 2 будем считать вариантами середины частичных интервалов, то есть определим точечные оценки для выборок

| | | | | | |
|-------|------|------|------|------|------|
| x_i | 12,5 | 16,5 | 20,5 | 24,5 | 28,5 |
| n_i | 10 | 4 | 4 | 5 | 7 |

$$\text{Тогда } \bar{x}_B = \frac{12,5 \cdot 10 + 16,5 \cdot 4 + 20,5 \cdot 4 + 24,5 \cdot 5 + 28,5 \cdot 7}{30} = 19,8;$$

$$s^2 = \frac{7,3^2 \cdot 10 + 3,3^2 \cdot 4 + 0,7^2 \cdot 4 + 4,7^2 \cdot 5 + 8,7^2 \cdot 7}{29} = 44,17; \quad s = \sqrt{44,17} = 6,65.$$

ЗАДАЧА №8. ОБРАБОТКА ВЫБОРКИ ДВУМЕРНОЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

ЗАДАНИЕ к задаче №8

По данным выборки двумерной случайной величины определить:

- 1) вектор математического ожидания;
- 2) вектор дисперсии;
- 3) выборочный коэффициент корреляции;
- 4) выборочное уравнение прямой линии регрессии Y на X в виде $Y = aX + b$.

Вариант 1.

(41.2, 116.5) (48.1, 124.6) (53.2, 153.9) (39.1, 99.0) (50.2, 191.6) (39.0, 94.9)
(39.4, 100.2) (50.2, 178.6) (48.3, 118.7) (39.6, 117.0) (41.3, 81.7) (35.2, 88.0)
(47.9, 159.4) (34.6, 124.4) (33.2, 103.4) (35.7, 94.9) (36.8, 90.8) (50.8, 180.5)
(44.5, 152.0) (46.3, 167.6) (34.8, 84.6) (39.2, 124.5) (36.8, 131.7) (46.0, 99.8)
(40.4, 144.8) (41.5, 120.6) (44.5, 109.7) (38.9, 93.5) (49.8, 136.8) (45.6, 107.6)
(33.0, 102.9) (47.6, 102.9) (32.5, 116.7) (42.0, 134.0) (54.1, 157.9) (35.4, 109.1)
(37.9, 92.4) (38.6, 120.7) (35.6, 96.1) (33.6, 73.2) (27.7, 61.5) (47.1, 95.0)

(29.9, 82.8) (50.1, 110.5)

Вариант 2.

(50.0, -92.8) (27.4, -49.5) (47.7,-105.8) (35.1, -67.0) (30.5, -55.7) (39.5, -67.3)
(54.8, -89.1) (57.3,-134.2) (43.0,-109.1) (43.7, -68.7) (34.6, -74.6) (47.2,-105.6)
(42.4,-106.2) (57.6,-164.1) (38.8, -59.7) (37.3, -81.7) (35.5, -67.2) (41.9,-119.3)
(23.0, -64.2) (45.3, -96.5) (51.5,-148.9) (50.9,-118.5) (58.6,-151.8) (33.6, -65.7)
(31.2, -83.0) (35.3, -68.9) (49.8, -87.0) (38.5, -58.9) (32.9, -71.8) (54.4,-103.4)
(39.3, -58.7) (46.0,-107.7) (25.0, -43.4) (31.6, -70.0) (29.0, -76.4) (27.4, -56.9)
(46.4,-111.0) (35.0, -71.5) (39.5,-104.4) (27.1, -47.6)

Вариант 3.

(62.1, -89.2) (17.3, -40.6) (36.8, -81.4) (31.3, -50.0) (33.7, -56.3) (36.0, -49.6)
(48.5, -65.2) (16.3, -22.2) (22.3, -47.2) (32.2, -70.4) (48.0, -87.9) (27.0, -45.5)
(36.1, -49.7) (35.6, -65.8) (39.7, -84.2) (23.9, -53.5) (49.2, -83.7) (22.4, -27.8)
(23.4, -51.7) (35.7, -83.6) (46.0,-101.2) (52.4,-109.1) (43.9,-106.1) (44.5, -68.3)
(28.0, -47.8) (52.3, -72.5) (27.7, -63.7) (30.8, -41.7) (38.5, -75.4) (44.2, -55.9)
(21.5, -49.9) (32.3, -71.8) (81.7,-110.2) (31.1, -52.8) (48.0, -63.8) (34.1, -82.2)
(41.6, -58.1) (41.1, -73.4) (34.5, -65.4) (52.3, -78.1) (51.5,-121.0) (27.5, -58.8)

Вариант 4.

(40.2,-135.8) (48.5,-145.2) (56.4,-128.6) (53.3,-119.6) (44.1,-134.1) (46.4,-129.0)
(42.9,-129.7) (47.1,-123.1) (57.5,-153.4) (50.5,-153.6) (40.4, -77.5) (43.2,-124.7)
(59.6,-148.4) (54.8,-159.3) (45.2, -88.2) (39.4,-109.7) (37.9,-123.5) (45.4,-165.9)
(41.5, -85.9) (34.3,-109.3) (47.6,-129.4) (47.6,-167.8) (57.1,-202.7) (35.0, -66.6)
(35.6, -69.1) (53.5,-147.7) (47.7,-171.0) (41.3,-132.0) (53.4,-134.8) (47.0,-132.3)
(39.7, -74.7) (36.7,-120.6) (48.6, -91.7) (43.6,-102.1) (38.8,-135.7) (39.8, -90.6)
(43.2,-156.7) (39.5, -80.0) (42.0,-105.3) (51.7,-177.1)

Вариант 5.

(41.2, 116.5) (48.1, 124.6) (53.2, 153.9) (39.1, 99.0) (50.2, 191.6) (39.0, 94.9)
(39.4, 100.2) (50.2, 178.6) (48.3, 118.7) (39.6, 117.0) (41.3, 81.7) (35.2, 88.0)
(47.9, 159.4) (34.6, 124.4) (33.2, 103.4) (35.7, 94.9) (36.8, 90.8) (50.8, 180.5)
(44.5, 152.0) (46.3, 167.6) (34.8, 84.6) (39.2, 124.5) (36.8, 131.7) (46.0, 99.8)
(40.4, 144.8) (41.5, 120.6) (44.5, 109.7) (38.9, 93.5) (49.8, 136.8) (45.6, 107.6)
(33.0, 102.9) (47.6, 102.9) (32.5, 116.7) (42.0, 134.0) (54.1, 157.9) (35.4, 109.1)
(37.9, 92.4) (38.6, 120.7) (35.6, 96.1) (33.6, 73.2) (27.7, 61.5) (47.1, 95.0)
(29.9, 82.8) (50.1, 110.5)

Вариант 6.

