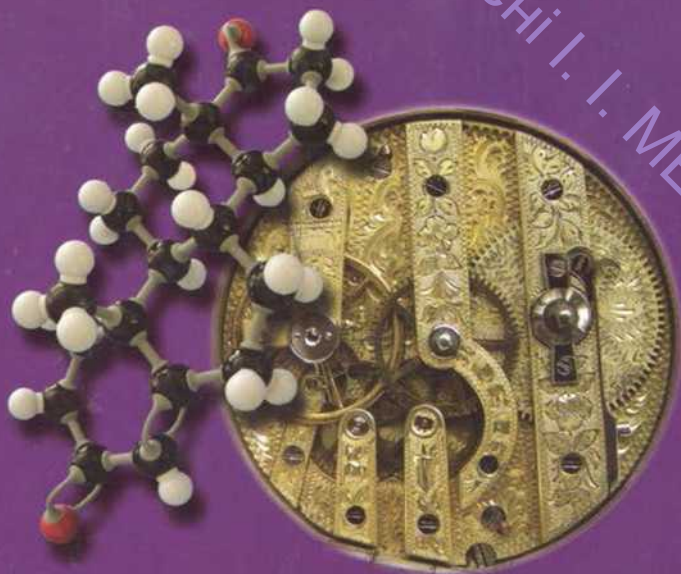


К. М. КОПІЙКА
О. К. КОПІЙКА

КУРС ЗАГАЛЬНОЇ ФІЗИКИ ДЛЯ БІОЛОГІВ

Частина I

МЕХАНІКА І МОЛЕКУЛЯРНА ФІЗИКА



К. М. КОПІЙКА
О. К. КОПІЙКА

КУРС
ЗАГАЛЬНОЇ ФІЗИКИ
ДЛЯ БІОЛОГІВ

У трьох частинах

Частина I
**МЕХАНІКА
І МОЛЕКУЛЯРНА ФІЗИКА**

Одеса
«Астропринт»
2010

Курс загальної фізики для біологів в трьох частинах, побудований на лекційному матеріалі, який протягом багатьох років викладався студентам на біологічному факультеті Одеського національного університету імені І.І. Мечникова.

У першій частині посібника викладені фізичні основи механіки і молекулярної фізики. Приводиться огляд фізичних методів, які мають велике практичне значення для сучасних біологічних досліджень.

Навчальний посібник призначено для студентів біологічного факультету класичних університетів. Може бути корисним для студентів медичних вищих навчальних закладів та інших природничих спеціальностей.

Рецензенти:

М. І. Шут, завідувач кафедри загальної фізики Національного педагогічного університету імені М. П. Драгоманова, доктор фізикоматематичних наук, професор, член-кореспондент АПН України;

І. М. Вікулін, завідувач кафедри фізики Одеської національної академії зв'язку імені О. С. Попова, доктор фізикоматематичних наук, професор;

В. Б. Роганков, завідувач кафедри фізики Одеської державної академії холоду, доктор фізикоматематичних наук, професор

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України як навчальний посібник для студентів біологічних спеціальностей вищих навчальних закладів.

Лист № 1/11-8273 від 30 серпня 2010р.

Передмова

Посібник «Курс загальної фізики для біологів» спрямований на те, щоб сформувати у студентів картину світогляду на природу речей, на Всесвіт, а також навчити їх користуватися фізичними законами. При написанні посібника автори намагалися познайомити студентів біологічних спеціальностей із основними ідеями та методами фізичної науки, а також навчити їх фізично мислити. Тому посібник, будучи схожим за змістом на відомі видання, разом з тим не в енциклопедичним. Його зміст присвячений роз'ясненню фізичних законів і вчить студентів свідомо їх використовувати.

По-друге, при написанні посібника враховувались і професійні потреби у фізиці для майбутніх фахівців — біологів. В наш час неможливо уявити біологію як науку без знання сучасної фізики. Дійсно, велике практичне значення для біологічних досліджень мають такі фізичні методи, як спектральний та рентгенівський аналіз, гамма-резонансна спектроскопія, методи електрополяриметрії та магнітометрії, різноманітні кінематичні методи. Дуже цінну інформацію для біологічних досліджень дають спектри ядерного та електронного парамагнітного резонансу (ЯМР та ЕПР). Широке розповсюдження знайшли методи калориметрії для вивчення перетворень біологічних макромолекул. Велике значення для вивчення структур білків і нуклеїнових кислот, а також надмолекулярних структур, клітинних органів і клітин має електронний мікроскоп. Крім того, матеріал курсу фізики лежить в основі таких суміжних біологічних дисциплін, як: біомеханіка, молекулярна біологія, біофізика, генетика, біоенергетика, електрофізіологія, фотосинтез, радіобіологія та інших. Цей далеко не повний перелік фізичних методів досліджень в біології та суміжних дисциплін вказує на те, яку важливу роль відіграє фізика в сучасній біології, і тому потребує її вивчення.

Посібник написаний на основі лекційного матеріалу, який на протязі багатьох років читається студентам біологічного факультету Одеського національного університету. Багато прикладів для ілюстрацій фізичних законів взяті з області біології. Незважаючи на це, посібником можуть користуватись студенти інших спеціальностей, де фізика не є спеціальним предметом, але відіграє важливу роль у формуванні світогляду майбутніх фахівців.

Запропонований посібник включає як сучасні аспекти розвитку фізики, так і класичні, випробувані часом. В більшості випадків, коли це можливо, закони фізики виводяться із основних фундаментальних принципів. Виклад дається на доступному рівні, деякі питання розібрані докладно, матеріал шкільної програми використовується в тих місцях, де є необхідність зв'язку. В окремих випадках, де необхідно звернути увагу на фізичну ясність питання, або ж викладки дуже загальні, математична строгість відсутня. Структура посібника досить традиційна. Він складається з трьох окремих частин і містить 6 основних змістовних блоків: механіка, молекулярна фізика, електрика, магнетизм, основи оптики і атомної та ядерної фізики. Кожний блок поділяється на змістовні модулі, або розділи, які закінчуються контрольними питаннями та завданнями для самостійної роботи. В посібнику відслідковується взаємозв'язок та логічна послідовність між окремими розділами. Незалежні на перший погляд змістові блоки та модулі, будучи з'єднаними один з одним, в цілому утворюють єдину фізичну картину.

В посібнику використовується міжнародна система одиниць Сі, але в деяких випадках, особливо при розгляданні питань, що мають практичне значення, застосовуються і одиниці інших систем.

В першій частині посібника викладені основи механіки і молекулярної фізики. У зв'язку з обмеженою кількістю годин по фізиці на біологічних факультетах, питання механіки розглянуті без релятивістських уявлень про простір і час. В розділі молекулярної фізики коротко розглянуті теми рів-

новажної та нерівноважної термодинаміки, дифузійні процеси, які для студентів-біологів мають певний професійний інтерес.

Автори широким дякую професорам М. І. Шут, І. М. Вікулінута В. Б. Роганкову за рецензування I частини рукопису посібника та корисні поради і зауваження.

Вступ

1. ПРЕДМЕТ ФІЗИКИ

Фізика — це наука про самі прості і разом з тим найбільш загальні властивості матерії. *Матерією* називається об'єктивна реальність, тобто все те, що дійсно існує в природі незалежно від нашої свідомості, і людина за допомогою своїх органів або приладів може її виявити. Матерія існує як у вигляді речей, так і у вигляді поля, наприклад: елементарні частинки (електрон, протон, нейтрон та інші), атоми, молекули, тіла живої і неживої природи, планети, галактики, гравітаційне і електромагнітне поля, поле ядерних сил, а також такі речі, які на цей час людині ще невідомі, але вони існують в природі.

Формою існування матерії є *простір* і *час*. Невід'ємною властивістю матерії є її рух. Рух вданому випадку слід розуміти в широкому аспекті як різноманітні зміни і процеси матерії. Матерія не існує без руху. Різноманітні форми руху матерії вивчаються різними науками. Фізика вивчає найпростіші процеси та види руху: механічний, молекулярно-тепловий, електромагнітний, внутрішньоатомний, внутрішньоядерний. Будучи простими формами руху, вони разом з тим є загальними для всіх відомих складних рухів матерії, які вивчаються іншими науками. Наприклад, хімія вивчає хімічні реакції, які можна представити як суму простих фізичних перетворень, що відбуваються на рівні атомів чи молекул. Процеси життєвої діяльності організмів, які вивчає біологія, є дуже складними рухами матерії, але, в свою чергу, вони можуть складатись з простих хімічних та фізичних перетворень. Слід зауважити, що явища живої природи, які вивчає біологія, дуже і дуже складні. І тому на даному етапі вони ще повністю не вивчені. Пройде ще багато часу, коли вчені розкриють всі таємниці біологічних процесів. Фізика допоможе цьому вивченню, починаючи з молекул і клітин. Разом з тим

фізика вивчає найбільш загальні закони, яким підпорядковується весь навколишній всесвіт. Так, закон збереження і зміни енергії, закони термодинаміки, електромагнетизму, справедливі і є загальними як для неживої, так і для живої природи. Тому без заперечень можна стверджувати, що *фізика є фундаментом, на якому стоять всі природничі та прикладні науки.*

Але сама по собі фізика розвиватись не може. Вона завжди знаходиться в тісному зв'язку з іншими науками. Розвиваючись за допомогою фізики, ці науки збагачують фізику своїми досягненнями, і тим самим ставлять перед нею нові задачі, розв'язуючи які, фізика сама розвивається і вдосконалюється. Так, створення теплових двигунів привело до розвитку такого розділу фізики, як термодинаміка. Успіхи термодинаміки дали відповідь на питання, як збільшити коефіцієнт корисної дії теплових двигунів. Один із засновників квантової механіки Шредінгер задавався питанням про стійкість речовини генів, побудованої з легких елементів С, Н, N, О, Р на протязі багатьох поколінь. Відповідь на це запитання дала молекулярна біологія, яка встановила двоспіральну будову дезоксирибонуклеїнової кислоти (ДНК). В свою чергу, це відкриття дало новий поштовх в розвитку квантової фізики.

Фізика в своїй практиці використовує різні методи дослідження. Всі вони відображають загальний науковий підхід до пізнання навколишньої дійсності. Будь-яке фізичне дослідження починається із *спостереження*. На основі спостережень формуються *гіпотези*. Гіпотези перевіряються на *експериментах*, тобто вивчаються фізичні явища шляхом їх відтворення в лабораторних умовах. Гіпотеза, підтверджена експериментом, стає *науковою теорією*. Фізична наукова теорія намагається пояснити закінчену картину фізичного явища в даній області, причому таку, яка б дозволила передбачити явища, ще не відкриті. Наукова теорія в подальшому перевіряється на *практиці*, яка може вносити в теорію доповнення та уточнення. В створенні фізичних теорій досить широко використовують метод моделювання, який заснований на створенні моделей. *Модель* — це віртуальний об'єкт будь-якої природи, який матеріально реалізований.

лізується і відтворює явище, процес чи систему з метою їх дослідження. Такі відомі зі школи поняття, як матеріальна точка, математичний маятник, ідеальний газ, тонка лінза, по суті є моделями. За допомогою моделей можна розглянути той чи інший об'єкт, або те чи інше явище.

З методологічної точки зору в науці існує цілий ряд методів пізнання, які також знаходять широке застосування в фізиці. До них відносяться: аналіз і синтез, індукція та дедукція, абстрагування, сходження від абстрактного до конкретного, ідеалізація, формалізація, аксіоматичний метод. Короткий опис та приклади застосування цих методів приводяться в підручнику П. П. Чолпана «Фізика».

Для фізики основною метою є наукове пізнання навколишнього світу. Наукові знання складають центральну частину сучасної культури і цивілізації суспільства. Кожна думаюча людина, що живе в наш час — час автоматизації, ядерної енергетики, забруднення навколишнього середовища, комп'ютеризації, космічних досліджень, клонування живих об'єктів — зобов'язана мати уявлення про фізику як науку про природу.

2. МАТЕМАТИЧНА СИМВОЛІКА, ПОНЯТТЯ ТА ОПЕРАЦІЇ НАД ФІЗИЧНИМИ ВЕЛИЧИНАМИ

Математика відіграє дуже важливу роль в фізиці. Вона, фактичною мовою фізики. Математична підготовка, необхідна для засвоєння матеріалу посібника, розрахована на шкільний курс математики та на короткий курс «Вищої математики». Нагадаємо про основну математичну символіку, поняття та операції, які будуть використані в посібнику.

1. Знаки різниці, суми, нерівності, малості фізичних величин.

Якщо через a позначити якусь фізичну величину, то для позначення різниці її двох кінцевих значень використовують знак Δ «дельта»: Δa , Δx , Δt . Для позначення різниці двох фізично нескінченно малих значень цієї величини, тобто кінцевих, але

таких, що в даних умовах менше за них розглядати неможливо, користуються знаком da як математичним диференціалом.

Знак суми декількох фізичних величин позначають літерою Σ «сигма»

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = \sum_{i=1}^n a_i.$$

Для позначення нерівності використовують загальновідомі знаки $a >$ більше і $a <$ менше, а також $a \gg$ значно більше і $a \ll$ значно менше.

Знаком $\approx$ користуються для позначення наближених значень, а знаком $\sim$ виражають пропорційність величин.

2. Обчислення середніх значень.

а) середнє арифметичне значення фізичних величин:

$$\bar{a} = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i;$$

б) середнє квадратичне значення величин:

$$\bar{a} = \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_n^2}{n}} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i^2};$$

в) середнє геометричне значення:

$$a^* = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_n}.$$

3. Зміст похідної та інтеграла в фізиці.

Символ похідної $\frac{da}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta a}{\Delta t}$ математика розглядає як одне ціле, а не як відношення двох нескінченно малих величин. В фізиці слід рахуватись з тим, що фізичні величини можна отримати в результаті конкретних вимірювань, а вони, в свою чергу, супроводжуються похибками. Ці та інші обставини роблять неможливим граничний перехід $\Delta t \rightarrow 0$, який вводиться в математиці при визначенні похідної. Наприклад, у випадку визначення густини речовини $\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta V} = \frac{dm}{dV}$ спрямувати

об'єм V до нуля неможливо через атомістичну будову речовини. При зменшенні об'єму в ньому може знаходитись одна чи декілька молекул, або ж зовсім може не бути молекул. Крім того, число молекул в достатньо малому об'ємі через хаотичний рух може змінюватись, і при зменшенні об'єму до нуля величина $\frac{dm}{dV}$ не може прямувати до визначеної границі, а буде весь час змінюватись. Тому dV повинно бути таким найменшим значенням, при якому речовина ще може бути однорідною поблизу тієї точки, яка нас цікавить. Таким чином, в фізиці похідна виступає як відношення кінцевих, але достатньо малих приростів фізичних величин, а не як границя цього відношення.

Похідна $\frac{d(\quad)}{dt}$ від будь-якої фізичної величини a по часу показує, як швидко з часом змінюється ця фізична величина і називається *швидкістю*. Похідні $\frac{d(\quad)}{dr}$, або $\frac{d(\quad)}{dx}$, $\frac{d(\quad)}{dy}$, $\frac{d(\quad)}{dz}$, $\frac{d(\quad)}{dh}$ від будь-якої фізичної величини показують, як швидко змінюється вона в просторі від точки до точки. Геометричний зміст похідної є тангенс кута нахилу дотичної до кривої $a = f(t)$ в даній точці. Значення t , що відповідає максимуму чи мінімуму функції $a = f(t)$, тобто точкам кривої, в яких дотична спрямована горизонтально, визначаються із умови $\frac{da}{dt} = 0$.

Означений інтеграл в математиці визначається таким граничним переходом:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \sum f(x_i) \Delta x_i.$$

Тобто числовий проміжок (a, b) розбивається на n дрібних проміжків $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$. Довжина кожного із них перемножується на значення функції $f(x)$ в будь-якій точці всередині цих проміжків. Потім ці добутки складають і виконують граничний перехід, допускаючи, що довжина кожного із проміжків $\Delta x \rightarrow 0$.

В фізиці через похибки вимірювань, або ж із принципових міркувань, наприклад, атомістичної будови речей, поділ проміжку (a, b) на $n \rightarrow \infty$ і відповідно $\Delta x \rightarrow 0$ неможливий, а тому Δx повинно мати достатньо мале кінцеве значення для даних умов. Це означає, що інтеграл в фізиці виступає не як границя суми, а як сума великого числа достатньо малих доданків $\sum f(x_i) \Delta x_i$. Геометрично інтеграл являє собою площу фігури, обмежену функціональною кривою $f(x)$, віссю абсцис та ординатами, що відповідають границям інтегрування.

4. Операції над векторами.

Фізичні величини, які характеризуються тільки числовим значенням, називаються скалярними величинами, або просто *скалярами*. Наприклад: довжина, час, об'єм, маса, робота, заряд, потенціал. Фізичні величини, які характеризуються не тільки числовим значенням, але й певним напрямком в просторі, називаються *векторами*. До них відносяться швидкість, прискорення, сила, кількість руху, напруженість електричного поля та інші.

Геометричним зразком вектора є направлений відрізок прямої, орієнтований в просторі. Абсолютна величина, або модуль вектора, відповідає довжині відрізка. Графічно вектор зображається у вигляді стрілки, проведеної з точки A (початок вектора) в точку B (кінець вектора). Позначається вектор по-різному – $\overrightarrow{AB}$, або $\vec{a}$. Його модуль позначається $|\overrightarrow{AB}|$ або $|\vec{a}|$. Часто абсолютне значення вектора позначають просто AB або a , тобто без стрілки.

Вектори вважаються рівними, якщо вони паралельно спрямовані в один бік і мають однакові модулі. Два паралельні чисельно рівні вектори, але спрямовані в різні боки, називаються протилежними векторами. Для протилежних векторів виконується рівність $\vec{a} = -\vec{b}$ або $\vec{b} = -\vec{a}$.

Операції над векторами з'явилися внаслідок узагальнення ряду фізичних законів. В фізиці є багато законів, в яких приймають участь векторні величини. Всі ці закони можна записати за допомогою п'яти дій над векторами: додавання, віднімання, множення вектора на число, векторний та скалярний добуток.

а) Додавання векторів.

Вектори складаються геометрично: сума двох векторів дорівнює діагоналі паралелограма, сторонами якого є ці вектори $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$ (рис. 1) (правило паралелограма). Взагалі при додаванні двох векторів потрібно сумістити кінець першого вектора $\vec{a}$ з початком другого вектора $\vec{b}$, тоді вектор $\vec{c}$ проводиться з початку першого вектора в кінець другого вектора. Він і буде сумою векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ (рис. 2) (правило трикутника). Якщо додається кілька векторів, то сума їх знаходиться таким самим чином (рис. 3).

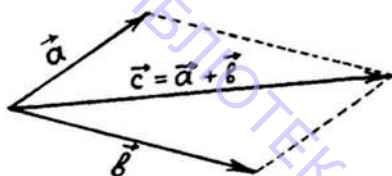


Рис. 1

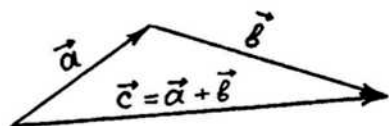


Рис. 2

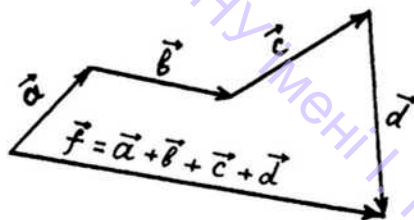


Рис. 3

б) Віднімання векторів.

Якщо вектор $\vec{b}$ віднімають від вектора $\vec{a}$, то цю дію можна замінити додаванням вектора $\vec{a}$ з вектором $-\vec{b}$, протилежним вектору $\vec{b}$, тобто $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}) = \vec{c}$.

Таким чином, різниця двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, які виходять з однієї точки, є вектор $\vec{c}$, проведений з кінця від'ємника $\vec{b}$ в кінець зменшуваного $\vec{a}$ (рис. 4). В паралелограмі векторів одна діагональ зображає суму векторів, друга — різницю.

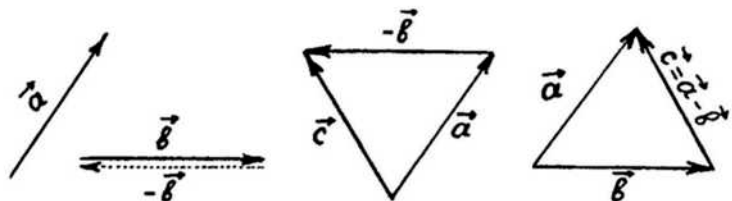


Рис. 4

в) Множення вектора на число.

Добутком вектора $\vec{a}$ на число k називається вектор $\vec{b} = k\vec{a}$, паралельний вектору $\vec{a}$ і абсолютна величина якого дорівнює добутку модуля $|\vec{a}|$ на число k . Направлений вектор $\vec{b}$ в ту ж сторону, що і вектор $\vec{a}$, якщо $k > 0$, і в протилежну, якщо $k < 0$. Оскільки k може мати розмірність, то розмірність $\vec{b}$ не завжди буде співпадати з розмірністю $\vec{a}$.

г) Скалярний добуток векторів.

У випадку скалярного множення двох векторів, їм у відповідність ставиться скаляр. Скалярним добутком двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається добуток абсолютних величин цих векторів на косинус кута між ними:

$$c = \vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos \alpha = \vec{b} \cdot \vec{a}$$

Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ можна міняти місцями. Прикладом скалярного добутку є формула для механічної роботи $A = \vec{F} \cdot \Delta \vec{r} = F \cdot \Delta r \cdot \cos \alpha$.

д) Векторний добуток.

На відміну від скалярного добутку, при векторному множенні двом векторам у відповідність ставиться третій вектор. Векторним добутком векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається вектор $\vec{c}$, перпендикулярний площині, в якій лежать вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$, абсолютне значення його дорівнює добутку абсолютних значень цих векторів на синус кута між ними:

$$\vec{c} = [\vec{a} \times \vec{b}], \quad c = a \cdot b \cdot \sin \alpha$$

Орієнтація вектора $\vec{c}$ відносно площини (вниз або вгору) визначається правилом гвинта. Якщо правий гвинт розмістити так, щоб його рукоятка могла обертатись в площині, де лежать вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$, і повертати рукоятку від вектора $\vec{a}$, який стоїть на першому місці в векторному добутку, до вектора $\vec{b}$ в бік найменшого кута, то поступовий рух гострого кінця гвинта покаже напрямок вектора $\vec{c}$ (рис. 5). На відміну від скалярного добутку, порядок співмножників у векторному добутку не може бути будь-яким. При зміні порядку співмножників гвинт потрібно обернути в інший бік, тобто від $\vec{b}$ до $\vec{a}$, і тому його гострий кінець буде рухатись в протилежному напрямку. Тобто від зміни порядку співмножників змінюється знак векторного добутку.

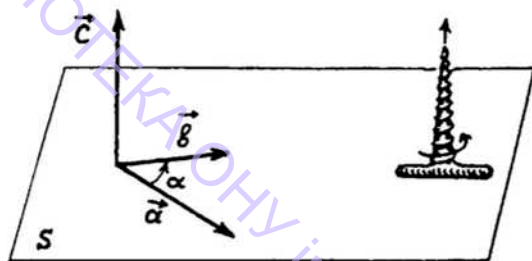


Рис. 5

е) Векторні рівняння.

Виражені в математичній формі фізичні закони, в яких встановлюється зв'язок між векторними величинами, являють собою векторні рівняння. Векторні рівняння можна спроектувати на координатні осі. Якщо спроектувати векторне рівняння на три осі декартової системи координат, то отримаємо три скалярні алгебраїчні рівняння для проекцій цього рівняння. При цьому треба мати на увазі, що проекція суми векторів на якусь вісь дорівнює сумі проекцій цих векторів на ту ж вісь.

На закінчення зауважимо, що використання векторної символіки для опису фізичних законів значно скорочує запис формул і їх перетворень. Більшість фізичних законів при цьому приймають форму, незалежну від вибору системи координат.

МЕХАНІКА

Вивчення фізики починається з механіки тому, що більшість основних законів, фізичних понять, які вивчаються в механіці, лежить в основі інших частин фізики.

Механіка вивчає самий простий вид руху матерії — механічний рух. Це переміщення тіл, їх складових частинок в просторі одне відносно одного з часом. При розгляді руху тіл в механіці можна виділити розділи — кінематику і динаміку.

Кінематика вивчає переміщення тіл в просторі в залежності від часу, не цікавлячись причинами, які приводять до цього руху або ж до його зміни. Кінематика лише описує рух тіл за допомогою фізичних величин, графіків, формул, не враховуючи взаємодію між тілами. В динаміці розглядається взаємодія між тілами, тобто причини, які приводять до зміни руху.

Розділ 1

КІНЕМАТИКА

1.1. МЕХАНІЧНИЙ РУХ. СИСТЕМА ВІДЛІКУ

Рух тіла відбувається в просторі в певній послідовності з часом. Миттєвих явищ в природі не існує. Будь-яке явище має початок і кінець, тобто має якусь подовженість з часом. Таким чином, час є невід'ємною властивістю всіх явищ природи. Але рух тіл відбувається не тільки з часом, а також і в просторі. Всі матеріальні тіла мають просторову протяжність, і своє положення можуть міняти в просторі відносно інших тіл. Час і простір невід'ємні від матерії і є взаємопов'язаними формами її існування. В механіці цей взаємозв'язок проявляється в механічному русі, коли тіла переміщуються одне відносно одного з часом і в просторі.

Описати рух тіла — означає указати для кожного моменту часу його положення відносно інших тіл. Щоб вивчити рух тіла, необхідно, перш за все, вибрати тіла, по відношенню до яких необхідно розглядати переміщення. Тіла, які служать для визначення положення рухомих тіл, називаються *тілами відліку*. По відношенню до різних тіл відліку одне і те ж тіло може здійснювати різні рухи. Наприклад, кулька, яка падає у вагоні, що рухається рівномірно і прямолінійно, відносно стіни вагона буде рухатися вертикально по прямій вниз, а відносно рейок залізничного шляху — по кривій. Говорять, що механічний рух є відносний рух. В кінематиці при виборі тіл відліку до уваги беруть лише їх доцільність.

Після того, як вибране тіло відліку, необхідно з ним зв'язати *систему координат*, і положення тіла та його рух визначити за допомогою цієї системи координат. Системи координат бувають різні, і їх вибір визначається умовами механічного руху в кожному конкретному випадку. Наприклад, коли тіло рухається

ся на площині, то системою координат може бути декартова, або полярна. В декартовій системі координат задають дві осі X і Y , розташовані під прямим кутом, а в полярній — радіус - вектор і кут. У випадку, коли тіло рухається в тривимірному просторі, користуються декартовою системою координат, або сферичною, або ж циліндричною. Найбільш зручною вважається декартова система координат, де всі три осі X , Y , Z взаємно перпендикулярні. В більшості випадків використовується правостороння декартова система координат як стандартна. Правостороння відрізняється від лівосторонньої тим, що в ній орієнтація осі Z визначається правилом правого гвинта. В сферичній системі координат положення тіла визначається радіусом кулі r та двома кутами — горизонтальним α і вертикальним φ . В циліндричній системі координат положення тіла визначається також трьома координатами: радіусом циліндра ρ , висотою h та кутом φ .

Крім тіла відліку і системи координат для описування руху необхідно мати годинник, прилад для відліку часу. Сукупність тіл відліку системи координат та годинника становить *систему відліку*.

При описанні руху тіла різні його складові частини можуть рухатись по-різному. Інколи розміри тіла настільки малі порівняно з іншими розмірами в даній задачі, що ними можна знехтувати. Наприклад, при русі автомобіля із Києва в Одесу його розміри порівняно з довжиною шляху не відіграють ніякої ролі. Тіло, розмірами та формою якого в даних умовах можна знехтувати, називається *матеріальною точкою*. Питання про те, можна дане тіло вважати матеріальною точкою чи ні, залежить не тільки від його розмірів, а також від умов задачі. Так, наприклад, Землю, яка рухається навколо Сонця, можна вважати матеріальною точкою. Але, коли нас цікавить рух якогось тіла по поверхні Землі, то вона не є матеріальною точкою. Матеріальна точка є найпростішою моделлю реального фізичного об'єкта, і при вірному використанні цього поняття багато практичних задач досить легко розв'язати. В деяких випадках, коли розмірами та формою тіла неможливо знехтувати, його розбивають

на множину матеріальних точок, і тоді вивчення руху такого тіла зводиться до вивчення руху системи матеріальних точок.

1.2. КІНЕМАТИЧНЕ РІВНЯННЯ РУХУ, ТРАЄКТОРІЯ, ПЕРЕМІЩЕННЯ, ШЛЯХ

Для опису руху матеріальної точки скористуємось прямокутною декартовою системою координат, зв'язаною з яким-небудь тілом відліку. Положення точки в цьому випадку можна визначити за допомогою *радіуса-вектора* $\vec{r}$ (рис. 6), або ж трьома координатами x, y, z .

