Вісник Одесък. нац. ун-ту. Матем. і мех. – 2009. – Т.14, вип. 20. – С. 57–74

УДК 517.925

В. М. Евтухов*, Л. И. Кусик**
*Одесский национальный университет имени И. И. Мечникова
**Одесский национальный морской университет

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ РЕШЕНИЙ ОДНОГО КЛАССА НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Євтухов В. М., Кусік Л. І. Асимптотичні зображення розв'язків одного класу нелінійних диференціальних рівнянь другого порядку. Встановлено асимптотичні властивості деяких типів розв'язків одного класу істотно нелінійних неавтономних диференціальних рівнянь другого порядку, а також знайдені необхідні та достатні умови їх існування.
Ключові слова: нелінійні рівняння, $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$ -розв'язки, асимптотичні зображення.

Евтухов В. М., Кусик Л. И. Асимптотические представления решений одного класса нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка. Установлены асимптотические свойства некоторых типов решений одного класса существенно нелинейных неавтономных дифференциальных уравнений второго порядка, а также найдены необходимые и достаточные условия их существования.
Ключевые слова: нелинейные уравнения, $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$ -решения, асимптотические представления.

Evtukhov V. M., Kusick L. I. Asymptotic representations of solutions for one class of nonlinear differential equations of second order. The asymptotic behavior of some solutions for one class of essentially nonlinear non-autonomous differential equations of second order are established. We give necessary and sufficient conditions for existence of these solutions.
Key words: nonlinear equations, $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$ -solutions, asymptotic representations.

1. Постановка задачи и формулировка основного результата.

Рассматривается дифференциальное уравнение

$$y'' = \alpha_0 p(t)\varphi_0(y)\varphi_1(y')\psi(t, y, y'), \tag{1.1}$$

где $\alpha_0 \in \{-1, 1\}$, $p : [a, \omega[\longrightarrow]0, +\infty[$ — непрерывная функция, $\varphi_i : \Delta_{Y_i} \longrightarrow$ $\longrightarrow]0, +\infty[$ ($i = 0, 1$) — непрерывные правильно меняющиеся при $y^{(i)} \longrightarrow Y_i$ функции порядка σ_i $(i = 0, 1)$, $\psi : [a, \omega[\times D \longrightarrow]0, +\infty[$ — непрерывная функция, такая, что

$$\lim_{\substack{t\uparrow\omega \\ (y,z)\to(Y_0,Y_1) \\ (y,z)\in\ D}} \psi(t, y, z) = 1. \tag{1.2}$$

При этом предполагается, что $-\infty < a < \omega \le +\infty$[1], $D = \Delta_{Y_0} \times \Delta_{Y_1}$, Δ_{Y_i} $(i = \{0, 1\})$ — односторонняя окрестность Y_i, Y_i ($i \in \{0, 1\}$) равно либо 0, либо $\pm\infty$, $\sigma_0 + \sigma_1 \ne 1$.

[1]в случае $\omega = +\infty$, считаем $a > 0$

В силу определения правильно меняющейся функции (см. [1]) каждая из функций φ_i $(i = \{0,1\})$ допускает представление вида

$$\varphi_i(z) = |z|^{\sigma_i}\, L_i(z), \tag{1.3}$$

где $L_i : \Delta_{Y_i} \longrightarrow]0,+\infty[$ — непрерывная медленно меняющаяся при $z \to Y_i$ функция, т. е. такая, что

$$\lim_{\substack{z\to Y_i\\ z\in\Delta_{Y_i}}} \frac{L_i(\lambda z)}{L_i(z)} = 1 \quad (i=1,2) \quad \text{для любого} \quad \lambda > 0. \tag{1.4}$$

Известно (см. [1]), что предельное соотношение (1.4) выполнется равномерно по λ на любом отрезке $[c,d] \in]0,+\infty[$ (свойство M_1) и существует непрерывно дифференцируемая медленно меняющаяся при $z \to Y_i$ функция $L_{ii} : \Delta_{Y_i} \longrightarrow$ $\longrightarrow]0,+\infty[$ (свойство M_2), удовлетворяющая условиям

$$\lim_{\substack{z\to Y_i\\ z\in\Delta_{Y_i}}} \frac{L_i(z)}{L_{ii}(z)} = 1, \qquad \lim_{\substack{z\to Y_i\\ z\in\Delta_{Y_i}}} \frac{zL'_{ii}(z)}{L_{ii}(z)} = 0.$$

При $\psi(t,y,y') \equiv 1$, $\varphi_i(y^{(i)}) = |y^{(i)}|^{\sigma_i}$ $(i=0,1)$, $\sigma_0+\sigma_1 \neq 1$ уравнение (1.1) является обобщенным уравнением Эмдена–Фаулера. Асимптотическое поведение его всех монотонных решений детально исследовано в [2]–[8]. При $\psi(t,y,y') \equiv 1$ и дважды непрерывно дифференцируемых функциях φ_i $(i=0,1)$, удовлетворяющих условиям

$$\lim_{\substack{z\to Y_i\\ z\in\Delta_{Y_i}}} \frac{z\varphi'_i(z)}{\varphi_i(z)} = \sigma_i, \quad \limsup_{\substack{z\to Y_i\\ z\in\Delta_{Y_i}}} \left|\frac{z\varphi''_i(z)}{\varphi'_i(z)}\right| < +\infty \quad (i=0,1), \tag{1.5}$$

уравнение (1.1) исследовалось в [9]–[11]. Здесь, прежде всего, был выделен класс изучаемых решений.

Определение 1. *Решение y уравнения (1.1), заданное на некотором промежутке $[t_0,\omega[\subset [a,\omega[$, называется $P_\omega(Y_0,Y_1,\lambda_0)$ -решением, где $-\infty \le \lambda_0 \le$ $\le +\infty$, если для него соблюдаются следующие условия:*

$$y^{(i)}(t) \in \Delta Y_i \qquad \text{при } t\in[t_0,\omega[\ , \quad \lim_{t\uparrow\omega} y^{(i)}(t) = Y_i \quad (i=0,1), \tag{1.6}$$

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{(y'(t))^2}{y(t)y''(t)} = \lambda_0. \tag{1.7}$$

Для всех возможных типов $P_\omega(Y_0,Y_1,\lambda_0)$ — решений уравнения (1.1) в [9]–[11] при $\psi(t,y,y') \equiv 1$ и указанных выше ограничениях (1.5) на φ_i $(i=0,1)$ получены необходимые и достаточные условия их существования, а также асимптотические представления при $t\uparrow\omega$.

Целью настоящей заметки является распространение результатов из [9] о $P_\omega(Y_0,Y_1,\lambda_0)$ -решениях, для которых $\lambda_0 \neq 0,1,\pm\infty$, на случай, когда в уравнении (1.1) $\psi(t,y,y') \not\equiv 1$ и φ_i $(i=0,1)$ — непрерывные правильно меняющиеся при $y^{(i)} \longrightarrow Y_i$ $(i=0,1)$ функции порядка σ_i $(i=0,1)$ (т. е. снимаются гладкостные ограничения (1.5) на φ_i $(i=0,1)$).

Выберем число $b \in \Delta_{Y_0}$ таким, чтобы соблюдалось неравенство

$$|b-Y_0|<1 \quad \text{при} \quad Y_0=0, \quad b>1\ (b<-1) \quad \text{при} \quad Y_0=+\infty\ (Y_0=-\infty),$$

и введем функцию

$$\Phi(y)=\int\limits_B^y \frac{|z|^{-\sigma_1}\,dz}{\varphi_0(z)}, \quad \text{где} \quad B=\begin{cases} b, & \text{если} \quad \left|\int\limits_b^{Y_0} \dfrac{|z|^{-\sigma_1}\,dz}{\varphi_0(z)}\right|=+\infty, \\ Y_0, & \text{если} \quad \left|\int\limits_b^{Y_0} \dfrac{|z|^{-\sigma_1}\,dz}{\varphi_0(z)}\right|<+\infty. \end{cases}$$

Так как $\Phi'(y)>0$ при $y\in\Delta_{Y_0}$, то $\Phi:\Delta_{Y_0}(b)\to\Delta_{Z_0}(c)$, где

$$\Delta_{Y_0}(b)=[b,Y_0[, \quad \Delta_{Z_0}(c)=[c,Z_0[, \quad \text{если} \quad \Delta_{Y_0} - \quad \text{левая окрестность} \quad Y_0,$$

$$\Delta_{Y_0}(b)=]Y_0,b], \quad \Delta_{Z_0}(c)=]Z_0,c], \quad \text{если} \quad \Delta_{Y_0} - \quad \text{правая окрестность} \quad Y_0,$$

$$c=\int\limits_B^b \frac{|z|^{-\sigma_1}\,dz}{\varphi_0(z)}, \quad Z_0=\begin{cases} 0, & \text{если} \quad B=Y_0, \\ +\infty, & \text{если} \quad B=b<Y_0, \\ -\infty, & \text{если} \quad B=b>Y_0, \end{cases}$$