(50.0, -92.8) (27.4, -49.5) (47.7,-105.8) (35.1, -67.0) (30.5, -55.7) (39.5, -67.3)
(54.8, -89.1) (57.3,-134.2) (43.0,-109.1) (43.7, -68.7) (34.6, -74.6) (47.2,-105.6)
(42.4,-106.2) (57.6,-164.1) (38.8, -59.7) (37.3, -81.7) (35.5, -67.2) (41.9,-119.3)
(23.0, -64.2) (45.3, -96.5) (51.5,-148.9) (50.9,-118.5) (58.6,-151.8) (33.6, -65.7)
(31.2, -83.0) (35.3, -68.9) (49.8, -87.0) (38.5, -58.9) (32.9, -71.8) (54.4,-103.4)

(39.3, -58.7) (46.0,-107.7) (25.0, -43.4) (31.6, -70.0) (29.0, -76.4) (27.4, -56.9)
(46.4,-111.0) (35.0, -71.5) (39.5,-104.4) (27.1, -47.6)

Вариант 7.

(62.1, -89.2) (17.3, -40.6) (36.8, -81.4) (31.3, -50.0) (33.7, -56.3) (36.0, -49.6)
(48.5, -65.2) (16.3, -22.2) (22.3, -47.2) (32.2, -70.4) (48.0, -87.9) (27.0, -45.5)
(36.1, -49.7) (35.6, -65.8) (39.7, -84.2) (23.9, -53.5) (49.2, -83.7) (22.4, -27.8)
(23.4, -51.7) (35.7, -83.6) (46.0,-101.2) (52.4,-109.1) (43.9,-106.1) (44.5, -68.3)
(28.0, -47.8) (52.3, -72.5) (27.7, -63.7) (30.8, -41.7) (38.5, -75.4) (44.2, -55.9)
(21.5, -49.9) (32.3, -71.8) (81.7,-110.2) (31.1, -52.8) (48.0, -63.8) (34.1, -82.2)
(41.6, -58.1) (41.1, -73.4) (34.5, -65.4) (52.3, -78.1) (51.5,-121.0) (27.5, -58.8)

Вариант 8.

(40.2,-135.8) (48.5,-145.2) (56.4,-128.6) (53.3,-119.6) (44.1,-134.1) (46.4,-129.0)
(42.9,-129.7) (47.1,-123.1) (57.5,-153.4) (50.5,-153.6) (40.4, -77.5) (43.2,-124.7)
(59.6,-148.4) (54.8,-159.3) (45.2, -88.2) (39.4,-109.7) (37.9,-123.5) (45.4,-165.9)
(41.5, -85.9) (34.3,-109.3) (47.6,-129.4) (47.6,-167.8) (57.1,-202.7) (35.0, -66.6)
(35.6, -69.1) (53.5,-147.7) (47.7,-171.0) (41.3,-132.0) (53.4,-134.8) (47.0,-132.3)
(39.7, -74.7) (36.7,-120.6) (48.6, -91.7) (43.6,-102.1) (38.8,-135.7) (39.8, -90.6)
(43.2,-156.7) (39.5, -80.0) (42.0,-105.3) (51.7,-177.1)

Вариант 9.

(41.2, 116.5) (48.1, 124.6) (53.2, 153.9) (39.1, 99.0) (50.2, 191.6) (39.0, 94.9)
(39.4, 100.2) (50.2, 178.6) (48.3, 118.7) (39.6, 117.0) (41.3, 81.7) (35.2, 88.0)
(47.9, 159.4) (34.6, 124.4) (33.2, 103.4) (35.7, 94.9) (36.8, 90.8) (50.8, 180.5)
(44.5, 152.0) (46.3, 167.6) (34.8, 84.6) (39.2, 124.5) (36.8, 131.7) (46.0, 99.8)
(40.4, 144.8) (41.5, 120.6) (44.5, 109.7) (38.9, 93.5) (49.8, 136.8) (45.6, 107.6)
(33.0, 102.9) (47.6, 102.9) (32.5, 116.7) (42.0, 134.0) (54.1, 157.9) (35.4, 109.1)
(37.9, 92.4) (38.6, 120.7) (35.6, 96.1) (33.6, 73.2) (27.7, 61.5) (47.1, 95.0)
(29.9, 82.8) (50.1, 110.5)

Вариант 10.

(50.0, -92.8) (27.4, -49.5) (47.7,-105.8) (35.1, -67.0) (30.5, -55.7) (39.5, -67.3)
(54.8, -89.1) (57.3,-134.2) (43.0,-109.1) (43.7, -68.7) (34.6, -74.6) (47.2,-105.6)
(42.4,-106.2) (57.6,-164.1) (38.8, -59.7) (37.3, -81.7) (35.5, -67.2) (41.9,-119.3)
(23.0, -64.2) (45.3, -96.5) (51.5,-148.9) (50.9,-118.5) (58.6,-151.8) (33.6, -65.7)
(31.2, -83.0) (35.3, -68.9) (49.8, -87.0) (38.5, -58.9) (32.9, -71.8) (54.4,-103.4)
(39.3, -58.7) (46.0,-107.7) (25.0, -43.4) (31.6, -70.0) (29.0, -76.4) (27.4, -56.9)
(46.4,-111.0) (35.0, -71.5) (39.5,-104.4) (27.1, -47.6)

Вариант 11.

(62.1, -89.2) (17.3, -40.6) (36.8, -81.4) (31.3, -50.0) (33.7, -56.3) (36.0, -49.6)
(48.5, -65.2) (16.3, -22.2) (22.3, -47.2) (32.2, -70.4) (48.0, -87.9) (27.0, -45.5)
(36.1, -49.7) (35.6, -65.8) (39.7, -84.2) (23.9, -53.5) (49.2, -83.7) (22.4, -27.8)
(23.4, -51.7) (35.7, -83.6) (46.0,-101.2) (52.4,-109.1) (43.9,-106.1) (44.5, -68.3)

(28.0, -47.8) (52.3, -72.5) (27.7, -63.7) (30.8, -41.7) (38.5, -75.4) (44.2, -55.9)
(21.5, -49.9) (32.3, -71.8) (81.7, -110.2) (31.1, -52.8) (48.0, -63.8) (34.1, -82.2)
(41.6, -58.1) (41.1, -73.4) (34.5, -65.4) (52.3, -78.1) (51.5, -121.0) (27.5, -58.8)

Вариант 12.

