

УДК 531.381

А. Л. Рачинская, А. Н. Дуца

Одесский национальный университет имени И. И. Мечникова

ЭВОЛЮЦИЯ БЫСТРЫХ ВРАЩЕНИЙ СПУТНИКА ПОД ДЕЙСТВИЕМ ВОЗМУЩАЮЩИХ МОМЕНТОВ

Рачинська А. Л., Дуца А. М. Еволюція швидких обертань супутника під дією збурюючих моментів. Досліджується швидкий обертальний рух відносно центру мас динамічно несиметричного супутника з порожниною, заповненою в'язкою рідиною, при малих числах Рейнольдса, під дією гравітаційного моменту. Орбітальні рухи з довільним ексцентриситетом вважаються заданими. Незбуреним рухом є випадок Ейлера – Пуансо. Проведено чисельний аналіз неявним методом Адамса. Виконано візуалізація годографу вектора кінетичного моменту на сфері одиничного радіуса.

Ключові слова: супутник, гравітаційний момент, порожнина.

Рачинская А. Л., Дуца А. Н. Эволюция быстрых вращений спутника под действием возмущающих моментов. Исследуется быстрое вращательное движение относительно центра масс динамически несимметричного спутника с полостью, заполненной вязкой жидкостью, при малых числах Рейнольдса, под действием гравитационного момента. Орбитальные движения с произвольным эксцентриситетом считаются заданными. Невозмущенным движением является случай Эйлера – Пуансо. Проведен численный анализ неявным методом Адамса. Выполнена визуализация годографа вектора кинетического момента на сфере единичного радиуса.

Ключевые слова: спутник, гравитационный момент, полость.

Rachinskaya A. L., Dutsa A. N. The evolution of fast rotations of a satellite under the action of disturbing torques. We investigate the fast rotational motion relative to center of mass of a dynamically asymmetric satellite with a cavity filled with viscous fluid at low Reynolds numbers, Under the action of gravitational torque. Orbital motions with arbitrary eccentricity are given. The case of the Euler – Poinsoot motion is unperturbed. The numerical analysis using the implicit Adams method. Implemented visualization of the hodograph of the angular momentum vector on a sphere of unit radius.

Key words: satellite, gravitational moment, cavity.

ВВЕДЕНИЕ. Рассмотрено движение динамически несимметричного спутника относительно центра масс в гравитационном поле. Тело содержит полость, целиком заполненную сильно вязкой однородной жидкостью. Вращательные движения рассматриваются в рамках модели квазитвердого тела, центр масс которого движется по заданной фиксированной эллиптической орбите [1]. Исследованиям вращательных движений тел относительно центра масс под действием возмущающих моментов сил различной природы (гравитационных, светового давления, влияния полости, заполненной вязкой жидкостью, и др.), близким к приведенному ниже, посвящены работы [1–10]. В работе для численного исследования задачи применяется неявная схема Адамса, что позволило провести компьютерную визуализацию движения вектора кинетического момента в трехмерном пространстве с построением годографа этого вектора. Задачи компьютерного мо-

делирования динамических систем являются одним из актуальных направлений современных исследований [11–13].

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ.

1. Постановка задачи. Введем три декартовые системы координат, начало которых совместим с центром инерции спутника [2, 3]. Система координат Ox_i ($i = 1, 2, 3$) движется поступательно вместе с центром инерции: ось Ox_1 параллельна радиус вектору перигея орбиты, ось Ox_2 – вектору скорости центра масс спутника в перигее, ось Ox_3 – нормали к плоскости орбиты. Система координат Oy_i ($i = 1, 2, 3$) связана с вектором кинетического момента $\mathbf{G}$. Ось Oy_3 направлена по вектору кинетического момента $\mathbf{G}$, ось Oy_2 лежит в плоскости орбиты (т.е. в плоскости Ox_1x_2), ось Oy_1 лежит в плоскости Ox_3y_3 и направлена так, что векторы $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3$ образуют правую тройку [2, 4]. Оси системы координат Oz_i ($i = 1, 2, 3$) связаны с главными центральными осями инерции твердого тела. Взаимное положение главных центральных осей инерции и осей Oy_i определим углами Эйлера. При этом направляющие косинусы α_{ij} осей z_i относительно системы Oy_i выражаются через углы Эйлера φ, ψ, θ по известным формулам [2]. Положение вектора кинетического момента $\mathbf{G}$ относительно его центра масс в системе координат Ox_i определяются углами λ и δ , как показано [2–4].