причем

$$\lim_{\substack{y\longrightarrow Y_0\\ y\in\Delta_{Y_0(b)}}} \Phi(y)=Z_0,$$

и существует обратная непрерывно дифференцируемая возрастающая функция $\Phi^{-1}:\Delta_{Z_0}(c)\to\Delta_{Y_0}(b)$, такая, что

$$\lim_{\substack{z\longrightarrow Z_0\\ z\in\Delta_{Z_0(b)}}} \Phi^{-1}(z)=Y_0. \tag{1.8}$$

Используя (1.3), свойство M_2 медленно меняющихся функций и правило Лопиталя, находим

$$\lim_{\substack{y\longrightarrow Y_0\\ y\in\Delta_{Y_0}}} \frac{|y|^{1-\sigma_1}\mathrm{sign}y}{\varphi_0(y)\Phi(y)}=\lim_{\substack{y\longrightarrow Y_0\\ y\in\Delta_{Y_0}}} \frac{\dfrac{|y|^{1-\sigma_1}\mathrm{sign}y}{|y|^{\sigma_0}L_0(y)}}{\Phi(y)}=\lim_{\substack{y\longrightarrow Y_0\\ y\in\Delta_{Y_0}}} \frac{\dfrac{|y|^{1-\sigma_0-\sigma_1}\mathrm{sign}y}{L_{00}(y)}}{\Phi(y)}=$$

$$=\lim_{\substack{y\longrightarrow Y_0\\ y\in\Delta_{Y_0}}} \frac{\dfrac{(1-\sigma_0-\sigma_1)|y|^{-\sigma_0-\sigma_1}}{L_{00}(y)}-\dfrac{|y|^{1-\sigma_0-\sigma_1}L'_{00}(y)\,\mathrm{sign}y}{L^2_{00}(y)}}{\dfrac{|y|^{-\sigma_1}}{\varphi_0(y)}}=$$

$$=\lim_{\substack{y\longrightarrow Y_0\\ y\in\Delta_{Y_0}}}\left(1-\sigma_0-\sigma_1-\frac{yL'_{00}(y)}{L_{00}(y)}\right)=1-\sigma_0-\sigma_1,$$

т.е.

$$\Phi(y)\sim\frac{|y|^{1-\sigma_1}\,\mathrm{sign}\,y}{(1-\sigma_0-\sigma_1)\varphi_0(y)} \quad \text{при} \quad y\to Y_0. \tag{1.9}$$

Далее, введем два числа, полагая

$$\mu_0 = \operatorname{sign} b, \quad \mu_1 = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad \Delta_{Y_0} \quad \text{– левая окрестность} \quad Y_0, \\ -1, & \text{если} \quad \Delta_{Y_0} \quad \text{– правая окрестность} \quad Y_0. \end{cases}$$

Поскольку b выбрано, как указано выше, а каждое $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$ -решение уравнения (1.1) вместе со своей первой и второй производными отличны от нуля на некотором промежутке $[t_1, \omega[\subset [t_0, \omega[$, причем первая производная этого решения положительна, если ΔY_0 является левой окрестностью Y_0, и отрицательна — в противном случае, то эти два числа определяют знаки соответственно $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$ -решения и его первой производной в некоторой окрестности ω.

Наконец, введем две вспомогательные функции

$$\pi_\omega(t) = \begin{cases} t & \text{при } \omega = +\infty, \\ t - \omega & \text{при } \omega < +\infty, \end{cases}$$

$$I_1(t) = \int\limits_{A_1}^{t} p(s)\pi_\omega(s)|\pi_\omega(s)|^{-\sigma_1} L_1\left(\mu_1 |\pi_\omega(s)|^{\frac{1}{\lambda_0 - 1}}\right) ds,$$

где

$$A_1 = \begin{cases} a_1, & \text{если} \quad \int\limits_{a_1}^{\omega} p(s)|\pi_\omega(s)|^{1-\sigma_1} L_1(\mu_1 |\pi_\omega(s)|^{\frac{1}{\lambda_0 - 1}}) ds = +\infty, \\ \omega, & \text{если} \quad \int\limits_{a_1}^{\omega} p(s)|\pi_\omega(s)|^{1-\sigma_1} L_1(\mu_1 |\pi_\omega(s)|^{\frac{1}{\lambda_0 - 1}}) ds < +\infty, \end{cases}$$

$a_1 \in [a, \omega[$ и такое, что $\mu_1 |\pi_\omega(t)|^{\frac{1}{\lambda_0 - 1}} \in \Delta_{Y_1}$ при $t \in [a_1, \omega[$, а также

Определение 2. *Будем говорить, что функция φ_i $(i \in \{0, 1\})$ удовлетворяет условию S_i, если для любой правильно меняющейся функции $z : [t_0, \omega[\to \Delta_{Y_i}$ порядка r $(r \in \mathbf{R} \setminus \{\mathbf{0}\})$, для которой выполнено условие $\lim\limits_{t \uparrow \omega} z(t) = Y_i$, справедливо соотношение*

$$L_i(z(t)) = L_i(\ \mu_i |\pi_\omega(t)|^r\ )[1 + 0(1)] \quad (i \in \{0, 1\}) \quad \textit{при} \quad t \uparrow \omega.$$

Для уравнения (1.1) имеет место следующее утверждение.

Теорема. *Пусть $\lambda_0 \in \boldsymbol{R} \setminus \{0, 1\}$ и функция φ_1 удовлетворяет условию S_1. Тогда для существования у уравнения (1.1) $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$ — решений необходимо, а если выполнено одно из следующих двух условий:*

$$\textit{либо} \quad \lambda_0 + 1 - \sigma_1 \neq 0, \quad \textit{либо} \quad \lambda_0 + 1 - \sigma_1 = 0 \quad \textit{и} \quad \lambda_0(\sigma_0 + \sigma_1 - 1) > 0, \tag{1.10}$$

то и достаточно, чтобы

$$Y_0 = \begin{cases} 0, & \textit{если} \quad (1 - \sigma_0 - \sigma_1) I_1(t)\pi_\omega(t) < 0 \quad \textit{при} \quad t \in]a_1, \omega[, \\ \pm\infty, & \textit{если} \quad (1 - \sigma_0 - \sigma_1) I_1(t)\pi_\omega(t) > 0 \quad \textit{при} \quad t \in]a_1, \omega[, \end{cases} \tag{1.11}$$

$$Y_1 = \begin{cases} 0, & \textit{если} \quad (\lambda_0 - 1)\pi_\omega(t) < 0 \quad \textit{при} \quad t \in [a, \omega[, \\ \pm\infty, & \textit{если} \quad (\lambda_0 - 1)\pi_\omega(t) > 0 \quad \textit{при} \quad t \in [a, \omega[, \end{cases} \tag{1.12}$$

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{I_1'(t)\pi_\omega(t)}{I_1(t)}=\frac{\lambda_0(1-\sigma_0-\sigma_1)}{(\lambda_0-1)}, \tag{1.13}$$

и выполнялись неравенства

$$\alpha_0\lambda_0\mu_0>0,\ \ \alpha_0\mu_1(\lambda_0-1)\pi_\omega(t)>0 \ \ \textit{при}\ \ t\in[a,\omega[. \tag{1.14}$$

Более того, для каждого такого решения имеют место асимптотические представления

$$\frac{\mu_0\,|y(t)|^{1-\sigma_1}}{\varphi_0(y(t))}=\gamma_1\,(1-\sigma_0-\sigma_1)\,I_1(t)(1+o(1)) \quad \textit{при} \quad t\uparrow\omega, \tag{1.15}$$

$$\frac{y'(t)}{y(t)}=\frac{\lambda_0(1+o(1))}{(\lambda_0-1)\pi_\omega(t)} \quad \textit{при} \quad t\uparrow\omega, \tag{1.16}$$

где

$$\gamma_1=\alpha_0(\lambda_0-1)\,|\lambda_0|^{\sigma_1}\,|\lambda_0-1|^{-\sigma_1},$$

причем существует однопараметрическое семейство таких решений в случае, когда $\lambda_0(1-\sigma_0-\sigma_1)<0$, *и двухпараметрическое — в случае, когда* $\lambda_0(1-\sigma_0-\sigma_1)>0$ *и* $(\lambda_0-1)(1+\lambda_0-\sigma_1)\pi_\omega(t)>0$ *при* $t\in[a,\omega[$.