(40.2, -135.8) (48.5, -145.2) (56.4, -128.6) (53.3, -119.6) (44.1, -134.1) (46.4, -129.0)
(42.9, -129.7) (47.1, -123.1) (57.5, -153.4) (50.5, -153.6) (40.4, -77.5) (43.2, -124.7)
(59.6, -148.4) (54.8, -159.3) (45.2, -88.2) (39.4, -109.7) (37.9, -123.5) (45.4, -165.9)
(41.5, -85.9) (34.3, -109.3) (47.6, -129.4) (47.6, -167.8) (57.1, -202.7) (35.0, -66.6)
(35.6, -69.1) (53.5, -147.7) (47.7, -171.0) (41.3, -132.0) (53.4, -134.8) (47.0, -132.3)
(39.7, -74.7) (36.7, -120.6) (48.6, -91.7) (43.6, -102.1) (38.8, -135.7) (39.8, -90.6)
(43.2, -156.7) (39.5, -80.0) (42.0, -105.3) (51.7, -177.1)

Вариант 13.

(41.2, 116.5) (48.1, 124.6) (53.2, 153.9) (39.1, 99.0) (50.2, 191.6) (39.0, 94.9)
(39.4, 100.2) (50.2, 178.6) (48.3, 118.7) (39.6, 117.0) (41.3, 81.7) (35.2, 88.0)
(47.9, 159.4) (34.6, 124.4) (33.2, 103.4) (35.7, 94.9) (36.8, 90.8) (50.8, 180.5)
(44.5, 152.0) (46.3, 167.6) (34.8, 84.6) (39.2, 124.5) (36.8, 131.7) (46.0, 99.8)
(40.4, 144.8) (41.5, 120.6) (44.5, 109.7) (38.9, 93.5) (49.8, 136.8) (45.6, 107.6)
(33.0, 102.9) (47.6, 102.9) (32.5, 116.7) (42.0, 134.0) (54.1, 157.9) (35.4, 109.1)
(37.9, 92.4) (38.6, 120.7) (35.6, 96.1) (33.6, 73.2) (27.7, 61.5) (47.1, 95.0)
(29.9, 82.8) (50.1, 110.5)

Вариант 14.

(50.0, -92.8) (27.4, -49.5) (47.7, -105.8) (35.1, -67.0) (30.5, -55.7) (39.5, -67.3)
(54.8, -89.1) (57.3, -134.2) (43.0, -109.1) (43.7, -68.7) (34.6, -74.6) (47.2, -105.6)
(42.4, -106.2) (57.6, -164.1) (38.8, -59.7) (37.3, -81.7) (35.5, -67.2) (41.9, -119.3)
(23.0, -64.2) (45.3, -96.5) (51.5, -148.9) (50.9, -118.5) (58.6, -151.8) (33.6, -65.7)
(31.2, -83.0) (35.3, -68.9) (49.8, -87.0) (38.5, -58.9) (32.9, -71.8) (54.4, -103.4)
(39.3, -58.7) (46.0, -107.7) (25.0, -43.4) (31.6, -70.0) (29.0, -76.4) (27.4, -56.9)
(46.4, -111.0) (35.0, -71.5) (39.5, -104.4) (27.1, -47.6)

Вариант 15.

(62.1, -89.2) (17.3, -40.6) (36.8, -81.4) (31.3, -50.0) (33.7, -56.3) (36.0, -49.6)
(48.5, -65.2) (16.3, -22.2) (22.3, -47.2) (32.2, -70.4) (48.0, -87.9) (27.0, -45.5)
(36.1, -49.7) (35.6, -65.8) (39.7, -84.2) (23.9, -53.5) (49.2, -83.7) (22.4, -27.8)
(23.4, -51.7) (35.7, -83.6) (46.0, -101.2) (52.4, -109.1) (43.9, -106.1) (44.5, -68.3)
(28.0, -47.8) (52.3, -72.5) (27.7, -63.7) (30.8, -41.7) (38.5, -75.4) (44.2, -55.9)
(21.5, -49.9) (32.3, -71.8) (81.7, -110.2) (31.1, -52.8) (48.0, -63.8) (34.1, -82.2)
(41.6, -58.1) (41.1, -73.4) (34.5, -65.4) (52.3, -78.1) (51.5, -121.0) (27.5, -58.8)

Вариант 16.

(40.2, -135.8) (48.5, -145.2) (56.4, -128.6) (53.3, -119.6) (44.1, -134.1) (46.4, -129.0)
(42.9, -129.7) (47.1, -123.1) (57.5, -153.4) (50.5, -153.6) (40.4, -77.5) (43.2, -124.7)
(59.6, -148.4) (54.8, -159.3) (45.2, -88.2) (39.4, -109.7) (37.9, -123.5) (45.4, -165.9)

(41.5, -85.9) (34.3,-109.3) (47.6,-129.4) (47.6,-167.8) (57.1,-202.7) (35.0, -66.6)
 (35.6, -69.1) (53.5,-147.7) (47.7,-171.0) (41.3,-132.0) (53.4,-134.8) (47.0,-132.3)
 (39.7, -74.7) (36.7,-120.6) (48.6, -91.7) (43.6,-102.1) (38.8,-135.7) (39.8, -90.6)
 (43.2,-156.7) (39.5, -80.0) (42.0,-105.3) (51.7,-177.1)

Примеры решения задач №8

Линейная корреляция

Если для выборки двумерной случайной величины $(X, Y): \{(x_i, y_i), i = 1, 2, \dots, n\}$ вычислены выборочные средние \bar{x}_B и \bar{y}_B и выборочные средние квадратические отклонения σ_x и σ_y , то по этим данным можно вычислить *выборочный коэффициент корреляции*

$$r_B = \frac{\sum x_i y_i - n \bar{x}_B \bar{y}_B}{n \sigma_x \sigma_y}.$$

Напомним, что коэффициент корреляции – безразмерная величина, которая служит для оценки степени линейной зависимости между X и Y : эта связь тем сильнее, чем ближе $|r|$ к единице.