Коли точка рухається, то координати з часом змінюються, і, якщо відомі будуть ці залежності, тобто

$$x = f(t), y = f(t), z = f(t), \quad (1.1)$$

то тим самим можна визначити положення точки в будь-який момент часу за допомогою радіуса-вектора $\vec{r}(t)$. Тобто

$$\vec{r}(t) = \vec{i}x(t) + \vec{j}y(t) + \vec{k}z(t), \quad (1.2)$$

тут $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ — одиничні вектори вздовж відповідних осей.

Це і є *кінематичні рівняння руху*, виражені в скалярній (1.1) та векторній (1.2) формах.

Сукупність точок простору, які послідовно проходить рухома матеріальна точка, утворюють лінію la_2 (рис. 7), вздовж якої вона рухається.

Ця лінія називається *траєкторією*, а формули (1.1) і (1.2) називаються рівняннями траєкторії в параметричному вигляді, де параметром виступає час t . Рівняння траєкторії можна визначити як залежність $x = f(y, z)$, виключивши із рівнянь (1.1) і (1.2) параметр t . Наприклад, нехай на площині точка рухається за законом $x = at, y = bt$, де a і b — сталі коефіцієнти. Потрібно знайти вид траєкторії. Виключивши із цих рівнянь час, знаходимо $y = \frac{b}{a}x$. Це є рівняння прямої, яка проходить через початок координат.

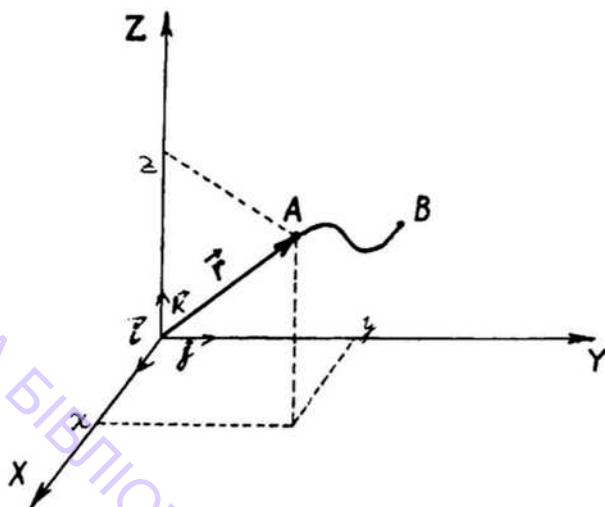


Рис. 6

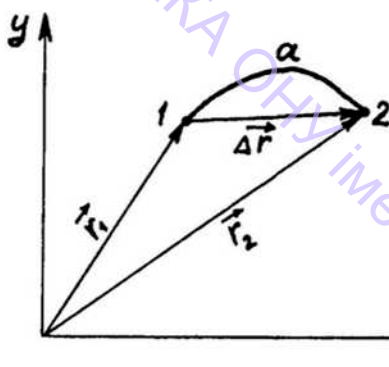


Рис. 7

В залежності від виду траєкторії розрізняють прямолінійний рух, якщо траєкторія є пряма лінія, і криволінійний, якщо — крива. Якщо тіло являє собою систему матеріальних точок, і в процесі руху траєкторії всіх точок однакові, то такий рух називається *поступальним*. Якщо ж траєкторія їх є коло, то рух називається *обертальним*. Траєкторія руху точки в різних системах відліку має різний вид. Так, окремі точки гвинта літака,

що летить над Землею, в системі відліку, зв'язаній з літаком, описують кола, а відносно Землі — спіраль.

Нехай точка рухається на площині і в деяких момент часу займає положення (рис. 7), яке описується радіус-вектором $\vec{r}_1$. Через деякий проміжок часу Δt точка переміщується вздовж траєкторії (1а2) в положення (2), якому відповідає радіус-вектор $\vec{r}_2$. Тоді *переміщенням* матеріальної точки називають вектор

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1. \quad (1.3)$$

Тобто переміщення — це сама коротка відстань від кінцевого до початкового положення точки. Проекції вектора переміщення виражаються через різницю координат наступним чином:

$$\Delta r_x = \Delta x = x_2 - x_1, \quad \Delta r_y = \Delta y = y_2 - y_1. \quad (1.4)$$

Фактично вони є зміщенням точки вздовж відповідних координат.

Переміщення саме по собі не дає повну інформацію про рух точки. Більш детальнішу характеристику руху можна отримати, якщо взяти ряд послідовних малих переміщень $\Delta \vec{r}_i$ вздовж траєкторії за малі проміжки часу Δt (рис. 8).

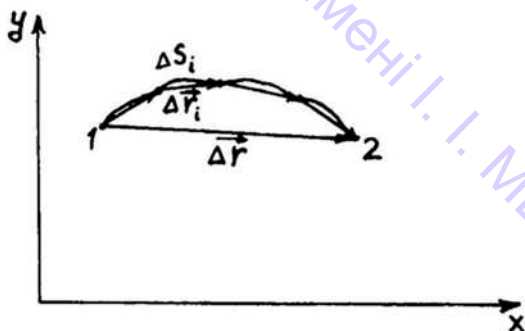


Рис. 8

Очевидно, що

$$\Delta \vec{r} = \sum_{i=1}^n \Delta \vec{r}_i. \quad (1.5)$$

Якщо проміжки часу dt взяти нескінченно малими, то їм будуть відповідати нескінченно малі, або ж елементарні переміщення $d\vec{r}$, і при цьому геометрична сума їх буде дорівнювати кінцевому переміщенню

$$\Delta\vec{r} = \int_1^2 d\vec{r}. \quad (1.6)$$

На практиці важливо знати відстань, яку проходить точка вздовж траєкторії. Ця відстань називається *шляхом*. Шлях ΔS — це скалярна величина, яка визначається арифметичною сумою елементарних переміщень

$$\Delta S = \int_1^2 dr. \quad (1.7)$$

Таким чином, важливо засвоїти, що переміщення — це вектор, а шлях — це скаляр, і в загальному випадку модуль переміщення не дорівнює пройденому шляху.

1.3. ШВИДКІСТЬ

Для характеристики руху точки доцільно ввести поняття — швидкість.

Вектором середньої швидкості, або просто *середньою швидкістю* називається відношення переміщення до часу, за який воно відбулося

$$\vec{v}_{cp} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}. \quad (1.8)$$

Величина вектора $\vec{v}_{cp}$ показує, як швидко переміщується точка, а напрямлення його визначає, в яку сторону відбувається переміщення. Крім вектора середньої швидкості, в кінематиці користуються такою величиною, як *середня шляхова швидкість*. Вона дорівнює відношенню шляху до часу, за який був пройдений цей шлях. Середня шляхова швидкість — це скалярна величина

$$v_{cp} = \frac{\Delta S}{\Delta t}. \quad (1.9)$$

Як вказувалось раніше, кінцеве значення переміщення $\Delta \vec{r}$ не в повній мірі відображає особливості руху. Те ж саме можна віднести і до вектора середньої швидкості. Більш змістовним буде поняття *миттєвої швидкості*, тобто швидкості в даний момент часу. Миттєвою швидкістю називають границю середньої швидкості, коли проміжок часу Δt прямує до нуля

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{i} \frac{dx}{dt} + \vec{j} \frac{dy}{dt} + \vec{k} \frac{dz}{dt} = \vec{i} v_x + \vec{j} v_y + \vec{k} v_z. \quad (1.10)$$

Миттєва швидкість направлена по дотичній до траєкторії в даний точці, так само, як вектор $d\vec{r}$.

З математичної точки зору миттєва швидкість є перша похідна радіус-вектора за часом. Оскільки при зменшенні переміщення модуль $|d\vec{r}|$ прямує до dS , то величину швидкості записують так:

$$v = |\vec{v}| = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\Delta \vec{r}|}{\Delta t} = \frac{dr}{dt} = \frac{dS}{dt}. \quad (1.11)$$

Формули (1.10) показують, що, коли відома залежність координати точки від часу $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, то простим диференціюванням можна знайти проекції швидкості v_x , v_y , v_z на координатні осі, а отже, і сам вектор швидкості в будь-який момент часу. Величина вектора швидкості, тобто його модуль, дорівнює

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}. \quad (1.12)$$

1.4. ПРИСКОРЕННЯ

Рух точки вздовж траєкторії може характеризуватися зміною швидкості як за величиною, так і за напрямком. Нехай в момент часу t_1 швидкість була $\vec{v}_1$, а в момент t_2 вона дорівнює

вала $\vec{v}_2$ (рис. 9). Зміна швидкості за проміжок часу Δt є вектор $\Delta\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$.

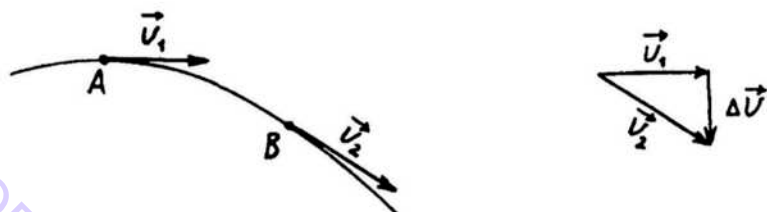


Рис. 9

Відношення зміни швидкості до часу, за який відбулася ця зміна, є *вектор середнього прискорення*, або *середнє прискорення*

$$\vec{a}_{cp} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}. \quad (1.13)$$

Прискорення показує, з якою швидкістю змінюється швидкість. Якщо проміжок часу Δt буде прямувати до нуля, то точка B буде наближатись до точки A, а відношення $\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$ буде прямувати до деякої сталої величини. Ця границя називається *миттєвим прискоренням*.

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}. \quad (1.14)$$

З математичної точки зору прискорення є перша похідна вектора швидкості за часом. Оскільки $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$, то

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}, \quad (1.15)$$

тобто прискорення є також друга похідна радіус-вектора за часом.

Як видно із формул (1.13), (1.14), (1.15), прискорення є векторною величиною. Напрямок вектора прискорення є границя, до якої прямує напрям вектора зміни швидкості $\Delta\vec{v}$. Лише для випадку прямолінійного руху напрям вектора прискорення

ня співпадає з напрямом вектора швидкості або протилежний йому.

Вектор прискорення так само, як і вектор швидкості, можна представити у вигляді суми компонент на координатні осі:

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{i}v_x + \vec{j}v_y + \vec{k}v_z) = \\ &= \vec{i}\frac{dv_x}{dt} + \vec{j}\frac{dv_y}{dt} + \vec{k}\frac{dv_z}{dt} = \vec{i}a_x + \vec{j}a_y + \vec{k}a_z.\end{aligned}\quad (1.16)$$

Модуль вектора прискорення дорівнює

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.\quad (1.17)$$

В системі СІ одиницею прискорення є $\left[\frac{\text{м}}{\text{с}^2}\right]$, а в системі СГС $\left[\frac{\text{см}}{\text{с}^2}\right]$.

При криволінійному русі швидкість може змінюватися як за величиною, так і за напрямком. Прискорення, яке при цьому виникає, можна розглядати як суму двох прискорень, одне з них відповідає за зміну швидкості за величиною, а друге — за зміну її напрямку. Нехай тіло рухається вздовж деякої криволінійної траєкторії AB (рис. 10).

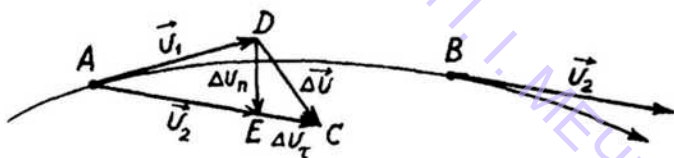


Рис. 10

В точці A тіло має швидкість $\vec{v}_1$. Через проміжок часу Δt вона змінюється і в точці B дорівнює $\vec{v}_2$. Для того, щоб визначити зміну швидкості, перенесемо паралельно самому собі вектор $\vec{v}_2$ в точку A , і тоді вектор $\Delta\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$ буде цією зміною швидкості. Вздовж вектора $\vec{v}_2$ відкладемо вектор $\vec{AE}$, який по модулю дорівнює швидкості $\vec{v}_1$. Якщо тепер з'єднати точки D і E , то

із $\triangle DEC$ можна знайти векторну суму $\overline{DE} + \overline{EC} = \overline{DC}$, а оскільки $\overline{DC} = \Delta \vec{v}$, і, позначаючи $\overline{DE}$ через $\Delta \vec{v}_n$, а $\overline{EC}$ — через $\Delta \vec{v}_\tau$, отримаємо

$$\Delta \vec{v} = \Delta \vec{v}_n + \Delta \vec{v}_\tau. \quad (1.18)$$

Тобто повна зміна швидкості складається із $\Delta \vec{v}_n$ — зміни швидкості, яка обумовлена зміною її напрямку, і $\Delta \vec{v}_\tau$ — яка зумовлена зміною швидкості за величиною.

Середнє прискорення за проміжок часу Δt знайдемо, розділивши $\Delta \vec{v}$ на Δt

$$\vec{a}_{cp} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\Delta \vec{v}_n}{\Delta t} + \frac{\Delta \vec{v}_\tau}{\Delta t}. \quad (1.19)$$

В граничному випадку, коли $\Delta t \rightarrow 0$, отримаємо миттєве прискорення

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}_n}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}_\tau}{\Delta t}. \quad (1.20)$$

Якщо позначити:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}_n}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}_n}{dt} = \vec{a}_n \quad \text{і} \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}_\tau}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}_\tau}{dt} = \vec{a}_\tau, \quad (1.21)$$

то миттєве прискорення дорівнює сумі двох складових прискорень

$$\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau. \quad (1.22)$$

Тут $\vec{a}_n$ називається *нормальним прискоренням*, а $\vec{a}_\tau$ — *тангенціальним*. Нормальне прискорення виникає внаслідок того, що швидкість змінює свій напрям, а тангенціальне — внаслідок того, що швидкість змінює свою величину.

Напрями $\vec{a}_n$ і $\vec{a}_\tau$ можна визначити, якщо $\Delta t \rightarrow 0$, тоді точка B наближається до точки A , а кут DAE прямує до нуля. Оскільки трикутник DAE рівнобедрений, то кути ADE і AED прямують до 90° кожний. Це означає, що в цьому випадку вектор $\vec{a}_n$ перпендикулярний до швидкості $\vec{v}$, тобто перпендикулярний до траєкторії. Напрямок вектора $\vec{a}_\tau$ співпадає з вектором

$\vec{v}_2$, отже, у випадку, коли $\Delta t \rightarrow 0$, він буде направлений вздовж дотичної до траєкторії в даній точці. Таким чином, вектори $\vec{a}_n$ і $\vec{a}_\tau$ взаємно перпендикулярні.

За модулем тангенціальне прискорення можна знайти так:

$$|\vec{a}_\tau| = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\Delta \vec{v}|}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}. \quad (1.23)$$

Враховуючи (1.11), його можна представити у вигляді:

$$|a_\tau| = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 S}{dt^2}. \quad (1.24)$$

Для того, щоб знайти модуль нормального прискорення, розглянемо криволінійний рух, при якому швидкість не змінює свою величину, а міняє лише напрям. Прикладом такого руху може бути рівномірний рух точки по колу (рис. 11).

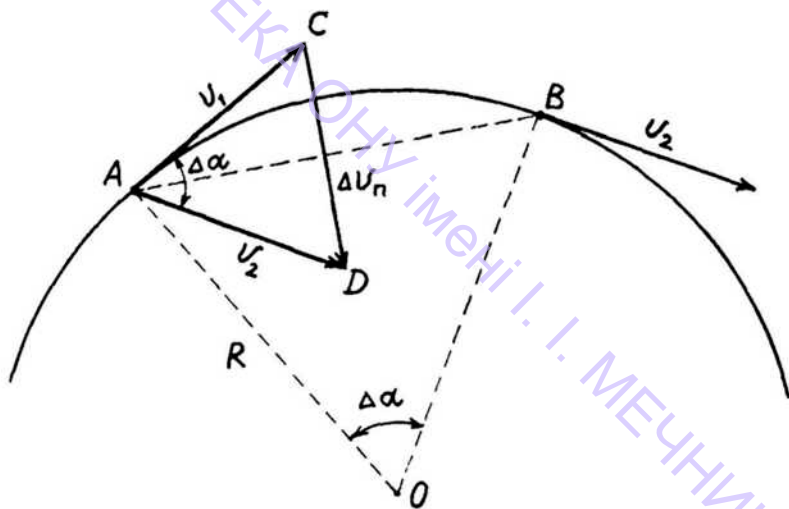


Рис. 11

Нехай в точках A і B швидкості відповідно дорівнюють $\vec{v}_1$ і $\vec{v}_2$, і $|\vec{v}_1| = |\vec{v}_2| = v$. Як і раніше (рис. 10), перенесемо вектор $\vec{v}_2$ в точку A і знайдемо різницю

$$\Delta \vec{v} = \Delta \vec{v}_n = \vec{v}_2 - \vec{v}_1.$$

Із центра кола в точки A і B проведемо радіус OA і OB . Як видно із малюнка, кут $\Delta\alpha$, утворений між векторами $\vec{v}_1$ і $\vec{v}_2$ із ΔCAD , дорівнює центральному куту AOB . Із подібності трикутників CAD і AOB виходить

$$\frac{CD}{AB} = \frac{AC}{OA}, \text{ або } \frac{\Delta v_n}{v \Delta t} = \frac{v}{R}, \text{ звідки} \\ \frac{\Delta v_n}{\Delta t} = \frac{v^2}{R}. \quad (1.25)$$

Якщо перейти до границі ($\Delta t \rightarrow 0$), то

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v_n}{\Delta t} = a_n = \frac{v^2}{R}. \quad (1.26)$$

При цьому заміна AB на $v \cdot \Delta t$ в (1.25), яка була приблизною $AB \approx v \Delta t$, тепер не може викликати сумніву.

Нормальне прискорення, яке направлено до центра кола і по модулю дорівнює $\frac{v^2}{R}$, інакше називають *доцентровим*.

В загальному випадку при русі по криволінійній траєкторії можна показати, що, коли точка B прямує до точки A , відрізок траєкторії (дуга AB) прямує до дуги кола з центром в точці O , яке називається *колом кривини*, а його радіус — *радіусом кривини*. Тоді у формулі (1.26) радіус кола R буде означати радіус кривини в даній точці траєкторії.

Оскільки вектори $\vec{a}_n$ і $\vec{a}_t$ взаємно перпендикулярні, то модуль повного прискорення дорівнює

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_n^2 + a_t^2} = \sqrt{\left(\frac{v^2}{R}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dt}\right)^2}. \quad (1.27)$$

Із рис. 12 видно, що вектор повного прискорення при криволінійному русі завжди направлений в сторону вгнутості траєкторії. А кут $\Delta\alpha$, який утворює повне прискорення з напрямом руху, може бути як гострим, коли швидкість за модулем збільшується, так і тупим, якщо швидкість зменшується.

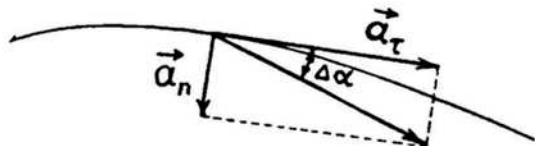


Рис. 12

При прямолінійному русі $\vec{a}_n = 0$, і тому повне прискорення дорівнює тангенціальному $a = a_t$. Якщо прискорення постійне і більше нуля $a_t > 0$, рух називається *прямолінійним рівноприскоренням*. Якщо $a < 0$ — *рівносповільненням*. Миттєве прискорення в цих випадках дорівнює середньому за будь-який проміжок часу.

Для знаходження залежності швидкості від часу при рівнозмінному русі скористаємось визначенням миттєвого прискорення. Із формули (1.14) знаходимо $dv = a dt$. Оскільки $a = \text{const}$, то, інтегруючи ліву і праву частини останнього рівняння у відповідних границях, маємо:

$$\int_{v_0}^v dv = a \int_0^t dt, \text{ звідки } v - v_0 = at, \text{ або } v = v_0 + at. \quad (1.28)$$

Тут v_0 — початкова швидкість, v — кінцева в будь-який момент часу t .

Для знаходження залежності шляху від часу скористаємось формулою (1.11). Із неї отримаємо $dS = v dt$, де v — швидкість в будь-який момент часу. Як було показано вище, $v = v_0 + at$. Підставляючи це значення у формулу для dS і інтегруючи ліву і праву частини у відповідних проміжках, отримаємо

$$\int_0^S dS = \int_0^t v dt = \int_0^t (v_0 + at) dt = \int_0^t v_0 dt + a \int_0^t t dt, \quad (1.29)$$

звідки

$$S = v_0 t + \frac{at^2}{2}. \quad (1.30)$$

Із рівнянь (1.28) і (1.30), виключаючи час t , можна отримати формулу для розрахунку швидкості через прискорення та шлях

$$v_2^2 - v_1^2 = 2aS. \quad (1.31)$$

1.5. КІНЕМАТИКА ОБЕРТАЛЬНОГО РУХУ

Для опису обертального руху точки по колу користуються кінематичними величинами, які дещо зручніші і дають більш наглядне уявлення про обертальний рух. Положення матеріальної точки при обертальному русі можна характеризувати кутом повороту. Якщо відома залежність $\varphi(t)$, то можна знайти, де знаходиться точка в будь-який момент часу. Така залежність називається *кінематичним рівнянням* обертального руху.

Кутове переміщення точки при обертальному русі з одного положення в інше можна знайти як різницю кінцевого і початкового значення кута повороту

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \Delta\varphi. \quad (1.32)$$

Якщо проміжок часу Δt , за який відбувається ця зміна, буде досить малим $\Delta t \rightarrow 0$, то таке переміщення $d\varphi$ називають *елементарним кутовим переміщенням*. Елементарне кутове переміщення є векторною величиною. Напрявлений вектор $d\vec{\varphi}$ вздовж осі, навколо якої відбувається обертання, і за правилом гвинта (рис. 13).



Рис. 13

Елементарне лінійне переміщення вздовж кола $d\vec{r}$ зв'язане з елементарним кутовим переміщенням $d\vec{\varphi}$ таким векторним співвідношенням:

$$d\vec{r} = [d\vec{\varphi} \times \vec{r}]. \quad (1.33)$$

В скалярному вигляді цей добуток має вигляд: $dr = d\varphi \cdot r \sin \alpha$. Оскільки кут α між $d\vec{\varphi}$ і $\vec{r}$ дорівнює $\frac{\pi}{2}$, то добуток записують так $dr = d\varphi \cdot r$.

Величина, яка показує, як швидко обертається точка по колу, називається *кутовою швидкістю*.

Середню кутову швидкість визначають наступним чином:

$$\omega_{cp} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}. \quad (1.34)$$

Якщо розглядати границю цієї величини, коли $\Delta t \rightarrow 0$, то отримаємо *миттєву кутову швидкість*

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt}. \quad (1.35)$$

Миттєва кутова швидкість — це похідна за часом кута повороту. Вона є векторною величиною. Напрямок її співпадає з напрямком вектора $d\vec{\varphi}$, тобто напрямлена вздовж осі обертання і далі за правилом гвинта

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}. \quad (1.36)$$

Якщо обертання рівномірне, то

$$\omega = \frac{\varphi}{t} = \frac{2\pi}{T} = 2\pi n = \text{const}, \quad (1.37)$$

де T — період обертання, час одного повороту, а $n = \frac{1}{T}$ — кількість обертів за одиницю часу (частота обертання).

Одиницею кутової швидкості є $\left[\frac{\text{радіан}}{\text{с}} \right] = \left[\frac{1}{\text{с}} \right]$, або $\left[\frac{\text{град}}{\text{с}} \right]$.

Зв'язок між швидкістю $\vec{v}$, яка в обертальному русі називається лінійною, і кутовою швидкістю $\vec{\omega}$ можна встановити, скориставшись співвідношенням (1.33). Якщо розділити ліву і праву частини цього співвідношення на dt і врахувати (1.10) та (1.36), отримаємо

$$\vec{v} = [\vec{\omega} \times \vec{r}]. \quad (1.38)$$

Оскільки кут між $\vec{\omega}$ і $\vec{r}$ дорівнює $\frac{\pi}{2}$, модуль лінійної швидкості в скалярному вигляді записують так:

$$v = \omega r. \quad (1.39)$$

У випадку нерівномірного обертання кутова швидкість з часом буде змінюватись. Кінематична величина, що характеризує швидкість зміни кутової швидкості, називається *кутовим прискоренням*. Якщо в момент часу t_1 кутова швидкість дорівнює $\vec{\omega}_1$, а в момент t_2 вона має значення $\vec{\omega}_2$, то зміна кутової швидкості за час Δt буде $\Delta \vec{\omega} = \vec{\omega}_2 - \vec{\omega}_1$.

Середнє кутове прискорення дорівнює

$$\vec{\beta}_{cp} = \frac{\Delta \vec{\omega}}{\Delta t}. \quad (1.40)$$

Якщо $\Delta t \rightarrow 0$, то границя співвідношення (1.40) з врахуванням (1.36) буде *миттєвим кутовим прискоренням*:

$$\vec{\beta} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{\omega}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d^2 \vec{\varphi}}{dt^2}. \quad (1.41)$$

Таким чином, кутове прискорення є першою похідною кутової швидкості за часом, або другою похідною кута обертання за часом. Середнє, а також миттєве кутове прискорення є векторними величинами, їх напрям співпадає з напрямом відповідно векторів $\Delta \vec{\omega}$ і $d\vec{\omega}$ — зміни кутової швидкості. У випадку, коли напрям кутової швидкості не змінюється з часом у просторі, а за модулем вона зростає, кутове прискорення $\beta > 0$ і направлене в ту ж саму сторону, що і кутова швидкість (рис. 14 а). Якщо кутова швидкість зменшується з часом, то $\beta < 0$, і направлене в сторону, протилежну кутовій швидкості (рис. 14 б).

Кутове прискорення вимірюється в $\left[\frac{\text{радіан}}{\text{с}^2} \right] = \left[\frac{1}{\text{с}^2} \right]$ або $\left[\frac{\text{град}}{\text{с}^2} \right]$. Зв'язок кутового прискорення з тангенціальним при русі точки по колу можна знайти, враховуючи, що в

рівнянні (1.39) елементарна зміна лінійної швидкості може бути зумовлена елементарною зміною кутової швидкості, тобто

$$dv = d\omega \cdot r. \quad (1.42)$$

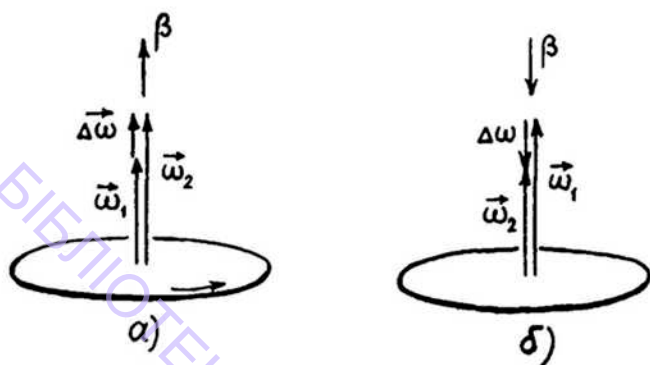


Рис. 14

Розділивши ліву і праву частини на dt і враховуючи (1.23) та (1.41), отримаємо

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d\omega}{dt} \cdot r, \text{ або } a_t = \beta \cdot r \quad (1.43)$$

Аналогічно із рівняння (1.38) можна отримати векторний зв'язок між $\vec{a}_t$ і $\vec{\beta}$:

$$\vec{a}_t = [\vec{\beta} \times \vec{r}]. \quad (1.44)$$

Модуль повного лінійного прискорення, який, згідно (1.27), дорівнює $a = |\vec{a}| = \sqrt{a_n^2 + a_t^2}$, з урахуванням формул (1.26), (1.39) і (1.43) можна представити через кінематичні величини обертального руху наступним чином:

$$a = r\sqrt{\omega^4 + \beta^2}. \quad (1.45)$$

При русі матеріальної точки по будь-якій криволінійній траєкторії введені вище поняття для миттєвих значень зберіга-

ються, але в кожній точці повинен бути відомий радіус кривини траєкторії, і тоді радіус кола замінюється в цих формулах на радіус кривини траєкторії.