Уравнения движения тела относительно центра масс запишем в форме [3]:

$$\begin{aligned} \frac{dG}{dt} &= L_3, \quad \frac{d\delta}{dt} = \frac{L_1}{G}, \quad \frac{d\lambda}{dt} = \frac{L_2}{G \sin \delta}, \\ \frac{d\theta}{dt} &= G \sin \theta \sin \varphi \cos \varphi \left(\frac{1}{A_1} - \frac{1}{A_2} \right) + \frac{L_2 \cos \psi - L_1 \sin \psi}{G}, \\ \frac{d\varphi}{dt} &= G \cos \theta \left(\frac{1}{A_3} - \frac{\sin^2 \varphi}{A_1} - \frac{\cos^2 \varphi}{A_2} \right) + \frac{L_1 \cos \psi + L_2 \sin \psi}{G \sin \theta}, \\ \frac{d\psi}{dt} &= G \left(\frac{\sin^2 \varphi}{A_1} + \frac{\cos^2 \varphi}{A_2} \right) - \frac{L_1 \cos \psi + L_2 \sin \psi}{G} \operatorname{ctg} \theta - \frac{L_2}{G} \operatorname{ctg} \delta. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь L_i – моменты внешних сил относительно осей Oy_i , G – величина кинетического момента, A_i ($i = 1, 2, 3$) – главные центральные моменты инерции относительно осей Oz_i .

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dt} &= \frac{2T}{G} L_3 + G \sin \theta \left[\cos \theta \left(\frac{\sin^2 \varphi}{A_1} + \frac{\cos^2 \varphi}{A_2} - \frac{1}{A_3} \right) (L_2 \cos \psi - L_1 \sin \psi) + \right. \\ &\quad \left. + \sin \varphi \cos \varphi \left(\frac{1}{A_1} - \frac{1}{A_2} \right) (L_1 \cos \psi + L_2 \sin \psi) \right]. \end{aligned} \quad (2)$$

Центр масс спутника движется по кеплеровскому эллипсу с эксцентриситетом e и периодом обращения Q . Зависимость истинной аномалии ν от времени t дается соотношением

$$\frac{d\nu}{dt} = \frac{\omega_0(1 + e \cos \nu)^2}{(1 - e^2)^{3/2}}, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{Q}, \quad (3)$$

где ω_0 – угловая скорость орбитального движения спутника.

Проекция L_i момента приложенных сил складывается из гравитационного момента L_i^g и момента сил вязкой жидкости в полости L_i^p . Здесь приведена проекция на ось Oy_1 гравитационного момента, на другие оси проекции имеют аналогичный вид [3]

$$\begin{aligned} L_1^g &= \frac{3\omega_0^2 (1 + e \cos \nu)^3}{(1 - e^2)^3} \sum_{j=1}^3 (\beta_2 \beta_j S_{3j} - \beta_3 \beta_j S_{2j}), \\ S_{mj} &= \sum_{p=1}^3 A_p \alpha_{jp} \alpha_{mp}, \quad \beta_1 = \cos(\nu - \lambda) \cos \delta, \\ \beta_2 &= \sin(\nu - \lambda), \quad \beta_3 = \cos(\nu - \lambda) \sin \delta. \end{aligned} \quad (4)$$

Проекция момента сил сильно вязкой жидкости в полости L_i^p на оси $Oy_i (i = 1, 2, 3)$ имеют вид [1]:

$$L_i^p = \frac{P}{A_1 A_2 A_3} \left\{ \omega \bullet \mathbf{B} + \frac{3\omega_0^2 (1 + e \cos \nu)^3}{(1 - e^2)^3} (\mathbf{D} + \mathbf{S}) \bullet \alpha \right\} (i = 1, 2, 3), \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} \omega &= \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix}, \quad \alpha = \begin{pmatrix} \alpha_{i1} \\ \alpha_{i2} \\ \alpha_{i3} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S} = \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{D} &= \begin{pmatrix} A_2 A_3 (A_3 - A_2) \{-\gamma_{31} \gamma_{33} r + \alpha^* (F_1 p_{\alpha 1} + M_1 p_{\alpha 2})\} \\ A_1 A_3 (A_1 - A_3) \{-\gamma_{32} \gamma_{33} r + \alpha^* (F_2 p_{\alpha 1} + M_2 p_{\alpha 2})\} \\ (A_2 - A_1) \{(\gamma_{32}^2 - \gamma_{31}^2) r - \alpha^* (F_3 p_{\alpha 1} + M_3 p_{\alpha 2})\} \end{pmatrix}, \\ \mathbf{F} &= \begin{pmatrix} \gamma_{31} \gamma_{33} \alpha_{33} + \beta_{\alpha 1} \gamma_{33} + \beta_{\alpha 2} \gamma_{32} \\ \gamma_{32} \gamma_{33} \alpha_{33} + \beta_{\alpha 3} \gamma_{33} + \beta_{\alpha 2} \gamma_{31} \\ (\gamma_{32}^2 - \gamma_{31}^2) \alpha_{33} + \beta_{\alpha 3} \gamma_{32} + \beta_{\alpha 1} \gamma_{31} \end{pmatrix}, \\ \mathbf{M} &= \begin{pmatrix} \gamma_{33}^2 \alpha_{32} + \gamma_{32} \gamma_{33} \alpha_{33} - \gamma_{32} \beta_3 \\ \gamma_{33}^2 \alpha_{31} + \gamma_{31} \gamma_{33} \alpha_{33} - \gamma_{31} \beta_3 \\ \gamma_{33} [\gamma_{32} \alpha_{31} + \gamma_{31} \alpha_{32}] \end{pmatrix}, \quad \alpha^* = \frac{1}{1 - \alpha_{33}^2}, \\ S_1 &= \gamma_{31} [\gamma_{33} r A_3 (A_1 A_2 - A_1^2 - A_2 A_3 + A_3^2) + \\ &\quad + \gamma_{32} q A_2 (A_1 A_3 - A_1^2 - A_2 A_3 + A_2^2)], \\ S_2 &= \gamma_{32} [\gamma_{31} p A_1 (A_3 A_2 - A_2^2 - A_1 A_3 + A_1^2) + \\ &\quad + \gamma_{33} r A_3 (A_1 A_2 - A_2^2 - A_1 A_3 + A_3^2)], \\ S_3 &= \gamma_{33} [\gamma_{32} q A_2 (A_1 A_3 - A_3^2 - A_1 A_2 + A_2^2) + \\ &\quad + \gamma_{31} p A_1 (A_2 A_3 - A_3^2 - A_1 A_2 + A_1^2)], \\ \gamma_{3i} &= \beta_1 \alpha_{1i} + \beta_2 \alpha_{2i} + \beta_3 \alpha_{3i} \quad (i = 1, 2, 3), \quad p_{\alpha 1} = p \alpha_{31} + q \alpha_{32}, \\ \beta_{\alpha 1} &= -\alpha_{22} \beta_1 + \alpha_{12} \beta_2, \quad \beta_{\alpha 2} = -\alpha_{23} \beta_1 + \alpha_{13} \beta_2, \quad \beta_{\alpha 3} = -\alpha_{21} \beta_1 + \alpha_{11} \beta_2, \\ B_1 &= [\omega_2^2 A_2 (A_1 - A_2) (A_2 - A_3 + A_1) + \omega_3^2 A_3 (A_1 - A_3) (A_3 - A_2 + A_1)] \alpha_{i1}, \\ B_2, B_3 &\text{ имеют аналогичный вид и получаются ротацией индексов (сдвигом).} \end{aligned}$$

Здесь α_{ij} — направляющие косинусы между системами координат Oy_i ($i = 1, 2, 3$) и Oz_i ($i = 1, 2, 3$), p, q, r — проекции на оси Oz_i ($i = 1, 2, 3$) вектора абсолютной угловой скорости ω спутника относительно системы координат $Ox_1x_2x_3$.

Величина $\tilde{P}$ — тензор, зависящий только от формы полости, характеризует диссипативный момент сил, обусловленный вязкой жидкостью, в квазистатическом приближении [1]. Для простоты в уравнениях (5) рассмотрен так называемый скалярный тензор, определенный одной скалярной величиной $P > 0$; компоненты которого имеют вид $\tilde{P}_{ij} = P\delta_{ij}$, где δ_{ij} — символы Кронекера (такой вид тензор $\tilde{P}$ имеет, например, в случае сферической полости). Если форма полости существенно отличается от сферической, то определение компонент тензора представляет значительные вычислительные трудности.

Рассматривается динамически несимметричный спутник, моменты инерции которого для определенности удовлетворяют неравенству $A_1 > A_2 > A_3$, в предположении, что угловая скорость ω движения спутника относительно центра масс существенно больше угловой скорости орбитального движения ω_0 , т.е. $\varepsilon = \omega_0/\omega \sim A_1\omega_0/G \ll 1$. В этом случае кинетическая энергия вращения тела велика по сравнению с моментами возмущающих сил.