Линейные уравнения, описывающие связь между X и Y , называются *выборочным уравнением прямой линии регрессии Y на X* :

$$y - \bar{y}_B = r_B \frac{\sigma_y}{\sigma_x} (x - \bar{x}_B)$$

и *выборочным уравнением прямой линии регрессии X на Y* :

$$x - \bar{x}_B = r_B \frac{\sigma_x}{\sigma_y} (y - \bar{y}_B).$$

© Пример №8.1 Вычислить квадратические отклонения, коэффициент корреляции и составить уравнение линии регрессии.

Для выборки двумерной случайной величины

| | | | | | | | | | | |
|-------|-----|-----|-----|-----|------|------|------|------|------|------|
| i | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| x_i | 1,2 | 1,5 | 1,8 | 2,1 | 2,3 | 3,0 | 3,6 | 4,2 | 5,7 | 6,3 |
| y_i | 5,6 | 6,8 | 7,8 | 9,4 | 10,3 | 11,4 | 12,9 | 14,8 | 15,2 | 18,5 |

вычислить выборочные средние, выборочные средние квадратические отклонения, выборочный коэффициент корреляции и составить выборочное уравнение прямой линии регрессии Y на X .

Решение.

$$\bar{x}_B = \frac{1,2 + 1,5 + \dots + 6,3}{10} = 3,17; \quad \bar{y}_B = \frac{5,6 + 6,8 + \dots + 18,5}{10} = 11,27.$$

$$D_B(X) = 0,1(1,2^2 + 1,5^2 + \dots + 6,3^2) - 3,17^2 = 2,7921; \quad \sigma_x = \sqrt{2,7921} = 1,671.$$

$$D_B(Y) = 0,1(5,6^2 + 6,8^2 + \dots + 18,5^2) - 11,27^2 = 15,146; \quad \sigma_y = \sqrt{15,146} = 3,892.$$

Для определения выборочного коэффициента корреляции вычислим предварительно

$$\sum_{i=1}^{10} x_i y_i = 1,2 \cdot 5,6 + 1,5 \cdot 6,8 + \dots + 6,3 \cdot 18,5 = 420,38.$$

Тогда

$$r_B = \frac{420,38 - 10 \cdot 3,17 \cdot 11,27}{10 \cdot 1,671 \cdot 3,892} = 0,97.$$

Выборочное уравнение прямой линии регрессии Y на X имеет вид:

$$y - 11,27 = 0,97 \cdot \frac{3,892}{1,671} (x - 3,17) \quad \text{или} \quad y = 2,26x - 4,104$$

Задача №9 Ранговая корреляция Спирмена и Кендалла.

ЗАДАНИЕ к задаче №9

По данным двух выборок вычислить коэффициенты ранговой корреляции Спирмена и Кендалла.

Вариант 1.

| | | | | | | | | | | | | | | | | |
|------------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| Выборка 1: | 63 | 28 | 92 | 36 | 90 | 40 | 7 | 75 | 53 | 12 | 14 | 30 | 17 | 93 | 86 | 64 |
| Выборка 2: | 58 | 31 | 4 | 60 | 30 | 92 | 59 | 27 | 82 | 56 | 52 | 95 | 54 | 8 | 49 | 36 |

Вариант 2.

| | | | | | | | | | | |
|------------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|---|
| Выборка 1: | 93 | 70 | 90 | 61 | 14 | 79 | 60 | 50 | 39 | 6 |
| Выборка 2: | 64 | 61 | 58 | 54 | 24 | 42 | 5 | 19 | 45 | 7 |

Вариант 3.

| | | | | | | | | | |
|------------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| Выборка 1: | 61 | 85 | 36 | 80 | 53 | 71 | 65 | 83 | 18 |
| Выборка 2: | 51 | 25 | 89 | 32 | 85 | 37 | 62 | 47 | 43 |

Вариант 4.

| | | | | | | | | | | | | |
|------------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| Выборка 1: | 3 | 26 | 29 | 15 | 11 | 23 | 81 | 86 | 80 | 46 | 10 | 34 |
| Выборка 2: | 37 | 97 | 45 | 14 | 95 | 27 | 75 | 99 | 24 | 23 | 60 | 2 |

Вариант 5.

| | | | | | | | | | | | | | |
|------------|----|----|----|----|----|----|---|----|----|----|----|----|----|
| Выборка 1: | 95 | 64 | 66 | 88 | 63 | 57 | 5 | 89 | 61 | 58 | 87 | 93 | 14 |
| Выборка 2: | 90 | 36 | 65 | 16 | 7 | 94 | 1 | 93 | 12 | 11 | 44 | 92 | 13 |

Вариант 6.

| | | | | | | | | | |
|------------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| Выборка 1: | 32 | 35 | 74 | 29 | 53 | 3 | 41 | 18 | 56 |
| Выборка 2: | 32 | 99 | 70 | 78 | 46 | 10 | 36 | 12 | 64 |

Вариант 7.

| | | | | | | | | | | |
|------------|-----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| Выборка 1: | 99 | 53 | 48 | 2 | 80 | 56 | 72 | 17 | 49 | 27 |
| Выборка 2: | 100 | 54 | 33 | 14 | 67 | 6 | 21 | 10 | 97 | 27 |

Вариант 8.

| | | | | | | | | | |
|------------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| Выборка 1: | 60 | 25 | 76 | 17 | 95 | 9 | 1 | 57 | 94 |
| Выборка 2: | 54 | 42 | 7 | 46 | 26 | 62 | 69 | 20 | 16 |

Вариант 9.

| | | | | | | | | | | | | | | | | |
|------------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| Выборка 1: | 63 | 28 | 92 | 36 | 90 | 40 | 7 | 75 | 53 | 12 | 14 | 30 | 17 | 93 | 86 | 64 |
| Выборка 2: | 58 | 31 | 4 | 60 | 30 | 92 | 59 | 27 | 82 | 56 | 52 | 95 | 54 | 8 | 49 | 36 |

Вариант 10.

| | | | | | | | | | | |
|------------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|---|
| Выборка 1: | 93 | 70 | 90 | 61 | 14 | 79 | 60 | 50 | 39 | 6 |
| Выборка 2: | 64 | 61 | 58 | 54 | 24 | 42 | 5 | 19 | 45 | 7 |

Вариант 11.

| | | | | | | | | | |
|------------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| Выборка 1: | 61 | 85 | 36 | 80 | 53 | 71 | 65 | 83 | 18 |
| Выборка 2: | 51 | 25 | 89 | 32 | 85 | 37 | 62 | 47 | 43 |

Вариант 12.