Замечание 1. *В этой теореме асимптотическое представление (1.15) неявно определяет* $P_\omega(Y_0,Y_1,\lambda_0)$ *— решение уравнения (1.1). Однако, в силу представления (1.16) это решение является правильно меняющейся при* $t\uparrow\omega$ *функцией порядка* $\dfrac{\lambda_0}{\lambda_0-1}$. *Поэтому если дополнительно предположить, что функция* φ_0 *удовлетворяет условию* S_0, *то, учитывая (1.3), представление (1.15) можно переписать в виде*

$$\mu_0\,|y(t)|^{1-\sigma_0-\sigma_1}=\gamma_1\,(1-\sigma_0-\sigma_1)\,I_1(t)L_0\left(\mu_0|\pi_\omega(t)|^{\frac{\lambda_0}{\lambda_0-1}}\right)(1+o(1)) \ \textit{при} \quad t\uparrow\omega,$$

откуда получаем для $P_\omega(Y_0,Y_1,\lambda_0)$ *— решения асимптотическое представление в следующем явном виде*

$$y(t)=\mu_0\left|\gamma_1\,(1-\sigma_0-\sigma_1)\,I_1(t)L_0\left(\mu_0|\pi_\omega(t)|^{\frac{\lambda_0}{\lambda_0-1}}\right)\right|^{\frac{1}{1-\sigma_0-\sigma_1}}(1+o(1))$$

при $t\uparrow\omega$.

Замечание 2. *Приведенная выше теорема, переформулированная для монотонно возрастающих* $P_\omega(Y_0,Y_1,\lambda_0)$ *— решений, совпадает с теоремой 1.1 из работы [9], установленной в частном случае* $\psi(t,y,y')\equiv 1$ *и при более сильных ограничениях (1.5) на функции* φ_i $(i=0,1)$.

2. Некоторые вспомогательные утверждения. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений вида

$$z_i'=f_i(x)+\sum_{j=1}^{2}p_{ij}(x)z_j+g_i(x)\sum_{j=1}^{2}r_{ij}(x,z_1,z_2) \quad (i=1,2), \tag{2.1}$$

где $f_i, g_i : [a, +\infty[\longrightarrow \mathbf{R}$ $(i = 1, 2)$ $p_{ij} : [a, +\infty[\longrightarrow \mathbf{R}$ $(i, j = 1, 2)$, $r_{ij} : \Omega^2_{ab} \longrightarrow \longrightarrow \mathbf{R}$ $(i, j = 1, 2)$ — непрерывные функции, $\Omega^2_{ab} = [a, +\infty[\times \mathbf{R}^2_b$, $\mathbf{R}^2_b = \{(z_1, z_2) : |z_i| \le b,\ i = 1, 2\}$, b — некоторая положительная постоянная. При этом будем также предполагать, что функции r_{ij} $(i, j = 1, 2)$ удовлетворяют условиям

$$\lim_{x \to +\infty} r_{i1}(x, z_1, z_2) = 0 \quad (i = 1, 2) \quad \text{равномерно по } (z_1, z_2) \in \mathbf{R^2_b}, \tag{2.2}$$

$$\lim_{|z_1| + |z_2| \to 0} \frac{r_{i2}(x, z_1, z_2)}{|z_1| + |z_2|} = 0 \quad (i = 1, 2) \quad \text{равномерно по } x \in [a, +\infty[. \tag{2.3}$$

Введем для системы (2.1) вспомогательные функции, полагая

$$F_i(x) = \int\limits_{\alpha_i}^{x} f_i(\tau) e^{\int\limits_\tau^x p_{ii}(s)ds} d\tau, \quad G_i(x) = \int\limits_{\beta_i}^{x} |g_i(\tau)| e^{\int\limits_\tau^x p_{ii}(s)ds} d\tau \quad (i = 1, 2),$$

$$P_{ij}(x) = \int\limits_{\alpha_{ij}}^{x} |p_{ij}(\tau)| e^{\int\limits_\tau^x p_{ii}(s)ds} d\tau \quad (i \ne j, \quad i, j = 1, 2),$$

где

$$\alpha_i = \begin{cases} a, \ \text{если} \ \int\limits_a^{+\infty} f_i(\tau) e^{-\int\limits_a^\tau p_{ii}(s)ds} d\tau \ \text{расходится}, \\ +\infty, \ \text{если} \ \int\limits_a^{+\infty} f_i(\tau) e^{-\int\limits_a^\tau p_{ii}(s)ds} d\tau \ \text{сходится}, \end{cases}$$

$$\beta_i = \begin{cases} a, \ \text{если} \ \int\limits_a^{+\infty} |g_i(\tau)| e^{-\int\limits_a^\tau p_{ii}(s)ds} d\tau = +\infty, \\ +\infty, \ \text{если} \ \int\limits_a^{+\infty} |g_i(\tau)| e^{-\int\limits_a^\tau p_{ii}(s)ds} d\tau < +\infty, \end{cases}$$

$$\alpha_{ij} = \begin{cases} a, \ \text{если} \ \int\limits_a^{+\infty} |p_{ij}(\tau)| e^{-\int\limits_a^\tau p_{ii}(s)ds} d\tau = +\infty, \\ +\infty, \ \text{если} \ \int\limits_a^{+\infty} |p_{ij}(\tau)| e^{-\int\limits_a^\tau p_{ii}(s)ds} d\tau < +\infty. \end{cases}$$

Лемма 1. *Пусть функции r_{ij} $(i, j = 1, 2)$ удовлетворяют условиям* (2.2), (2.3), *а функции F_i, G_i $(i = 1, 2)$ и P_{ij} $(i \ne j, i, j = 1, 2)$ таковы, что*

$$\lim_{x \to +\infty} F_i(x) = 0, \quad \limsup_{x \to +\infty} |G_i(x)| < +\infty \quad (i = 1, 2), \tag{2.4}$$

$$\limsup_{x \to +\infty} |P_{ij}(x)| = P^0_{ij} = const \quad (i \ne j, \ i, j = 1, 2). \tag{2.5}$$

Пусть, кроме того, соблюдаются неравенства

$$|P^0_{21}| < 1, \quad |P^0_{12} P^0_{21}| < 1. \tag{2.6}$$

Тогда система дифференциальных уравнений (2.1) *имеет хотя бы одно решение* $(z_1, z_2) : [x_0, +\infty[\to \mathbf{R}^2_b$ *$(x_0 \ge a$), стремящееся к нулю при $x \to +\infty$. Более* *того, существует целое k — параметрическое семейство $(k \in \{1,2\})$ таких решений, если среди функций p_{ii} $(i=1,2)$ имеется k функций, для которых*

$$\lim_{x\to+\infty} \int\limits_a^x p_{ii}(s)ds = -\infty. \tag{2.7}$$

Доказательство. Полагая $B_0 = max\{|P_{21}^0|, |P_{12}^0 P_{21}^0|\}$, подберем с учетом (2.6) числа $q \in]B_0, 1[$, $x_1 \geq a$, $\varepsilon_{02} > 0$ таким образом, чтобы соблюдались неравенства

$$B_i(x) \leq q \quad (i=1,2) \quad \text{при} \quad x \geq x_1, \tag{2.8}$$

где

$$B_2(x) = 2\varepsilon_{02}|G_2(x)| + |P_{21}(x)|, \quad B_1(x) = 2\varepsilon_{02}|G_1(x)| + \left| \int\limits_{\alpha_{12}}^x B_2(\tau)|p_{12}(\tau)| e^{\int\limits_\tau^x p_{11}(s)ds} d\tau \right|.$$

Для числа $\varepsilon_{02} > 0$ в силу (2.3) найдется $b_0 \in]0, b]$, такое, что на множестве $\Omega_{ab_0}^2$ выполняются неравенства

$$|r_{i2}(x, z_1, z_2)| < \varepsilon_{02}(|z_1| + |z_2|) \ (i=1,2). \tag{2.9}$$

Далее, выберем постоянные c_i^0 $(i=1,2)$, взяв в качестве c_i^0 $(i \in \{1,2\})$ произвольное отличное от нуля вещественное число в случае, когда соблюдается условие (2.7), и полагаем $c_i^0 = 0$ — в противном случае. При таком их выборе существуют в силу условий (2.4) и (2.5) числа $x_2 \geq x_1$ и $\varepsilon_{01} > 0$ такие, что

$$A_2(x, c_2^0) \leq b_0(1-q), \quad A_1(x, c_1^0, c_2^0) \leq b_0(1-q) \ \text{при} \ x \geq x_2, \tag{2.10}$$

где

$$A_2(x, c_2^0) = |c_2^0| e^{\int\limits_a^x p_{22}(s)ds} + |F_2(x)| + \varepsilon_{01}|G_2(x)|, \quad A_1(x, c_1^0, c_2^0) =$$

$$= |c_1^0| e^{\int\limits_a^x p_{11}(s)ds} + |F_1(x)| + \varepsilon_{01}|G_1(x)| + \left| \int\limits_{\alpha_{12}}^x A_2(\tau, c_2^0)|p_{12}(\tau)| e^{\int\limits_a^x p_{11}(s)ds} d\tau \right|.$$

Наконец, учитывая (2.2), подберем число $x_0 \geq x_2$ таким, чтобы на множестве $\Omega_{x_0 b}$ соблюдались неравенства

$$|r_{i1}(x, z_1, z_2)| < \varepsilon_{01} \quad (i=1,2). \tag{2.11}$$

Пусть $\mathbf{C}_{loc}([x_0, +\infty[; \mathbf{R}^2)$ — пространство непрерывных вектор-функций $z = (z_i)_{i=1}^2 : [x_0, +\infty[\to \mathbf{R}^2$ с топологией равномерной сходимости на замкнутых отрезках из $[x_0, +\infty[$, а S — подмножество тех из них, для которых $|z_i(x)| \leq b_0$ $(i=1,2)$ при $x \in [x_0, +\infty[$.