В работе предполагается, что в полости находится жидкость большой вязкости, т.е. $\vartheta \gg 1$ ($\vartheta^{-1} \sim \varepsilon^2$), форма полости сферическая, тогда [1]

$$\tilde{P} = P \text{diag}(1, 1, 1), \quad P = \frac{8\pi\rho b_0^7}{525\vartheta}. \quad (6)$$

Здесь ρ, ϑ — плотность и кинематический коэффициент вязкости жидкости в полости соответственно, b_0 — радиус полости.

С учетом рассмотренных выше предположений видно, что второе слагаемое (с коэффициентом ω_0^2) в формуле проекции момента сил вязкой жидкости в полости (5) имеет порядок ε^2 , а значит, с точностью до малых второго порядка малости ($P \sim \varepsilon^2$) проекции момента сил вязкой жидкости в полости имеют вид:

$$\begin{aligned} L_i^p = & \frac{P}{A_1 A_2 A_3} \times \\ & \times \{ p [q^2 A_2 (A_1 - A_2)(A_2 - A_3 + A_1) + r^2 A_3 (A_1 - A_3)(A_3 - A_2 + A_1)] \alpha_{i1} + \\ & + q [r^2 A_3 (A_2 - A_3)(A_3 - A_1 + A_2) + p^2 A_1 (A_1 - A_2)(A_3 - A_1 - A_2)] \alpha_{i2} + \\ & + r [p^2 A_1 (A_3 - A_1)(A_1 - A_2 + A_3) + q^2 A_2 (A_3 - A_2)(A_2 - A_1 + A_3)] \alpha_{i3} \}, \\ & (i = 1, 2, 3). \end{aligned} \quad (7)$$

Ставится задача исследования эволюции вращений спутника на асимптотически большом интервале времени $t \sim \varepsilon^{-2}$, на котором происходит существенное изменение параметров движения. Для решения задачи будем применять метод усреднения [14].

2. Процедура усреднения. Рассмотрим невозмущенное движение ($\varepsilon = 0$), когда моменты приложенных сил равны нулю. В этом случае вращение твердого тела является движением Эйлера — Пуансо. Величины $G, \delta, \lambda, T, \nu$ обращаются в постоянные, а φ, ψ, θ — некоторые функции времени t [15]. Медленными переменными в возмущенном движении будут $G, \delta, \lambda, T, \nu$, а быстрыми — углы Эйлера φ, ψ, θ .

Рассмотрим движение при условии $2TA_1 \geq G^2 > 2TA_2$, соответствующем траекториям вектора кинетического момента, охватывающим ось наибольшего момента инерции A_1 . Введем величину

$$k^2 = \frac{(A_2 - A_3)(2TA_1 - G^2)}{(A_1 - A_2)(G^2 - 2TA_3)} \quad (0 \leq k^2 \leq 1), \quad (8)$$

представляющую собой в невозмущенном движении постоянную – модуль эллиптических функций, описывающих это движение [15].

Для построения усредненной системы первого приближения подставим решение невозмущенного движения Эйлера – Пуансо в правые части уравнений движения (1), (2) с учетом (4), (7) и проведем усреднение по переменной ψ , а затем по времени t с учетом зависимости φ , θ от t . При этом для медленных переменных G , δ , λ , T , ν сохраняются прежние обозначения. В результате получим для них эволюционные уравнения вида

$$\begin{aligned} \frac{dG}{dt} &= 0, \quad \frac{d\delta}{dt} = -\frac{3\omega_0^2(1+e\cos\nu)^3}{2G(1-e^2)^3}\beta_2\beta_3N^*, \quad \frac{d\lambda}{dt} = \frac{3\omega_0^2(1+e\cos\nu)^3}{2G(1-e^2)^3\sin\delta}\beta_1\beta_3N^*, \\ \frac{dT}{dt} &= -\frac{4PT^2(A_1-A_3)(A_1-A_2)(A_2-A_3)}{3A_1^2A_2^2A_3^2[A_2-A_3+(A_1-A_2)k^2]^2} \times \\ &\times \left\{ A_2(A_1-A_3)(A_1+A_3-A_2) \left[(k^2-1) + (1+k^2)\frac{E(k)}{K(k)} \right] + \right. \\ &+ A_1(A_2-A_3)(A_3+A_2-A_1) \left[(k^2-2) \left(1 - \frac{E(k)}{K(k)} \right) + k^2 \right] + \\ &+ A_3(A_1-A_2)(A_1+A_2-A_3) \left[(1-2k^2) \left(1 - \frac{E(k)}{K(k)} \right) + k^2 \right] \Big\} \\ N^* &= A_2 + A_3 - 2A_1 + 3 \left(\frac{2A_1T}{G^2} - 1 \right) \left[A_3 + (A_2 - A_3) \frac{K(k) - E(k)}{K(k)k^2} \right] \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь $K(k)$ и $E(k)$ – полные эллиптические интегралы первого и второго рода соответственно [16]. Согласно первому уравнению (9) кинетический момент спутника остается постоянным и равен G_0 .