При рівнозмінному русі точки по колу $\beta = \text{const}$, тангенціальне прискорення також $a_t = \text{const}$, тому лінійну швидкість і пройдений шлях знаходять за формулами (1.28) і (1.30), в яких $a = a_t$. Для визначення залежності кутової швидкості від часу скористаємось визначенням кутового прискорення. Із формули (1.41) знайдемо $d\omega = \beta dt$. Інтегруючи ліву і праву частини у відповідних границях, маємо

$$\int_{\omega_0}^{\omega} d\omega = \beta \int_0^t dt, \text{ звідки } \omega - \omega_0 = \beta t, \text{ або } \omega = \omega_0 + \beta t. \quad (1.46)$$

Тут ω_0 — початкова кутова швидкість, ω — кінцева, в момент часу t .

Для визначення залежності кута повороту від часу скористаємось формулою (1.35). Із неї знаходимо $d\varphi = \omega dt$, де $\omega = \omega_0 + \beta t$. Підставляючи значення для швидкості і інтегруючи ліву і праву частину у відповідних границях, маємо:

$$\int_0^{\varphi} d\varphi = \int_0^t \omega dt = \int_0^t (\omega_0 + \beta t) dt = \int_0^t \omega_0 dt + \beta \int_0^t t dt. \quad (1.47)$$

Звідки

$$\varphi = \omega_0 t + \frac{\beta t^2}{2}. \quad (1.48)$$

Порівнюючи формули (1.28) і (1.30) для поступального руху з формулами (1.46) і (1.48) для обертального руху, бачимо їх схожість.

1.6. ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ В КІНЕМАТИЦІ

Задачі в кінематиці бувають двох типів: пряма і зворотна.

Якщо відоме кінематичне рівняння при поступальному русі $r(t)$ або ж при обертальному $\varphi(t)$, а потрібно знайти швидкість

чи прискорення, то це пряма задача, і розв'язати її можна за допомогою операції диференціювання.

Якщо, навпаки, відоме прискорення лінійне $a(t)$ чи кутове $\beta(t)$, а потрібно знайти рівняння швидкостей $v(t)$ чи $\omega(t)$, або ж необхідно знайти рівняння руху $r(t)$ чи $\varphi(t)$, то це буде зворотна задача. Її розв'язують за допомогою операції інтегрування.

Слід зауважити, якщо пряму задачу можна розв'язати повністю і однозначно, то для однозначного рішення зворотної задачі необхідно знати початкові умови, тобто деякі додаткові відомості про кінематичні величини, наприклад, початкову швидкість, початкові координати, початковий кут повороту.

Розглянемо декілька прикладів прямої та зворотної задачі.

1. Радіус-вектор $\vec{r}$, положення точки M , що рухається по площині відносно нерухомої точки O , змінюється з часом за законом $\vec{r} = \vec{A}\sin\omega t + \vec{B}\cos\omega t$, де вектори $\vec{A}$ і $\vec{B}$ направлені відповідно вздовж осі X і Y . Знайти прискорення тіла і рівняння траєкторії.

Прискорення є друга похідна радіуса-вектора за часом (1.15), тому, диференціюючи радіус-вектор двічі за часом, отримаємо $\vec{a} = -\omega^2(\vec{A}\sin\omega t + \vec{B}\cos\omega t)$ або $\vec{a} = -\omega^2\vec{r}$. Рівняння траєкторії можна знайти, якщо спроектувати радіус-вектор на координатні осі, тоді

$$x = A\sin\omega t, \quad y = B\cos\omega t.$$

Виключивши із цих рівнянь ωt , за допомогою зведення лівих і правих частин рівнянь до квадрату, маємо:

$$\frac{x^2}{A^2} = \sin^2\omega t, \quad \frac{y^2}{B^2} = \cos^2\omega t.$$

Складаючи ліві і праві частини цих рівнянь, отримаємо $\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1$. Це є рівняння еліпса, де A і B — його напівосі, рис. 15.

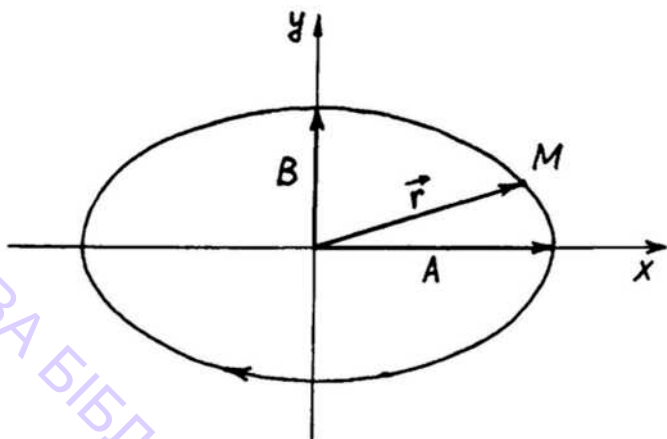


Рис. 15

Коли $t = 0$, $\vec{r} = \vec{B}$. При $t = \frac{\pi}{2\omega}$, $\vec{r} = \vec{A}$. Збільшуючи t до $\frac{\pi}{\omega}$, отримаємо $\vec{r} = -\vec{B}$. Таким чином, рух тіла буде по еліпсу і за годинниковою стрілкою. Це приклад розв'язання прямої задачі.

2. Тіло рухається на площині так, що тангенціальне прискорення $a_t = a_0$, а нормальне прискорення $a_n = bt^4$, де a_0 і b додатні і сталі величини. В момент $t = 0$ швидкість тіла $v_0 = 0$. Знайти шлях та радіус кривини траєкторії точки в залежності від часу.

В цій задачі маємо справу із скалярними величинами. Скориставшись (1.23) для модуля швидкості, знаходимо $dv = a_t dt$. Проінтегруємо останнє рівняння в границях за часом від 0 до

t , а за швидкістю від 0 до v : $\int_0^v dv = \int_0^t a_t dt$, звідки $v = a_0 t$. З вра-

хуванням умови задачі $a_t = a_0$, маємо $v = a_0 t$. Пройдений шлях знайдемо, якщо останнє рівняння проінтегруємо ще раз, скориставшись (1.11): $dS = v dt$, $\int_0^S dS = \int_0^t v dt$. Підставляючи замість

v отримане вище значення, знаходимо:

$$\int_0^S dS = \int_0^t a_0 t dt, \text{ звідки } S = \frac{a_0 t^2}{2}.$$

Радіус кривини траєкторії із (1.26) дорівнює $R = \frac{v^2}{a_n}$. Оскільки за умовою задачі $a_n = bt^4$, а знайдене значення швидкості $v = a_0 t$, радіус кривини дорівнює $R = \frac{a_0^2 t^2}{bt^4} = \frac{a_0^2}{bt^2}$. Це приклад розв'язування зворотної задачі.

3. Точка обертається по колу з кутовим прискоренням $\beta = \beta_0 \cos \varphi$, де φ — кут повороту від початкового положення, а β_0 — стала величина. Знайти кутову швидкість в залежності від кута φ , якщо при $\varphi = 0$ вона дорівнювала нулю.

Із (1.41) знаходимо $d\omega = \beta dt$. Підставляючи з умови задачі $\beta = \beta_0 \cos \varphi$, маємо $d\omega = \beta_0 \cos \varphi dt$. Із (1.35) можна знайти $dt = \frac{d\varphi}{\omega}$, і, підставляючи замість dt його значення у вираз для $d\omega$, отримуємо

$$d\omega = \frac{\beta_0 \cos \varphi d\varphi}{\omega}, \text{ або } \omega d\omega = \beta_0 \cos \varphi d\varphi.$$

Проінтегрувавши в останній формулі ліву частину по кутовій швидкості від 0 до ω , а праву — по куту від 0 до φ , отримуємо

$$\int_0^{\omega} \omega d\omega = \int_0^{\varphi} \beta_0 \cos \varphi d\varphi; \quad \frac{\omega^2}{2} = \beta_0 \sin \varphi.$$

$$\text{Звідки } \omega = \sqrt{2\beta_0 \sin \varphi}.$$

Це приклад розв'язування зворотної задачі при обертальному русі.

КОНТРОЛЬНІ ПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ

1. Що потрібно знати, щоб описати механічний рух?
2. Які системи координат ви знаєте?
3. Дайте визначення матеріальної точки та наведіть декілька прикладів її застосування в біології.
4. Як знайти суму та різницю двох векторів? Наведіть приклади.

5. Чому дорівнює скалярний та векторний добуток двох векторів?
6. Що таке кінематичне рівняння руху?
7. Дайте визначення таким кінематичним поняттям, як траєкторія, переміщення, шлях. Чим відрізняється шлях від переміщення? Наведіть приклад.
8. Що таке середня, середня шляхова та миттєва швидкості?
9. Який рух називають рівномірним прямолінійним?
10. Побудуйте графік залежності швидкості від часу при прямолінійному рівномірному русі. Чому дорівнює шлях на цьому графіку?
11. Що таке середнє та миттєве прискорення?
12. Запишіть формули для швидкості та шляху при рівноприскореному русі.
13. Побудуйте графік залежності швидкості від часу при рівноприскореному русі. Чому дорівнює шлях на цьому графіку?
14. Які прискорення має тіло при криволінійному русі? Внаслідок чого вони виникають?
15. Чому дорівнюють прискорення при криволінійному русі і як вони направлені?
16. Чому дорівнює повне прискорення при криволінійному русі? Як воно направлено у випадку прискореного і сповільненого рухів?
17. Що таке кінематичне рівняння обертального руху?
18. Чому дорівнює елементарне кутове переміщення і як воно направлене?
19. Що таке середня і миттєва кутові швидкості?
20. Запишіть формулу зв'язку між лінійною і кутовою швидкостями.
21. Що таке середнє і миттєве кутове прискорення?
22. Запишіть формулу зв'язку між тангенціальним і кутовим прискореннями.
23. Запишіть формули залежності кутової швидкості і кута повороту від часу при рівнозмінному русі по колу.

Розділ 2

ДИНАМІКА

2.1. ЗАГАЛЬНІ ПОНЯТТЯ ПРО ДИНАМІКУ

Динаміка, на відміну від кінематики, яка тільки описує рух і не відповідає на питання, чому тіло рухається так, а не інакше, розглядає причини, які призводять або змінюють цей рух.

Вивчення законів динаміки ми починаємо з найпростішого тіла — матеріальної точки. Всі інші випадки руху тіл, де розмірами та формою не можна знехтувати, можливо розглядати як рух сукупності матеріальних точок.

Динаміка вивчає рух тіл як результат взаємодії між ними. В основі динаміки лежать закони Ньютона. Ці закони сформульовані внаслідок узагальнення великої кількості спостережень і дослідів. Ньютон зумів серед окремих видів механізмів рухів побачити те загальне, що властиве всім видам руху, і сформулювати його у вигляді трьох фундаментальних законів. В результаті механіка отримала потужний метод розв'язання задач про механічний рух. із законів Ньютона було отримано цілий ряд наслідків, які самі по собі є також загальними законами природи. Ця механіка отримала назву класична, або Ньютонівська механіка. Наприкінці XIX століття вона в основному була завершена. Закони Ньютона лягли в основу всіх технічних, інженерних, наукових та інших розрахунків та розробок. Класична механіка виникла і розвивалась як механіка руху макроскопічних тіл, які рухались з невеликими швидкостями порівняно із швидкістю світла.

Але на початку XX століття з'явилися нові дослідні факти, які ньютонівська механіка не могла пояснити. Ці факти отримали своє пояснення в рамках нових теорій — теорії відносності та квантової механіки. В спеціальній теорії відносності, а трохи пізніше в загальній теорії відносності, створених А. Ейн-

штейном, підпало корінній зміні ньютонівське бачення таких категорій, як простір і час. Цей перегляд привів до створення нової релятивістської механіки для тіл, які рухаються з великими швидкостями. Однак, класична механіка не була відкинута, а навпаки, увійшла в релятивістську як окремий випадок і зберегла своє попереднє значення. Для опису руху тіл з малими масами — елементарних частинок, атомів, тобто частинок мікросвіту, де класична механіка не в змозі була пояснити всі дослідні факти — була створена в першій половині XX століття Гейзенбергом та іншими вченими квантова механіка. Рівняння квантової механіки для тіл з великими масами порівняно з масами атомів, переходили в рівняння механіки Ньютона.

Таким чином, розвиток науки показав, що механіка Ньютона має обмежене застосування. Проте, вся практична діяльність людини, при якій виконується механічний рух, опирається на класичну, ньютонівську механіку, тому її значення ніколи не буде вичерпаним.

2.2. ПЕРШИЙ ЗАКОН НЬЮТОНА

Спостереження та досліди показують, що зміна механічного руху тіла відбувається як результат взаємодії його з іншими тілами. Дійсно, якщо на тіло, що лежить на поверхні Землі і знаходиться в стані спокою, якимось чином подіяти, тобто підняти, чи штовхнути, то воно виходить з цього стану. Якщо на металеву кульку, що рухається по гладкій поверхні льоду прямолінійно і рівномірно, подіяти магнітом, або ж якимось іншим чином, то вона може змінити як напрямок, так і величину швидкості. Можна привести безліч дослідів і спостережень, які будуть свідчити про те, що зміна швидкості тіла, тобто отримання ним прискорення, буде результатом взаємодії цього тіла з навколишньою матерією, чи то з об'єктом, чи з полем.

Зміна стану руху тіла як результат взаємодії з іншими тілами не була з початку очевидною. Наприклад, Аристотель говорив таке: «без взаємодії немає руху». Іншими словами, для підтри-

мання руху потрібна взаємодія. Щоб візок рухався прямолінійно і рівномірно, його потрібно штовхати. Тобто наявність у тіла швидкості зв'язувалась із взаємодією. Уявлення Аристотеля були спростовані Галілеєм, який вперше науково дав вірне тлумачення повсякденним спостереженням та дослідам. Вивчаючи скачування гладенької кульки з похилої площини, Галілей міркував так: при русі кульки вниз її рух буде рівноприскорений. При русі вгору вона буде рухатись рівносповільнено. Якщо кулька буде скочуватись на горизонтальну площину і далі буде рухатись без тертя (без взаємодії) по ній, то рух повинен бути без зміни швидкості, тобто рівномірним і прямолінійним. Так само можна сказати про візок та інші тіла. Якщо зменшують взаємодію (тертя) на тіла, вони будуть рухатись рівномірно і прямолінійно, або ж знаходитись в стані спокою.

Але таке тлумачення буде вірним не у всіх системах відліку. Наприклад, тіло, що лежить на пероні, відносно потягу, який стоїть на місці, також буде знаходитись в стані спокою. Якщо потяг буде рухатись рівномірно і прямолінійно, то тіло відносно нього буде рухатись рівномірно і прямолінійно, але в протилежному напрямку. Якщо ж потяг відносно перону буде рухатись з прискоренням, то тіло відносно нього буде рухатись в протилежну сторону з таким самим прискоренням. Тобто на тіло ніщо не діє, немає ніякої взаємодії з боку інших тіл, а відносно потягу воно буде в цьому випадку рухатись з прискоренням.

Заслуга Ньютона полягає в тому, що після Галілея він вперше звернув увагу на те, що в природі дійсно існують такі системи, в яких в разі відсутності взаємодії тіла будуть рухатись рівномірно і прямолінійно. Такі системи називаються *інерціальними*.

Це твердження отримало назву першого закону Ньютона, який інколи називають законом інерції.

В сучасному формулюванні перший закон Ньютона має такий вигляд: існують такі системи відліку, в яких тіла зберігають стан спокою, або рівномірного прямолінійного руху, до тих пір, поки взаємодія із сторони інших тіл не змусить їх змінити цей стан.

Більш строгішим буде формулювання першого закону, в якому замість терміна «тіло» буде використовуватись термін «матеріальна точка».

Системи, в яких перший закон Ньютона не виконується, називають *неінерціальними*. На прикладі з потягом, що рухається з прискоренням відносно перону, система відліку, зв'язана з ним, не буде інерціальною. Як буде показано пізніше, всі системи, які рухаються відносно інерціальних рівномірно і прямолінійно, будуть також інерціальними, а системи, які відносно інерціальних рухаються з прискоренням, будуть неінерціальними.

Встановити, чи є система інерціальною, чи ні, можливо тільки дослідним шляхом. Досліди показують, що з великою точністю систему відліку, зв'язану з Землею, при вивченні явищ, які відбуваються на поверхні Землі, можна вважати інерціальною. Але, знову ж таки, як буде показано пізніше, цілий ряд явищ доказують, що вона не є інерціальною. З більшою мірою точності інерціальною для земних явищ буде геліоцентрична система, в якій початок координат суміщають з центром Сонця, а координатні осі направляють на три нерухомі зірки. Але якщо явища відбуваються в Галактиці, то геліоцентрична система також не буде інерціальною.

2.3. ДРУГИЙ ЗАКОН НЬЮТОНА

Згідно з першим законом Ньютона, якщо на тіло діє інше тіло, то стан його руху змінюється, тобто змінюється його швидкість, з'являється прискорення. Поява прискорення тіл в інерціальних системах визначається взаємодією тіл одного на інше. Кількісною мірою такої взаємодії є фізична величина, яка називається *силою*. Взаємодія тіл може проявлятися двояко: динамічно, коли тіло під впливом сили змінює свою швидкість, тобто отримує прискорення, а також статично — коли тіло під впливом іншого може міняти свою форму та розміри, тобто деформуватись. Сила характеризується точкою прикладання,

напрямок і абсолютною величиною, або модулем. Вона позначається літерою $\vec{F}$.

Сила може бути оцінена як результат дії одного тіла на інше: по отриманому прискоренню або по деформації. Отже, для вимірювання сили можна скористуватись двома засобами: вимірюючи прискорення, або ж по деформації сталонного тіла. На практиці для вимірювання сил зручніше використовувати деформацію тіл. Пристрої, в яких по величині деформації визначають силу, називаються динамометрами. Основним елементом динамометрів є стандартна пружина, яка під дією прикладеної сили деформується. В границях малих деформацій сила пропорційна величині деформації.

Дослід показує, якщо взяти декілька різних тіл і діяти на них однією і тією ж силою, то будемо спостерігати, що прискорення в цих тілах, яке вони отримують від взаємодії, різне. Тобто різні тіла до однієї і тієї ж взаємодії по-різному можуть бути чутливими. Інакше кажучи, кожне тіло має властивість по-різному відкликатися на зовнішню дію. Ця властивість тіла впливати на величину власного прискорення називається інертністю тіла. Мірою інертності тіл є фізична величина, що називається *масою*. Позначається вона літерою m .

Досліди показують, що тіла, які мають велику інертність, тобто велику масу, під впливом зовнішньої взаємодії отримують мале прискорення. Під впливом тієї ж самої взаємодії тіла з меншою масою отримують більше прискорення. При одній і тій же взаємодії маси m_1 і m_2 двох тіл обернено пропорційні прискоренням a_1 і a_2 , які вони отримують, тобто

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{a_2}{a_1}. \quad (2.1)$$

Якщо взяти масу одного тіла за еталон, то за допомогою співвідношення (2.1) можна визначити масу будь-якого іншого тіла. Оскільки маса характеризує чутливість тіла на взаємодію і не зв'язана з напрямком руху, то вона є скалярною величиною. В ньютонівській механіці маса не залежить від швидкості тіла. Взагалі кажучи, маса є не лише мірою інертності тіла. З по-

няттям маси зв'язані також інші фундаментальні властивості матерії, які трохи пізніше ми розглянемо. Вимірюється маса в системі СІ в кілограмах, в системі СГС — в грамах.

Численні досліди і повсякденні спостереження показують, що, коли до тіла прикладена сила, то воно отримує прискорення, яке прямо пропорційне силі і має такий самий напрямок $\vec{a} \sim \vec{F}$. Якщо до тіла одночасно прикладені декілька сил, то прискорення буде пропорційне сумі цих сил.

$$\vec{a} \sim \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i. \quad (2.2)$$

Враховуючи, що прискорення обернено пропорційне його масі $a \sim \frac{1}{m}$ і прямо пропорційне силі $\vec{a} \sim \vec{F}$, можна записати:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}, \text{ або для декількох сил } \vec{a} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n \vec{F}_i. \quad (2.3)$$

Це співвідношення є другим законом Ньютона.

Прискорення, що отримує тіло під дією сили, направлено так само як і сила, прямо пропорційне силі і обернено пропорційне масі тіла.

Вираз (2.3) називають також *динамічним рівнянням руху*. Воно дає відповідь, як і чому буде рухатись тіло. При цьому припускається, що сили, які будуть діяти на тіло, відомі.

Користуючись другим законом Ньютона, можна встановити одиницю виміру сили. Із (2.3) отримаємо $F = ma$. Якщо на тіло масою в 1 кілограм діє сила і воно дістає під дією цієї сили прискорення 1 м/с^2 , то ця сила в системі СІ дорівнює 1 ньютону. $1 \text{ Н} = 1 \text{ кг} \cdot 1 \text{ м/с}^2$. В системі СГС одиницею виміру сили є 1 дина. $1 \text{ дина} = 1 \text{ г} \cdot 1 \text{ см/с}^2$. Співвідношення між ними таке:

$$1 \text{ Н} = 1 \frac{\text{кгм}}{\text{с}^2} = 1 \cdot 10^5 \frac{\text{гсм}}{\text{с}^2} = 10^5 \text{ дин.}$$

Другому закону Ньютона можна дати більш загальне визначення. Із виразу (2.3) можна знайти прискорення, швидкість, координати в даний момент часу, якщо відомі маса і сила, що діють на тіло. Якщо ж необхідно визначити прискорення,

швидкість чи інші характеристики руху для будь-якого наперед заданого моменту часу чи то в майбутньому, чи в минулому, то для таких розрахунків користуються законом зміни імпульсу тіла, який є дещо іншим виразом другого закону Ньютона.

Для цього виконаємо деякі перетворення з рівнянням (2.3). У випадку дії на тіло однієї сили другий закон Ньютона можна записати так:

$$\vec{F} = m\vec{a} = m \frac{d\vec{v}}{dt}. \quad (2.4)$$

Якщо маса $m = \text{const}$, то її можна внести під знак похідної, тоді

$$\vec{F} = \frac{d(m\vec{v})}{dt}. \quad (2.5)$$

Фізичну величину $m\vec{v} = \vec{p}$ називають *імпульсом тіла*. З врахуванням цього другий закон Ньютона в диференціальній формі буде мати такий вигляд:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}, \text{ або для декількох сил } \frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i. \quad (2.6)$$

Якщо на тіло діє сила або декілька сил, то вони призводять до зміни імпульсу тіла, і при цьому швидкість зміни імпульсу тіла направлена так само, як і сила, і дорівнює цій силі.

Формула (2.6) є найбільш загальною для другого закону Ньютона. При виведенні цієї формули ми вважали, що маса є сталою величиною. Але в такій же самій формі можна записати другий закон Ньютона і в тому випадку, коли маса в процесі руху може змінюватись, чи то збільшуватись, чи то зменшуватись. Наприклад, при розрахунках руху ракети маса її весь час зменшується внаслідок викидання газів. Другий закон Ньютона в формі (2.6) справедливий також для розрахунків руху тіл з швидкостями, близькими до швидкості світла, тобто в релятивістській механіці, чого не можна сказати про формулу (2.3).

Із рівняння (2.5) можна отримати наступне:

$$\vec{F} dt = d(m\vec{v}) = d\vec{p}. \quad (2.7)$$

Величину $\overline{F}dt$ називають у фізиці *імпульсом сили*. З врахуванням цього визначення другий закон Ньютона можна сформулювати ще так: *імпульс сили, що діє на тіло протягом малого проміжку часу, дорівнює зміні імпульсу тіла за цей самий проміжок часу*.

Якщо ж мова йде не про елементарний проміжок часу, а про якийсь певний Δt , коли час змінюється від t_1 до t_2 , то вираз (2.7) слід проінтегрувати у відповідних границях

$$\int_{t_1}^{t_2} \overline{F} dt = \int_{p_1}^{p_2} d\overline{p},$$

або для декількох сил

$$\Delta \overline{p} = \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_{i=1}^n \overline{F}_i \right) dt. \quad (2.8)$$

Зробимо декілька зауважень щодо другого закону Ньютона

1. Якщо на тіло не діє сила $\overline{F} = 0$, то $\overline{a} = 0$, $\overline{v} = \text{const}$. В разі відсутності взаємодії тіло знаходиться в стані спокою або рівномірного прямолінійного руху. Це є наслідок другого закону Ньютона. Але це твердження входить і в перший закон Ньютона. То чому його називають фундаментальним законом, а не наслідком другого закону? Справа в тому, що перший закон Ньютона стверджує наявність в природі інерціальних систем.

2. Другий закон Ньютона, строго кажучи, справедливий для матеріальної точки.

3. Якщо рухається не одне тіло, а система тіл, то другий закон Ньютона слід застосовувати до кожного тіла окремо, причому необхідно враховувати всі сили, які до кожного з них прикладені.

4. Згідно з другим законом Ньютона швидкість тіла визначається не силами, які діють на тіло в даний момент часу, а залежить від попереднього руху тіла. Силою визначається лише прискорення.

5. Векторне рівняння другого закону Ньютона еквівалентне трьом скалярним рівнянням в проекціях на координатні осі, а саме:

$$ma_x = \sum_{i=1}^n F_{ix}; \quad ma_y = \sum_{i=1}^n F_{iy}; \quad ma_z = \sum_{i=1}^n F_{iz}. \quad (2.9)$$

6. Коли сили, що діють на матеріальну точку, відомі, із рівнянь (2.9) можна знайти проекції прискорень на координатні осі. По знайденим проекціям прискорень, початковому положенню і початковій швидкості точки можна знайти всі кінематичні характеристики руху, тобто повністю визначити цей рух.

2.4. ТРЕТІЙ ЗАКОН НЬЮТОНА

В другому законі Ньютона розглядається дія сили на тіло, внаслідок чого тіло отримує прискорення. Третій закон Ньютона звертає увагу на саму взаємодію. Він відображає той факт, що сила є наслідком взаємодії двох тіл. Якщо на якесь тіло діє сила зі сторони іншого тіла, то одночасно зі сторони першого тіла на друге обов'язково буде діяти така ж сама сила. Тобто якщо є «дія» на тіло, то зі сторони цього тіла на друге тіло буде «протидія». Між тілами завжди існує взаємодія.

Це і є суть третього закону Ньютона. Його можна сформулювати так: *сили, з якими дві матеріальні точки діють одна на одну, завжди рівні між собою за числовим значенням, направлені в протилежні сторони вздовж прямої, яка з'єднує ці точки.*

Математичний запис третього закону Ньютона має вигляд:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}, \quad (2.10)$$

тут F_{12} — сила, що діє на перше тіло з боку другого, F_{21} — сила, що діє на друге тіло з боку першого.

Інколи в самому короткому визначенні третій закон формулюють так: «дія дорівнює протидії». Різниця між термінами «дія» і «протидія» носить суб'єктивний характер, кожну з них можна вважати і тим, і іншим. Це залежить від точки зору. По своїй природі «дія» і «протидія» не відрізняються.

Слід пам'ятати, що в третьому законі Ньютона мова йде про сили, прикладені до різних тіл. Тому говорити, що ці сили зрів-

новажують одна одну не слід. Результат дії сил при взаємодії залежить від маси кожного із взаємодіючих тіл. Користуючись другим законом Ньютона, за допомогою рівняння (2.10) отримаємо:

$$m_1 \vec{a}_1 = -m_2 \vec{a}_2. \quad (2.11)$$

Звідси легко отримати розглянуту раніше експериментальну рівність (2.1), якою ми користувались при визначенні маси як міри інертності.

Слід також відмітити, що третій закон Ньютона в формулі (2.10) виконується не завжди. Він виконується в тих випадках, коли взаємодія між тілами відбувається миттєво без посередника. Якщо ж взаємодія відбувається за допомогою якогось фізичного поля (наприклад, взаємодія електричних рухомих зарядів за допомогою електромагнітного поля, зміна якого розповсюджується із швидкістю світла), то сили, що діють на взаємодіючі тіла, можуть бути не рівними як за величиною, так і за напрямком.

Третій закон Ньютона має більш глибокий зміст, ніж «дія дорівнює протидії». Розглянемо декілька взаємодіючих тіл, що утворюють систему. Сили, які діють попарно між тілами системи, називаються *внутрішніми*.

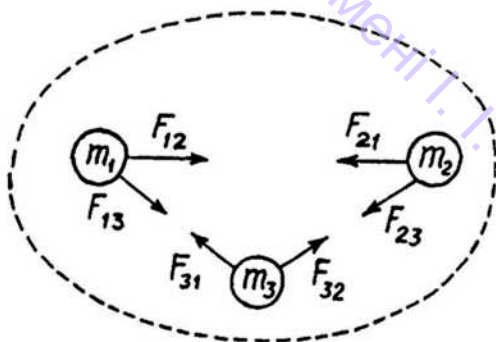


Рис. 16

Сили, що діють на систему з боку тіл, які не входять в систему, називаються *зовнішніми*. Якщо зовнішніх сил немає — сис-

тому тіл називають *замкнутою*. Розглянемо для прикладу замкнуту систему тіл (рис. 16), які взаємодіють між собою.