Выбрав произвольным образом постоянные c_1, c_2, удовлетворяющие неравенствам $0 \leq |c_i| \leq |c_i^0|$ $(i=1,2)$, рассмотрим оператор $\Phi = (\Phi_i)_{i=1}^2 : S \to$

$\to \mathbf{C}_{loc}([x_0,+\infty[;\mathbf{R}^2)$, определяемый рекуррентными соотношениями:

$$
\begin{aligned}
&\Phi_2(z)(x) = c_2\, e^{\int\limits_a^x p_{22}(s)ds} + F_2(x) + \int\limits_{\overline{\alpha}_{21}}^{x} p_{21}(\tau) z_1(\tau) e^{\int\limits_\tau^x p_{22}(s)ds} d\tau + \\
&+ \int\limits_{\overline{\beta}_2}^{x} g_2(\tau) \sum_{j=1}^{2} \; r_{2j}\left(\tau, z_1(\tau), z_2(\tau)\right) e^{\int\limits_\tau^x p_{22}(s)ds} d\tau, \\
&\Phi_1(z)(x) = c_1 e^{\int\limits_a^x p_{11}(s)ds} + F_1(x) + \int\limits_{\overline{\alpha}_{12}}^{x} p_{12}(\tau) \Phi_2(z)(\tau) e^{\int\limits_\tau^x p_{11}(s)ds} d\tau + \\
&+ \int\limits_{\overline{\beta}_1}^{x} g_1(\tau) \sum_{j=1}^{2} r_{1j}(\tau, z_1(\tau), z_2(\tau)) e^{\int\limits_\tau^x p_{11}(s)ds} d\tau,
\end{aligned}
\tag{2.12}
$$

где каждый из пределов интегрирования $\overline{\beta}_i$ $(i=1,2)$, $\overline{\alpha}_{12}$, $\overline{\alpha}_{21}$ равен x_0 , если соответствующий ему из пределов интегрирования β_i $(i=1,2)$, α_{12}, α_{21} был до этого выбран равным a , и остается равным $+\infty$ — в противном случае.

Для любого $z \in S$ в силу (2.8)–(2.10)

$$|\Phi_2(z)(x)| \le A_2(x, c_2^0) + b_0 B_2(x) \le b_0 \quad \text{при} \quad x \in [x_0,+\infty[,$$

и

$$|\Phi_1(z)(x)| \le A_1(x, c_1^0, c_2^0) + b_0 B_1(x) \le b_0 \quad \text{при} \quad x \in [x_0,+\infty[.$$

Поэтому $\Phi(S) \subset S$.

Далее установим непрерывность оператора Φ .

Пусть $z^k = (z_i^k)_{i=1}^2 \in S$ $(k=0,1,2,\dots)$ и $\lim\limits_{k\to+\infty} z^k(x) = z^0(x)$ равномерно на каждом конечном отрезке промежутка $[x_0;+\infty[$. Тогда в силу непрерывности функций r_{ij} $(i,j=1,2)$ на множестве Ω_{ab}^2

$$\lim_{k\to+\infty} r_{ij}(x, z_1^k(x), z_2^k(x)) = r_{ij}(x, z_1^0(x), z_2^0(x)) \tag{2.13}$$

равномерно на каждом конечном отрезке $[x_0;+\infty[$.

Покажем, что для произвольных $\varepsilon > 0$ и $x_* > x_0$ при любом $i \in \{1,2\}$ существует натуральное число K_i , такое что

$$|\Phi_i(z^k)(x) - \Phi_i(z^0)(x)| < \varepsilon \text{ при } k > K_i \text{ и } x \in [x_0, x_*]. \tag{2.14}$$

Отсюда будет следовать, что $\lim\limits_{k\to+\infty} \Phi(z^k)(x) = \Phi(z^0)(x)$ равномерно на каждом конечном отрезке из $[x_0;+\infty[$, и тем самым будет доказана непрерывность оператора Φ .

В силу второго из условий (2.4), а также условия (2.5) найдется постоянная $M > 0$, такая что при $x \in [x_0,+\infty[$ выполняются неравенства $|P_{ij}(x)| < M$ $(i,j=1,2)$, $|G_i(x)| < M$ $(i=1,2)$.

Выберем произвольным образом числа $\varepsilon > 0$, $x_* \in [x_0,+\infty[$ и установим сначала существование натурального числа K_2 для которого соблюдается (2.14) при $i=2$.

В силу (2.12) имеем

$$\left|\Phi_2(z^k)(x)-\Phi_2(z^0)(x)\right| \le \left|\int\limits_{\overline{\alpha}_{21}}^{x} |p_{21}(\tau)||z_1^k(\tau)-z_1^0(\tau)|e^{\int\limits_{\tau}^{x} p_{22}(s)ds} d\tau\right| +$$

$$+\left|\int\limits_{\overline{\beta}_2}^{x} |g_2(\tau)|\sum_{j=1}^{2} |r_{2j}(\tau,z_1^k(\tau),z_2^k(\tau))-r_{2j}(\tau,z_1^0(\tau),z_2^0(\tau))|\, e^{\int\limits_{\tau}^{x} p_{22}(s)ds} d\tau\right|.$$

Для первого слагаемого, стоящего справа, рассмотрим в отдельности два случая, когда $\overline{\alpha}_{21}=x_0$ и $\overline{\alpha}_{21}=+\infty$.

Пусть $\overline{\alpha}_{21}=x_0$. Поскольку $\lim\limits_{k\to+\infty} z^k(x)=z^0(x)$ равномерно на каждом конечном отрезке из промежутка $[x_0;+\infty[$, то существует $K_{21}(\varepsilon)$ такое, что для любого $k>K_{21}(\varepsilon)$ и $x\in[x_0,x_*]$ будет выполнено неравенство $|z_1^k(x)-z_1^0(x)|<$ $<\frac{\varepsilon}{2M}$. Поэтому

$$\int\limits_{x_0}^{x} |p_{21}(\tau)||z_1^k(\tau)-z_1^0(\tau)|e^{\int\limits_{\tau}^{x} p_{22}(s)ds} d\tau \le \frac{\varepsilon}{2M}\int\limits_{x_0}^{x} |p_{21}(\tau)|e^{\int\limits_{\tau}^{x} p_{22}(s)ds} d\tau =$$

$$=\frac{\varepsilon}{2M}|P_{21}(x)|<\frac{\varepsilon}{2} \quad \text{при } k>K_{21} \text{ и } x\in[x_0,x_*].$$

Если же $\overline{\alpha}_{21}=+\infty$, то выберем достаточно большое число $x_1>x_*$ так, чтобы соблюдалось неравенство

$$\int\limits_{x_1}^{+\infty} |p_{21}(\tau)|\, e^{-\int\limits_{x_0}^{\tau} p_{22}(s)ds} d\tau \le \frac{\varepsilon}{8b_0M}\int\limits_{x_*}^{+\infty} |p_{21}(\tau)|\, e^{-\int\limits_{x_0}^{\tau} p_{22}(s)ds} d\tau,$$

и подберем натуральное $K_{21}(\varepsilon)$ таким, чтобы

$$|z_1^k(x)-z_1^0(x)|<\frac{\varepsilon}{4M} \quad \text{при } k>K_{21} \text{ и } x\in[x_0,x_1].$$