Дифференцируя выражение для k^2 (8) и используя уравнения для кинетической энергии (9), получим дифференциальное уравнение, которое не зависит от других переменных [1, 8]

$$\begin{aligned} \frac{dk^2}{d\xi} &= (1-\chi)(1-k^2) - [(1-\chi) + (1+\chi)k^2] \frac{E(k)}{K(k)}, \\ \chi &= \frac{3A_2[(A_1^2 + A_3^2) - A_2(A_1 + A_3)]}{(A_1 - A_3)[A_2(A_1 + A_3 - A_2) + 2A_1A_3]}, \quad \xi = (t - t_*)/N, \\ N &= \frac{3A_1^2A_2^2A_3^2}{PG_0^2(A_1 - A_3)[A_2(A_1 + A_3 - A_2) + 2A_1A_3]} \sim \varepsilon^{-2}. \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь t_* – постоянная. Значению $k^2 = 1$ отвечает равенство $2TA_2 = G^2$, что соответствует сепаратрисе для движения Эйлера – Пуансо. Уравнение (10) описывает усредненное движение конца вектора кинетического момента $\mathbf{G}$ на

сфере постоянного радиуса G_0 . Анализ уравнений (10) свидетельствует об отсутствии стационарных значений k , кроме $k = 0$ и $k = 1$.

Из уравнений движения (9) следует, что под влиянием момента сил вязкой жидкости в полости происходит эволюция кинетической энергии тела T . Изменения углов λ , δ зависят как от действия силы гравитационного притяжения, так и от действия момента сил вязкой жидкости в полости. Выражение, стоящее в фигурных скобках правой части уравнения (9), для T положительно (при $A_1 > A_2 > A_3$), так как справедливы неравенства $(1 - k^2)K \leq E \leq K$ [16]. Поэтому $dT/dt < 0$ поскольку $T > 0$, т.е. переменная T строго убывает для любых $k^2 \in [0, 1]$.

3. Численный анализ уравнений движения. Рассмотрим систему уравнений движения (9), уравнение изменения истинной аномалии (3) и уравнение (10) в виде

$$\frac{dk^2}{dt} = \frac{1}{N} \left\{ (1 - \chi)(1 - k^2) - [(1 - \chi) + (1 + \chi)k^2] \frac{E(k)}{K(k)} \right\}.$$

Это жесткая система дифференциальных уравнений, содержащая медленные переменные G , δ , λ , T и полумедленную переменную ν . Для численного решения таких систем могут, применимы неявные схемы Адамса. Применим схему Адамса 3-го порядка.

Первоначально рассмотрим систему, состоящую из четвертого уравнения системы (9) и уравнения (10). Проведем обезразмеривание уравнения для кинетической энергии, считая характерными величинами задачи N (10) и момент инерции A_1 . Имеем

$$\begin{aligned} \frac{dT'}{d\xi} = & - \frac{2(T')^2(A_1 - A_2)(A_2 - A_3)}{A_1[A_2(A_1 + A_3 - A_2) + 2A_1A_3][A_2 - A_3 + (A_1 - A_2)k^2]^2} \times \\ & \times \left\{ A_2(A_1 - A_3)(A_1 + A_3 - A_2) \left[(k^2 - 1) + (1 + k^2) \frac{E(k)}{K(k)} \right] + \right. \\ & + A_1(A_2 - A_3)(A_3 + A_2 - A_1) \left[(k^2 - 2) \left(1 - \frac{E(k)}{K(k)} \right) + k^2 \right] + \\ & \left. + A_3(A_1 - A_2)(A_1 + A_2 - A_3) \left[(1 - 2k^2) \left(1 - \frac{E(k)}{K(k)} \right) + k^2 \right] \right\} \end{aligned} \quad (11)$$

где $T' = \frac{2A_1T}{G_0^2}$. Это равенство выполняется при $\xi > 0$, т.е. для $2TA_1 \geq G^2 > 2TA_2$.