Згідно (2.6) швидкість зміни імпульсу кожного тіла дорівнює сумі сил, що діють на кожне тіло.

Запишемо це для кожного тіла окремо:

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{p}_1}{dt} &= \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13}; \\ \frac{d\vec{p}_2}{dt} &= \vec{F}_{21} + \vec{F}_{23}; \\ \frac{d\vec{p}_3}{dt} &= \vec{F}_{32} + \vec{F}_{31}.\end{aligned}\tag{2.12}$$

Додаючи ліві і праві частини і враховуючи, що $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$; $\vec{F}_{13} = -\vec{F}_{31}$; $\vec{F}_{23} = -\vec{F}_{32}$, дістаємо

$$\frac{d\vec{p}_1}{dt} + \frac{d\vec{p}_2}{dt} + \frac{d\vec{p}_3}{dt} = 0, \text{ або } \frac{d}{dt}(\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3) = 0.\tag{2.13}$$

Оскільки зміна імпульсу всієї системи дорівнює нулю, то це означає, що

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 = \text{const}, \text{ або } \sum \vec{p}_i = \text{const}.\tag{2.14}$$

Тобто в *замкнутій системі* векторна сума імпульсів усіх тіл є сталою величиною. Це є закон збереження імпульсу. Ми його вивели, користуючись третім законом Ньютона в формі «дія дорівнює протидії». Якщо повернутись до випадку взаємодії рухомих електричних зарядів, де «дія не дорівнює протидії» — закон збереження імпульсу в формі (2.14) все рівно буде виконуватись. Але при цьому в суму імпульсів тіл системи буде входити також і імпульс електромагнітного поля, тобто посередника, за допомогою якого відбувається взаємодія. Розрахунки показують, що одночасно із зміною суми імпульсів взаємодіючих рухомих зарядів змінюється на таку ж величину імпульс електромагнітного поля, утвореного цими зарядами.

Формулювання третього закону Ньютона у вигляді закону збереження сумарного імпульсу тіл і полів, які беруть участь

у взаємодії, є більш змістовним, ніж формулювання у вигляді «дія дорівнює протидії».

В повсякденному житті, при не дуже великих швидкостях тіл порівняно із швидкістю світла, вклад, що дає імпульс поля, дуже малий, і ним можна знехтувати. Тому класичні формулювання другого і третього законів Ньютона з великою мірою точності можна використовувати для різних розрахунків.

2.5. ВИДИ СИЛ ТА ЇХ ВЛАСТИВОСТІ

Сила є мірою взаємодії тіл. До цього часу ми не цікавились їх походженням. Відомості про сили черпають із дослідів або за допомогою теоретичних розрахунків на основі уявлень про будову речовини. Оскільки сила характеризує взаємодію тіл, коротко зупинимось на видах взаємодій. Відомо, що в природі існує чотири типи взаємодії. Це гравітаційні, електромагнітні, ядерні (або сильні) і слабкі взаємодії. Всі ці взаємодії різні за властивостями, величиною, залежністю від відстані. В механіці розглядають сили, зумовлені гравітаційними та електромагнітними взаємодіями. До них відносяться сили гравітації, сили пружності і сили тертя. Всі інші види сил, які виникають в механічних процесах, можна звести до цих трьох видів сил.

а) Гравітаційні сили.

Ньютон, користуючись трьома експериментальними законами руху планет, отриманими Кеплером на початку XVII століття, а також положенням Галілея про те, що всі тіла притягуються до Землі з одним і тим самим прискоренням, незалежно від їх маси, відкрив закон всесвітнього тяжіння. Згідно з цим законом *дві матеріальні точки притягуються одна до одної з силою, що прямо пропорційна добутку їхніх мас і обернено пропорційна квадрату відстані між ними:*

$$F = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}, \quad (2.15)$$

де γ — коефіцієнт пропорційності, який носить назву *гравітаційної сталої*.

Сила $\vec{F}$ направлена по лінії, що з'єднує матеріальні точки. У векторному вигляді формулу (2.15) можна записати так

$$\vec{F}_{21} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r_{12}^3} \vec{r}_{12}, \quad (2.16)$$

тут $\vec{r}_{12}$ — вектор, проведений від першого тіла до другого, напрямком сили $\vec{F}_{21}$ протилежний вектору $\vec{r}_{12}$, тобто по лінії, що з'єднує тіла, від другого до першого (рис. 17 а).

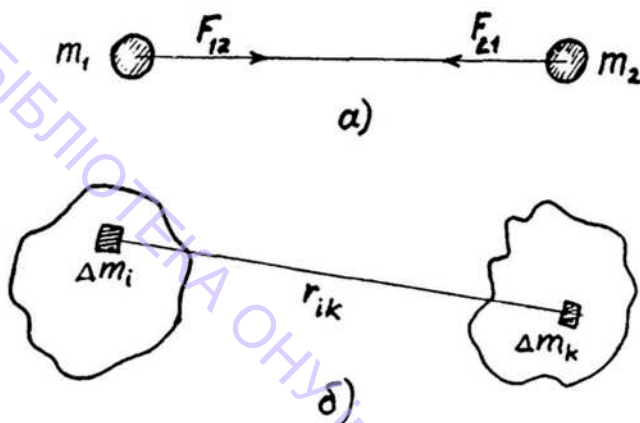


Рис. 17

Закон всесвітнього тяжіння в формі (2.15) або (2.16) справедливий для тіл, розмірами яких порівняно з відстанями між ними, в даних умовах можна знехтувати, тобто для матеріальних точок. Взагалі кажучи, сили взаємодії матеріальних точок, які залежать тільки від відстані між ними і діють вздовж лінії, що з'єднує ці точки, називаються *центральною*. Сили гравітації є прикладом центральної сили.

Якщо однорідні тіла мають сферичну форму, то незалежно від того, які їх розміри, формула (2.15) залишається справедливою, якщо відстань між ними буде відстанню між центрами цих тіл. В разі довільних тіл, тобто тіл різної форми та неоднорідних по густині, ці тіла слід розбити на елементарні частинки, масами Δm_i та Δm_k , які можна вважати за матеріальні точки

(рис. 17 б). Знайти окремо сили, що діють з боку всіх елементів першого тіла на один із елементів другого тіла, а потім їх снасти по правилу складання векторів. Можливість такої процедури носить назву *принцип суперпозиції гравітаційних сил*. Потім скласти сили, що діють з боку першого тіла на всі елементи другого тіла. Рівнодійна цих сил і буде силою гравітації, що діє на друге тіло з боку першого. По третьому закону Ньютона така ж сама сила буде діяти з боку другого на перше тіло.

Сили гравітації порівняно з силами електромагнітної природи значно менші, якщо розглядати взаємодію тіл однакової маси. Сили гравітації значно проявляють себе при взаємодії між тілами астрономічних розмірів та великих мас, наприклад, планет, зірок тощо.

Слід звернути увагу на те, що гравітаційні сили є найбільш універсальними силами в природі. Вони діють між будь-якими тілами, що мають масу, а масу мають всі тіла. Але яким чином, за допомогою чого відбувається ця взаємодія між двома тілами? Матеріальним посередником в даному випадку є *гравітаційне поле*. Гравітаційне поле — це особливий вид матерії. Його ми не можемо відчувати за допомогою наших органів. Воно існує незалежно від нас навколо будь-якого тіла, що має масу m_1 . Якщо в це поле помістимо друге тіло масою m_2 , то поле починає діяти на це тіло з силою (2.15).

З іншого боку, друге тіло, маючи масу, створює своє гравітаційне поле, яке, в свою чергу, діє на перше з такою ж силою. Це так звана *теорія близькодії*. Формально гравітаційне поле можна визначити як простір, в якому діють гравітаційні сили. Але при цьому ми повинні чітко уявляти, що поле матеріальне. Властивості поля значно відрізняються від властивостей тіл. Якщо тіло піддається дії якогось поля, то і саме воно здатне створювати таке ж поле. Але тут зупинятися на властивостях і засобах опису гравітаційного поля не будемо тому, що за своїми властивостями гравітаційне поле подібне електростатичному. А електростатичне поле детально буде розглянуто в частині II.

Величина гравітаційної сталої, що входить в закон всесвітнього тяжіння, була вперше визначена Кевендишем в дослі-

дах з крутильними терезами. Пізніше досліди по визначенню гравітаційної сталої багато разів повторювались, і тепер для неї приймають значення $\gamma = 6.6720 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{кг}^2}$. Як видно, чисельне значення її дуже мале, якщо користуватись звичайними в нашому житті масштабами (кілограми, метри, секунди). Тому сили гравітації між звичайними тілами дуже малі. Дві людини масами по 60 кг на відстані 1 м притягуються з силою $2,4 \cdot 10^{-7}$ Н. Це в 1000 разів менше за силу, з якою комар тягне соломинку. Тому в повсякденному житті сили гравітації себе не проявляють. Щоб сили гравітації були помітні, необхідно, щоб хоча б одне із взаємодіючих тіл мало велику масу. Тоді поле, яке воно створює, буде досить сильне, і сила гравітації буде відчутна. Так, Земля, маючи дуже велику масу $M_3 = 6 \cdot 10^{24}$ кг, притягує до себе тіло масою 1 кг, що знаходиться біля поверхні Землі, з силою 9,8 Н. Цей розрахунок можна легко провести, скористувавшись формулою (2.15), де $r = R_{\text{землі}} \approx 6,3 \cdot 10^6$ м. Силу, з якою всі тіла притягуються до Землі, називають *силою тяжіння*. Якщо ж тіло знаходиться на висоті h над поверхнею Землі, то силу тяжіння розраховують за формулою:

$$F = \gamma \frac{M_3 m}{(R_3 + h)^2}. \quad (2.17)$$

Скориставшись другим законом Ньютона і силою тяжіння, визначають прискорення вільного падіння тіл $a = g$, $F = mg$, де

$$F = \gamma \frac{M_3 m}{R_3^2}, \text{ звідси:}$$

$$g = \gamma \frac{M_3}{R_3^2}. \quad (2.18)$$

Оскільки γ , M_3 , R_3 — сталі величини, то поблизу поверхні Землі всі тіла падають з однаковим прискоренням $g = 9,8 \text{ м/с}^2$. З висотою, як видно із формули (2.17), прискорення зменшується. Оскільки земна куля трохи сплюснута, то радіуси, проведені із її центра до екватора і до полюса — різні, тому і прискорення вільного падіння на екваторі і на полюсі будуть різними.

На екваторі прискорення буде трохи менше. Але це не є головною причиною залежності прискорення вільного падіння від широти місцевості. З головною причиною, яка зумовлена обертанням Землі, ми познайомимось пізніше.

У верхніх шарах земної кулі маса розподілена нерівномірно (оскільки густина порід різна, тому і місцеве значення прискорення вільного падіння буде різним). Незважаючи на те, що зміни g з цієї причини складають сотні або навіть тисячні долі відсотка, сучасні прилади можуть це зафіксувати і знайти місця, де залягають легкі чи важкі породи. Це так звана гравітаційна геологічна розвідка.

На закінчення декілька слів про масу. Маса, яка входить в другий закон Ньютона, характеризує інертні властивості тіла. Її називають «інертною масою». Маса, що входить в закон всесвітнього тяжіння і створює гравітаційне поле, є мірою гравітації. Вона характеризує здатність тіл притягуватись одне до одного. Її називають «гравітаційною масою». У зв'язку з цим виникає питання: чи слід розрізняти «інертну» і «гравітаційну» маси. Відповідь на це питання може дати лише дослід. Всі проведені дослідження вказують на те, що «інертна» і «гравітаційна» маси всіх тіл пропорційні одна одній. Це означає, що при відповідному виборі одиниць вимірювань інертна і гравітаційна маси тотожні, тому в фізиці говорять просто про масу. Тотожність цих мас була покладена Ейнштейном в основу загальної теорії відносності.

б) Сили пружності.

Як було сказано раніше, сила може призводити не лише до появи прискорення, а і спричиняти деформацію тіла. Тобто зміщати частинки тіла (атоми чи молекули) одну відносно другої. При цьому між частинками виникають сили взаємодії, чи то притягання, чи відштовхування, які носять електромагнітну природу. Ці сили взаємодії між частинками призводять до появи сили зі сторони тіла, яка носить назву *сила пружності*.

В залежності від того, яку форму приймає тіло внаслідок зміщення частинок, існують різні види деформації: однобічне

розтягування і стиск, всебічні розтягування і стиск, згинання, зсування, кручення.

Визначити силу пружності можна дослідним шляхом. Досліди показують, що *сила пружності F , яка виникає при малих пружних деформаціях будь-якого виду, пропорційна деформації (зміщенню) x* . Цей дослідний факт носить назву закону Гука:

$$F = -kx, \quad (2.19)$$

де k — коефіцієнт пружності тіла. Знак мінус вказує на те, що зміщення і сила пружності мають протилежні напрямки.

Деформацію називають *пружною*, якщо після позбавлення сили, що призводить до деформації, сила пружності повністю відновлює форму і розміри тіла. Область, в якій виконується закон Гука, є областю пружної деформації. При значних зміщеннях виникає *залишкова деформація*. При цьому тіло не відновлює свою форму і розміри. А якщо зміщення буде досить значне, то може взагалі статися руйнування тіла.

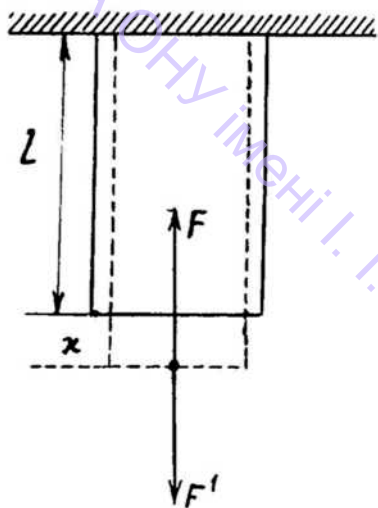


Рис. 18

Досліди з однобічним розтягуванням показують, що якщо до нижнього кінця закріпленого стрижня (рис. 18) довжиною

l і площею поперечного перерізу S прикласти деформуючу силу F' , то стрижень видовжується на x , в ньому виникає сила пружності $F = -F'$. При цьому зміщення прямо пропорційне деформуючій силі, початковій довжині стрижня і обернено пропорційне площі поперечного перерізу:

$$x = \frac{F'l}{ES} = -\frac{Fl}{ES}, \quad (2.20)$$

де E — коефіцієнт характеризує пружні властивості речовини стрижня і називається *модулем пружності*, або *модулем Юнга*.

Із формули (2.20) знаходимо силу пружності

$$F = -\frac{ESx}{l}. \quad (2.21)$$

Порівнюючи формули (2.19) і (2.21), отримаємо

$$k = \frac{ES}{l}. \quad (2.22)$$

Таким чином, коефіцієнт пружності при деформації однобічного розтягування чи стиску залежить від початкової довжини, площі поперечного перерізу і матеріалу стрижня. Якщо в формулі (2.21) прийняти $x = l$ і $S = 1$, то $E = -F'$, тобто модуль Юнга дорівнює відношенню сили, яка розтягує чи стискає стрижень в два рази до площі поперечного перерізу стрижня. Слід відмітити, що на практиці таким методом модуль Юнга не визначають, оскільки більшість тіл руйнуються при значно менших деформаціях.

Всі інші види деформації можна звести до відповідних комбінацій одностороннього розтягу чи стиску. Наприклад, деформацію згинання можна уявити як деформацію розтягу верхньої частини стрижня і стиску нижньої частини (рис. 19), середня частина не приймає участі в деформації. Ця обставина знаходить своє відображення в техніці, в природі.

Наприклад, круглі стрижні, які працюють на згинання, роблять порожнистими, тобто трубчастими. Тим самим досягається економія матеріалу і полегшення конструкцій при тій са-

мій міцності. З тієї ж причини стебла зернових рослин, кістки птахів мають трубчасту будову і пустотілі всередині.

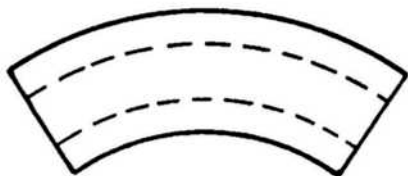


Рис. 19

Сили пружності знаходять широке застосування при вимірюванні сил. Найбільш простим і наочним прикладом деформованого тіла є пружина. Якщо її прокалібрувати, то за величиною видовження (зміщення) можна визначити силу. Такі пристрої, як було зазначено вище, називаються динамометрами.

Багато сил, що не є за своєю природою пружними, формально підпорядковуються закону Гука. Такі сили називаються *квазіпружними*. Характерні ознаки квазіпружності сили такі: її значення пропорційне зміщенню від положення рівноваги, і вона завжди направлена до положення рівноваги.

в) Сила тертя.

Якщо в механічних процесах внаслідок взаємодії між тілами відбувається перетворення механічного руху в тепловий, то таку взаємодію характеризують силами тертя. Сили тертя діють між тілами, які стикаються між собою, мають різний стан поверхні стикання і певну відносну швидкість одне відносно другого. Направлені сили тертя проти вектора відносної швидкості і вздовж поверхні стикання.

Сили тертя, як і сили пружності, мають електромагнітну природу. Вони зумовлені взаємодією між частинами (атомами чи молекулами) поверхонь взаємодіючих тіл. Поверхні реальних тіл не бувають ідеально гладкими. На них завжди є шорсткуватості. Тому при відносному рухові відчувається дотик не по всій площі поверхонь, що стикаються, а лише в окремих місцях, так званих виступах. При цьому атоми одних виступів

взаємодіють з атомами виступів іншої поверхні. Таким чином відбувається взаємодія. Сила тертя виникає як результат цієї взаємодії між поверхнями тіл, що стикаються.

Розрізняють два види сил тертя. Якщо сили тертя виникають між двома поверхнями твердих тіл, то їх називають *силами сухого тертя*. Якщо сили тертя виникають між поверхнею твердого тіла і рідиною чи газом, що стискається і рухається вздовж поверхні, їх називають *силами рідкого тертя*. Сухе тертя, в свою чергу, підрозділяють на два види: тертя ковзання і тертя кочення.

Розглянемо сухе тертя. Покладемо на стіл дерев'яний брусок, прив'яжемо до нього нитку, яку перекинемо через блок, встановлений на краю стола. До вільного кінця нитки прив'яжемо легку чашку, в яку будемо накладати тягарці (рис. 20). Під дією тягарців нитка натягнеться, але поки сила натягу буде малою, брусок залишиться нерухомим, незважаючи на те, що на нього в горизонтальному напрямку діє сила натягу нитки F_n . Нерухомість бруска можна пояснити тим, що зі сторони стола на нього діє сила тертя $F_{\text{тр}}$ вздовж поверхні стикання, рівна за величиною і протилежна за напрямком силі F_n . Цю силу називають *силою тертя спокою*. Додаючи тягарці, ми побачимо, що при певному значенні сили натягу нитки $F_n = F_{\text{тр}} = F_{\text{max}}$ брусок почне рухатись. Коли зовнішня сила досягає граничного значення сили тертя спокою, виникає ковзання тіл. Якщо покласти брусок на стіл другою гранню (з іншою площею) і повторити дослід, то можна впевнитись, що значення F_{max} не змінюється, тобто не залежить від площі стикання. Але якщо змінити силу нормального тиску $\vec{N}$, яка за модулем дорівнює силі реакції опори $|-N'| = |N|$, поклавши, наприклад, на брусок додатковий тягарець, то побачимо, що чим більша сила нормального тиску, тим більша сила тертя. Вперше це було сформульовано французьким фізиком Амонтоном (1699 рік) і незалежно від нього Кулоном (1781 рік). Вони показали, що *величина сили сухого тертя ковзання пропорційна силі нормального тиску*:

$$F_{\text{тр}} = \mu N, \quad (2.23)$$

де N — сила нормального тиску, μ — коефіцієнт тертя, точніше коефіцієнт максимальної сили тертя спокою. Він залежить від властивостей поверхонь, між якими відбувається тертя, від речовин, з яких виготовлені тіла, від шорсткуватості поверхонь, від наявності різного роду забруднень на них.

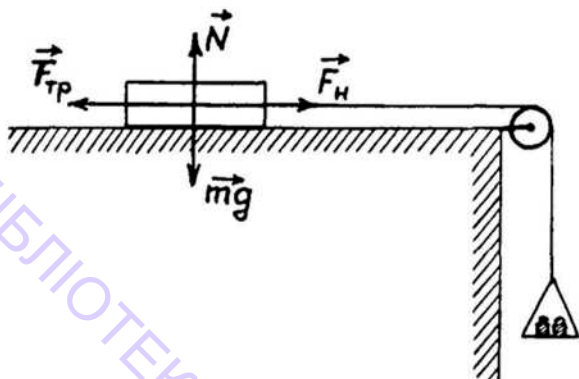


Рис. 20

В зображеному на рис. 20 прикладі брусок, що лежить на столі, почне рухатись, коли сила тертя $F_{mp} = \mu mg$, оскільки сила нормального тиску дорівнює силі тяжіння. Якщо ж брусок буде рухатись по похилій площині (рис. 21), то сила тертя буде дорівнювати $F_{mp} = \mu mg \cos \alpha$, оскільки $N = mg \cos \alpha$.

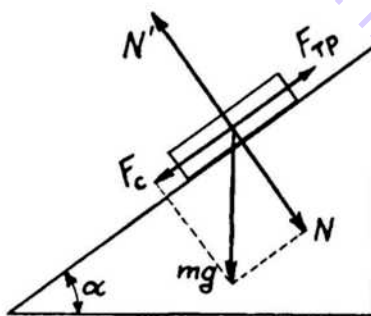


Рис. 21

Експериментально вимірюючи граничний кут, при якому брусок починає ковзати з постійною швидкістю по похилій площині, можна знайти коефіцієнт тертя. При цьому складова сили тяжіння F_c врівноважується силою тертя $F_{\text{тр}}$, тобто $mg \sin \alpha_{\text{гп}} = \mu mg \cos \alpha_{\text{гп}}$, звідки отримуємо $\mu = \tan \alpha_{\text{гп}}$. Коефіцієнт тертя чисельно дорівнює тангенсу граничного кута, при якому починається ковзання зі сталою швидкістю вниз по похилій площині. Саме таким чином, по тангенсу граничного кута, на практиці знаходять коефіцієнт тертя.

Якщо сила, яка діє на тіло, більше від граничного значення сили тертя спокою, то тіло набуває прискорення, а сила тертя спокою переходить в силу тертя ковзання, яка в подальшому при невеликих швидкостях трохи зменшується, а потім починає збільшуватись (рис. 22а). Всім відомо, що зрушити з місця важке тіло інколи буває досить важко. Але рухати його після того, як воно набуло певної невеликої швидкості, помітно легше. Якщо відносна швидкість руху тіл не дуже велика, то при грубих розрахунках можна вважати силу тертя незалежною від швидкості (рис. 22 б).

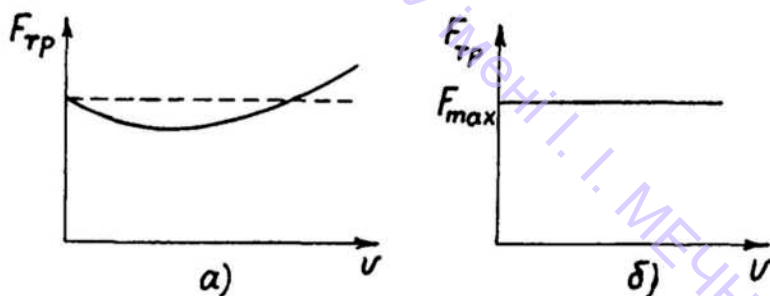


Рис. 22

У випадках, коли сили тертя ковзання необхідно зменшити, їх замінюють на сили тертя кочення. Тертя кочення виникає, наприклад, при коченні циліндра по похилій площині. Якщо воно відбувається без ковзання, то точки дотику циліндра і похилої площини не ковзають одна відносно

другої вздовж поверхонь дотику. Між ними діють сили тертя спокою. Якщо в цьому випадку деформації циліндра і похилої площини відсутні, то на лінії стикання ніяких взаємних переміщень матеріальних частинок в напрямку сили тертя не відбувається, витрат енергії на тертя немає, хоча сили тертя існують і забезпечують кочення. Коефіцієнт кочення в десятки і навіть в сотні разів менший коефіцієнта тертя ковзання. Важливо, що сила тертя кочення обернено пропорційна радіусу циліндра чи кулі. Сила тертя кочення виражається формулою

$$F_{\text{тр.к}} = k \frac{N}{R}, \quad (2.24)$$

де N — сила нормального тиску, R — радіус тіла, що котиться, k — коефіцієнт тертя кочення, який має розмірність довжини. На практиці тертя ковзання замінюють на тертя кочення за допомогою кулькових та роликових підшипників.

Зменшення сил сухого тертя ковзання здійснюють також, розміщуючи між тертьовими поверхнями в'язку змащувальну рідину. Тим самим замінюють сухе тертя на рідке. Рідке тертя виникає при обтіканні твердих тіл рідиною або газом. На відміну від сил сухого тертя ковзання, сили рідкого тертя залежать від швидкості. Із збільшенням швидкості сила рідкого тертя збільшується. Чим більша швидкість човна у воді чи літака в повітрі, тим більша сила тертя. Крім того, в силах рідкого тертя відсутня сила тертя спокою. Якщо подути на дерев'яний брусок, що плаває в посудині з водою, то він попливе, якщо ж цей самий брусок буде знаходитися на столі, то він не зрушиться з місця до тих пір, поки не буде досягнута F_{max} .

При невеликих швидкостях сила рідкого тертя пропорційна відносній швидкості. Ця залежність має вигляд

$$\vec{F}_{\text{тр.р}} = -b_1 \vec{v}, \quad (2.25)$$

тут b_1 — коефіцієнт рідинного тертя. Знак мінус вказує на те, що сила направлена в сторону, протилежну швидкості. Для великих швидкостей сила рідкого тертя пропорційна квадра-

ту швидкості, і її величина може бути представлена у вигляді:
 $F_{mp.p} = b_2 v^2$, з врахуванням напрямку

$$\vec{F}_{mp.p} = -\frac{b_2 v^2 \vec{v}}{v}. \quad (2.26)$$

Значення коефіцієнтів b_1 і b_2 залежать від властивостей рідини чи газу, а саме, в'язкості, густини. А також вони залежать від розмірів, форми та стану поверхні тіла, що рухається в рідині чи газі. У випадку тіл однакової геометричної форми вони збільшуються із збільшенням найбільшої площі поперечного перерізу тіла в напрямку, перпендикулярному швидкості, і зменшуються для тіл з однаковим поперечним перерізом при наближенні їх форми до обтічної каплеподібної форми. Значення цих коефіцієнтів визначають на дослідах, наприклад, в аеродинамічних трубах. Теоретично їх можна визначити для тіл простих симетричних форм. Наприклад, для кулі $b_1 = 6\pi r\eta$, де r – радіус кулі, η – коефіцієнт в'язкості рідини. Важливу роль при великих швидкостях відіграє утворення вихорів при обтіканні тіл. Матеріал тіла особливої ролі при рідкому терті не відіграє, оскільки до поверхні тіла прилипає тонкий шар рідини, який рухається разом з тілом, і тертя існує по суті між цим шаром рідини і більш віддаленими від тіла шарами рідини.

Приблизний хід залежностей сили рідкого тертя від швидкості представлений на рис. 23.

В практичній діяльності людини сили тертя відіграють дуже важливу роль. З ними доводиться зустрічатись на кожному кроці. Сили тертя перешкоджають відносному руху тіл, а в деяких випадках роблять цей рух неможливим. При русі потягу чи іншого виду транспорту сили тертя призводять до втрати механічної енергії і переходу її в теплову.

Тому зменшення сил тертя дає велику економію матеріальних цінностей. Боротьба з силами тертя в тих випадках, коли вони шкідливі, зводиться до заміни сили тертя ковзання на сили тертя кочення, або до заміни їх на сили рідкого тертя (змазка). Змазка заповнює заглиблення, виступи, тріщини поверхні твердих тіл і утворює між ними шар рідини, який

роз'єднує ці поверхні і перешкоджає взаємодії їх молекул. Заміна сухого тертя на рідке зменшує сили тертя в десятки разів.