Тогда при $x \in [x_0, x_*]$ и $k > K_{21}$ будем иметь

$$\left| \int\limits_{+\infty}^{x} |p_{21}(\tau)||z_1^k(\tau) - z_1^0(\tau)| e^{\int\limits_{\tau}^{x} p_{22}(s)ds} d\tau \right| =$$

$$= e^{\int\limits_{x_0}^{x} p_{22}(s)ds} \left(\int\limits_{x}^{x_1} |p_{21}(\tau)||z_1^k(\tau) - z_1^0(\tau)| e^{\int\limits_{\tau}^{x_0} p_{22}(s)ds} d\tau + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{x_1}^{+\infty} |p_{21}(\tau)||z_1^k(\tau) - z_1^0(\tau)| e^{\int\limits_{\tau}^{x_0} p_{22}(s)ds} d\tau \right) \le$$

$$\le e^{\int\limits_{x_0}^{x} p_{22}(s)ds} \left(\frac{\varepsilon}{4M} \int\limits_{x}^{x_1} |p_{21}(\tau)| e^{\int\limits_{\tau}^{x_0} p_{22}(s)ds} d\tau + 2b_0 \int\limits_{x_1}^{+\infty} |p_{21}(\tau)| e^{\int\limits_{\tau}^{x_0} p_{22}(s)ds} d\tau \right) \le$$

$$\le \frac{\varepsilon}{4M} e^{\int\limits_{x_0}^{x} p_{22}(s)ds} \left(\int\limits_{x}^{x_1} |p_{21}(\tau)| e^{\int\limits_{\tau}^{x_0} p_{22}(s)ds} d\tau + \int\limits_{x_*}^{+\infty} |p_{21}(\tau)| e^{\int\limits_{\tau}^{x_0} p_{22}(s)ds} d\tau \right) \le$$

$$\le \frac{\varepsilon}{2M} e^{\int\limits_{x_0}^{x} p_{22}(s)ds} \int\limits_{x}^{+\infty} |p_{21}(\tau)| e^{\int\limits_{\tau}^{x_0} p_{22}(s)ds} d\tau = \frac{\varepsilon}{2M} |P_{21}(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Учитывая теперь, что $\lim\limits_{k \to +\infty} r_{2j}(x, z_1^k(x), z_2^k(x)) = r_{2j}(x, z_1^0(x), z_2^0(x))$ $(j = 1, 2)$ равномерно на каждом конечном отрезке промежутка $[x_0; +\infty[$, аналогично предыдущему устанавливаем существование натурального K_{22} такого, что при $k > K_{22}$ и $x \in [x_0, x_*]$ соблюдается неравенство

$$\left| \int\limits_{\bar{\beta}_2}^{x} |g_2(\tau)| \sum_{j=1}^{2} |r_{2j}(\tau, z_1^k(\tau), z_2^k(\tau)) - r_{2j}(\tau, z_1^0(\tau), z_2^0(\tau))| e^{\int\limits_{\tau}^{x} p_{22}(s)ds} d\tau \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Из вышеизложенного ясно, что

$$\left| \Phi_2(z^k)(x) - \Phi_2(z^0)(x) \right| < \varepsilon \quad \text{при } k > K_2 = \max\{K_{21}, K_{22}\} \quad \text{и } x \in [x_0, x_*].$$

Таким же способом с использованием уже установленного факта, что $\lim\limits_{k \to +\infty} \Phi_2(z^k)(x) = \Phi_2(z^0)(x)$ равномерно на любом отрезке из промежутка $[x_0, +\infty[$, доказываем при любых $\varepsilon > 0$ и $x_* \in [x_0, +\infty[$ существование натурального K_1, для которого соблюдается неравенство (2.14) при $i = 1$.

Далее покажем, что функции из множества образов $\Phi(S)$ являются равностепенно непрерывными и равномерно ограниченными на каждом отрезке из промежутка $[x_0, +\infty[$. Вследствие того, что Φ отображает ограниченное множество S в себя, функции из $\Phi(S)$ равномерно ограничены на $[x_0, +\infty[$. Кроме того, в силу (2.12) для любой функции $z \in S$

$$\Phi_2'(z)(x) = f_2(x) + p_{21}(x)z_1(x) + p_{22}(x)\Phi_2(z)(x) + g_2(x) \sum_{j=1}^{2} r_{2j}(x, z_1(x), z_2(x)),$$

$$\Phi_1'(z)(x) = f_1(x) + \sum_{j=1}^{2} p_{1j}(x)\Phi_j(z)(x) + g_1(x) \sum_{j=1}^{2} r_{1j}(x, z_1(x), z_2(x)).$$

Отсюда с учетом условий $z \in S$, $\Phi(S) \subset S$, (2.9) и (2.11) имеем

$$|\Phi_i'(z)(x)| \leq |f_i(x)| + b_0 \sum_{j=1}^{2} |p_{ij}(x)| + |g_i(x)|(\varepsilon_{01} + 2b_0\varepsilon_{02}) \quad (i = 1, 2)$$

при $x \in [x_0, +\infty[$. Поэтому ввиду непрерывности функций f_i, g_i $(i = 1, 2)$, p_{ij} $(i, j = 1, 2)$ на промежутке $[x_0, +\infty[$ для любых $x_* \geq x_0$ и $x^* \geq x_*$ существует число $M_* > 0$, не зависящее от $z \in S$, такое, что $|\Phi_i'(z)(x)| \leq M_*$ ($i = 1, 2$) при $x \in [x_*, x^*]$. Отсюда следует, что функции из множества образов $\Phi(S)$ равностепенно непрерывны на каждом конечном отрезке из $[x_0, +\infty[$.

Таким образом, для Φ выполнены все условия теоремы Шаудера–Тихонова (см. [12], стр. 9) Значит, существует $z \in S$, для которого верно равенство $\Phi(z) = z$. Эта вектор-функция $z : [x_0, +\infty[\to \mathbf{R}^2_{b_0}$, очевидно, является решением системы (2.1).

Покажем, что это решение стремится к нулю при $x \to +\infty$. Допустим противное. Тогда $\max\limits_{i=1,2}\{\limsup\limits_{x\to+\infty} |z_i(x)|\} = \limsup\limits_{x\to+\infty} |z_l(x)| = c_0 > 0$ $(c_o \leq b_0)$ и, следовательно, для некоторой возрастающей последовательности $\{x_k\}$, такой, что $x_k \geq x_0$, $x_k \to +\infty$ справедливо предельное соотношение $\lim\limits_{k\to+\infty} |z_l(x_k)| = c_0$. Поэтому для числа $\varepsilon \in \left]0, \frac{c_0(1-q)}{1+q}\right[$ существует натуральное число $N(\varepsilon)$ такое, что соблюдаются неравенства

$$\begin{array}{lll} |z_l(x_k)| > c_0 - \varepsilon & & \text{при} \quad k \geq N, \\ |z_i(x)| < c_0 + \varepsilon & (i = 1, 2) & \text{при} \quad x \geq x_N. \end{array} \tag{2.15}$$

В силу второго из этих неравенств, а также (2.4), (2.5) и (2.9) из (2.12) с учетом того, что $z \in S$ и $\Phi_i(z) = z_i$ $(i = 1, 2)$, получим неравенства

$$|z_i(x)| \leq \tilde{A}_i(z)(x) + (c_0 + \varepsilon)\tilde{B}_i(x) \quad (i = 1, 2) \quad \text{при} \quad x \geq x_N, \tag{2.16}$$

в которых

$$\tilde{A}_2(z)(x) = C_2 e^{\int_a^x p_{22}(s)ds} + |F_2(x)| + \left| \int_{\tilde{\beta}_2}^{x} |g_2(\tau)||r_{21}(\tau, z_1(\tau), z_2(\tau))| e^{\int_\tau^x p_{22}(s)ds} d\tau \right|,$$

$$\tilde{A}_1(z)(x) = C_1 e^{\int_a^x p_{11}(s)ds} + |F_1(x)| + \left| \int_{\tilde{\beta}_1}^{x} |g_1(\tau)||r_{11}(\tau, z_1(\tau), z_2(\tau))| e^{\int_\tau^x p_{11}(s)ds} d\tau \right| +$$

$$+ \left| \int_{\tilde{\alpha}_{12}}^{x} |p_{12}(\tau)| \tilde{A}_2(z)(\tau) e^{\int_\tau^x p_{11}(s)ds} d\tau \right|,$$

$$\tilde{B}_2(x) = 2\varepsilon_{02} \left| \int_{\tilde{\beta}_2}^{x} |g_2(\tau)| e^{\int_\tau^x p_{22}(s)ds} d\tau \right| + \left| \int_{\tilde{\alpha}_{21}}^{x} |p_{21}(\tau)| e^{\int_\tau^x p_{22}(s)ds} d\tau \right|,$$

$$\tilde{B}_1(x) = 2\varepsilon_{02}\left|\int\limits_{\tilde{\beta}_1}^{x} |g_1(\tau)| e^{\int\limits_\tau^x p_{11}(s)ds} d\tau\right| + \left|\int\limits_{\tilde{\alpha}_{12}}^{x} |p_{12}(\tau)| B_2(\tau) e^{\int\limits_\tau^x p_{11}(s)ds} d\tau\right|,$$

где каждая из постоянных C_i $(i \in \{1,2\})$ не меньше $|c_i|$ при выполнении условия (2.7) и равна нулю — в противном случае, а каждый из пределов интегрирования $\tilde{\beta}_i$ $(i \in \{1,2\})$, $\tilde{\alpha}_{12}$, $\tilde{\alpha}_{21}$ равен x_N ($+\infty$), если в (2.12) соответственно предел интегрирования $\overline{\beta}_i$ $(i \in \{1,2\})$, $\overline{\alpha}_{12}$, $\overline{\alpha}_{21}$ был равен x_0 ($+\infty$).