Проведен численный расчет при значениях моментов инерции $A_1 = 8$, $A_2 = 5, 6, 7$, $A_3 = 4$; $k^2(0) = 0.99999$, $G(0) = 1$. Начальное значение кинетической энергии находилось из равенства

$$T = \frac{G_0^2 [A_2 - A_3 + (A_1 - A_2)k^2]}{2[A_1(A_2 - A_3) + A_3(A_1 - A_2)k^2]}. \quad (12)$$

В безразмерном виде имеем

$$T' = \frac{A_1(A_2 - A_3 + (A_1 - A_2)k^2)}{A_1(A_2 - A_3) + A_3(A_1 - A_2)k^2}.$$

Графики изменения кинетической энергии имеют вид, представленный на рис.1 для случая $\xi > 0$ и совпадает с представленным в [9]. функция k^2 является убывающей во всех расчетных случаях, и ее график имеет вид, представленный на рис. 2. Кривые 1, 2, 3 соответствуют различным значениям $A_2 = 5, 6, 7$.

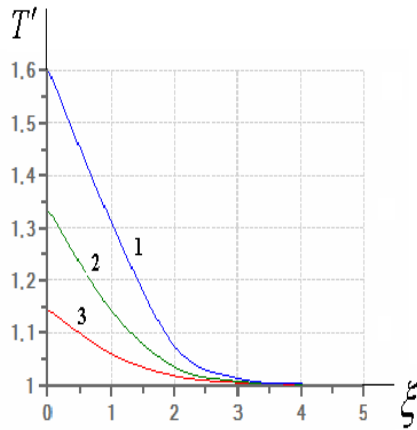


Рис. 1

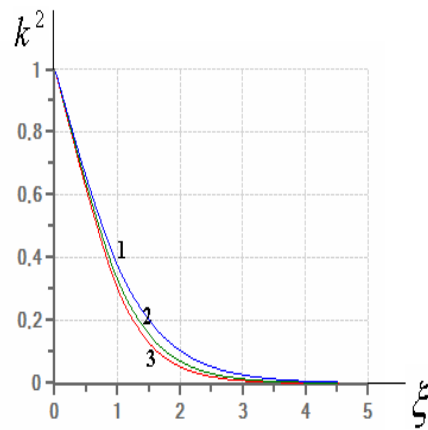


Рис. 2

Численно изучен также случай $\xi < 0$, что соответствует $2TA_2 > G^2 \geq 2TA_3$. Результаты, полученные методом Адамса, совпадают с [9], что подтверждает корректность применения данной расчетной схемы.

Проведено численное исследование уравнений системы (9) и уравнений (3), (10) в безразмерном виде методом Адамса. Расчет проводился для различных начальных углов λ и δ , при $k^2(0) = 0.99999$, $G(0) = 1$ для спутников с разной геометрией масс.

Во всех расчетных случаях был исследован характер поведения годографа вектора кинетического момента и проведено его компьютерное моделирование. Построение проводилось на сфере единичного радиуса и усредненное движение вектора кинетического момента проводилось с учетом найденных углов ориентации δ и λ .

На рис. 3–4 представлены графики изменения углов ориентации вектора кинетического момента для спутника с моментами инерции $A_1 = 8$, $A_2 = 7$, $A_3 = 4$. Расчет проводился по безразмерному времени $\tilde{t} = \varepsilon^2 t$ для различных начальных значений: $\delta(0) = \frac{\pi}{3}$ – кривая 1, $\delta(0) = \frac{\pi}{4}$ – кривая 2, $\delta(0) = \frac{\pi}{6}$ – кривая 3. Из рис. 3 видно, что функция $\delta(\tilde{t})$ имеет синусоидальный характер, который не зависит от начального значения угла. Исследование функции угла λ показало, что функция $\lambda(\tilde{t})$ возрастает с переменной скоростью. На рис. 4: кривая 1 соответствует начальному значению угла $\lambda(0) = \frac{\pi}{2}$, кривая 2 – $\lambda(0) = \frac{\pi}{3}$, а кривая 3 – $\lambda(0) = \frac{\pi}{4}$.