| | | | | | | | | | | | | |
|------------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| Выборка 1: | 3 | 26 | 29 | 15 | 11 | 23 | 81 | 86 | 80 | 46 | 10 | 34 |
| Выборка 2: | 37 | 97 | 45 | 14 | 95 | 27 | 75 | 99 | 24 | 23 | 60 | 2 |

Вариант 13.

| | | | | | | | | | | | | | |
|------------|----|----|----|----|----|----|---|----|----|----|----|----|----|
| Выборка 1: | 95 | 64 | 66 | 88 | 63 | 57 | 5 | 89 | 61 | 58 | 87 | 93 | 14 |
| Выборка 2: | 90 | 36 | 65 | 16 | 7 | 94 | 1 | 93 | 12 | 11 | 44 | 92 | 13 |

Вариант 14.

| | | | | | | | | | |
|------------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| Выборка 1: | 32 | 35 | 74 | 29 | 53 | 3 | 41 | 18 | 56 |
| Выборка 2: | 32 | 99 | 70 | 78 | 46 | 10 | 36 | 12 | 64 |

Вариант 15.

| | | | | | | | | | | |
|------------|-----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| Выборка 1: | 99 | 53 | 48 | 2 | 80 | 56 | 72 | 17 | 49 | 27 |
| Выборка 2: | 100 | 54 | 33 | 14 | 67 | 6 | 21 | 10 | 97 | 27 |

Вариант 16.

| | | | | | | | | | |
|------------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| Выборка 1: | 60 | 25 | 76 | 17 | 95 | 9 | 1 | 57 | 94 |
| Выборка 2: | 54 | 42 | 7 | 46 | 26 | 62 | 69 | 20 | 16 |

Примеры решения задач № 9

Ранговая корреляция

Рассмотрим выборку объема n , элементы которой обладают двумя *качественными* признаками: A и B (качественный признак невозможно измерить точно, но можно расположить объекты в порядке убывания или возрастания качества).

Расположим элементы выборки в порядке ухудшения качества по признаку A . При этом зададим каждому объекту *ранг* x_i , равный его порядковому номеру в

последовательности объектов: $x_i = i$. Затем расположим элементы выборки в порядке убывания качества по признаку B и присвоим каждому второй ранг: y_i , где номер i – это номер объекта в первой последовательности рангов. Таким образом, получены две последовательности рангов:

A : x_1, x_2, \dots, x_n

B : y_1, y_2, \dots, y_n .

Для исследования наличия связи между качественными признаками A и B можно использовать коэффициенты ранговой корреляции Спирмена и Кендалла.

Коэффициент ранговой корреляции Спирмена вычисляется по формуле:

$$\rho_B = 1 - \frac{6 \sum d_i^2}{n^3 - n},$$

где $d_i = x_i - y_i$, n – объем выборки.

Для вычисления *коэффициента ранговой корреляции Кендалла* найдем величины R_1, R_2, \dots, R_n , где R_i – количество чисел, больших y_i , стоящих справа от y_i в последовательности рангов по признаку B . Тогда выборочный коэффициент ранговой корреляции Кендалла

$$\tau_B = \frac{4R}{n(n-1)} - 1$$

где $R = R_1 + R_2 + \dots + R_n$.

Заметим, что оба коэффициента ранговой корреляции не превосходят по модулю единицы. При этом, чем ближе значение $|\rho_B|$ или $|\tau_B|$ к 1, тем теснее возможная связь между признаками A и B .

© Пример №9.1 Найти коэффициенты корреляции Спирмена и Кендалла.

Десять школьников сдавали выпускной экзамен ЕГЭ по математике и вступительный экзамен по системе централизованного тестирования. Результаты обоих экзаменов оценивались по 100-балльной шкале и оказались следующими (1-я строка – оценки ЕГЭ, вторая – централизованного тестирования):

| | | | | | | | | | |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 87 | 82 | 80 | 79 | 63 | 55 | 40 | 34 | 33 | 29 |
| 57 | 92 | 80 | 69 | 71 | 43 | 49 | 51 | 20 | 19 |

Найти выборочные коэффициенты корреляции Спирмена и Кендалла.

Решение.

Составим последовательности рангов по убыванию баллов на каждом экзамене:

| | | | | | | | | | | |
|-------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|
| x_i | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| y_i | 5 | 1 | 2 | 4 | 3 | 8 | 7 | 6 | 9 | 10 |

Вычислим d_i :

$$d_1 = 1 - 5 = -4; \quad d_2 = 2 - 1 = 1; \quad d_3 = 3 - 2 = 1; \quad d_4 = 4 - 4 = 0;$$

$$d_5 = 5 - 3 = 2; \quad d_6 = 6 - 8 = -2; \quad d_7 = 7 - 7 = 0; \quad d_8 = 8 - 6 = 2; \quad d_9 = d_{10} = 0.$$

Найдем $\sum d_i^2 = 16 + 1 + 1 + 4 + 4 + 4 = 30$ Тогда выборочный коэффициент ранговой корреляции Спирмена

$$\rho_B = 1 - \frac{6 \cdot 30}{1000 - 10} = 0,818.$$

Приступим к вычислению коэффициента корреляции Кендалла. Определим, сколько рангов, больших данного, располагается справа от каждого y_i :

$$R_1 = 5; R_2 = 8; R_3 = 7; R_4 = 5; R_5 = 5; R_6 = 2; R_7 = 2; R_8 = 2; R_9 = 1; R_{10} = 0;$$

$$R = 5 + 8 + 7 + 5 + 5 + 2 + 2 + 2 + 1 = 37;$$

$$\tau_B = \frac{4 \cdot 37}{10 \cdot 9} - 1 = 0,644.$$

Заметим, что величины выборочных коэффициентов корреляции позволяют предполагать существование связи между результатами экзаменов. Для проверки этого предположения следует проверить гипотезу о значимости соответствующего выборочного коэффициента ранговой корреляции.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. М., Высшая школа, 2002.
2. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей, М., Наука, 1965
3. Вентцель, Л.А. Овчаров. Теория вероятностей.–М.: Наука.–1969.
4. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. М., Высшая школа, 2004.
5. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. М., Высшая школа, 2003.
6. Чистяков В.П. Курс теории вероятностей. М.: Наука, 1987.
7. Бочаров П.П., Печинкин А. В. Теория вероятностей. Математическая статистика. М.: Гардарика, 1998, 328 с.