Ввиду условий (2.2), (2.4), (2.5), (2.7) и леммы 1.2 из работы [13] $\lim\limits_{x\to+\infty} \tilde{A}_i(z)(x) = 0$ $(i = 1,2)$, а согласно условиям (2.8) $\tilde{B}_i(x) < q$ $(i = 1,2)$ при $x \in [x_N, +\infty[$. Поэтому из (2.16) с учетом первого из неравенств (2.15) имеем

$$c_0 - \varepsilon < \tilde{A}_l(x_k) + (c_0 + \varepsilon)q \qquad \text{при} \quad k \geq N,$$

откуда следует, что $c_0(1-q) - \varepsilon(1+q) < \tilde{A}_l(x_k)$ при $k \geq N$, чего быть не может, поскольку здесь в силу выбора числа ε слева стоит положительное число, а выражение, стоящее справа, стремится к нулю при $k \to +\infty$. Полученное противоречие доказывает, что решение $z \in S$ операторного уравнения $\Phi(z) = z$ стремится к нулю при $x \to +\infty$. Это решение в силу (2.12) зависит также от постоянных c_i $(i = 1,2)$, которые выбирались произвольными фиксированными вещественными числами, удовлетворяющими неравенствам $0 \leq |c_i| \leq |c_i^0|$ $(i = 1,2)$, где $c_i^0 \neq 0$, если соблюдается условие (2.7) и $c_i^0 = 0$ в противном случае. Значит, при наличии k функций p_{ii} $(i \in \{1,2\})$, для которых выполняется условие (2.7), система дифференциальных уравнений (2.1) имеет k-параметрическое семейство решений $(z_i)_{i=1}^2 : [x_0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}_{b_0}$, стремящихся к нулю при $x \to +\infty$.

Лемма полностью доказана.

Из данной леммы с использованием лемм 1.1–1.3 из работы [13] непосредственно вытекает следующее утверждение.

Лемма 2. *Пусть функции* f_i, g_i $(i = 1,2)$, p_{ij} $(i,j = 1,2)$ *допускают представления в виде суммы двух непрерывных на промежутке* $[a, +\infty[$ *функций*

$$f_i(x) = \sum_{\nu=1}^{2} f_{\nu i}(x), \quad g_i(x) = \sum_{\nu=1}^{2} g_{\nu i}(x), \quad p_{ij}(x) = \sum_{\nu=1}^{2} p_{\nu ij}(x)$$

таких, что соблюдаются следующие условия:

1) *при любом* $i \in \{1,2\}$

$$\int\limits_a^{+\infty} |f_{2i}(x)|\, dx < \infty, \quad \int\limits_a^{+\infty} |g_{2i}(x)|\, dx < \infty, \quad \lim_{x\to+\infty} \int\limits_a^{x} p_{2ii}(\tau)\, d\tau = const,$$

$$\int\limits_a^{+\infty} |p_{2ij}(x)|\, dx < \infty \quad (j \neq i, j \in \{1,2\});$$

2) *для некоторого множества* $M \subset \{1,2\}$ *при любом* $i \in M$

$$p_{1ii}(x) \neq 0 \quad \text{в некоторой окрестности} + \infty, \qquad \int\limits_a^{+\infty} p_{1ii}(\tau) d\tau = \pm\infty,$$

$$\limsup_{x\to+\infty}\frac{f_{1i}(x)}{p_{1ii}(x)}=0,\quad \limsup_{x\to+\infty}\frac{g_{1i}(x)}{p_{1ii}(x)}=G_i^0=const,$$

$$\limsup_{x\to+\infty}\frac{p_{1ij}(x)}{p_{1ii}(x)}=P_{ij}^0=const\quad (j\neq i, j\in\{1,2\})$$

и при любом $i\in\{1,2\}\setminus M$

$$f_{1i}(x)\equiv 0,\quad g_{1i}(x)\equiv 0,\quad p_{1ij}(x)\equiv 0\quad (j=1,2).$$

Пусть, кроме того, выполняются условия (2.2), (2.3) *и постоянные, определяемые следующим образом*

$$B_2^0=\begin{cases}0, & \text{если}\quad 2\notin M,\\ |P_{21}^0|, & \text{если}\quad 2\in M,\end{cases}\qquad B_1^0=\begin{cases}0, & \text{если}\quad 1\notin M,\\ B_2^0|P_{12}^0|, & \text{если}\quad 1\in M,\end{cases}$$

таковы, что $B_i^0<1$ *при* $i\in M$ *. Тогда система дифференциальных уравнений (2.1) имеет по крайней мере одно решение* $(z_i)_{i=1}^2:[x_0,+\infty[\longrightarrow\mathbb{R}$ $(x_0\geq a)$*, стремящееся к нулю при* $x\to+\infty$ *, причем таких решений существует целое* k *-параметрическое семейство, если среди функций* p_{1ii} $(i\in M)$ *имеется* k *функций, которые отрицательны в некоторой окрестности* $+\infty$ *.*

С использованием леммы 2 и преобразований из доказательства теоремы 2.1 работы [13] легко может быть установлено также следующее утверждение.

Лемма 3. *Пусть соблюдаются условия* (2.2) *,* (2.3) *,* $g_i(x)\equiv 1$ $(i=1,2)$ *,* $\int\limits_a^{+\infty}|f_i(x)|\,dx<+\infty$ $(i=1,2)$ *, функции* p_{ij} $(i,j=1,2)$ *представимы в виде*

$$p_{ij}(x)=p_{ij}^0+q_{ij}(x),$$

где p_{ij}^0 $(i,j=1,2)$ *— вещественные постоянные, а* $q_{ij}:[a,+\infty[\longrightarrow\mathbb{R}$ $(i,j=1,2)$ *— непрерывные функции такие, что* $\int\limits_a^{+\infty}|q_{ij}(x)|\,dx<+\infty$ $(i,j=1,2)$ *. Пусть, кроме того, алгебраическое уравнение*

$$\rho^2-(p_{11}^0+p_{22}^0)\rho+p_{11}^0p_{22}^0-p_{12}^0p_{21}^0=0\tag{2.17}$$

не имеет корней с нулевой действительной частью. Тогда система дифференциальных уравнений (2.1) *имеет по крайней мере одно решение* $(z_i)_{i=1}^2:[x_0,+\infty[\longrightarrow\mathbb{R}$ $(x_0\geq a)$ *, стремящееся к нулю при* $x\to+\infty$ *, причем таких решений существует целое 2-параметрическое семейство в случае, когда* $p_{11}^0p_{22}^0-p_{12}^0p_{21}^0>0$ *и* $p_{11}^0+p_{22}^0<0$ *, и однопараметрическое семейство, когда* $p_{11}^0p_{22}^0-p_{12}^0p_{21}^0<0$ *.*

Замечание 3. *Из этой леммы в частном случае, когда* $f_i(x)\equiv 0$ $(i=1,2)$ *и* $q_{ij}(x)\equiv 0$ $(i,j=1,2)$ *вытекает лемма 1 из работы [14].*

3. Доказательство теоремы. *Необходимость.* Пусть $\lambda_0\in\mathbf{R}\setminus\{0,1\}$ и $y:[t_0,\omega[\to\Delta_{Y_0}$ — произвольное $P_\omega(Y_0,Y_1,\lambda_0)$ — решение уравнения (1.1). Тогда, как было указано в п. 1, существует число $t_1 \in [t_0, \omega[$ такое, что $y(t) \in \Delta_{Y_0}(b)$ и $\operatorname{sign} y'(t) = \mu_1$ при $t \in [t_1, \omega[$.