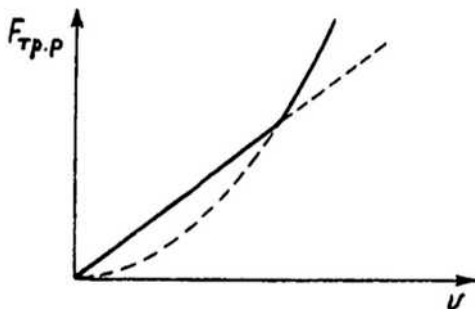


Рис. 23

В багатьох випадках роль сили тертя позитивна. Завдяки силам тертя відбувається переміщення тіл. Наприклад, сили тертя, що діють зі сторони дороги на шини автомобіля, призводять до його переміщення. Всім відомо, як важко ходити по тротуару, коли є ожеледиця. В цьому випадку сила тертя між підшвами та тротуаром досить мала, і її потрібно збільшити. Людина при ходьбі заносить ногу вперед, відриваючи її від землі, а другою ногою опирається на землю. Нога, яка стоїть на землі, відчуває на собі дію двох сил: мускульної, яка штовхає її назад, і сили тертя спокою, що зрівноважує цю силу. В результаті ця нога залишається на місці, в той час, як піднята нога відчуває лише невеликий опір зі сторони повітря, переміщуючись вперед.

2.6. ДИНАМІКА СИСТЕМИ МАТЕРІАЛЬНИХ ТОЧОК

Розглянуті вище закони Ньютона та їх рівняння відносяться до руху матеріальної точки. На практиці доводиться часто мати справу з рухом багатьох взаємодіючих між собою матеріальних точок. Вивчення руху системи матеріальних точок — це складна задача, оскільки необхідно знати рух всіх точок. Ця задача зна-

чно спрощується тим, що в системі матеріальних точок можна виділити точку, яка розташована особливим чином відносно всіх точок системи, закони руху якої порівняно прості. Ця точка називається центром мас системи. *Центром мас системи, яка має n матеріальних точок, називають точку, радіус-вектор якої визначається таким чином:*

$$\vec{r}_c = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^n m_i}. \quad (2.27)$$

Із цієї формули можна визначити координати (x, y, z) центра мас через маси і координати точок системи:

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{\sum_{i=1}^n m_i}; \quad y_c = \frac{\sum_{i=1}^n m_i y_i}{\sum_{i=1}^n m_i}; \quad z_c = \frac{\sum_{i=1}^n m_i z_i}{\sum_{i=1}^n m_i}. \quad (2.28)$$

Швидкість центра мас можна виразити через маси і швидкості окремих точок системи. Для цього здиференціюємо ліву і праву частини рівняння (2.27) за часом:

$$\vec{v}_c = \frac{d\vec{r}_c}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^n m_i} \right) = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt}}{\sum_{i=1}^n m_i} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i}{\sum_{i=1}^n m_i}. \quad (2.29)$$

Приймаючи до уваги, що $\sum_{i=1}^n m_i = M$ — це маса всієї системи, а $m_i \vec{v}_i = \vec{p}_i$ — імпульс точки з номером i , отримаємо

$$M \vec{v}_c = \sum \vec{p}_i. \quad (2.30)$$

Здиференціюємо вираз (2.30) за часом, отримаємо:

$$M \frac{d\vec{v}_c}{dt} = \frac{d}{dt} \sum \vec{p}_i. \quad (2.31)$$

В останній формулі $\frac{d\vec{v}_c}{dt} = \vec{a}_c$ – прискорення центра мас.

Згідно з другим законом Ньютона

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n \vec{p}_i = \sum_{i=1}^{2n} \vec{F}_{i \text{ внутр}} + \sum_{i=1}^k \vec{F}_{i \text{ зовн}}. \quad (2.32)$$

Але, приймаючи до уваги третій закон Ньютона, сума внутрішніх сил системи матеріальних точок буде дорівнювати нулю, тому рівняння (2.31) можна записати так:

$$M \vec{a}_c = \sum_{i=1}^k \vec{F}_{i \text{ зовн}}. \quad (2.33)$$

Ми бачимо, що для прискорення центра мас системи матеріальних точок отримано рівняння, яке за формою співпадає з рівнянням другого закону Ньютона для однієї матеріальної точки, маса якої дорівнює масі всієї системи точок, а в суму сил входять не всі сили, а лише зовнішні.

Отже, *центр мас системи матеріальних точок рухається так, як рухалась би матеріальна точка, в якій була б зосереджена маса всієї системи і на яку б діяли всі зовнішні сили, що діють на систему матеріальних точок.* Це є теорема про рух центра мас системи матеріальних точок. Таким чином, щоб описати рух системи матеріальних точок, можна скористатися поняттям центра мас системи.

Якщо система замкнута або зовнішні сили скомпенсовані, тобто $\sum_{i=1}^k \vec{F}_{i \text{ зовн}} = 0$, то центр мас в інерціальній системі відліку знаходиться в спокої або рухається рівномірно і прямолінійно: $\vec{a}_c = 0$.

Якщо в формулі (2.32) суму імпульсів окремих точок $\sum_{i=1}^n \vec{p}_i$ позначити через $\vec{P}$, тоді після диференціювання отримаємо:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum_{i=1}^k \vec{F}_{i \text{ зовн}}, \quad (2.34)$$

тобто похідна за часом від імпульсу системи матеріальних точок дорівнює сумі зовнішніх сил, що діють на точки системи.

В замкнутій системі $\sum_{i=1}^k \vec{F}_{i \text{ зовн}} = 0$, і тому $\frac{d\vec{P}}{dt} = 0$. Це означає, що

$$\vec{P} = \text{const.} \quad (2.35)$$

В замкнутій системі сума імпульсів є сталою величиною. Таке формулювання закону збереження імпульсу для замкнутої системи ми отримали раніше (2.14).

Імпульс центра мас в замкненій системі є також величиною сталою

$$M\vec{v}_c = \text{const.} \quad (2.36)$$

Внутрішні сили змінити імпульс центра мас не можуть.

В замкнутих системах закон збереження імпульсу має векторний вигляд. У відкритих системах закон збереження імпульсу у векторній формі не працює. Але є окремі випадки, коли закон збереження імпульсу можна записати у скалярній формі. Якщо сума проєкцій всіх зовнішніх сил на якусь вісь, наприклад x , дорівнює нулю, тоді $\sum_{i=1}^n p_{ix} = \text{const.}$

2.7. ДИНАМІКА РУХУ МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ ПО КОЛУ

Як було показано в кінематиці, при рівномірному обертанні матеріальної точки по колу лінійна швидкість, залишаючись незмінною за величиною, весь час змінює свій напрямок. Внаслідок цього виникає нормальне, або як його інакше називають, доцентрове прискорення, направлене вздовж радіуса до центра кола.

Згідно з другим законом Ньютона, це прискорення повинна спричиняти доцентрова сила, яка дорівнює

$$F_n = ma_n = m \frac{v^2}{R} = m\omega^2 R, \quad (2.37)$$

де m — маса тіла, v — лінійна швидкість, ω — кутова швидкість, R — радіус кола.

Ця сила може бути будь-якої природи. Коли доцентрове прискорення зумовлене дією декількох сил, другий закон Ньютона має вигляд:

$$m \frac{v^2}{R} = \sum_{i=1}^n F_i. \quad (2.38)$$

Якщо, рухаючись по колу, лінійна швидкість змінює свою величину, то, крім доцентрового прискорення, виникає тангенціальне прискорення, яке направлено по дотичній до кола, тобто вздовж напрямку лінійної швидкості.

Це прискорення спричиняє тангенціальна сила, яка також може бути будь-якої природи, спрямована по дотичній і дорівнює

$$F_\tau = ma_\tau = m \frac{dv}{dt}. \quad (2.39)$$

Оскільки доцентрове $\vec{a}_n$ і $\vec{a}_\tau$ тангенціальне прискорення взаємно перпендикулярні, то і сили $\vec{F}_n$ і $\vec{F}_\tau$ також взаємно перпендикулярні.

В разі, коли тіло рухається не по колу, а по будь-якій криволінійній траєкторії, то в формулах (2.37) і (2.38) радіус кола R необхідно замінити на радіус кривини траєкторії в тій точці, де визначають прискорення.

Розглянемо декілька прикладів динаміки обертового руху.

а) *Перша космічна швидкість.* Для того, щоб тіло рухалось поблизу Землі по круговій орбіті, швидкість, будучи незмінною за величиною, весь час повинна змінювати свій напрямок. Таким чином виникає доцентрове прискорення. Це прискорення спричиняє сила гравітації. Запишемо другий закон Ньютона і визначимо із нього швидкість, яку необхідно мати тілу, щоб воно рухалось по круговій орбіті поблизу Землі:

$$m \frac{v^2}{R_3} = \gamma \frac{M_3 m}{R_3^2}, \text{ звідси } v = \sqrt{\gamma \frac{M_3}{R_3}} = 7,8 \frac{\text{км}}{\text{с}}, \quad (2.40)$$

тут R_3 — радіус Землі, M_3 — маса Землі. Це є перша космічна швидкість.

Оскільки сила тяжіння на Землі дорівнює силі гравітації $mg = \gamma \frac{M_3 m}{R_3^2}$, то прискорення вільного падіння $g = \gamma \frac{M_3}{R_3^2}$. Тоді першу космічну швидкість можна записати так:

$$v = \sqrt{gR_3}. \quad (2.41)$$

При швидкостях, менших за першу космічну, тіло буде падати на Землю, а при більших швидкостях буде рухатись по еліптичній орбіті, тим більш витягнутій, чим більша швидкість (рис. 24).

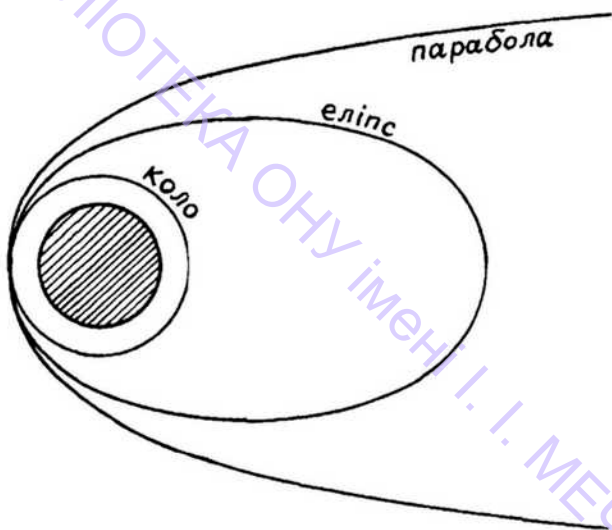


Рис. 24

б) *Рух тіл на поворотах.* При русі автомобіля чи якогось іншого тіла на закруглених ділянках шляху доцентрове прискорення створює сила тертя коліс об дорогу. Щоб не було «заносу», автомобіль повинен мати певну швидкість, яку визначають таким чином:

$$ma_n = F_{mp}; \quad m \frac{v^2}{R} = \mu N,$$

де μ — коефіцієнт тертя, R — радіус закругленого шляху.

Оскільки на горизонтальній поверхні $N = mg$, то

$$\frac{mv^2}{R} = \mu mg, \text{ звідки } v = \sqrt{\mu g R}.$$

в) *Конусний маятник*. Прикладом, коли доцентрове прискорення створюють декілька сил, є рівномірний рух по колу кульки, яка висить на нитці (рис. 25).

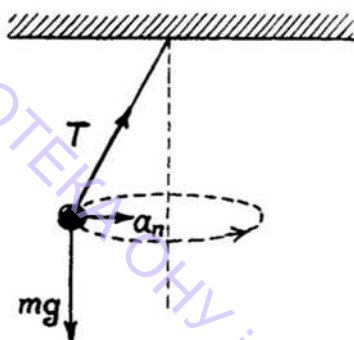


Рис. 25

На кульку діють дві сили: тяжіння mg і сила натягу нитки T . Результуюча сила створює доцентрове прискорення.

2.8. НЕІНЕРЦІАЛЬНІ СИСТЕМИ

Закони Ньютона справедливі лише для інерціальних систем відліку, тобто таких систем, в яких, в разі відсутності взаємодії, тіла рухаються рівномірно і прямолінійно. Якщо є взаємодія, то тіла рухаються з прискоренням. Пригадаємо приклад системи, в якій це положення не буде виконуватись, а саме рух потягу відносно платформи, на якій лежить камінь. Відносно платформи, тобто системи, зв'язаної з Землею, камінь нерухомий.

Спостерігач, який сидить в вагоні, побачить, що, коли потяг зрушить з місця, то відносно нього камінь почне рухатись прискорено в протилежний бік. Таким чином, рух вагона не привів ні до якої взаємодії на камінь, а він почав рухатись відносно спостерігача з прискоренням, тобто взаємодії немає, а прискорення існує. З цього виходить, що в системі відліку, пов'язаної з вагоном і яка рухається прискорено відносно Землі, другий закон Ньютона не виконується. Така система не є інерціальною. Системи, в яких не виконуються закони Ньютона, є неінерціальними. Закони Ньютона описують динаміку руху тіл в інерціальних системах, а як описати рух тіл в неінерціальних системах? Для цього потрібно знати, як від опису руху в одній системі відліку перейти до опису того ж самого руху в іншій системі відліку.

Розглянемо дві системи координат, які зв'язані з рухомими одне відносно другого тілами. Одну з цих систем будемо називати «нерухомою», а другу — «рухомою». Величини, які характеризують рух тіл в нерухомій системі координат, називають абсолютними (координати, швидкість, прискорення), їх будемо позначати літерами без штриха. Ті ж самі величини в рухомій системі називають відносними і позначають із штрихом. Величини, що характеризують рух самої системи, називають переносними і позначають літерами з індексом «нуль». Нехай рухома система переміщується відносно нерухомої прямолінійно вздовж осі (OX) з постійною швидкістю v_0 (рис. 26). Для зручності будемо вважати, що в початковий момент $t = 0$ осі обох систем співпадають. Тоді в будь-який момент часу координати рухомої точки в системах (x, y, z) і (x', y', z') зв'язані співвідношеннями

$$x = x' + x_0, y = y', z = z', \text{ де } x_0 = v_0 t \quad (2.42)$$

Ці співвідношення називають *перетвореннями Галілея*. Вони дозволяють перейти від координат рухомої точки в одній системі до її координат в іншій системі.

Щоб знайти зв'язок між швидкостями в обох системах, слід диференціювати формули (2.42) за часом. Оскільки координати

нати залежать від часу, а v_0 не залежить від часу, то після диференціювання маємо:

$$v_x = v'_x + v_0, \quad v_y = v'_y, \quad v_z = v'_z. \quad (2.43)$$

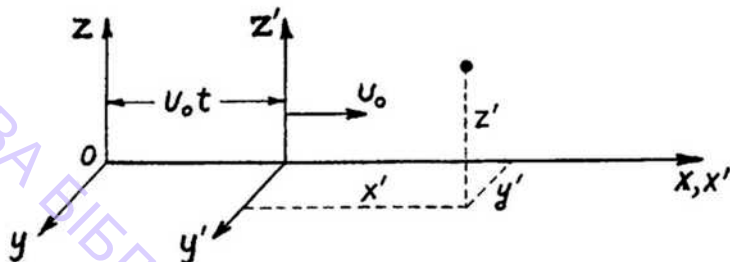


Рис. 26

Для отримання зв'язку між прискореннями здиференціюємо за часом формули (2.43)

$$a_x = a'_x, \quad a_y = a'_y, \quad a_z = a'_z. \quad (2.44)$$

У векторній формі рівняння (2.43), (2.44) запишуться так:

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_0; \quad \vec{a} = \vec{a}'. \quad (2.45)$$

Із останніх співвідношень видно, що абсолютна швидкість $\vec{v}$ рухомої точки дорівнює сумі відносної швидкості $\vec{v}'$ і переносної $\vec{v}_0$. А абсолютне прискорення $\vec{a}$ дорівнює відносному $\vec{a}'$. Тобто при переході від однієї системи до іншої швидкість змінюється, а прискорення залишається таким самим. Фізичні величини, значення яких не змінюються при переході від однієї системи до іншої, називаються *інваріантними*. Інваріантною величиною в даному випадку є прискорення. Можна показати, що інваріантними величинами є довжина відрізка, маса тіла, сила.

В нерухомій системі координат другий закон Ньютона має відомий нам вигляд $m\vec{a} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i$. Якщо рухома система відносно нерухомої рухається рівномірно і прямолінійно і координати точки зв'язані між собою перетвореннями Галілея, то,

оскільки маса, прискорення і сила є інваріантами, другий закон Ньютона в рухомій системі буде мати такий самий вигляд. Тобто вираз для другого закону Ньютона інваріантний по відношенню до перетворень Галілея. Інакше кажучи, системи відліку, які рухаються відносно інерціальних рівномірно і прямолінійно, самі є інерціальними, і всі механічні явища в них протікають однаково і підпорядковуються однаковим законам механіки. Це твердження називають *принципом відносності Галілея*. Ніякими механічними дослідженнями, що проводяться в таких системах, неможливо визначити, чи ця система рухається рівномірно і прямолінійно, чи знаходиться в стані спокою. Слід зауважити, що в інерціальних системах однаковими є закони динаміки, самі ж явища можуть протікати по-різному. Наприклад, для спостерігача, який знаходиться в рухомому вагоні, кулька падає по вертикалі. Для спостерігача, який знаходиться на платформі, кулька, рухаючись з швидкістю вагона v_0 в горизонтальному напрямку, водночас падає вертикально, і тому траєкторія буде мати вигляд параболи. Хоча тут одне і те ж явище, пов'язане з різними системами відліку, має різний вигляд, кожний із спостерігачів бачить його таким, яким воно повинно бути згідно з законом Ньютона з врахуванням початкових умов.

Розглянемо більш складний і загальний випадок руху тіл. Нехай система (x', y', z') відносно системи (x, y, z) рухається прямолінійно також вздовж осі OX , але з прискоренням a_0 . Тобто рухома система є неінерціальною. Як і в випадку інерціальних систем, скористаємось перетвореннями Галілея

$$x = x' + x_0, \quad y = y', \quad z = z', \quad (2.46)$$

де $x_0 = v_0 t$, але тепер переносна швидкість v_0 є функцією часу. Здиференціювавши (2.46) по t , отримаємо зв'язок між швидкостями:

$$v_x = v'_x + v_0, \quad v_y = v'_y, \quad v_z = v'_z. \quad (2.47)$$

Диференціювання виразу (2.47) за часом дає зв'язок між прискореннями:

$$a_x = a'_x + a_0, \quad a_y = a'_y, \quad a_z = a'_z, \quad \text{де } a_0 = \frac{dv_0}{dt}. \quad (2.48)$$

Векторна форма рівнянь (2.47) і (2.48) має вигляд:

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_0; \quad \vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_0. \quad (2.49)$$

В цьому випадку не лише швидкість тіла, а і прискорення в обох системах різні. Абсолютна швидкість дорівнює геометричній сумі відносної і переносної швидкостей. Абсолютне прискорення також дорівнює геометричній сумі відносного і переносного прискорень. Цей висновок отримано для прямолінійного поступального руху, але він має місце для будь-якого поступального переносного руху, оскільки будь-яке переміщення може бути замінене сумою елементарних прямолінійних переміщень.

Запишемо другий закон Ньютона в нерухомій системі (x, y, z):

$$m\vec{a} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i, \quad \text{де } \vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_0. \quad (2.50)$$

Тоді

$$m(\vec{a}' + \vec{a}_0) = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i, \quad \text{або } m\vec{a}' = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i - m\vec{a}_0.$$

Отже, в неінерціальній системі відліку в другий закон, крім так званих Ньютонівських сил $\left(\sum_{i=1}^n \vec{F}_i\right)$, де є дія і протидія, входить із знаком мінус добуток маси тіла на переносне прискорення системи $m\vec{a}_0$. Цей добуток носить назву *сила інерції*. Тобто в неінерціальній системі відліку для опису руху тіла можна скористатись другим законом Ньютона, але до результуючих ньютонівських сил, що діють на тіло, слід додати силу інерції, яка дорівнює

$$\vec{F}_{in} = -m\vec{a}_0, \quad (2.51)$$

де a_0 — прискорення неінерціальної системи. Знак мінус вказує на те, що сила інерції спрямована в бік, протилежний прискоренню системи.

Введення сил інерції в рівняння руху є лише зручним засобом, необхідним, щоб пояснити фізичні явища в неінерціальних системах і скористатися для їх опису другим законом Ньютона.

Протидії в неінерціальній системі сили інерції не мають. Тобто для них третій закон Ньютона не виконується. В цьому розумінні сили інерції не є ньютонівськими силами. Але вони реальні в тому розумінні, в якому реальним є прискорення неінерціальної системи координат. Вони реальні також в тому сенсі, що можна вказати конкретні наслідки дії сил інерції. Наприклад, у вагоні трамвая сили інерції при різкому гальмуванні можуть викликати падіння людей, тобто дають відчутний реальний результат. Сили інерції характеризують ту частку прискорення, яке обумовлюється прискоренням руху системи відліку відносно інерціальної системи координат.

Розглянемо декілька прикладів руху тіла в двох системах координат, одна з яких є інерціальною, а друга — неінерціальною.

а) Неінерціальна система відносно інерціальної рухається прямолінійно з прискоренням a_0 .

На ідеально гладенькій поверхні візка (рис. 27) лежить кулька. Тертя між кулькою і поверхнею візка немає. На цій же платформі знаходиться спостерігач. Другий спостерігач знаходиться на Землі. Візок починає рухатись вправо прямолінійно з прискоренням $\vec{a}_0$. Оскільки тертя немає, то для спостерігача на Землі кулька буде знаходитись в стані спокою. Сила тяжіння mg врівноважується силою реакції опори N . Для нього виконуються всі закони Ньютона. Спостерігач, що знаходиться в системі, пов'язаній з візком, буде бачити, що кулька котиться вліво. Маючи в руках лінійку і годинник, він може визначити її прискорення $a_0 = \frac{2S}{t^2}$. Але він помітить, що ніяка сила в цій системі до кульки не прикладена. Тобто прискорення є, а сили немає. Для нього другий закон Ньютона не виконується. Щоб описати рух кульки і скористатись другим законом Ньютона, йому доведеться ввести силу інер-

ції $F_{in} = -ma_0$, яка направлена вліво і спричиняє прискорення кульки в неінерціальній системі. Але застосувати третій закон Ньютона до цієї сили спостерігач не зможе. Протидії для неї в рухомій системі не існує.

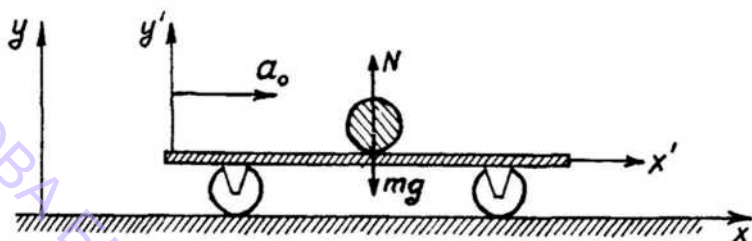


Рис. 27

Розглянемо ще один приклад руху тіл в неінерціальній системі. На людину масою m , що знаходиться в нерухомому ліфті, діють дві сили: сила тяжіння mg і сила зі сторони підлоги ліфта N , яка утримує людину від падіння. Згідно з третім законом Ньютона, з такою ж силою людина діє на опору, в даному випадку на підлогу. Силу, з якою тіло діє на опору або на підвіс, називають *вагою тіла*. В нерухомому ліфті вага тіла дорівнює $P = N = mg$. Якщо ж ліфт почне рухатись вгору з прискоренням a_0 , то по відношенню до Землі він є неінерціальною системою, і тому на всі тіла, що знаходиться в цій системі, діє сила інерції, яка спрямована вниз, і для людини вона дорівнює ma_0 . Тоді вага тіла буде дорівнювати $P = mg + ma_0$. Коли ліфт буде рухатись з прискоренням a_0 вниз, вага людини буде дорівнювати $P = mg - ma_0$. Якщо ж ліфт буде рухатись вниз з прискоренням вільного падіння, тобто вільно падати, то $a_0 = g$, і вага тіла $P = 0$. Це так зване явище *невагомості*.

б) Прояв сил інерції в обертальних системах.

Будь-яке тіло, що приймає участь в обертальному русі, має доцентрове прискорення.

Якщо з ним пов'язати певну систему відліку, то вона, приймаючи участь в обертальному русі, буде рухатись з доцентровим прискоренням $a_0 = \omega^2 r$, а це означає, що ця система є

неінерціальною і для опису руху тіл в ній можна ввести силу інерції $F_{in} = -ma_0$.

Нехай на круглій горизонтальній платформі, яка може обертатись з постійною кутовою швидкістю ω , на пружинці (рис. 28) прикріплена кулька. Кулька може рухатись по жолобу, який розташований вздовж радіуса.

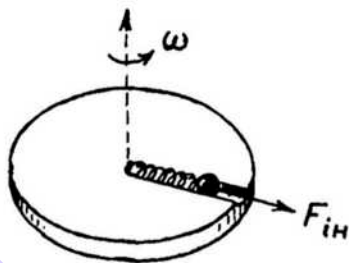


Рис. 28

Коли платформа почне обертатись, то обидва спостерігачі, один з яких знаходиться на платформі, а другий ззовні, побачать, що кулька почне рухатись вздовж жолоба від центра платформи, розтягуючи пружинку.

Спостерігач, що знаходиться ззовні в інерціальній системі, пояснить це так: кулька, приймаючи участь в обертальному русі, весь час змінює напрямок лінійної швидкості. Для цього на неї зі сторони пружинки повинна діяти сила пружності, яка і спричиняє зміну напрямку швидкості, а значить, доцентрове прискорення. За третім законом Ньютона, з якою силою пружинка діє на кульку, з такою самою силою кулька діє на пружинку, розтягуючи її. Для цього спостерігача закони Ньютона виконуються. Спостерігач, що знаходиться в обертальній системі, дивлячись на кульку, побачить, що вона розтягує пружинку, і пояснить це тим, що до кульки прикладена сила інерції. Вона дорівнює $F_{in} = -m\omega^2 r$ і врівноважується в даному випадку силою пружності. Але звідки вона взялась, де її протидія, цей спостерігач пояснити не зможе (звичайно, якщо він не знає, що система обертається). Тобто для нього третій закон Ньютона не виконується.

Таким чином, на всі тіла в обертальних системах, незалежно від того, знаходяться вони в стані спокою чи рухаються, діє *відцентрова сила інерції*, яка дорівнює

$$F_{in} = m\omega^2 r, \text{ або } F_{in} = m \frac{v^2}{r}. \quad (2.52)$$

Оскільки Земля обертається з певною кутовою швидкістю навколо осі, то вона є також неінерціальною системою. На всі тіла, що знаходяться на земній поверхні, повинна діяти відцентрова сила інерції, яка спрямована перпендикулярно від осі обертання і дорівнює $F_{in} = m\omega^2 r$, де r — відстань від осі обертання до даної точки, а ω — кутова швидкість обертання Землі. Як бачимо, відцентрова сила інерції пропорційна відстані від осі обертання. Тому на полюсі тіла не відчувають дії цієї сили, а на екваторі вона максимальна. Дією сили інерції можна пояснити залежність прискорення вільного падіння від широти місцевості. Дійсно, прискорення вільного падіння g в системі Земля спричиняють дві сили: сила гравітації і сила інерції (рис. 29).

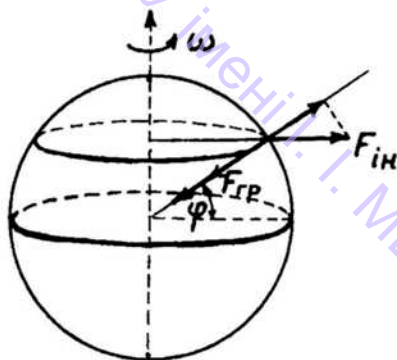


Рис. 29

Рівняння падіння тіла на широті φ запишемо так:

$$mg = \gamma \frac{M_3 m}{R_3^2} - F_{in} \cos \varphi.$$

Оскільки $F_{in} = m\omega^2 r$, де $r = R_3 \cos \varphi$ — радіус кола, по якому обертається тіло, то

$$g = \gamma \frac{M_3}{R_3^2} - \omega^2 R_3 \cos^2 \varphi. \quad (2.53)$$

Це означає, що на полюсі, де $\varphi = 90^\circ$, прискорення вільного падіння більше, ніж на екваторі, на величину $\omega^2 R_3$. Правда, ця величина не перевищує 0,5 %, і тому в багатьох випадках її не враховують.

в) Прояв сил інерції на тілах, які рухаються в обертальній системі.

Крім відцентрової сили інерції, яка діє на всі тіла в обертальній системі, незалежно від того, знаходяться вони в стані спокою чи ні, на тіла, які рухаються відносно цієї системи, діє ще *поворотна сила інерції*, або як її інакше називають *сила Коріоліса*.

Прояв сили Коріоліса розглянемо на такому прикладі. Візьмемо горизонтальний диск, який може обертатись навколо вертикальної осі з кутовою швидкістю ω . Вздовж радіуса проведемо пряму OA (рис. 30).