Приложение 1 Значения* функции Гаусса

$$\text{Значения* функции } \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

| X | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| 0,0 | 3989 | 3989 | 3989 | 3988 | 3986 | 3984 | 3982 | 3980 | 3980 | 3973 |
| 0,1 | 3970 | 3965 | 3961 | 3956 | 3951 | 3945 | 3939 | 3932 | 3925 | 3918 |
| 0,2 | 3910 | 3902 | 3894 | 3885 | 3876 | 3867 | 3857 | 3847 | 3836 | 3825 |
| 0,3 | 3814 | 3802 | 3790 | 3778 | 3765 | 3752 | 3739 | 3725 | 3712 | 3697 |
| 0,4 | 3683 | 3668 | 3653 | 3637 | 3621 | 3605 | 3589 | 3572 | 3555 | 3538 |
| 0,5 | 3521 | 3503 | 3485 | 3467 | 3448 | 3429 | 3410 | 3391 | 3372 | 3352 |
| 0,6 | 3332 | 3312 | 3292 | 3271 | 3251 | 3230 | 3209 | 3187 | 3166 | 3144 |
| 0,7 | 3123 | 3101 | 3079 | 3056 | 3034 | 3011 | 2989 | 2966 | 2943 | 2920 |
| 0,8 | 2897 | 2874 | 2850 | 2827 | 2803 | 2780 | 2756 | 2732 | 2709 | 2685 |
| 0,9 | 2661 | 2637 | 2613 | 2589 | 2565 | 2541 | 2516 | 2492 | 2468 | 2444 |
| 1,0 | 2420 | 2396 | 2371 | 2347 | 2323 | 2299 | 2275 | 2251 | 2227 | 2203 |
| 1,1 | 2179 | 2155 | 2131 | 2107 | 2083 | 2059 | 2036 | 2012 | 1989 | 1965 |
| 1,2 | 1942 | 1919 | 1895 | 1872 | 1845 | 1826 | 1804 | 1781 | 1758 | 1736 |
| 1,3 | 1714 | 1691 | 1669 | 1647 | 1626 | 1604 | 1582 | 1561 | 1539 | 1518 |
| 1,4 | 1497 | 1476 | 1456 | 1435 | 1415 | 1394 | 1374 | 1354 | 1334 | 1315 |
| 1,5 | 1295 | 1276 | 1257 | 1238 | 1219 | 1200 | 1182 | 1163 | 1145 | 1127 |
| 1,6 | 1109 | 1092 | 1074 | 1057 | 1040 | 1023 | 1006 | 0989 | 0973 | 0957 |
| 1,7 | 0940 | 0925 | 0909 | 0893 | 0878 | 0863 | 0848 | 0833 | 0818 | 0804 |
| 1,8 | 0790 | 0775 | 0761 | 0748 | 0734 | 0721 | 0707 | 0694 | 0681 | 0669 |
| 1,9 | 0656 | 0644 | 0632 | 0620 | 0608 | 0596 | 0584 | 0573 | 0562 | 0551 |
| 2,0 | 0540 | 0529 | 0519 | 0508 | 0498 | 0488 | 0478 | 0468 | 0459 | 0449 |
| 2,1 | 0440 | 0431 | 0422 | 0413 | 0404 | 0396 | 0387 | 0379 | 0371 | 0363 |
| 2,2 | 0355 | 0347 | 0339 | 0332 | 0325 | 0317 | 0310 | 0303 | 0297 | 0290 |
| 2,3 | 0283 | 0277 | 0270 | 0264 | 0258 | 0252 | 0246 | 0241 | 0235 | 0229 |
| 2,4 | 0224 | 0219 | 0213 | 0208 | 0203 | 0198 | 0194 | 0189 | 0184 | 0180 |
| 2,5 | 0175 | 0171 | 0167 | 0163 | 0158 | 0154 | 0151 | 0147 | 0143 | 0139 |
| 2,6 | 0136 | 0132 | 0129 | 0126 | 0122 | 0119 | 0116 | 0113 | 0110 | 0107 |
| 2,7 | 0104 | 0101 | 0099 | 0096 | 0093 | 0091 | 0088 | 0086 | 0084 | 0081 |
| 2,8 | 0079 | 0077 | 0075 | 0073 | 0071 | 0069 | 0067 | 0065 | 0063 | 0061 |
| 2,9 | 0060 | 0058 | 0056 | 0055 | 0053 | 0051 | 0050 | 0048 | 0047 | 0046 |
| 3,0 | 0044 | 0033 | 0024 | 0017 | 0012 | 0009 | 0006 | 0004 | 0003 | 0002 |
| 4,0 | 0001 | 0001 | 0001 | 0000 | 0000 | 0000 | 0000 | 0000 | 0000 | 0000 |

* Все значения умножены на 10 000.