Так как для любого $t \in [t_1, \omega[$ справедливо равенство

$$\left(\frac{y(t)}{y'(t)}\right)' = 1 - \frac{y(t)y''(t)}{(y'(t))^2},$$

то в силу (1.6), (1.7) выполнено (1.16) и поэтому ввиду (1.7)

$$\frac{\pi_\omega(t)y''(t)}{y'(t)} \sim \frac{1}{\lambda_0 - 1} \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega. \tag{3.1}$$

Отсюда следует, что y' является правильно меняющейся при $t \uparrow \omega$ функцией порядка $\dfrac{1}{\lambda_0 - 1}$. Значит, соблюдается условие (1.12) и для некоторого числа $a_1 \in$ $\in [t_1, \omega[$ $\mu_1 |\pi_\omega(t)|^{\frac{1}{\lambda_0 - 1}} \in \Delta_{Y_1}$ при $t \in [a_1, \omega[$

Из уравнения (1.1) с учетом (1.2), (1.7) и условия S_1 получим асимптотическое представление

$$\frac{(y'(t))^2}{y(t)} \sim \alpha_0 \lambda_0 p(t) \varphi_0(y(t)) |y'(t)|^{\sigma_1} L_1 \left(\mu_1 |\pi_\omega(t)|^{\frac{1}{\lambda_0 - 1}}\right) \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega,$$

откуда вытекает первое из неравенств (1.14) и в силу (1.16) — второе из этих неравенств, а также асимптотическое соотношение вида

$$\frac{|y(t)|^{-\sigma_1}\, y'(t)}{\varphi_0(y(t))} \sim \frac{\gamma_1\, p(t)\, \pi_\omega(t) L_1 \left(\mu_1 |\pi_\omega(t)|^{\frac{1}{\lambda_0 - 1}}\right)}{|\pi_\omega(t)|^{\sigma_1}} \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega. \tag{3.2}$$

Интегрируя это соотношение на промежутке от a_1 до t и учитывая, что $\sigma_0 +$ $+ \sigma_1 \neq 1$, получим асимптотическое представление

$$\Phi(y(t)) = \gamma_1\, I_1(t)(1 + o(1)) \ \text{ при } \ t \uparrow \omega,$$

где Φ — функция, определенная в п. 1. Отсюда с использованием (1.9) получаем представление (1.15). Из (3.2) и (1.15) вытекает с учетом (1.16) условие (1.13). В силу представления (1.15) и вида функции I_1 соблюдается условие (1.11).

Достаточность. Пусть $\lambda_0 \in \mathbf{R} \setminus \{0, 1\}$ и выполнены условия (1.10)–(1.14). Покажем, что уравнение (1.1) имеет $P(Y_0, Y_1, \lambda_0)-$ решения, допускающие при $t \uparrow \omega$ асимптотические представления (1.15), (1.16).

Уравнение (1.1) с помощью преобразования

$$\Phi(y(t)) = \gamma_1\, I_1(t)(1 + z_1(x)), \ \frac{y'(t)}{y(t)} = \frac{\lambda_0}{(\lambda_0 - 1)\pi_\omega(t)}\ (1 + z_2(x))\,, \tag{3.3}$$

где

$$x = \beta \ln |\pi_\omega(\mathrm{t})|, \quad \beta = \begin{cases} \ \ 1 & \text{при} \quad \omega = +\infty, \\ -1 & \text{при} \quad \omega < +\infty, \end{cases} \tag{3.4}$$

сведем к системе дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} z_1' = \beta \left(R_1(t(x), z_1)(1 + z_2) - h(t(x))(1 + z_1)\right), \\[2ex] z_2' = \dfrac{\beta}{1 - \lambda_0} \left(\lambda_0 z_2^2 + (\lambda_0 + 1) z_2 + 1 - \dfrac{h(t(x)) R_2(t(x), z_1, z_2)}{R_1(t(x), z_1)} |1 + z_2|^{\sigma_1}\right), \end{cases} \tag{3.5}$$

в которой

$$h(t)=\frac{\pi_\omega(t)I_1'(t)}{I_1(t)},\quad R_1(t,z_1)=\frac{\lambda_0}{\gamma_1(\lambda_0-1)}\frac{|Y(t,z_1)|^{-\sigma_1}Y(t,z_1)}{I_1(t)\varphi_0(Y(t,z_1))},$$

$$R_2(t,z_1,z_2)=\frac{L_1(Y^{[1]}(t,z_1,z_2))}{L_1\left(\mu_1|\pi_\omega(t)|^{\frac{1}{\lambda_0-1}}\right)}\psi\left(t,Y(t,z_1),Y^{[1]}(t,z_1,z_2)\right),$$

$$Y(t,z_1)=\Phi^{-1}\left(\gamma_1 I_1(t)(1+z_1)\right),\quad Y^{[1]}(t,z_1,z_2)=\frac{\lambda_0 Y(t,z_1)}{(\lambda_0-1)\pi_\omega(t)}\,(1+z_2),$$

$t:[x_1,+\infty[\to[a_1,\omega[$ — функция, обратная к (3.4), где $x_1=\beta\ln|\pi_\omega(a_1)|$.

Здесь, согласно (1.13),

$$\lim_{t\uparrow\omega}h(t)=\frac{\lambda_0(1-\sigma_0-\sigma_1)}{\lambda_0-1}. \tag{3.6}$$

В силу условий (1.9), (1.11), (1.13), (1.14)

$$\lim_{t\uparrow\omega}\gamma_1 I_1(t)=Z_0$$

и существует $t_0\in[a_1,\omega[$ такое, что

$$\gamma_1 I_1(t)(1+z_1)\in\Delta_{Z_0}(c)\quad\text{при}\quad t\in[t_0,\omega[\quad\text{и}\quad |z_1|\le\frac{1}{2},$$

где Z_0 и $\Delta_{Z_0}(c)$ определены в п. 1. Поэтому $Y(t,z_1)\in\Delta_{Y_0}(b)$, $\operatorname{sign}Y(t,z_1)=\mu_0$ при $t\in[t_0,\omega[$ и $|z_1|\le\frac{1}{2}$, а также ввиду (1.8)

$$\lim_{t\uparrow\omega}Y(t,z_1)=Y_0\ \text{равномерно по}\ z_1\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]. \tag{3.7}$$

Согласно условию (1.9), функция Φ является при $y\to Y_0$ правильно меняющейся порядка $1-\sigma_0-\sigma_1$, откуда непосредственно вытекает, что функция Φ^{-1} при $z\to Z_0$ является правильно меняющейся порядка $\frac{1}{1-\sigma_0-\sigma_1}$. Тогда в силу представления правильно меняющейся функции и свойства M_1 медленно меняющейся функции

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{Y(t,z_1)}{|1+z_1|^{\frac{1}{1-\sigma_0-\sigma_1}}Y(t,0)}=1\quad\text{равномерно по}\quad z_1\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right] \tag{3.8}$$

и

$$Y(t,0)=\mu_0|I_1(t)|^{\frac{1}{1-\sigma_0-\sigma_1}+o(1)}\quad\text{при}\quad t\uparrow\omega. \tag{3.9}$$

Отсюда с учетом того, что функция I_1, согласно условию (1.13), является правильно меняющейся при $t\uparrow\omega$ функцией порядка $\frac{\lambda_0(1-\sigma_0-\sigma_1)}{\lambda_0-1}$, а также условий (1.11), (1.12) и (1.14) имеем

$$\lim_{t\uparrow\omega}Y^{[1]}(t,z_1,z_2)=Y_1\quad\text{равномерно по}\ (z_1,z_2)\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]\times\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]. \tag{3.10}$$

В силу (1.9) и (3.7)

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\mu_0\,|Y(t,z_1)|^{1-\sigma_1}}{\varphi_0(Y(t,z_1))\Phi(Y(t,z_1))}=1-\sigma_0-\sigma_1 \quad \text{равномерно по} \quad z_1\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right].$$

Поэтому имеют место представления

$$\frac{\mu_0\,\lambda_0|Y(t,z_1)|^{1-\sigma_1}}{(\lambda_0-1)\varphi_0(Y(t,z_1))}=\left[\frac{\lambda_0(1-\sigma_0-\sigma_1)}{\lambda_0-1}+Q_1(t,z_1)\right]\Phi(Y(t,z_1)),$$

$$\frac{(\lambda_0-1)\varphi_0(Y(t,z_1))}{\mu_0\,\lambda_0\,|Y(t,z_1)|^{1-\sigma_1}}=\frac{\frac{\lambda_0-1}{\lambda_0(1-\sigma_0-\sigma_1)}+Q_2(t,z_1)}{\Phi(Y(t,z_1))},$$

где функции Q_i $(i=1,2)$ удовлетворяют условиям

$$\lim_{t\uparrow\omega}Q_i(t,z_1)=0 \;\; (i=1,2) \quad \text{равномерно по} \quad z_1\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]. \tag{3.11}$$

Поскольку $\Phi(Y(t,z_1))=\gamma_1 I_1(t)[1+z_1]$, то из этих представлений следует, что

$$R_1(t,z_1)=\left[\frac{\lambda_0(1-\sigma_0-\sigma_1)}{\lambda_0-1}+Q_1(t,z_1)\right](1+z_1), \tag{3.12}$$

$$\frac{1}{R_1(t,z_1)}=\frac{\frac{\lambda_0-1}{\lambda_0(1-\sigma_0-\sigma_1)}+Q_2(t,z_1)}{1+z_1}. \tag{3.13}$$

Далее, в силу (1.2), (3.8)–(3.10), (1.13), свойства M_1 медленно меняющихся функций и условия (S_1)

$$\lim_{t\uparrow\omega}R_2(t,z_1,z_2)=1 \quad \text{равномерно по} \quad (z_1,z_2)\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]\times\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right],$$