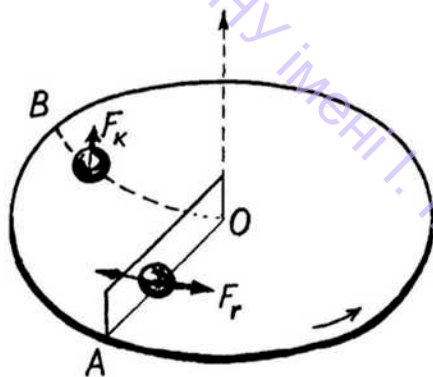


Рис. 30

У напрямку від O до A запусимо кульку із швидкістю $\vec{v}_0$. Якщо диск не обертається, то кулька буде котитись вздовж OA . Якщо ж диск буде обертатись, кулька покотиться в напрямку,

показаному пунктиром по кривій OB , при цьому швидкість $\vec{v}_0$ буде весь час змінювати свій напрямок. Для того, щоб кулька під час свого руху змінювала напрямок швидкості, на неї весь час повинна діяти сила $\vec{F}_k$, перпендикулярна до швидкості $\vec{v}_0$. Це і є сила Коріоліса. Щоб в обертовій системі змусити кульку рухатись прямолінійно по радіусу, необхідно поставити вздовж OA ребро, яке буде тиснути на кульку збоку з силою F_r і змушувати її рухатись прямолінійно вздовж ребра. Спостерігач, який знаходиться ззовні, не в обертовій системі, помітить, що ребро тисне на кульку з силою F_r , з такою самою силою, згідно з третім законом Ньютона, кулька тисне на ребро, і тому воно може прогинатись. Розглянемо прояв цих сил з точки зору цього спостерігача.

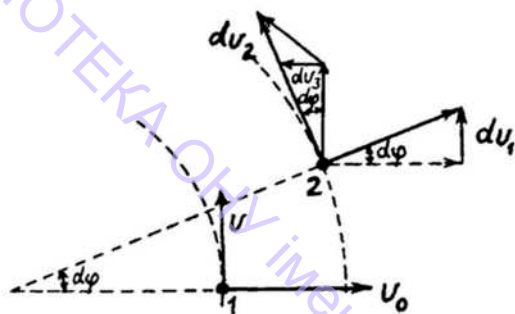


Рис. 31

Рухаючись в обертовій системі, кулька має дві швидкості: v_0 — відносну, направлену в початковий момент вздовж радіуса, і лінійну v , оскільки вона обертається разом з диском. Лінійна швидкість при обертовому русі направлена по дотичній до кола і дорівнює ωR . Нехай за проміжок часу dt кулька переходить із положення 1 в положення 2. За цей час диск повертається на кут $d\phi$. Що ж відбувається з швидкостями? Відносна швидкість $\vec{v}_0$, не змінюючи своєї величини, змінює свій напрямок. Зміна швидкості за напрямком $d\vec{v}_1$, як видно з рис. 31, дорівнює $dv_1 = v_0 d\phi$ і направлена перпендикулярно до радіуса, тобто до швидкості $\vec{v}_0$. Оскільки $d\phi = \omega dt$, то $dv_1 = v_0 \omega dt$. Ліній-

на швидкість v , яка в початковий момент часу направлена перпендикулярно до радіуса, за час dt змінить як свій напрямок, так і величину. Величина її збільшиться тому, що за час dt кулька, приймаючи участь в обертальному русі, переміститься вздовж радіуса на відстань dR і буде вже рухатись не по колу радіуса R , а по колу радіуса $R + dR$. Лінійна швидкість збільшиться за величиною на $dv_2 = \omega dR$. Оскільки $dR = v_0 dt$, то $dv_2 = v_0 \omega dt$. Зміна лінійної швидкості dv_2 так само, як і dv_1 , направлена перпендикулярно до радіуса. Крім величини, лінійна швидкість змінить також свій напрямок. Зміна лінійної швидкості за напрямком $dv_3 = v d\phi$. Оскільки $v = \omega R$, а $d\phi = \omega dt$, то $dv_3 = \omega^2 R dt$. Направлена ця зміна по радіусу і до центра кола.

Отже, за час dt швидкість кульки отримає три зміни:

- $d\vec{v}_1$ зумовлена зміною відносної швидкості за напрямком;
- $d\vec{v}_2$ зумовлена зміною лінійної швидкості за величиною;
- $d\vec{v}_3$ зумовлена зміною лінійної швидкості за напрямком.

Зміни $d\vec{v}_1$ і $d\vec{v}_2$ направлені перпендикулярно до радіуса, а $d\vec{v}_3$ – паралельно радіусу.

Розділимо ці зміни на час, за який вони відбуваються, і отримаємо відповідні прискорення:

$$a_1 = \frac{dv_1}{dt} = v_0 \omega; \quad a_2 = \frac{dv_2}{dt} = v_0 \omega; \quad a_3 = \frac{dv_3}{dt} = \omega^2 R. \quad (2.54)$$

Прискорення $\vec{a}_1$ і $\vec{a}_2$ направлені перпендикулярно до радіуса, а $\vec{a}_3$ – вздовж радіуса і до центра диска. Оскільки $\vec{a}_1$ і $\vec{a}_2$ однакові за величиною і напрямком, то їх можна об'єднати і отримати результуюче прискорення $a_r = 2\omega v_0$. Це прискорення перпендикулярне до $\vec{v}_0$ і також перпендикулярне до кутової швидкості $\vec{\omega}$, яка перпендикулярна площині рис. 31, і направлена на читача. Тому у виразі для $\vec{a}_r$ повинен бути векторний добуток, а саме:

$$a_r = 2[\vec{\omega} \times \vec{v}_0]. \quad (2.55)$$

Щоб спричинити це прискорення, у тому ж напрямку повинна діяти відповідна сила. Згідно з другим законом Ньютона, ця сила дорівнює

$$F_r = 2m[\vec{\omega} \times \vec{v}_0]. \quad (2.56)$$

Направлена вона перпендикулярно до відносної швидкості v_0 . Це і є та сила, яка буде діяти на кульку (рис. 30) зі сторони ребра, змінюючи відносну швидкість за напрямком, а лінійну — за величиною. З такою самою силою кулька буде діяти на ребро, внаслідок чого воно прогинається. Таким чином, для зовнішнього спостерігача виконуються всі закони Ньютона.

Спостерігач, який заходиться в обертальній системі і якщо він не знає, що вона обертається, помітить таку картину: кулька, рухаючись вздовж ребра, тисне на нього з силою F_k , внаслідок чого воно прогинається, але звідки взялась ця сила, він пояснити не може. Для нього сила F_k є Коріолісовою силою інерції, і, як будь-яка сила інерції, вона дорівнює $F_k = -ma_r$. Змінивши знак у векторному добутку формули для сили Коріоліса, отримаємо:

$$\vec{F}_k = 2m[\vec{v}_0 \times \vec{\omega}]. \quad (2.57)$$

Що стосується прискорення $\vec{a}_3$, то для зовнішнього спостерігача його може зумовити доцентрова сила, яка змінює напрямок лінійної швидкості. Для спостерігача, який знаходиться в обертальній системі, на кульку, яка рухається, діє відцентрова сила інерції. Як і в розглянутому раніше випадку б), вона направлена вздовж радіуса від центра і за величиною дорівнює $F_{in} = m\omega^2 R$.

Таким чином, в обертальній системі, коли тіло рухається з відносною швидкістю v_0 перпендикулярно до цієї швидкості діє поворотна Коріолісова сила інерції. Вона завжди лежить в площині, перпендикулярній до осі обертання.

В багатьох випадках сила Коріоліса проявляє себе на тілах, які рухаються в обертальній системі Землі. Наприклад, при вільному падінні на тіла діє Коріолісова сила, яка відхиляє їх від прямовисної лінії на схід (рис. 32 а). Ця сила максимальна на екваторі і дорівнює нулю на полюсах.

Балістична ракета чи снаряд, які летять, наприклад, вздовж меридіана на північ, також завдяки дії сили Коріоліса від-

хилиються на схід в північній півкулі і на захід — в південній (рис. 32 б). При стрільбі вздовж меридіана на південь, напрямки відхилень будуть протилежні. При стрільбі вздовж екватора сили Коріоліса будуть притискувати ракету чи снаряд до Землі, якщо вони летять на захід, і навпаки, піднімати їх вгору, якщо вони летять на схід. Дії сили Коріоліса призводять до того, що річки, які течуть в північній півкулі на північ, більш підминають правий берег, ніж лівий, і навпаки, лівий — в південній півкулі (закон Бера). Ті ж самі причини пояснюють різне зношування рейок при двоколійному русі.

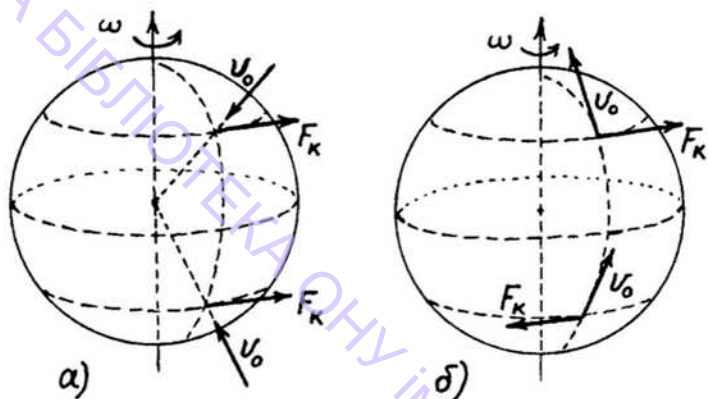


Рис. 32

Прикладом застосування сил інерції в біології є центрифугування, або, інакше кажучи, відцентрова седиментація. Це такий процес, при якому за рахунок обертального руху відбувається розподіл важких та легких частинок, завислих в рідині. Основною частиною центрифуги є електричний двигун, вісь якого обертається з великою швидкістю від декількох тисяч до десятків тисяч обертів за хвилину в ультрацентрифугах. На двигун насаджений диск з отворами, в яких закріплюються пробірки з досліджуваним розчином. При обертальному русі на частинки з густиною, більшою, ніж густина рідини, в якій вони знаходяться, буде діяти відцентрова сила інерції. Під дією цієї сили важкі частинки будуть рухатись від центра, а легкі будуть зби-

ратись ближче до осі обертання. Таким чином, можна екстрагувати макромолекули, різні клітини або частини клітин (якщо перед цим клітини розмолоти). В біології таку суміш називають гомогенат. З допомогою центрифугування можна виділити із цієї суміші ядра, мітохондрії, хлоропласти і інші включення.

У побуті процес центрифугування використовують в сепараторах для виділення вершків з молока.

В організмі людини є орган, в якому сили інерції використовуються для визначення просторової орієнтації. Це так званий вестибулярний апарат. Він знаходиться у внутрішньому вусі і являє собою три взаємно перпендикулярні напівкруглі канали (*canales semicirculares ossei*) і порожнини (*vestibulum*) (рис. 33).



Рис. 33

Всередині порожнини і каналів є желеподібна маса (ендолімфа), яка містить маленькі кристалики фосфорнокислого і вуглекислого кальцію (отоліти). На внутрішній поверхні стінок порожнини і в частині каналів знаходяться групи чутливих нервових клітин у вигляді тоненьких волосиків. Якщо людина прискорено рухається або повертає головою, то це призводить до появи сили інерції, яка діє на ендолімфу і отоліти, перемішуючи їх. Це переміщення через волоски сприймається нервовими клітинами, і сигнал передається до мозку. Таким самим чином клітини вестибулярного апарату передають інформацію до мозку про стан невагомості та перевантаженості людини.

КОНТРОЛЬНІ ПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ

1. Сформулюйте перший закон Ньютона.
2. Які системи називають інерціальними?
3. Сформулюйте другий закон Ньютона.
4. Дайте визначення таким фізичним величинам, як сила та маса.
5. Що таке імпульс тіла?
6. Запишіть другий закон Ньютона в диференціальній формі.
7. Чому дорівнює імпульс сили?
8. Чи можна визначити швидкість тіла, знаючи лише силу, що діє на нього?
9. Сформулюйте третій закон Ньютона.
10. Сформулюйте закон збереження імпульсу для системи тіл.
11. Сформулюйте і запишіть закон всесвітнього тяжіння.
12. Що таке гравітаційне поле?
13. Як знайти прискорення вільного падіння і чому воно дорівнює?
14. Що таке «інертна» і «гравітаційна» маси?
15. Запишіть закон Гука для деформації розтягування або стиску.
16. Яка природа сил пружності?
17. Що таке модуль Юнга?
18. Яка природа сил тертя?
19. Чому дорівнює сила сухого тертя ковзання?
20. Від чого залежить коефіцієнт сухого тертя ковзання?
21. Від чого залежить коефіцієнт сухого тертя кочення?
22. Яким чином можна зменшити силу тертя?
23. Чому дорівнює сила рідинного тертя?
24. Що таке центр мас системи матеріальних точок?
25. Сформулюйте теорему про рух центра мас.
26. Що таке доцентрова сила і чому вона дорівнює?
27. Як визначити першу космічну швидкість?
28. Які системи називають неінерціальними? Наведіть приклади.
29. Для чого використовують галілеєві перетворення?

30. Які фізичні величини називають інваріантними? Наведіть приклади варіантних і інваріантних фізичних величин.
31. Що таке сили інерції? Коли іде вони виникають?
32. Чому дорівнює сила інерції при прямолінійному поступальному русі?
33. Чому дорівнює доцентрова сила інерції?
34. Що таке сила Коріоліса? Чому вона виникає, як направлена, чому дорівнює і де себе проявляє?

3.1. РОБОТА І ПОТУЖНІСТЬ

Нехай матеріальна точка, рухаючись вздовж траєкторії, перемістилась на маленький відрізок $d\vec{r}$. Під час руху на неї діяла сила $\vec{F}$, напрям якої складав з напрямком елементарного переміщення $d\vec{r}$ кут α (рис. 34).

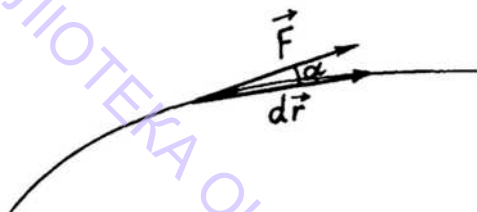


Рис. 34

Елементарною роботою називають скалярний добуток сили на елементарне переміщення, тобто:

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{r}, \text{ або } dA = F \cdot dr \cdot \cos \alpha. \quad (3.1)$$

Оскільки $F \cos \alpha = F_s$ — проекція сили на напрям переміщення, то формулу (3.1) можна записати у такому вигляді: $dA = F_s dr$. Робота — скалярна величина. Вона може бути як додатною при $\alpha < \frac{\pi}{2}$, так і від'ємною при $\alpha > \frac{\pi}{2}$, а також дорівнювати нулю, коли сила перпендикулярна переміщенню $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Остання обставина чітко пояснює, що фізичне поняття роботи в механіці відрізняється від повсякденного уявлення про роботу. В побуті робота виконується при будь-якій мускульній напрузі, наприклад, людина в нерухомому стані тримає важкий вантаж. В механіці робота в цьому випадку дорівнює нулю. Ро-

бота сили тяжіння над супутником, що рухається по круговій орбіті навколо Землі, також дорівнює нулю, оскільки кут між напрямком сили і переміщенням дорівнює $\frac{\pi}{2}$.

Якщо на матеріальну точку діють декілька сил і кожна з них виконує роботу на даному переміщенні, то робота всіх сил дорівнює сумі робіт, які виконують окремі сили

$$dA = F_{1s}dr + F_{2s}dr + \dots + F_{ns}dr = \sum_{i=1}^n F_{is}dr. \quad (3.2)$$

В декартовій системі координат сила F розкладається на три складові (F_x, F_y, F_z), переміщення на (dx, dy, dz) , і елементарна робота розраховується за формулою:

$$dA = F_x dx + F_y dy + F_z dz. \quad (3.3)$$

У випадку змінної сили і криволінійного руху весь шлях розбивають на елементарні прямолінійні відрізки ΔS_i , і поки точка рухається по ньому, сила, діюча на точку, складає з ним кут α_i і має величину F_i . Тоді елементарну роботу dA_i на цьому відрізку можна розрахувати за формулою (3.1). Для знаходження роботи сили на всій ділянці AB слід скласти елементарні роботи dA_i , які виконує сила на кожному відрізку. Якщо під S будемо розуміти шлях, відрахований вздовж криволінійної траєкторії, тоді роботу знайдемо із формули:

$$A = \lim_{\Delta S_i \rightarrow 0} \sum F_i \Delta S_i \cos \alpha_i = \int_S F_s dS, \quad (3.4)$$

де $F_s = F \cos \alpha$ — проекція сили на переміщення. Знаючи F_s як функцію від S , взявши інтеграл по всьому шляху, знайдемо роботу A .

Якщо графічно зобразити цю залежність так, як це показано на рис. 35, то повна робота дорівнює площі під кривою AB .

Одиницею роботи в системі СІ є джоуль (Дж). 1 (Дж) — робота, яку виконує сила в 1 Н при переміщенні тіла на відстані 1 м у напрямку дії сили

$$1 \text{ Дж} = 1 \text{ Н} \cdot 1 \text{ м}.$$

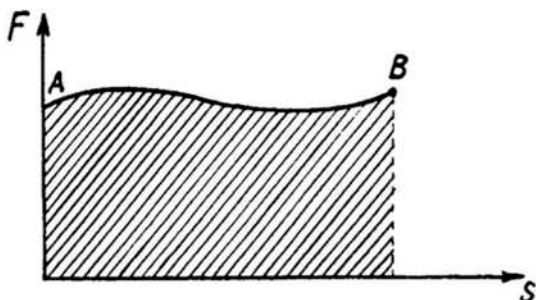


Рис. 35

В системі СГС одиницею роботи є 1 ерг.

1 ерг = 1 дина · 1 см = $10^{-5} \text{ Н} \cdot 10^{-2} \text{ м} = 10^{-7} \text{ Дж}$, або 1 Дж = 10^7 ерг.

Роботу тіло може виконувати з різною швидкістю. Для оцінки ефективності виконуваної роботи вводять фізичну величину — *потужність*.

Потужністю називають величину, яка чисельно дорівнює відношенню роботи до проміжку часу, за який вона виконувалась

$$N = \frac{dA}{dt}. \quad (3.5)$$

Оскільки $dA = \vec{F} d\vec{r}$, то $N = \frac{\vec{F} d\vec{r}}{dt}$, але

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}, \text{ тоді } N = \vec{F} \vec{v}. \quad (3.6)$$

Таким чином, потужність в кожен момент часу дорівнює скалярному добутку вектора сили на вектор швидкості, з якою рухається точка.

Одиницею потужності в системі СІ служить 1 ват (Вт).

1 Вт — потужність, при якій за 1 секунду виконується робота 1 Дж.

$$1 \text{ Вт} = 1 \text{ Дж/1 сек.}$$

3.2. РОБОТА РІЗНИХ ВИДІВ СИЛ

а) *Робота сил пружності.* Знайдемо роботу, яку виконує сила пружності при деформації пружини. Нехай тіло під дією пружини переміщується вздовж осі OX на маленький відрізок dx . На тіло діє на цьому відрізку сила пружності. Тоді елементарна робота $dA = Fdx$. Сила пружності залежить від деформації за законом Гука $F = -kx$. Підставляючи цей закон у вираз для елементарної роботи, отримуємо $dA = -kxdx$.

Повна робота при переміщенні тіла під дією сили пружності від положення x_2 до x_1 дорівнює

$$A = \int_{x_1}^{x_2} (-kx) dx = -k \int_{x_1}^{x_2} x dx = \frac{kx_1^2}{2} - \frac{kx_2^2}{2}. \quad (3.7)$$

При деформації пружини робота сили пружності, як видно з формули (3.7), залежить від початкового і кінцевого положення тіла і не залежить від проміжних значень.

На графіку залежності F від x робота зображається площею заштрихованих трикутників як при розтягуванні, так і при стисканні.

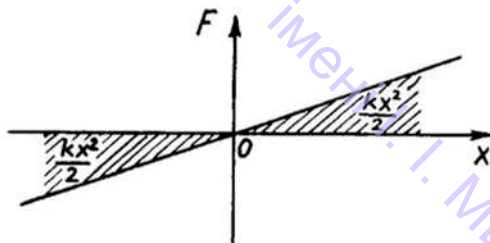


Рис. 36

б) *Робота сил гравітації.* Нехай тіло масою m_1 створює навколо себе гравітаційне поле. В цьому полі переміщується тіло масою m_2 з положення 1 в положення 2. Під час руху на тіло m_2 з боку гравітаційного поля тіла m_1 діє гравітаційна сила $F = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}$, де r — відстань між тілами. Оскільки сила гравітації є центральною силою, то елементарна робота $dA = Fdr$, а повна робота

$$A = - \int_{r_1}^{r_2} F dr = - \int_{r_1}^{r_2} \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} dr = \gamma \frac{m_1 m_2}{r_2} - \gamma \frac{m_1 m_2}{r_1}. \quad (3.8)$$

Знак мінус перед інтегралом поставлений в зв'язку з тим, що для тіл, які наближаються, величина dr від'ємна, тоді як робота повинна бути додатною, так як переміщення маси відбувається в напрямку дії сили.

Як видно, робота сил гравітації також залежить від початкового і кінцевого положення тіла і не залежить від проміжних положень.

в) *Робота сили тяжіння.* Сила тяжіння є частковим випадком сил гравітації, що діють між Землею і тілом, що рухається поблизу її поверхні. Будемо вважати гравітаційне поле однорідним, а силу тяжіння $F = mg$ у всіх точках однаковою і направленою вертикально вниз.

Візьмемо декартову систему координат, нерухому відносно Землі, і направимо вісь OZ вертикально вгору. Тоді елементарна робота $dA = Fdz$, оскільки сила тяжіння роботу вздовж напрямків OX і OY не виконує, то повна робота сили тяжіння

$$A = - \int_{z_1}^{z_2} F dz = - \int_{z_1}^{z_2} mg dz = mgz_1 - mgz_2. \quad (3.9)$$

Величина роботи не залежить від форми траєкторії, по якій рухається тіло, а визначається різницею висот.

Знак мінус вказує на те, що сила тяжіння виконує від'ємну роботу, якщо тіло піднімається вгору, і додатну, якщо тіло рухається вниз.

Якщо в наведених вище випадках розглянути роботу сил пружності, гравітації та тяжіння по замкнутій траєкторії, коли тіло повертається в попереднє положення $r_1 = r_2$, то вона буде дорівнювати нулю.

$$A = \oint F dr = 0. \quad (3.10)$$

г) *Робота сил тертя.* Сила тертя завжди направлена в сторону, протилежну швидкості або напрямку переміщення. Тому

елементарна робота, що виконують сили тертя на будь-якому переміщенні, буде від'ємною. Повна робота сил тертя

$$A = \int F_{\text{т}} dr, \text{ а оскільки } dr = v dt, \text{ то } A = \int_{t_1}^{t_2} F_{\text{т}} v dt. \quad (3.11)$$

Повна робота сил тертя по замкнутій траєкторії є сумою від'ємних величин і не дорівнює нулю.

3.3. ЕНЕРГІЯ

Розглянута вище фізична величина робота, що вимірюється добутком сили на переміщення, служить мірою передачі руху від одного тіла до другого за рахунок сили. Якщо тіло або система тіл здатні виконати роботу, то говорять, що вони мають *енергію*. Енергія вимірюється максимальною роботою, яку за визначених умов може виконати це тіло. Таким чином, *енергія — це здатність тіла виконати роботу*. Говорять — тіло енергію має, а роботу — виконує. Наприклад: розтягнута пружина, скорочуючись, виконує роботу, значить, в розтягнутому вигляді вона має енергію, і за рахунок неї виконується робота. Система, що складається із земної кулі і тіла, розташованого на деякій висоті, також має енергію, за рахунок якої, коли тіло почне падати, може виконати роботу. Куля, що котиться і має певну швидкість, при зіткненні з іншим тілом змушує його переміщуватись, також має енергію. Слід відмітити, що пружина, тіло, підняте над Землею, куля, що котиться, мають енергію незалежно від того, виконують вони вданий момент роботу чи ні. Таким чином, енергія характеризує стан системи, можливість виконати роботу при переході від одного стану до іншого. Змінення енергії можна виразити роботою, яку виконує система, переходячи із одного стану в інший. Інакше кажучи, робота A , що виконується системою при переході із одного стану в інший, дорівнює різниці енергій в цих станах:

$$A = W_1 - W_2, \quad (3.12)$$

де W_1 — енергія в початковому стані, а W_2 — в кінцевому.

Оскільки енергія є мірою виконаної роботи, то вона вимірюється в тих самих одиницях, що і робота. В системі СІ — в джоулях, в системі СГС — в ергах. Енергія так само, як і робота, є скалярною величиною.

Із наведених прикладів видно, що енергія тіл пов'язана або з взаємним розташуванням тіл, або з їх рухом. В першому випадку вона називається *потенціальною*, в другому — *кінетичною*. Говорять — потенціальна енергія — це енергія положення тіл, кінетична — енергія руху.

У відповідності до формули (3.12) розглянемо конкретні вирази для енергії різних видів сил.

Порівнюючи формули (3.7) і (3.12), видно, що для сил пружності енергія дорівнює

$$W_n = \frac{kx^2}{2}. \quad (3.13)$$

Графік залежності енергії від зміщення представлений на рис. 37 а) у вигляді параболи.

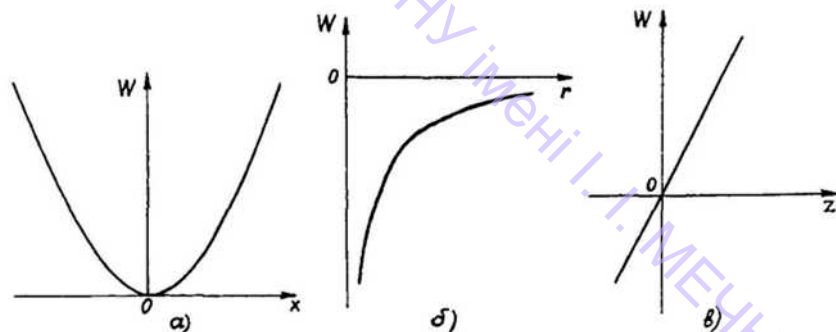


Рис. 37

Енергія сил гравітації із порівняння формул (3.8) і (3.12) дорівнює

$$W_n = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r}. \quad (3.14)$$

На графіку залежність енергії від відстані між тілами представлена гіперболою на рис. 37 б).

Для сили тяжіння енергія із формул (3.9) і (3.12) дорівнює

$$W_n = mgz. \quad (3.15)$$

Графічно ця лінійна залежність представлена на рис. 37 в). Із графіка видно, що енергія сили тяжіння може бути як додатною, так і від'ємною в залежності від того, де знаходиться точка відліку.

Із формул (3.13) – (3.15) видно, що енергія сил пружності, гравітації і тяжіння визначається положенням тіл і не залежить від траєкторії. Тому це є потенціальна енергія, а сили *потенціальні*, або інакше кажучи, *консервативні* сили. Таким чином, до зміни потенціальної енергії призводять консервативні сили. Робота консервативних сил дорівнює зміні потенціальної енергії, взятої із знаком мінус. Умовою потенціальності є формула (3.10). Робота сил тертя, як це видно із формули (3.11), по замкнутій траєкторії не дорівнює нулю, тому вона не є консервативною силою. Такі сили називають *дисипативними*. В цих випадках механічна енергія переходить у внутрішню.

Ще одне зауваження. Потенціальну енергію слід віднести не до тіла або частинки, а до системи взаємодіючих між собою тіл чи частинок, які утворюють силове поле.

Між потенціальною енергією та силою існує зв'язок. Для встановлення цього зв'язку представимо роботу як спадання енергії, тобто $dA = -dW_n$. Оскільки $dA = Fdr$, то $Fdr = -dW_n$, звідси

$$F_r = -\frac{dW_n}{dr}, \text{ або } \vec{F} = -\text{grad} W_n. \quad (3.16)$$

Математична дія $\frac{d(\)}{dr}$ є градієнт скалярної величини. В даному випадку — градієнт потенціальної енергії. Тому сила F дорівнює із знаком мінус градієнту потенціальної енергії в даній точці поля. Знак мінус вказує на те, що F і $\text{grad} W_n$ направлені в протилежні сторони.