Приложение 2 Значения* функции Лапласа

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

| X | Φ(x) | X | Φ(x) | X | Φ(x) | X | Φ(x) |
|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| 0.00 | 0.0000 | 0.33 | 0.1293 | 0.66 | 0.2454 | 0.99 | 0.3389 |
| 0.01 | 0.0040 | 0.34 | 0.1331 | 0.67 | 0.2486 | 1.00 | 0.3413 |
| 0.02 | 0.0080 | 0.35 | 0.1368 | 0.68 | 0.2517 | 1.01 | 0.3438 |
| 0.03 | 0.0120 | 0.36 | 0.1406 | 0.69 | 0.2549 | 1.02 | 0.3461 |
| 0.04 | 0.0160 | 0.37 | 0.443 | 0.70 | 0.2580 | 1.03 | 0.3485 |
| 0.05 | 0.0199 | 0.38 | 0.1480 | 0.71 | 0.2611 | 1.04 | 0.3508 |
| 0.06 | 0.0239 | 0.39 | 0.1517 | 0.72 | 0.2642 | 1.05 | 0.3531 |
| 0.07 | 0.0279 | 0.40 | 0.1554 | 0.73 | 0.2673 | 1.06 | 0.3554 |
| 0.08 | 0.0319 | 0.41 | 0.1591 | 0.74 | 0.2703 | 1.07 | 0.3577 |
| 0.09 | 0.0359 | 0.42 | 0.1628 | 0.75 | 0.2734 | 1.08 | 0.3599 |
| 0.10 | 0.0398 | 0.43 | 0.1664 | 0.76 | 0.2764 | 1.09 | 0.3621 |
| 0.11 | 0.0438 | 0.44 | 0.1700 | 0.77 | 0.2794 | 1.10 | 0.3643 |
| 0.12 | 0.0478 | 0.45 | 0.1736 | 0.78 | 0.2823 | 1.11 | 0.3665 |
| 0.13 | 0.0517 | 0.46 | 0.1772 | 0.79 | 0.2852 | 1.12 | 0.3686 |
| 0.14 | 0.0557 | 0.47 | 0.1808 | 0.80 | 0.2881 | 1.13 | 0.3708 |
| 0.15 | 0.0596 | 0.48 | 0.1844 | 0.81 | 0.2910 | 1.14 | 0.3729 |
| 0.16 | 0.0636 | 0.49 | 0.1879 | 0.82 | 0.2939 | 1.15 | 0.3749 |
| 0.17 | 0.0675 | 0.50 | 0.1915 | 0.83 | 0.2967 | 1.16 | 0.3770 |
| 0.18 | 0.0714 | 0.51 | 0.1950 | 0.84 | 0.2995 | 1.17 | 0.3790 |
| 0.19 | 0.0753 | 0.52 | 0.1985 | 0.85 | 0.3023 | 1.18 | 0.3810 |
| 0.20 | 0.0793 | 0.53 | 0.2019 | 0.86 | 0.3051 | 1.19 | 0.3830 |
| 0.21 | 0.0832 | 0.54 | 0.2054 | 0.87 | 0.3078 | 1.20 | 0.3849 |
| 0.22 | 0.0871 | 0.55 | 0.2088 | 0.88 | 0.3106 | 1.21 | 0.3869 |
| 0.23 | 0.0910 | 0.56 | 0.2123 | 0.89 | 0.3133 | 1.22 | 0.3883 |
| 0.24 | 0.0948 | 0.57 | 0.2157 | 0.90 | 0.3159 | 1.23 | 0.3907 |
| 0.25 | 0.0987 | 0.58 | 0.2190 | 0.91 | 0.3186 | 1.24 | 0.3925 |
| 0.26 | 0.1026 | 0.59 | 0.2224 | 0.92 | 0.3212 | 1.25 | 0.3944 |
| 0.27 | 0.1064 | 0.60 | 0.2257 | 0.93 | 0.3238 | 1.26 | 0.3962 |
| 0.28 | 0.1103 | 0.61 | 0.2291 | 0.94 | 0.3264 | 1.27 | 0.3980 |
| 0.29 | 0.1141 | 0.62 | 0.2324 | 0.95 | 0.3289 | 1.28 | 0.3997 |

| X | $\Phi(x)$ | X | $\Phi(x)$ | X | $\Phi(x)$ | X | $\Phi(x)$ |
|-------------|-----------------------------|-------------|-----------------------------|-------------|-----------------------------|-------------|-----------------------------|
| 1.32 | 0.4066 | 1.69 | 0.4545 | 2.12 | 0.4830 | 2.86 | 0.4979 |
| 1.33 | 0.4082 | 1.70 | 0.4554 | 2.14 | 0.4838 | 2.88 | 0.4980 |
| 1.34 | 0.4099 | 1.71 | 0.4564 | 2.16 | 0.4846 | 2.90 | 0.4981 |
| 1.35 | 0.4115 | 1.72 | 0.4573 | 2.18 | 0.4854 | 2.92 | 0.4982 |
| 1.36 | 0.4131 | 1.73 | 0.4582 | 2.20 | 0.4861 | 2.94 | 0.4984 |
| 1.37 | 0.4137 | 1.74 | 0.4591 | 2.22 | 0.4868 | 2.96 | 0.4985 |
| 1.38 | 0.4162 | 1.75 | 0.4599 | 2.24 | 0.4875 | 2.98 | 0.4986 |
| 1.39 | 0.4177 | 1.76 | 0.4608 | 2.26 | 0.4881 | 3.00 | 0.49865 |
| 1.40 | 0.4192 | 1.77 | 0.4616 | 2.28 | 0.4887 | 3.20 | 0.49931 |
| 1.41 | 0.4207 | 1.78 | 0.4625 | 2.30 | 0.4893 | 3.40 | 0.49966 |
| 1.42 | 0.4222 | 1.79 | 0.4633 | 2.32 | 0.4898 | 3.60 | 0.499841 |
| 1.43 | 0.4236 | 1.80 | 0.4641 | 2.34 | 0.4904 | 3.80 | 0.499928 |
| 1.44 | 0.4251 | 1.81 | 0.4649 | 2.36 | 0.4909 | 4.00 | 0.499968 |
| 1.45 | 0.4265 | 1.82 | 0.4656 | 2.38 | 0.4913 | 4.50 | 0.499997 |
| 1.46 | 0.4279 | 1.83 | 0.4664 | 2.40 | 0.4918 | 5.00 | 0.499997 |
| 1.47 | 0.4292 | 1.84 | 0.4671 | 2.42 | 0.4922 | | |
| 1.48 | 0.4306 | 1.84 | 0.4678 | 2.44 | 0.4927 | | |
| 1.49 | 0.4319 | 1.86 | 0.4686 | 2.46 | 0.4931 | | |
| 1.50 | 0.4332 | 1.87 | 0.4693 | 2.48 | 0.4934 | | |
| 1.51 | 0.4345 | 1.88 | 0.4699 | 2.50 | 0.4938 | | |
| 1.52 | 0.4357 | 1.89 | 0.4706 | 2.52 | 0.4938 | | |
| 1.53 | 0.4370 | 1.90 | 0.4713 | 2.54 | 0.4945 | | |
| 1.54 | 0.4382 | 1.91 | 0.4719 | 2.56 | 0.4948 | | |
| 1.55 | 0.4394 | 1.92 | 0.4726 | 2.58 | 0.4951 | | |
| 1.56 | 0.4406 | 1.93 | 0.4732 | 2.60 | 0.4953 | | |
| 1.57 | 0.4418 | 1.94 | 0.4738 | 2.62 | 0.4956 | | |
| 1.58 | 0.4429 | 1.95 | 0.4744 | 2.64 | 0.4959 | | |
| 1.59 | 0.4441 | 1.96 | 0.4750 | 2.66 | 0.4961 | | |
| 1.60 | 0.4452 | 1.97 | 0.4756 | 2.68 | 0.4961 | | |
| 1.61 | 0.4463 | 1.98 | 0.4761 | 2.70 | 0.4963 | | |
| 1.62 | 0.4474 | 1.99 | 0.4767 | 2.72 | 0.4965 | | |
| 1.63 | 0.4484 | 2.00 | 0.4772 | 2.74 | 0.4967 | | |
| 1.64 | 0.4495 | 2.02 | 0.4783 | 2.76 | 0.4971 | | |
| 1.65 | 0.4505 | 2.04 | 0.4793 | 2.78 | 0.4973 | | |
| 1.66 | 0.4515 | 2.06 | 0.4803 | 2.80 | 0.4974 | | |
| 1.68 | 0.4535 | 2.10 | 0.4821 | 2.84 | 0.4977 | | |