откуда с учетом (3.6) и (3.13) следует, что

$$\frac{h(t)R_2(t,z_1,z_2)}{R_1(t,z_1)}=\frac{1+Q_3(t,z_1,z_2)}{1+z_1}, \tag{3.14}$$

где функция Q_3 удовлетворяет условию

$$\lim_{t\uparrow\omega}Q_3(t,z_1,z_2)=0 \quad \text{равномерно по} \quad (z_1,z_2)\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]\times\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]. \tag{3.15}$$

Используя теперь представления (3.13) и (3.14), перепишем систему дифференциальных уравнений (3.5) в виде

$$z_i'=\sum_{j=1}^{2}p_{ij}^0 z_j+\sum_{j=1}^{2}r_{ij}(x,z_1,z_2) \quad (i=1,2), \tag{3.16}$$

где

$$p_{11}^0=0, \quad p_{12}^0=\frac{\beta\lambda_0(1-\sigma_0-\sigma_1)}{\lambda_0-1}, \quad p_{21}^0=\frac{\beta}{1-\lambda_0}, \quad p_{22}^0=\frac{\beta(\lambda_0+1-\sigma_1)}{1-\lambda_0},$$

$$r_{11}(x,z_1,z_2)=\beta\left[Q_1(t(x),z_1)(1+z_1)(1+z_2)-\frac{\lambda_0(1-\sigma_0-\sigma_1)}{\lambda_0-1}+h(t(x))\right],$$

$$r_{12}(x,z_1,z_2)=\frac{\beta\lambda_0(1-\sigma_0-\sigma_1)z_1z_2}{\lambda_0-1},\quad r_{21}(x,z_1,z_2)=\frac{\beta Q_3(t(x),z_1,z_2)|1+z_2|^{\sigma_1}}{(\lambda_0-1)(1+z_1)},$$

$$r_{22}(x,z_1,z_2)=\frac{\beta}{1-\lambda_0}\left[\lambda_0z_2^2-\left(\frac{|1+z_2|^{\sigma_1}}{1+z_1}-1-\sigma_1z_2+z_1\right)\right].$$

Здесь в силу (3.4) и условий (3.6), (3.11), (3.15)

$$\lim_{x\to+\infty}r_{i1}(x,z_1,z_2)=0\ (i=1,2)\ \text{равномерно по}\ (z_1,z_2)\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]\times\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$$

и

$$\lim_{|z_1|+|z_2|\to 0}\frac{r_{i2}(x,z_1,z_2)}{|z_1|+|z_2|}=0\quad(i=1,2)\quad\text{равномерно по}\quad x\in[x_0,+\infty),$$

где $x_0=\beta\ln|\pi_\omega(t_0)|$. Кроме того, алгебраическое уравнение (2.17) имеет вид

$$\rho^2-\frac{\beta(\lambda_0+1-\sigma_1)}{1-\lambda_0}\rho+\frac{\lambda_0(1-\sigma_0-\sigma_1)}{(1-\lambda_0)^2}=0.$$

Это уравнение ввиду условий $\lambda_0\neq 0$, $\lambda_0\neq 1$, $1-\sigma_0-\sigma_1\neq 0$ и (1.10) не имеет корней с нулевой действительной частью. Поэтому, согласно лемме 3, система дифференциальных уравнений (3.16) имеет по крайней мере одно решение $(z_i)_{i=1}^2:[x_2,+\infty[\longrightarrow\mathbb{R}^2_{\frac{1}{2}}$, где $x_2\geq x_0$, стремящееся к нулю при $x\to+\infty$, причем существует однопараметрическое семейство таких решений в случае, когда $\lambda_0(1-\sigma_0-\sigma_1)<0$, и двупараметрическое — в случае, когда $\lambda_0(1-\sigma_0-\sigma_1)>0$ и $\beta(\lambda_0-1)(1+\lambda_0-\sigma_1)>0$. Каждому такому решению системы (3.16) в силу замен (3.3), (3.4) и асимптотического соотношения (1.9) соответствует решение $y:[t_2,\omega[\longrightarrow\Delta_{Y_0}$, где $t_2\in[t_0,\omega[$, дифференциального уравнения (1.1), удовлетворяющее асимптотическим соотношениям (1.15), (1.16). Используя эти соотношения, а также условия (1.11)–(1.14), нетрудно убедиться в том, что любое такое решение уравнения (1.1) является $P_\omega(Y_0,Y_1,\lambda_0)$-решением.

Теорема полностью доказана.

Заключение. В настоящей заметке для нового класса дифференциальных уравнений второго порядка, в некотором смысле близких к обобщенным уравнениям типа Эмдена-Фаулера, получены необходимые и достаточные условия существования, а также асимптотические при $t\uparrow\omega$ представления т. н. $P_\omega(Y_0,Y_1,\lambda_0)$-решений в неособом случае, когда $\lambda_0\in\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$. Ввиду произвольности выбора $Y_i\in\{0,\pm\infty\}$ $(i=0,1)$ и $\omega\leq+\infty$ эти решения охватывают различные типы правильных и сингулярных монотонных решений. В отличие от работ [9-11], в которых рассматривался частный случай уравнения (1.1) ($\psi(t,y,y')\equiv 0$), здесь сняты ограничения на гладкостные свойства функций φ_i $(i=0,1)$. Добиться этого удалось благодаря более полному использованию свойств непрерывных правильно меняющихся функций, а также установлению новых результатов (леммы 1–3) о существовании исчезающих в бесконечности решений у систем квазилинейных дифференциальных уравнений.

1. **Сенета Е.** Правильно меняющиеся функции [текст] / Сенета Е. – М.: Наука, 1985. – 144 с.
2. **Кигурадзе И. Т.** Асимптотические свойства решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений [текст] / И. Т. Кигурадзе , Т. А. Чантурия. – М.: Наука, 1991. – 430 с.
3. **Костин А. В.** Об асимптотике продолжаемых решений уравнения типа Эмдена-Фаулера [текст] / А. В. Костин // Докл. АН СССР. – 1971. – 200, № 1. – С. 28–31.
4. **Костин А. В.** Асимптотика решений одного нелинейного дифференциального уравнения [текст] / А. В. Костин , В. М. Евтухов // Докл. АН СССР. – 1976. – 231, № 5. – С. 1059–1062.
5. **Евтухов В. М.** Об одном нелинейном дифференциальном уравнении второго порядка [текст] / В. М. Евтухов // Докл. АН СССР. – 1977. – 233, № 4. – С. 531–534.
6. **Евтухов В. М.** Асимптотическое поведение решений одного класса нелинейного дифференциального уравнения второго порядка типа Эмдена-Фаулера: Дисс.канд. физ.-мат. наук: спец. 01.01.02 "Дифференциальные уравнения и математическая физика" [текст] / В. М. Евтухов. – Одесса, 1980. – 154 с.
7. **Евтухов В. М.** Асимптотические представления решений одного класса нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка [текст] / В. М. Евтухов // Сообщ. АН ГССР. – 1982. – 106, № 3. – С. 473–476.
8. **Евтухов В. М.** Асимптотические свойства решений одного класса дифференциальных уравнений второго порядка [текст] / В. М. Евтухов // Math.Nachr. – 1984. – 115. – P. 215–236.
9. **Евтухов В. М.** Асимптотические представления решений существенно нелинейных неавтономных дифференциальных уравнений второго порядка [текст] / В. М. Евтухов, М. А. Белозерова // УМЖ. – 2008. – 60, № 3. – С. 310–331.
10. **Белозерова М. А.** Асимптотические свойства одного класса решений существенно нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка [текст] / М. А. Белозерова // Мат. студії. – 2008. – Т. 29, № 1. – С. 52–62.
11. **Білозерова М. О.** Асимптотичні зображення розв'язків диференціальних рівнянь другого порядку з нелінійностями у деякому сенсі близькими до степеневих [текст] / М. О. Білозерова // Науковий вісник Чернівецького університету. – Чернівці: Рута. – 2008. – Вип. 374. – С. 34–43.
12. **Coppel W. A.** Stability and asymptotic behaviour of differential equations [text] / W. A. Coppel. – Boston, Heats and company, 1965.
13. **Евтухов В. М.** Об исчезающих на бесконечности решениях вещественных неавтономных систем квазилинейных дифференциальных уравнений / В. М. Евтухов // Дифференц.уравнения. – 2003. – 39, № 4. – С. 433–444.
14. **Евтухов В. М.** Асимптотические представления решений существенно нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка [текст] / В. М. Евтухов, В. М. Харьков // Дифференц. уравнения. – 2007. – Т. 43, № 10. – С. 1311–1323.
15. **Евтухов В. М.** Асимптотические представления решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений: автореф. дис. док-ра физ.-мат. наук: спец. 01.01.02 "Дифференциальные уравнения" [текст] / В. М. Евтухов. – Киев, 1998. – 294 с.