Розглянемо тіло, на яке діє сила, і під дією цієї сили тіло змінює свою швидкість, тобто отримує прискорення. Якщо є переміщення, то при цьому виконується робота $dA = Fdr$. Враховуючи, що $F = ma$, а прискорення $a = \frac{dv}{dt}$, елементарна робота дорівнює $dA = m \frac{dv}{dt} \cdot dr$. Оскільки $\frac{dr}{dt} = v$, то $dA = mv dv$. Повна робота при зміні швидкості від v_1 до v_2 дорівнює

$$A = \int_{v_1}^{v_2} mv dv = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}. \quad (3.17)$$

В даному випадку робота визначається не положенням тіла, а зміною швидкості. Порівняння цієї формули з (3.12) показує, що права частина її є різниця енергії. Але ця енергія визначається не положенням, а швидкістю і називається вона *кінетичною енергією*

$$W_k = \frac{mv^2}{2}. \quad (3.18)$$

Зміна кінетичної енергії матеріальної точки за деякий проміжок часу дорівнює роботі, яку виконують всі сили, що діють на точку за цей проміжок часу.

Формула (3.17) є справедливою як для прямолінійної, так і для криволінійної траєкторії.

Кінетичну енергію можна представити в дещо іншому вигляді. Якщо чисельник і знаменник кінетичної енергії помножити на m і врахувати, що $mv = p$ є імпульс тіла, то

$$W_k = \frac{p^2}{2m}. \quad (3.19)$$

Робота в цьому випадку дорівнює:

$$A = \frac{p_2^2}{2m} - \frac{p_1^2}{2m}. \quad (3.20)$$

Кінетична енергія системи матеріальних точок дорівнює сумі кінетичних енергій всіх точок, що складають систему.

3.4. ЗАКОН ЗМІНИ ТА ЗБЕРЕЖЕННЯ МЕХАНІЧНОЇ ЕНЕРГІЇ

Якщо тіло знаходиться в якомусь силовому полі, тобто на нього діють консервативні сили і при цьому воно рухається, то це тіло може мати як потенціальну, так і кінетичну енергію. Суму потенціальної і кінетичної енергії називають *поєною механічною енергією*.

Розглянемо систему точок, які рухаються під дією внутрішніх і зовнішніх сил. Ці сили можуть змінювати як швидкість точок, так і їх взаємне розташування. Тобто вони можуть змінювати кінетичну і потенціальну енергію системи. Для довільної точки системи можна написати

$$\Delta W_{kin} = A_i, \quad (3.21)$$

де ΔW_{kin} — зміна кінетичної енергії за деякий проміжок часу; A_i — робота як внутрішніх, так і зовнішніх сил за такий самий проміжок часу.

Для всіх точок системи отримаємо вираз

$$\sum_{i=1}^n \Delta W_{kin} = \sum_{i=1}^n A_i. \quad (3.22)$$

Ліва частина цього рівняння являє собою зміну кінетичної енергії всієї системи ΔW_{kin} .

Праву частину, яка дорівнює сумарній роботі всіх сил, що діють на всі точки системи, можна представити у вигляді суми трьох робіт, а саме:

роботи внутрішніх консервативних сил — $A_{\text{внутр}}^{\text{конс}}$;

роботи внутрішніх дисипативних сил — $A_{\text{внутр}}^{\text{дисип}}$;

роботи всіх зовнішніх сил — $A_{\text{зовн}}$.

Тоді рівняння (3.22) буде мати такий вигляд:

$$\Delta W_{kin} = A_{\text{внутр}}^{\text{конс}} + A_{\text{внутр}}^{\text{дисип}} + A_{\text{зовн}} \quad (3.23)$$

Оскільки робота $A_{\text{внутр}}^{\text{конс}}$ дорівнює зміні потенціальної енергії системи $\Delta W_{\text{пот}}$, взятої із знаком мінус, остання формула має вигляд:

або

$$\Delta W_{\text{кін}} = -\Delta W_{\text{пот}} + A_{\text{внутр}}^{\text{дисип}} + A_{\text{зовн}}^{\text{дисип}}$$

$$\Delta W_{\text{кін}} + \Delta W_{\text{пот}} = A_{\text{внутр}}^{\text{дисип}} + A_{\text{зовн}}^{\text{дисип}}. \quad (3.24)$$

Вираз $\Delta W_{\text{кін}} + \Delta W_{\text{пот}} = \Delta W$ є зміна повної механічної енергії системи, тому

$$\Delta W = A_{\text{внутр}}^{\text{дисип}} + A_{\text{зовн}}^{\text{дисип}}. \quad (3.25)$$

Цей вираз являє собою закон зміни механічної енергії: *зміна повної механічної енергії системи матеріальних точок за деякий проміжок часу дорівнює сумарній роботі всіх внутрішніх дисипативних сил і всіх зовнішніх сил за цей же проміжок часу.*

Якщо система замкнута, тобто зовнішні сили не діють, і їх робота дорівнює нулю, а внутрішні сили є консервативними, тоді права частина рівняння (3.25) дорівнює нулю і зміни повної механічної енергії немає:

$$\Delta W = 0, W = \text{const}, W_{\text{кін}} + W_{\text{пот}} = \text{const}. \quad (3.26)$$

Тобто *сума кінетичної і потенціальної енергій в замкнутій системі, де діють консервативні сили, є величина стала.* Це і є закон збереження механічної енергії. Він являє собою частковий випадок загального закону збереження енергії в фізиці.

Згідно закону збереження механічної енергії в замкнутій системі, де діють сили гравітації та пружності, кінетична енергія може переходити в потенціальну і навпаки. Спад потенціальної енергії призводить до зростання кінетичної в такій же кількості.

Як приклад застосування закону збереження механічної енергії розглянемо розрахунок другої космічної швидкості. Це така швидкість, яку необхідно надати тілу (супутнику), щоб він покинув сферу земного тяжіння і став, наприклад, штучною планетою Сонячної системи. Для цього йому необхідно надати таку кінетичну енергію, яка б дорівнювала роботі по переміщенню тіла із земної поверхні на нескінченність, тобто за границю земного тяжіння. Ця робота буде виконуватись проти сили гравітації і дорівнюватиме зміні потенціальної енергії тіла при його переміщенні із земної поверхні на нескінченність. Роботу можна розрахувати за формулою (3.8), в якій $r_1 = R$ — радіусу Землі, а $r_2 = \infty$. Тоді

$$\frac{mv_0^2}{2} = \gamma \frac{M_3 m}{R}, \quad (3.27)$$

де v_0 — початкова швидкість тіла на Землі.

Із формули знаходимо $v_0^2 = 2\gamma \frac{M_3}{R}$. Враховуючи, що $\gamma \frac{M_3}{R} = g$ — прискорення вільного падіння, для другої космічної швидкості отримаємо

$$v_0 = \sqrt{2Rg} = \sqrt{2}v_1 = 11,2 \frac{\text{км}}{\text{с}},$$

де v_1 — перша космічна швидкість.

Розглянемо питання про рівновагу системи. Система знаходиться в *рівновазі*, якщо вона може бути виведеною із цього стану лише зовнішніми силами. Стан рівноваги називають *стійким*, якщо мала зовнішня взаємодія на систему може викликати малі зміни її стану. При цьому в системі виникають внутрішні сили, які намагаються повернути систему в попередній стан. Наприклад, тіло, що лежить на дні ями, знаходиться в стані стійкої рівноваги. Стан рівноваги називають *нестійким*, якщо навіть невелика зовнішня взаємодія виводить систему із цього стану. Наприклад, тіло знаходиться на вершині крутого горба. Із цих прикладів видно, що в стані стійкої рівноваги потенціальна енергія повинна бути *мінімальною*.

Поняття робота, енергія, потужність використовуються в біомеханіці. Наприклад, проведемо розрахунок механічної потужності, яку здатна виконати людина. Якщо спортсмен масою 70 кг підскакує вгору з місця на висоту 1 м, а фаза відштовхування продовжується 0,2 сек., то він розвиває під час стрибка потужність

$$N = \frac{70 \cdot 9,8 \cdot 1}{0,2} = 3500 \text{ Вт.}$$

При ходьбі людина також виконує роботу, оскільки при цьому витрачає енергію на періодичні невеликі підняття центра мас і на прискорення та сповільнення кінцівок, головним чином, ніг. Можна підрахувати, що людина масою 76 кг при ходь-

бі із швидкістю 5 км/год. розвиває потужність близько 60 Вт. Із збільшенням швидкості ця потужність зростає і при швидкості 7 км/год. становить 200 Вт. При їзді на велосипеді положення центра мас змінюється значно менше, ніж при ходьбі, тому потужність буде меншою, наприклад, при швидкості 9 км/год. потужність становить менше 30 Вт.

Для вимірювання роботи, що виконує людина, застосовують прилади, які називають ергометрами. Прикладом ергометра може служити тормозний велоергометр.

КОНТРОЛЬНІ ПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ

1. Дайте визначення елементарної механічної роботи.
2. В яких випадках робота буває додатною, від'ємною чи може дорівнювати нулю?
3. Як зобразити роботу на графіку залежності сили від шляху?
4. В яких одиницях вимірюється робота?
5. Що таке потужність та в яких одиницях вона вимірюється?
6. Чому дорівнює робота сил пружності?
7. Чому дорівнює робота сил тертя?
8. Чому дорівнює роботи сил гравітації?
9. Для яких сил і чому робота по замкнутій траєкторії дорівнює нулю?
10. Що таке енергія та в яких одиницях вона вимірюється?
11. Яку енергію називають потенціальною?
12. Яку енергію називають кінетичною?
13. Запишіть формулу для енергії сил пружності, гравітації, тяжіння.
14. Запишіть формулу зв'язку між потенціальною енергією та силою.
15. Запишіть формулу для кінетичної енергії через імпульс.
16. Сформулюйте закон збереження механічної енергії.
17. Сформулюйте закон зміни механічної енергії.
18. Що таке друга космічна швидкість та як її визначають?

4.1. РУХ АБСОЛЮТНО ТВЕРДОГО ТІЛА

Абсолютно тверде тіло являє собою сукупність матеріальних точок, які не рухаються і не зміщуються одна відносно другої. Таке тіло не деформується. Воно одночасно може приймати участь у поступальному та обертальному рухах.

При поступальному русі всі точки твердого тіла мають однакові траєкторії, однакові переміщення, швидкості і прискорення. Тому, описуючи рух твердого тіла при поступальному русі, можна розглядати рух однієї якоїсь точки або центра мас. Для кожної матеріальної точки твердого тіла записують другий закон Ньютона

$$\Delta m_i \vec{a}_i = \vec{f}_i + \vec{F}_i, \quad (4.1)$$

де $\vec{f}_i$ — результуюча всіх внутрішніх сил, а $\vec{F}_i$ — результуюча всіх зовнішніх сил, прикладених до даної елементарної маси. Додаючи рівняння для всіх елементарних мас, отримуємо:

$$\sum \Delta m_i \vec{a}_i = \sum \vec{f}_i + \sum \vec{F}_i.$$

Сума всіх внутрішніх сил дорівнює нулю, тому останнє рівняння спрощується і має вигляд

$$\sum \Delta m_i \vec{a}_i = \sum \vec{F}_i. \quad (4.2)$$

Суму в лівій частині, як це було показано раніше (2.33), можна замінити добутком маси твердого тіла на прискорення центра мас

$$m \vec{a}_c = \sum \vec{F}_i. \quad (4.3)$$

У випадку поступального руху твердого тіла це рівняння визначає прискорення не тільки центра мас, але і будь-якої іншої

точки, а сума сил в правій частині — це сума сил, прикладених до твердого тіла.

При обертальному русі твердого тіла навколо осі всі точки рухаються по колам, центри яких лежать на одній і тій же самій прямій, яку називають *віссю обертання*. Зрозуміло, що всі точки тіла відносно цієї осі повертаються на один і той самий кут, мають однакову кутову швидкість і однакове кутове прискорення в даний момент часу. З цими кінематичними характеристиками обертального руху ми познайомились раніше в параграфі 1.5. Тепер познайомимось з динамічними характеристиками та основними рівняннями обертального руху.

У зв'язку з незмінністю розташування окремих точок твердого тіла їх лінійні швидкості і лінійні прискорення пропорційні відстані від осі обертання. Цим пояснюється та виняткова роль, яку відіграє відстань частинок від осі обертання в динаміці обертального руху. Ця відстань входить в формули тих величин, які замінюють силу, імпульс, масу в рівняннях поступального руху.

4.2. МОМЕНТ СИЛИ ТА МОМЕНТ ІМПУЛЬСУ. РІВНЯННЯ МОМЕНТІВ

Для формулювання законів динаміки обертального руху користуються поняттям *моменту*. Момент будь-якого вектора $\vec{a}$ відносно даної точки O визначається як векторний добуток векторів $\vec{r}$ і $\vec{a}$, тобто:

$$\vec{M} = [\vec{r} \times \vec{a}], \quad (4.4)$$

де $\vec{r}$ — радіус-вектор, проведений із точки O в початок вектора $\vec{a}$.

В динаміці обертального руху користуються такими основними фізичними величинами:

а) *момент сили відносно даної точки*

$$\vec{M} = [\vec{r} \times \vec{F}]; \quad (4.5)$$

б) момент імпульсу відносно даної точки

$$\vec{L} = [\vec{r} \times \vec{p}] = [\vec{r} \times m\vec{v}]. \quad (4.6)$$

Формулою (4.6) визначається момент імпульсу окремої матеріальної точки A (частинки) з масою m . На рис. 38 а) і б) зображені напрямки моменту сили і моменту імпульсу згідно з векторними добутками (4.5) і (4.6).

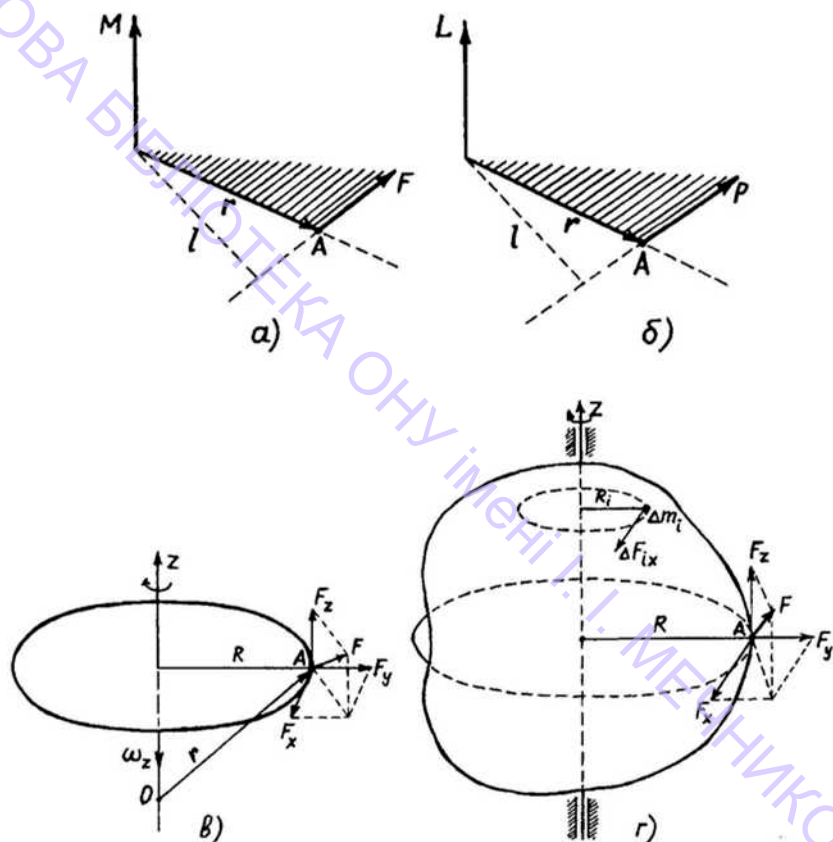


Рис. 38

Для встановлення зв'язку між $\vec{M}$ і $\vec{L}$ здиференціюємо вираз (4.6) по часу:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d[\vec{r} \times \vec{p}]}{dt} = \left[\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} \right] + \left[\vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} \right]. \quad (4.7)$$

Перший доданок дає нуль, оскільки $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$, а $\vec{v}$ паралельна $\vec{p}$. У другому доданку, згідно з законом Ньютона(2.6), можна замінити $\frac{d\vec{p}}{dt}$ на $\vec{F}$, тоді $\vec{r} \times \vec{F} = \vec{M}$, і рівняння (4.7) має вигляд:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}. \quad (4.8)$$

Рівняння (4.8) називають *рівнянням моментів*. Це є основне векторне рівняння динаміки обертального руху, де $\vec{L}$ і $\vec{M}$ – момент імпульсу і, відповідно, момент сили відносно точки.

Якщо система неінерціальна, то момент сил $\vec{M}$ включає в себе як момент сил взаємодії, так і момент сил інерції відносно тієї ж точки.

Помножимо обидві частини рівняння (4.8) на dt , отримаємо:

$$d\vec{L} = \vec{M}dt. \quad (4.9)$$

Цей вираз визначає елементарну зміну вектора $\vec{L}$. Інтегруючи його за часом, знайдемо приращення вектора $\vec{L}$ за кінцевий проміжок часу t .

$$\vec{L}_2 - \vec{L}_1 = \int_0^t \vec{M}dt. \quad (4.10)$$

Величину справа називають *імпульсом моменту сили*. Таким чином, приращення моменту імпульсу частинки за проміжок часу дорівнює імпульсу моменту сил за цей самий проміжок.

Розповсюдимо рівняння (4.9) на систему матеріальних точок. Для цього запишемо його для кожної точки окремо у вигляді:

$$\frac{d\vec{L}_i}{dt} = \vec{M}_i, \quad (4.11)$$

де під $\vec{M}_i$ будемо розуміти момент всіх діючих на точку сил як внутрішніх, так і зовнішніх. Потім складемо всі рівняння.

При такому складанні моменти внутрішніх сил виключаються, оскільки внутрішні сили входять в систему попарно. Вони направлені в протилежні сторони і діють вздовж одної і тої ж прямої. Моменти таких двох сил, а відповідно, і моменти всіх внутрішніх сил дорівнюють нулю. Внаслідок цього отримаємо рівняння моментів для системи матеріальних точок у вигляді:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}_{\text{зовн.}} \quad (4.12)$$

Похідна по часу від моменту імпульсу системи матеріальних точок відносно довільної нерухомої точки дорівнює геометричній сумі моментів всіх зовнішніх сил відносно тієї самої точки.

Розглянемо момент сили і момент імпульсу якоїсь частинки відносно деякої точки O на осі z . Нехай відносно точки O момент сили, що діє на частинку, дорівнює $\vec{M}$, а її момент імпульсу — $\vec{L}$. Моментом імпульсу відносно осі z називають проекцію на цю вісь вектора $\vec{L}$, визначеного відносно довільної точки O даної осі. Аналогічно вводять поняття і моменту сил відносно осі. Їх позначають відповідно L_z і M_z .

В проекції на вісь z рівняння моментів (4.8) має вигляд:

$$\frac{dL_z}{dt} = M_z \quad (4.13)$$

Тобто похідна по часу від моменту імпульсу відносно осі z дорівнює моменту сили відносно тієї ж осі. Звертаємо увагу, що рівняння (4.13) є скалярним рівнянням.

Враховуючи зв'язок між лінійною і кутовою швидкостями (1.38), проекцію моменту імпульсу частинки на вісь z записують так:

$$L_z = mR^2\omega_z, \quad (4.14)$$

де m — маса частинки, R — відстань частинки від осі z , яку називають *плечем*, ω_z — проекція кутової швидкості ω , з якою повертається радіус-вектор $\vec{r}$ частинки.

Аналогічно можна виразити і проекцію моменту сили на вісь z :

$$M_z = R \cdot F_x, \quad (4.15)$$

де F_x — проекція сили на вісь x , перпендикулярну осям z і y . Саме ця проекція сили (рис. 38 в) створює обертовий момент відносно осі z .

Як бачимо, проекції L_z і M_z не залежать від вибору точки O на осі z , відносно якої вибрані вектори $\vec{L}$ і $\vec{M}$. Крім того, видно, що L_z і M_z — величини алгебраїчні, їх знак залежить від знаків проекцій F_x і ω_z .

4.3. ОБЕРТАННЯ ТВЕРДОГО ТІЛА НАВКОЛО ОСІ

Розіб'ємо тверде тіло, що обертається навколо осі z з кутовою швидкістю ω , на елементарні маси Δm_i і, скориставшись формулою (4.14), запишемо для кожної з них проекцію моменту імпульсу на вісь z : $L_{iz} = \Delta m_i R_i^2 \omega_z$. Просумуємо ці проекції для всіх елементарних мас, а також врахуємо, що ω_z для всіх мас однакова, тоді отримаємо момент імпульсу твердого тіла відносно осі z у вигляді:

$$L_z = \sum_{i=1}^n L_{iz} = \left(\sum \Delta m_i R_i^2 \right) \omega_z. \quad (4.16)$$

Позначивши величину в круглих дужках через I , отримаємо:

$$L_z = I \omega_z, \quad (4.17)$$

де I називають *моментом інерції твердого тіла відносно осі z* . Таким чином, момент імпульсу твердого тіла відносно осі z дорівнює добутку моменту інерції на кутову швидкість твердого тіла відносно цієї ж осі.

Момент інерції твердого тіла розраховують таким чином:

$$I = \sum_{i=1}^n \Delta m_i R_i^2, \quad (4.18)$$

тут R_i — відстань елементарної маси Δm_i від осі обертання.

Як бачимо, момент інерції твердого тіла залежить від розподілу мас відносно осі і є адитивною скалярною величиною. Порівнюючи формулу (4.17) для моменту імпульсу при обертальному русі з формулою для імпульсу $p = mv$ при поступальному русі, можна зробити такий висновок: момент інерції при обертальному русі є аналогом маси при поступальному русі. При поступальному русі маса характеризує інерційні властивості тіла, при обертальному русі інерційні властивості тіла характеризує момент інерції.

В СІ момент інерції вимірюється в кгм^2 .

Розрахувати момент інерції твердого тіла можна за формулою:

$$I = \int r^2 dm = \int \rho r^2 dV, \quad (4.19)$$

де dm і dV — маса і елемент об'єму тіла, що знаходиться на відстані r від осі, а ρ — густина тіла.

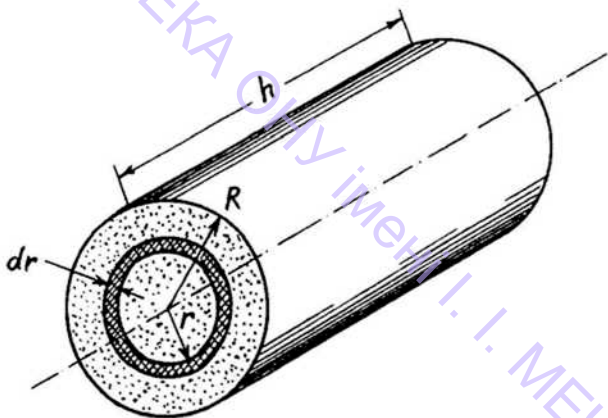


Рис. 39

Для деяких однорідних, симетричних твердих тіл момент інерції відносно осі, що проходить через центр мас тіла, легко розрахувати, користуючись формулою (4.19). Для прикладу розрахуємо момент інерції однорідного суцільного циліндра відносно геометричної осі. Для цього розіб'ємо умовно його на тонкі циліндричні шари товщиною dr , частинки яких зна-

ходяться на однаковій відстані від осі (рис. 39). Якщо радіус такого шару r , то маса частинок, що знаходиться в ньому, дорівнює $dm = \rho dV = 2\pi r h \rho dr$, де h — висота циліндра, ρ — густина речовини, а dr — товщина шару. Момент інерції шару буде дорівнювати $dI = dm r^2 = 2\pi r^3 h \rho dr$. Момент інерції всього циліндра визначимо як суму моментів інерції всіх таких шарів, тобто: $I = \int dI = \int r^2 dm = 2\pi h \rho \int_0^R r^3 dr = 2\pi h \rho \frac{R^4}{4}$. Згадаємо, що маса циліндра $m = \pi R^2 h \rho$, тоді момент інерції циліндра можна записати так:

$$I = \frac{1}{2} m R^2. \quad (4.20)$$

Нижче приводяться моменти інерції інших симетричних тіл відносно геометричної осі, яка проходить через їх центр мас. Розрахунки автори рекомендують зробити самим читачам:

– тонке кільце масою m і радіусом R , $I = m R^2$ (вісь проходить перпендикулярно до площини кільця);

– тонкий стрижень масою m і довжиною l , $I = \frac{1}{12} m l^2$ (вісь перпендикулярна до l);

– брусок масою m , довжиною a і шириною b , $I = \frac{1}{12} (a^2 + b^2)$ (вісь перпендикулярна до площини ab);

– кільце масою m , зовнішнім радіусом R_1 , внутрішнім — R_2 , $I = \frac{1}{2} m (R_1^2 + R_2^2)$ (вісь перпендикулярна до площини кільця);

– суцільна куля масою m і радіусом R , $I = \frac{2}{5} m R^2$.

Розрахунок моменту інерції твердого тіла довільної форми відносно будь-якої осі, взагалі кажучи, досить складна математична задача. Проте, в окремих випадках знаходження моменту інерції значно спрощується, якщо скористатись теоремою Штейнера: *момент інерції I відносно будь-якої осі дорівнює моменту інерції I_0 відносно осі, паралельній даній і такій, що проходить через центр мас тіла, плюс добуток маси тіла на квадрат відстані між осями*

$$I = I_0 + md^2. \quad (4.21)$$

Таким чином, якщо відомий момент інерції I_0 відносно центра мас, то момент інерції відносно будь-якої осі знаходиться досить елементарно.

Повернемося до рис.38 і уявімо, що точка A є окремою частинкою твердого тіла, яке може обертатись навколо осі z , і до неї прикладена сила F (рис.38 г). Як було зазначено вище, лише F_x складова сили F приводить до обертального руху. Хоч сила F_x прикладена до однієї точки A , її обертаюча дія передається всім частинкам твердого тіла. До кожної елементарної маси Δm_i буде прикладена елементарна обертаюча сила ΔF_{ix} . Згідно з другим законом Ньютона

$$\Delta F_{ix} = \Delta m_i a_i, \quad (4.22)$$

де a_i — лінійне прискорення маси Δm_i . Помножимо обидві частини цього рівняння на радіус кола R_i , що описується елементарною масою, а також виразимо згідно (1.43) лінійне прискорення через кутове β , тоді отримаємо:

$$\Delta F_{ix} \cdot R_i = \Delta m_i R_i^2 \beta. \quad (4.23)$$

Врахуємо, що $\Delta F_{ix} \cdot R_i = \Delta M_i$ є момент сили, прикладений до елементарної маси, а $\Delta m_i R_i^2 = \Delta I_i$ є момент інерції цієї маси і рівняння (4.23) запишемо так:

$$\Delta M_i = \Delta I_i \beta. \quad (4.24)$$

Запишемо аналогічно рівняння для всіх частинок твердого тіла і складемо їх, тоді отримаємо:

$$\sum_{i=1}^n \Delta M_i = \sum_{i=1}^n \Delta I_i \beta, \quad (4.25)$$

де $\sum_{i=1}^n \Delta M_i$ — обертаючий момент, прикладений до тіла відносно осі z , а $\sum_{i=1}^n \Delta I_i = I_z$ — момент інерції твердого тіла відносно тієї ж осі. Тепер формулу (4.25) перепишемо так:

$$M_z = I_z \beta. \quad (4.26)$$

Формула (4.26) виражає основний закон динаміки обертального руху твердого тіла відносно нерухомої осі (другий закон Ньютона для обертального руху). Момент обертаючої сили, прикладеної до тіла, дорівнює добутку моменту інерції тіла на кутове прискорення тіла.

Із формули (4.26) видно, коли $M_z = \text{const}$ і момент інерції $I_z = \text{const}$, то її можна записати так:

$$M_z = I_z \frac{\omega - \omega_0}{t}, \text{ або } M_z t = I_z \omega_0 - I_z \omega, \quad (4.27)$$

де t — проміжок часу, на протязі якого кутова швидкість твердого тіла змінюється від ω_0 до ω , добуток $M_z t$ є імпульс моменту сили, а $I_z \omega$ — момент імпульсу твердого тіла. Формула (4.27) виражає закон зміни моменту імпульсу твердого тіла відносно нерухомої осі.

Зміна моменту імпульсу твердого тіла за деякий проміжок часу дорівнює імпульсу моменту сил за той самий проміжок часу.

4.4. ЗАКОН ЗБЕРЕЖЕННЯ МОМЕНТУ ІМПУЛЬСУ

Якщо в рівнянні моментів для замкнутої системи матеріальних точок (4.12) результуючий момент сили $\overline{M}_{\text{зовн.}} = 0$, то $\frac{d\overline{L}}{dt}$ також дорівнює нулю. Це означає, що $\overline{L}$ для даної системи залишається сталою величиною:

$$\overline{L} = \text{const.} \quad (4.28)$$

Це є закон збереження моменту імпульсу: *момент імпульсу замкнутої системи точок відносно будь-якої довільної нерухомої точки не змінюється з часом.*

Закон збереження моменту імпульсу, подібно законам збереження імпульсу і енергії, є фундаментальним законом природи. В теоретичній фізиці показано, що цей закон є наслідком ізотропності простору. Ізотропність простору означає, що при повороті в ньому замкнутої системи, інакше кажучи, при зміні

осей координат, фізичні властивості замкнутої систем і її закони руху не змінюються.