Приложение 3 Таблица значений функции Пуассона

$$P(X = m) = P_{n,m} \approx \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}$$

| $m \setminus \lambda$ | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,4 | 0,5 | 0,6 | 0,7 | 0,8 | 0,9 |
|-----------------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 0 | 0,9048 | 0,8187 | 0,7408 | 0,6703 | 0,6065 | 0,5488 | 0,4966 | 0,4493 | 0,4066 |
| 1 | 0,0905 | 0,1638 | 0,2222 | 0,2681 | 0,3033 | 0,3293 | 0,3476 | 0,3596 | 0,3696 |
| 2 | 0,0045 | 0,0164 | 0,0333 | 0,0536 | 0,0758 | 0,0988 | 0,1217 | 0,1438 | 0,1647 |
| 3 | 0,0002 | 0,0011 | 0,0033 | 0,0072 | 0,0126 | 0,0198 | 0,0284 | 0,0383 | 0,0494 |
| 4 | – | – | 0,0002 | 0,0007 | 0,0016 | 0,0030 | 0,0050 | 0,0077 | 0,0111 |
| 5 | – | – | – | 0,0001 | 0,0002 | 0,0004 | 0,0007 | 0,0012 | 0,0020 |
| 6 | – | – | – | – | – | – | 0,0001 | 0,0002 | 0,0003 |

| $m \setminus \lambda$ | 1,0 | 2,0 | 3,0 | 4,0 | 5,0 | 6,0 | 7,0 | 8,0 | 9,0 |
|-----------------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 0 | 0,3679 | 0,1353 | 0,0498 | 0,0183 | 0,0067 | 0,0025 | 0,0009 | 0,0003 | 0,0001 |
| 1 | 0,3679 | 0,2707 | 0,1494 | 0,0733 | 0,0337 | 0,0149 | 0,0064 | 0,0027 | 0,0011 |
| 2 | 0,1839 | 0,2707 | 0,2240 | 0,1465 | 0,0842 | 0,0446 | 0,0223 | 0,0107 | 0,0055 |
| 3 | 0,0313 | 0,1804 | 0,2240 | 0,1954 | 0,1404 | 0,0892 | 0,0521 | 0,0286 | 0,0150 |
| 4 | 0,0153 | 0,0902 | 0,1618 | 0,1954 | 0,1755 | 0,1339 | 0,0912 | 0,0572 | 0,0337 |
| 5 | 0,0081 | 0,0361 | 0,1008 | 0,1563 | 0,1755 | 0,1606 | 0,1277 | 0,0916 | 0,0607 |
| 6 | 0,0005 | 0,0120 | 0,0504 | 0,1042 | 0,1462 | 0,1606 | 0,1490 | 0,1221 | 0,0911 |
| 7 | 0,0001 | 0,0034 | 0,0216 | 0,0595 | 0,1044 | 0,1377 | 0,1490 | 0,1396 | 0,1318 |
| 8 | – | 0,0009 | 0,0081 | 0,0298 | 0,0655 | 0,1033 | 0,1304 | 0,1396 | 0,1318 |
| 9 | – | 0,0002 | 0,0027 | 0,0132 | 0,0363 | 0,0688 | 0,1014 | 0,1241 | 0,0318 |
| 10 | – | – | 0,0008 | 0,0053 | 0,0181 | 0,0413 | 0,0710 | 0,0993 | 0,1180 |
| 11 | – | – | 0,0002 | 0,0019 | 0,0082 | 0,0225 | 0,0452 | 0,0722 | 0,0970 |
| 12 | – | – | 0,0001 | 0,0006 | 0,0034 | 0,0113 | 0,0264 | 0,0481 | 0,0728 |
| 13 | – | – | – | 0,0002 | 0,0013 | 0,0052 | 0,0142 | 0,0296 | 0,0504 |
| 14 | – | – | – | 0,0001 | 0,0005 | 0,0022 | 0,0071 | 0,0169 | 0,0324 |
| 15 | – | – | – | – | 0,0002 | 0,0009 | 0,0033 | 0,0090 | 0,0194 |
| 16 | – | – | – | – | – | 0,0003 | 0,0014 | 0,0045 | 0,0109 |
| 17 | – | – | – | – | – | 0,0001 | 0,0006 | 0,0021 | 0,0058 |
| 18 | – | – | – | – | – | – | 0,0002 | 0,0009 | 0,0029 |
| 19 | – | – | – | – | – | – | 0,0001 | 0,0004 | 0,0014 |
| 20 | – | – | – | – | – | – | – | 0,0002 | 0,0006 |
| 21 | – | – | – | – | – | – | – | 0,0001 | 0,0003 |
| 22 | – | – | – | – | – | – | – | – | 0,0001 |

Приложение 4 Образец титульного листа.

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ

ОДЕССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. И. И. МЕЧНИКОВА

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ ЭКОНОМИКИ И МЕХАНИКИ

КАФЕДРА МЕТОДОВ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Индивидуальное задание №2

ПО КУРСУ

«ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА»

Выполнил:

студент IV курса дневного обучения
специальности компьютерная инженерия
Фамилия И. О.

Проверил:

О д е с с а - 2 0 1 7

Приложение 5 Образец заполнения листа №2.

ИНДИВИДУАЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ №2

ПО КУРСУ «ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТ СТАТИСТИКА»

| | | | | |
|--------------------|---|-----------------|---|-----------------------|
| _____ Фамилия И. О | | Вариант № _____ | | |
| Задача | $M(x)$ | $D(x)$ | $\sigma(x)$ | |
| №1 | | | | |
| №2 | | | | |
| №3 | | | | |
| №4 | | | | |
| №7 | | | | |
| Задача | $M(x)$ | $D(x)$ | $P(\alpha < x < \beta)$ | $P(x - a < \delta)$ |
| №5 | | | | |
| №6 | | | | |
| Задача №8 | выборочный коэффициент корреляции | | выборочное уравнение линии регрессии Y на X | |
| | | | | |
| Задача №9 | Коэффициент ранговой корреляции Спирмена ρ_B | | Коэффициента ранговой корреляции Кендалла τ_B | |
| | | | | |