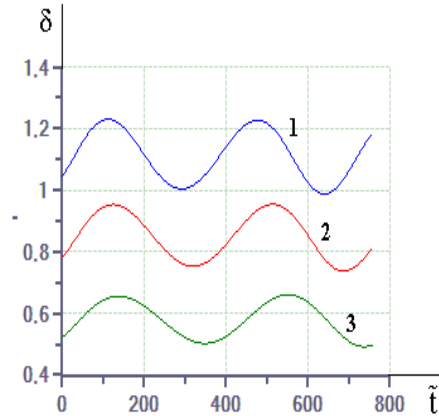


Рис. 3

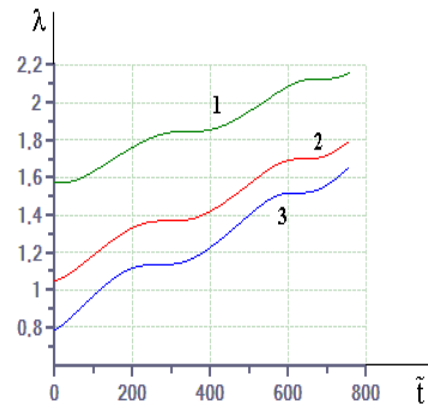


Рис. 4

Первоначально проводилось моделирование движения годографа вектора кинетического момента для спутника с геометрией масс, удовлетворяющей неравенству $A_1 > A_2 > A_3$. Во всех расчетных случаях годограф имеет вид парабол, ветви которых направлены вниз с явно выраженным периодическим характером. Расчет проводился при значениях моментов инерции $A_1 = 8$, $A_3 = 4$, для начальных углов отклонения вектора кинетического момента $\delta(0) = \frac{\pi}{3}$ и $\lambda(0) = \frac{\pi}{3}$. При этом спутник движется по эллипсу с эксцентриситетом $e = 0.04473$, что соответствует орбите 1-го советского спутника. На рис. 5 представлен годограф вектора кинетического момента при значениях $A_2 = 5, 6, 7$ (рис. 5а, 5б, 5с соответственно). Характер поведения кривой годографа совпадает с полученным в работе [3].

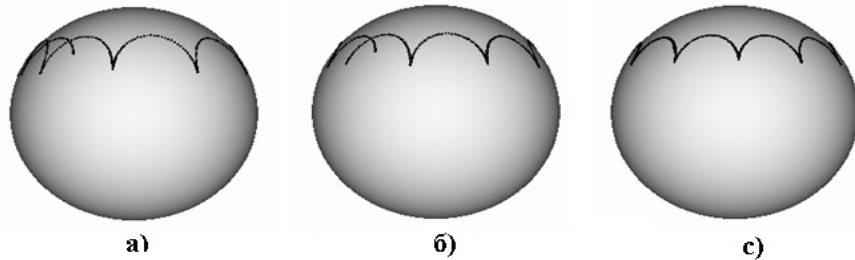


Рис. 5

Следует отметить, что при увеличении начального значения угла $\lambda(0)$ "дуги" графика становятся реже, т.е. период функции годографа увеличивается. Анимация движения вектора кинетического момента показала, что при повороте вектора около вертикали на угол больше 2π кривая годографа замыкается.

Проведено компьютерное моделирование движения вектора кинетического момента для спутника с геометрией масс $A_1 < A_2 < A_3$ и трехмерное построение его годографа. Из рис. 6а видно, что изменяется направление "ветвей" парабол на противоположное, а сам характер поведения функции годографа остается

ся периодическим. Интересным является характер поведения траектории следа вектора кинетического момента при $\delta(0) = \frac{\pi}{2}$ (рис. 6б).

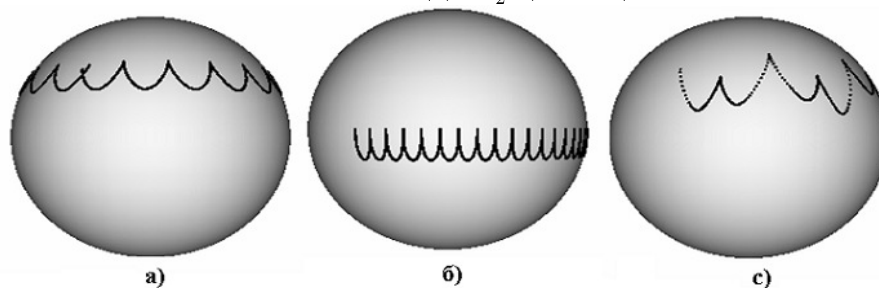


Рис. 6

Как видно из рис. 5, 6а, 6б, при круговой орбите и орбитах 1-го, 3-го спутников (при малом эксцентриситете) графики годографа вектора кинетического момента спутника имеют синусоидальный характер. На рис.6в представлен результат расчета для сильно эллиптической орбиты с эксцентриситетом $e = 0.421$. Видно, что характер функции годографа существенно усложняется и имеет четко выраженные гармоники [3].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ. Исследовано быстрое вращение спутника относительно центра масс под действием малых возмущающих моментов. Для численного исследования применялась неявная схема Адамса, что позволило построить компьютерную анимацию движения вектора кинетического момента и трехмерное построение его годографа на сфере единичного радиуса.

1. **Черноусько Ф. Л.** Движение твердого тела с полостями, заполненными вязкой жидкостью, при малых числах Рейнольдса [текст] / Ф. Л. Черноусько // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 1965. – Т.5, № 6. – С. 1049–1070.
2. **Белецкий В. В.** Движение искусственного спутника относительно центра масс [текст] / Владимир Васильевич Белецкий. – М.: Наука, 1965. – 416 с.
3. **Черноусько Ф. Л.** О движении спутника относительно центра масс под действием гравитационных моментов [текст] / Ф. Л. Черноусько // Прикл. математика и механика. – 1963. – Т.27, № 3. – С. 474–483.
4. **Белецкий В. В.** Движение спутника относительно центра масс в гравитационном поле [текст] / Владимир Васильевич Белецкий. – М.: Изд-во МГУ, 1975. – 308 с.
5. **Лещенко Д. Д.** Движение спутника относительно центра масс под действием момента сил светового давления в сопротивляющейся среде [текст] / Д. Д. Лещенко, А. Л. Рачинская // Вісник Одеськ. нац. ун-ту. – 2007. – Т. 12, вип. 7. Матем. і мех. – С. 85–98.
6. **Акуленко Л. Д.** Эволюция быстрого вращения спутника под действием гравитационного момента в среде с сопротивлением [текст] / Л. Д. Акуленко, Д. Д. Лещенко, А. Л. Рачинская // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2008. – № 2. – С. 13–26.

7. **Осипов В. В.** О колебании твердого тела со сферической полостью, целиком заполненной вязкой жидкостью, на эллиптической орбите [текст] / В. В. Осипов, Р. С. Суликашвили // Тр. ин-та / Тбилис. мат. ин-т АН Груз. ССР. – 1978. – Т. 58. – С. 175–186.
8. **Смирнова Е. П.** Стабилизация свободного вращения асимметричного волчка с полостями, целиком заполненными жидкостью [текст] / Е. П. Смирнова // Прикл. математика и механика. – 1974. – Т. 38, № 6. – С. 980–985.
9. **Акуленко Л. Д.** Эволюция вращений спутника с полостью, заполненной вязкой жидкостью [текст] / Л. Д. Акуленко, Д. Д. Лещенко, А. Л. Рачинская // Механика твердого тела. – 2007. – Вып. 37. – С. 126–139.
10. **Акуленко Л. Д.** Вращения спутника с полостью, заполненной вязкой жидкостью, под действием гравитационного и светового моментов [текст] / Л. Д. Акуленко, Я. С. Зинкевич, Д. Д. Лещенко, А. Л. Рачинская // Вісник Одеськ. нац. ун-ту. Матем. і мех. – 2008. – Т. 13, Вип. 11. – С. 117–131.
11. **Бутиков Е. И.** Движения космических тел в компьютерных моделях [текст] / Евгений Игоревич Бутиков. – С.-Пб., 2007. – 43 с.
12. **Колесов Ю. Б.** Моделирование систем. Динамические и гибридные системы [текст] / Ю. Б. Колесов, Ю. Б. Сениченков. – С.-Пб.: БХВ-Петербург, 2006. – 224 с.
13. **Голованов Н. Н.** Геометрическое моделирование [текст] / Н. Н. Голованов. – М.: Академия, 2011. – 216 с.
14. **Волосов В. М.** Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем [текст] / В. М. Волосов, Б. И. Моргунов. – М.: Изд-во МГУ, 1971. – 507 с.
15. **Ландау Л. Д.** Теоретическая физика. Т. 1. Механика [текст] / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. – М.: Наука, 1973. – 208с.
16. **Градштейн И. С.** Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений [текст] / И. С. Градштейн, И. М. Рыжик. – М.: Наука, 1971. – 1108 с.