Із основного закону динаміки обертального руху твердого тіла відносно нерухомої осі (4.26), а також закону зміни моменту імпульсу (4.27) видно, що коли

$$M_z = 0, \text{ то } I_z \omega = \text{const.} \quad (4.29)$$

Якщо результуючий момент всіх зовнішніх сил, прикладених до твердого тіла відносно нерухомої осі, дорівнює нулю, то момент імпульсу відносно тої самої осі не змінюється з часом.

Зокрема, це справедливо для замкнутої системи тіл. При незмінному моменті інерції і відсутності моменту зовнішніх сил кутова швидкість обертання оз залишається сталою величиною. Якщо ж момент інерції в результаті дії внутрішніх сил змінюється, то одночасно змінюється і кутова швидкість таким чином, щоб добуток $I\omega$ залишався сталою величиною. Ілюстративним прикладом дії цього положення є лава Жуковського, яка може обертатися навколо вертикальної осі. На лаві стоїть людина з гантелями в руках і обертається з кутовою швидкістю ω . Якщо людина почне зводити і розводити руки, то вона буде змінювати момент інерції, при цьому, відповідно до закону $I\omega = \text{const}$ буде змінюватись кутова швидкість обертання. При наближенні рук до грудей момент інерції зменшується, а кутова швидкість збільшується, і навпаки, — розвівши руки з гантелями в сторони, людина збільшує момент інерції, при цьому кутова швидкість зменшується в стільки ж разів.

На законі збереження моменту імпульсу оснований також дослід з колесом, що тримає людина над головою, яка стоїть на лаві Жуковського. Якщо закручувати колесо в одну сторону, то лава з людиною будуть обертатись в протилежну. Розглянуті вище приклади вказують на те, що внутрішні сили можуть викликати зміну моментів імпульсів окремих частин тіла, але не можуть змінити момент імпульсу всієї системи. Якщо внутрішні сили призводять до обертання окремих частин водному напрямку, то інша частина почне обертатись в протилежному напрямку. Цим користуються космонавти в стані невагомості.

Прикладами застосування закону збереження моменту імпульсу в техніці служать гелікоптери. Коли основний гвинт, що створює піднімальну силу, не обертається, момент імпульсу системи гвинт — корпус дорівнює нулю. Коли ж гвинт починає обертатись, корпус, згідно з законом збереження імпульсу, повинен обертатись в протилежну сторону. Щоб усунути таке обертання, в хвостовій частині корпусу існує рульовий гвинт, який створює тягове зусилля, спрямоване в сторону, протилежну обертанню корпусу гелікоптера.

На векторному характері збереження моменту імпульсу заснована робота гіроскопів, приладів, вісь обертання яких зберігає свій напрямок у просторі. В побуті закон збереження моменту імпульсу використовують фігуристи на ковзанах при виконанні, наприклад, фігур «дзига», спортсмени при виконанні акробатичних номерів, балерина, що виконує пірует, та інші. Закон збереження моменту імпульсу лежить в основі руху планет по своїм орбітам, так, закони Кеплера є наслідком закону збереження моменту імпульсу.

4.5. КІНЕТИЧНА ЕНЕРГІЯ ТА РОБОТА ПРИ ОБЕРТАЛЬНОМУ РУСІ

Розіб'ємо тверде тіло, що обертається навколо осі OO' на елементарні маси і знайдемо кінетичні енергії кожної з них:

$$\Delta W_i = \frac{\Delta m_i v_i^2}{2}. \quad (4.30)$$

Виразимо лінійну швидкість маси Δm_i через кутову, а саме $v_i = \omega r_i$, тоді

$$\Delta W_i = \frac{\Delta m_i \omega^2 r_i^2}{2}. \quad (4.31)$$

Добуток $\Delta m_i r_i^2 = \Delta I_i$ є момент інерції кожної елементарної маси відносно осі OO' , тоді кінетичну енергію елементарної маси запишемо у вигляді

$$\Delta W_i = \frac{\Delta I_i \omega^2}{2}, \quad (4.32)$$

Кінетичну енергію твердого тіла знайдемо як суму кінетичних енергій всіх елементарних мас:

$$W = \sum_{i=1}^n \Delta W_i = \frac{\sum_{i=1}^n \Delta I_i \omega^2}{2}, \text{ або } W = \frac{I \omega^2}{2}, \quad (4.33)$$

де I — момент інерції твердого тіла відносно осі OO' .

Отриманий вираз, схожий на вираз кінетичної енергії для поступального руху тіла $W = \frac{mv^2}{2}$, але при обертальному русі роль маси виконує момент інерції, а роль лінійної швидкості — кутова швидкість.

У випадку, коли тіло приймає участь одночасно в поступальному та обертальному рухах, і вісь обертання проходить через центр мас і переміщується паралельно сама собі, загальна кінетична енергія складається із кінетичної енергії поступального руху центра мас тіла та кінетичної енергії обертального руху:

$$W = \frac{mv^2}{2} + \frac{I \omega^2}{2}. \quad (4.34)$$

Розглянемо зміну кінетичної енергії точки, що обертається навколо осі OO' під дією сили F (рис. 40).

При повороті на кут $d\varphi$ точка прикладання сили переміститься вздовж дуги на довжину dS . Тоді елементарна робота сили F на шляху dS дорівнює

$$dA = FdS, \text{ а, оскільки } dS = r d\varphi, \text{ то } dA = Fr d\varphi.$$

Оскільки $Fr = M$ є момент сили, то елементарна робота

$$dA = Md\varphi. \quad (4.35)$$

Повна робота при повороті точки на кут φ дорівнює

$$A = \int_0^{\varphi} Md\varphi. \quad (4.36)$$

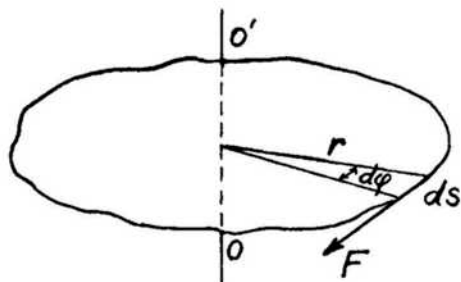


Рис. 40

Якщо момент сили — величина стала, то із співвідношення (4.36) отримаємо

$$A = M\varphi. \quad (4.37)$$

При обертовому русі робота дорівнює добутку моменту сили на кут переміщення.

Якщо ж момент сили змінюється з часом, то роботу знайдемо аналогічно, як це було в (3.17) для поступального руху.

Скориставшись $M = I\beta$ і $\beta = \frac{d\omega}{dt}$, а також (4.35), отримаємо $dA = I \frac{d\omega}{dt} d\varphi$. Оскільки $\frac{d\varphi}{dt} = \omega$, то $dA = I\omega d\omega$. Повна робота дорівнює

$$A = \int_{\omega_0}^{\omega_1} dA = \int_{\omega_0}^{\omega_1} I\omega d\omega = \frac{I\omega_1^2}{2} - \frac{I\omega_0^2}{2}. \quad (4.38)$$

Тут $\frac{I\omega_1^2}{2}$ і $\frac{I\omega_0^2}{2}$ — кінетичні енергії точки, що обертається, в кінцевому і початковому положеннях.

Ця формула справедлива і для твердого тіла, що обертається навколо осі OO' .

Таким чином, зміна кінетичної енергії при обертальному русі дорівнює роботі сил, момент яких надає тілу кутове прискорення.

КОНТРОЛЬНІ ПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ

1. Яке тіло називають абсолютно твердим?
2. Запишіть рівняння поступального руху твердого тіла.
3. Яка фізична величина відіграє виняткову роль в обертальному русі?
4. Чому дорівнює момент сили відносно точки? Як він направлений?
5. Чому дорівнює момент імпульсу частинки відносно точки? Як він направлений?
6. Запишіть і поясніть рівняння моментів відносно точки.
7. Чому дорівнює елементарна зміна моменту імпульсу?
8. Який вигляд має рівняння моментів відносно осі?
9. Яка проекція сили створює обертальний момент відносно осі?
10. Що таке момент інерції твердого тіла? Чому він дорівнює?
11. Сформулюйте і запишіть теорему Штейнера.
12. Як розрахувати момент інерції симетричних твердих тіл відносно осі?
13. Запишіть і поясніть основний закон динаміки обертального руху.
14. Сформулюйте закон збереження моменту імпульсу для твердого тіла.
15. Чому дорівнює кінетична енергія твердого тіла відносно осі при обертальному русі?
16. Як визначають роботу при обертальному русі?
17. Складіть порівняльну таблицю кінематичних і динамічних величин при поступальному і обертальному рухах.

5.1. ЗАГАЛЬНІ ПОНЯТТЯ ДЛЯ ОПИСУ
РУХУ РІДИН ТА ГАЗІВ

На відміну від твердих тіл, які мають певну форму та об'єм, рідини характеризуються лише певним об'ємом, а гази не мають ні форми, ні об'єму. За своїми властивостями рідини і гази багато в чому відрізняються. Але існує загальна властивість, що об'єднує їх, це плинність. Використовуючи цю властивість, дослідження руху рідин і газів можна проводити за допомогою однакових фізичних понять, величин та методів. Нехтуючи молекулярною будовою рідин і газів, їх розглядають як суцільне, нестисливе середовище, безперервно розподілене в просторі. Густина їх залишається сталою величиною і не залежить від часу. Для рідин і газів характерним є те, що вони не створюють опір деформації зсуву, і тому можуть змінювати свою форму під дією незначних сил. Для зміни ж об'єму потрібні значні зусилля. При цьому в рідинах і газах виникають пружні сили, які зрівноважують дію зовнішніх сил. Пружні властивості проявляються в тому, що окремі області рідин і газів діють одна на одну, або на тіла, що торкаються їх, з силою, яка залежить від ступеня стиску. Ця взаємодія характеризується величиною, яка називається тиском. Сила, що діє з боку одної області рідини на іншу, завжди перпендикулярна до площадки, на яку вона діє. *Тиск — це така фізична величина, що дорівнює відношенню нормальній сили, яка діє з боку рідини чи газу на будь-яку площадку, до її площі.*

$$p = \frac{\Delta F}{\Delta S}. \quad (5.1)$$

Якщо сила розподілена нерівномірно по площадці, то вираз (5.1) визначає середній тиск. Щоб отримати тиск в даній точці,

необхідно ΔS спрямувати до нуля, і тоді тиск визначається таким чином:

$$p = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta S} = \frac{dF}{dS}. \quad (5.2)$$

Тиск — це скалярна величина. Тиск в будь-якому місці нерухомої рідини однаковий в усіх напрямках. Це так званий *закон Паскаля*.

Одиниця тиску в системі СІ — паскаль (Па). Один паскаль дорівнює тиску, що створює сила в один ньютон, яка рівномірно і перпендикулярно діє на площадку 1 кв. м

$$\left(1 \text{ Па} = \frac{1 \text{ Н}}{1 \text{ м}^2} \right).$$

Щоб описати рух рідини чи газу, можна задати траєкторію і швидкість як функції від часу для кожного елементу рідини чи газу. Такий спосіб опису руху називають методом Лагранжа. Але можна слідувати не за рухом окремих елементів, а за окремими точками простору і фіксувати швидкості, з якими рухаються окремі частинки рідини чи газу в цих точках. Такий спосіб називають методом Ейлера. Стан руху рідини можна визначити, якщо для кожної точки простору, де рухається рідина, буде відомий вектор швидкості як функція часу. Сукупність векторів швидкості у всіх точках простору утворює так зване *поле вектора швидкості*. Це поле можна зобразити за допомогою ліній течії. *Лінією течії називають лінію, дотична до якої в кожній точці співпадає з вектором швидкості* (рис. 41а).

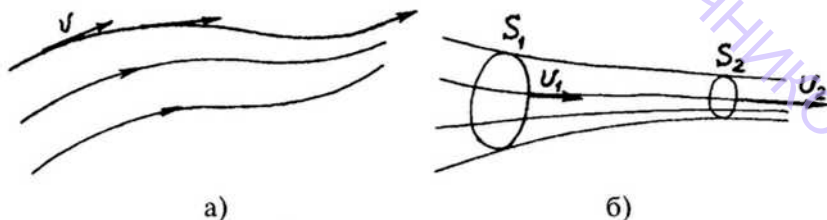


Рис. 41

Лінії течії проводять так, щоб їх густина (яка характеризує відношення числа ліній AN до величини площадки AS , перпендикулярно розташованої до ліній течії) була б пропорційна величині швидкості в даному місці. Тоді в місцях, де густина ліній течії велика, швидкість буде велика, і навпаки, де швидкість мала, лінії течії будуть розташовані рідко.

Оскільки величина і напрямок швидкості в кожній точці простору можуть змінюватись, лінії течії також змінюються. Якщо ж вектор швидкості в кожній точці поля не змінюється, то картина ліній течії також не змінюється. Така течія називається *стаціонарною*. При стаціонарній течії будь-яка частинка проходить дану точку простору з одним і тим самим значенням та напрямком швидкості. Лінії течії в цьому випадку співпадають з траєкторіями частинок. Для нестаціонарної течії такого збігу немає.

Частину рідини чи газу, що обмежена лініями течії (рис. 416), називають *трубною течією*. Вектор швидкості, будучи в кожній точці дотичний до лінії течії, буде дотичним і до поверхні трубки течії, і таким чином частинки пересікати поверхню трубки течії не можуть.

Вивчаючи рух рідин та газів, користуються ідеальним об'єктом, або *ідеальною рідиною*, яка абсолютно не стислива і повністю позбавлена внутрішнього тертя між окремими шарами при їх русі. В подальшому будемо користуватись поняттям ідеальна рідина. Всі викладки, які будуть розглянуті в наступному параграфі, також відносяться і до ідеального газу.

5.2. ОСНОВНІ РІВНЯННЯ ДИНАМІКИ РУХУ ІДЕАЛЬНОЇ РІДИНИ

Розглянемо трубку течії в ідеальній рідині, яка нестислива, і в ній відсутнє внутрішнє тертя між окремими шарами. Нехай в поперечному перерізі трубки S (рис. 416) швидкості руху частинок однакові у всіх точках перерізу. За час Δt через поперечний переріз S_1 пройде об'єм рідини $\Delta V_1 = S_1 v_1 \Delta t$, де v_1 — швидкість

течії рідини в перерізі S_1 . Через поперечний переріз S_2 за той же час пройде об'єм рідини $\Delta V_2 = S_2 v_2 \Delta t$. Оскільки рідина нестислива, то $\Delta V_1 = \Delta V_2$. Отже,

$$S_1 v_1 = S_2 v_2 = \text{const.} \quad (5.3)$$

Добуток швидкості течії на площу поперечного перерізу трубки течії є величина стала для даної трубки течії. Це рівняння отримало назву *рівняння нерозривності* для нестисливої рідини. В місцях, де площа поперечного перерізу мала, швидкість течії буде велика, і навпаки. Якщо трубка течії має змінний переріз, то швидкість руху частинок буде змінюватись, тобто вони будуть рухатись з прискоренням.

Це прискорення для горизонтальної трубки течії може бути зумовлене різним тиском. В місцях, де швидкість менша — тиск буде більшим, і навпаки.

Встановимо кількісний зв'язок між швидкістю та тиском в різних поперечних перерізах трубки течії. Для цього в нестисливій ідеальній рідині виділимо трубку течії (рис. 42) змінного поперечного перерізу. Розглянемо об'єм рідини, обмежений стінками трубки і перерізами S_1 і S_2 .

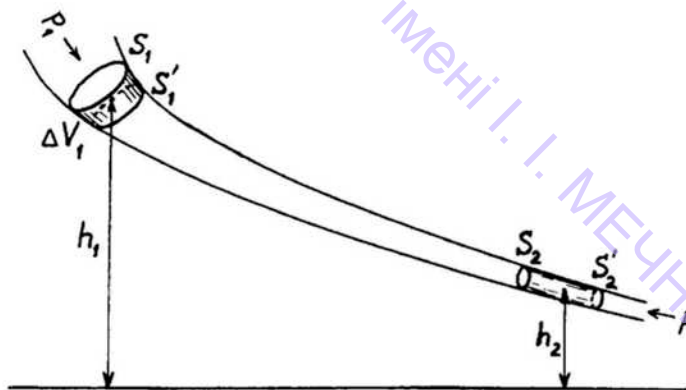


Рис. 42

Оскільки рідина ідеальна, тобто в ній відсутні сили тертя, то течію можна вважати консервативною, і для виділено-

го об'єму застосувати закон збереження механічної енергії. Приріст механічної енергії в даному випадку дорівнює роботі зовнішніх сил. Зовнішніми силами будуть сили тяжіння і сили тиску, що діють на перерізи S_1 і S_2' . За малий проміжок часу Δt об'єм обмежений перерізами S_1 і S_2 , переміститься вздовж трубки течії.

Переріз S_1 займе положення S_1' , а переріз S_2 — положення S_2' . Енергія об'єму зміниться, але, оскільки потік стаціонарний, то енергія частини об'єму між S_1' і S_2 залишиться сталою, а зміна енергії відбудеться з ділянками S_1S_1' і S_2S_2' . Ці ділянки можна вважати циліндричними, а їх об'єми рівні між собою. Оскільки рідина нестислива, то будуть однакові і їх маси:

$$\rho S_1 v_1 \Delta t = \rho S_2 v_2 \Delta t = \rho \Delta V = m, \quad (5.4)$$

де ρ — густина рідини.

Зовнішня сила, зумовлена тиском p_1 , дорівнює $F_1 = p_1 S_1$, а тиском p_2 — відповідно $F_2 = p_2 S_2$. Робота сили F_1 дорівнює $A_1 = p_1 S_1 l_1$, де $l_1 = v_1 \Delta t$. Тоді $A_1 = p_1 S_1 v_1 \Delta t$, а робота сили F_2 дорівнює відповідно $A_2 = p_2 S_2 v_2 \Delta t$. Оскільки сила F_2 спрямована проти руху, то її робота буде від'ємною.

Робота сили тяжіння дорівнює зміні потенціальної енергії при переміщенні ділянки з положення S_1S_1' в положення S_2S_2' :

$$A_{\text{тяж}} = mgh_1 - mgh_2, \text{ або}$$

$$A_{\text{тяж}} = \rho S_1 v_1 \Delta t gh_1 - \rho S_2 v_2 \Delta t gh_2. \quad (5.5)$$

Застосуємо закон збереження механічної енергії: приріст кінетичної енергії дорівнює сумі робіт сили тяжіння і сили тиску:

$$W_2 - W_1 = A_{\text{тяж}} + A_{\text{тиску}}, \quad (5.6)$$

або

$$\frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = mg(h_1 - h_2) + p_1 S_1 v_1 \Delta t - p_2 S_2 v_2 \Delta t. \quad (5.7)$$

Поділимо ліву і праву частину рівняння (5.7) на об'єм $\Delta V = S_1 v_1 \Delta t = S_2 v_2 \Delta t$ і, враховуючи, що $m = \rho \Delta V$, отримаємо:

$$\frac{\rho v_2^2}{2} - \frac{\rho v_1^2}{2} = \rho g (h_1 - h_2) + p_1 - p_2. \quad (5.8)$$

Перенесемо члени з індексом 2 в ліву частину рівняння, а з індексом 1 — в праву, тоді останнє рівняння має вигляд:

$$\frac{\rho v_2^2}{2} + \rho g h_2 + p_2 = \frac{\rho v_1^2}{2} + \rho g h_1 + p_1. \quad (5.9)$$

Оскільки перерізи вибрані довільно, можна стверджувати, що для будь-якого поперечного перерізу трубки течії виконується умова:

$$\frac{\rho v^2}{2} + \rho g h + p = \text{const.} \quad (5.10)$$

Це рівняння називають *рівнянням Бернуллі для стаціонарного потоку ідеальної рідини*. Воно є математичним виразом закону збереження питомої механічної енергії. Його можна на практиці застосовувати і для реальних рідин, внутрішнє тертя в яких невелике, а також для газів при швидкостях, менших за швидкість звуку. Величину $\frac{\rho v^2}{2}$ називають *динамічним тиском*. Це тиск, зумовлений рухом рідини. Величину $\rho g h$ — *гідростатичним тиском*. Це тиск, зумовлений силою тяжіння. Величину p у формулі (5.10) називають *статичним тиском*. Таким чином, рівняння Бернуллі можна сформулювати так: *для даної трубки стаціонарної течії ідеальної рідини сума динамічного, гідростатичного і статичного тисків є величина стала*.

Якщо трубка горизонтальна, перепадів тиску, зумовлених силою тяжіння, немає, то формула (5.10) приймає вигляд:

$$\frac{\rho v^2}{2} + p = \text{const.} \quad (5.11)$$

Із формули видно, що статичний тиск буде меншим у тих точках, де швидкість більша. Згідно з рівнянням нерозривності (5.3), швидкість буде більша в місцях, де поперечний переріз буде меншим. Тому в трубках змінного поперечного перерізу в звужених місцях тиск буде меншим, ніж в широких.

Розглянемо рідину, налиту в посудину висотою h , внизу якої є отвір, через який витікає вода. Знайдемо швидкість, з якою витікає вода з отвору (рис. 43). Посудину з отвором внизу можна розглянути як трубку течії змінного перерізу і застосувати для неї рівняння Бернуллі для перерізів S_1 (на поверхні посудини) і S_2 для отвору:

$$\frac{\rho v_1^2}{2} + \rho g h_1 + p_1 = \frac{\rho v_2^2}{2} + \rho g h_2 + p_2. \quad (5.12)$$

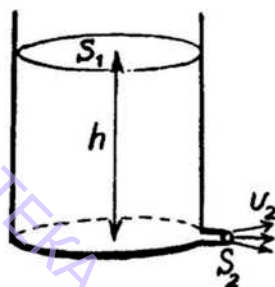


Рис. 43

Враховуючи, що $p_1 = p_2 = p_0$ є атмосферний тиск, а висота $h_2 = 0$, рівняння (5.12) має вигляд:

$$\frac{\rho v_2^2}{2} - \frac{\rho v_1^2}{2} = \rho g h_1. \quad (5.13)$$

Скориставшись рівнянням нерозривності (5.3), маємо $v_1 = \frac{v_2 S_2}{S_1}$. Підставляючи це значення у формулу (5.13), отрима-

ємо: $\frac{\rho v_2^2}{2} \left(1 - \frac{S_2^2}{S_1^2} \right) = \rho g h$, звідки

$$v_2 = \sqrt{2gh / \left(1 - \frac{S_2^2}{S_1^2} \right)}. \quad (5.14)$$

Ця формула має назву формули Торрічеллі.

Якщо $S_2 \ll S_1$, то $v_2 = \sqrt{2gh}$. Рідина витікає з отвору з такою ж швидкістю, яку буде мати тіло при вільному падінні з висоти h .

Рівняння Бернуллі знайшло широке застосування в техніці. На його основі працюють карбюратори, пульверизатори, інгалятори та інші розбризкуючі рідину пристрої. В основу роботи цих пристроїв покладений принцип створення в звужених місцях потоку великих швидкостей. Згідно з рівнянням Бернуллі, тиск в тих місцях буде нижчий, ніж атмосферний. Цю різницю тисків і використовують для технічних цілей.

5.3. ГІДРОДИНАМІКА РЕАЛЬНИХ РІДИН

На відміну від ідеальних, реальні рідини та гази мають в'язкість, або інакше кажучи — внутрішнє тертя.

При переміщенні одних шарів в рідині чи газах відносно інших між ними виникають сили тертя, які в рідині зумовлені силами взаємодії між молекулами, а в газах передачею імпульсу.

Від чого залежить сила тертя?

Розглянемо такий дослід. В рідину помістимо дві паралельні пластини (рис. 44). Нижня пластина нерухома, а верхня рухається відносно нижньої із швидкістю v . Дослід показує, що для переміщення верхньої пластини із сталою швидкістю v , необхідно по дотичній до неї прикласти силу F . Оскільки верхня пластинка прискорення не отримує, це означає, що дія цієї сили врівноважується силою тертя $F_{\text{тр}}$, що існує між пластиною та рідиною.

Змінюючи швидкість пластинки v , площу пластинки S і відстань між ними d , знаходимо, що сила тертя дорівнює

$$F_{\text{тр}} = \eta \frac{v}{d} S, \quad (5.15)$$

де η — коефіцієнт пропорційності, який залежить від роду та стану рідини чи газу і називається *коефіцієнтом в'язкості*, або *коефіцієнтом внутрішнього тертя*.

Така ж сама формула буде справедлива для будь-яких площадок, що знаходиться на відстані dz при різниці швидкостей між ними dv , тобто

$$F_{\text{тр}} = \eta \frac{dv}{dz} S. \quad (5.16)$$

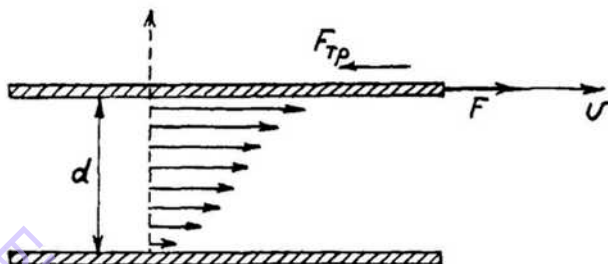


Рис. 44

Величину $\frac{dv}{dz}$ називають градієнтом швидкості. Вона показує, як швидко змінюється швидкість в напрямку осі z . (В даному випадку це модуль градієнта швидкості, сам градієнт — це векторна величина.)

Коефіцієнт в'язкості в системі СІ виражається в паскаль секунда (Па·с). Розмірність його $\left[\frac{\text{кг}}{\text{м} \cdot \text{сек}} \right]$. В системі СГС коефіцієнт в'язкості вимірюється в пуазах, розмірність його $\left[\frac{\text{г}}{\text{см} \cdot \text{сек}} \right]$.

Для газів коефіцієнт в'язкості в сотні разів менший, ніж в рідинах. Він залежить від температури. Із збільшенням температури коефіцієнт в'язкості для рідин зменшується, для газів — збільшується. Це пояснюється різними механізмами виникнення сили тертя в рідинах і газах.

Якщо розглядати стаціонарну течію в тонких трубках, то, на відміну від ідеальної рідини, де швидкість однакова по всьому поперечному перерізу, в реальних рідинах швидкість в поперечному перерізі буде різною. Через наявність тертя між шарами швидкість у стінок буде дорівнювати нулю, а посередині трубки буде максимальна (рис. 45).

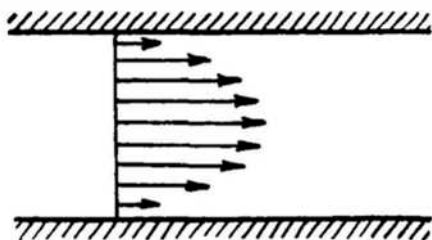


Рис. 45

В гідродинаміці існують два режими течії — *ламіна́рний* і *турбулентний*.

Ламінарна течія спостерігається при невеликих швидкостях, коли один шар рідини ковзає відносно сусіднього, не перемішуючись з ним. При турбулентній течії частинки рідини мають складові швидкості, перпендикулярні до течії, тому вони можуть переходити з одного шару в інший і утворювати вихори. Турбулентні течії спостерігаються при великих швидкостях і великих градієнтах швидкостей. Характер течії визначають за допомогою безрозмірної величини, яку називають *числом Рейнольдса*:

$$Re = \frac{\rho v r}{\eta}, \quad (5.17)$$

де ρ — густина рідини чи газу; v — середня швидкість, r — характерний лінійний розмір (радіус кулі, діаметр труби), η — коефіцієнт в'язкості.

Відношення

$$\nu = \frac{\eta}{\rho} \quad (5.18)$$

називають *кінематичною в'язкістю*. З врахуванням кінематичної в'язкості число Рейнольдса має такий вигляд:

$$Re = \frac{v r}{\nu}. \quad (5.19)$$

Якщо число Рейнольдса менше за 1000, то буде спостерігатись ламінарна течія, а при більших — турбулентна.

Число Рейнольдса може служити також критерієм подібності для течії в трубах, каналах та ін. Характер течії різних рідин чи газів в трубах різних перерізів буде однаковий, якщо для кожної течії буде одне і те саме число Рейнольдса.

Розглянемо ламінарний потік реальної рідини в тонких циліндричних трубках. Виділимо в потоці циліндр довжиною l і радіусом r (рис. 46).

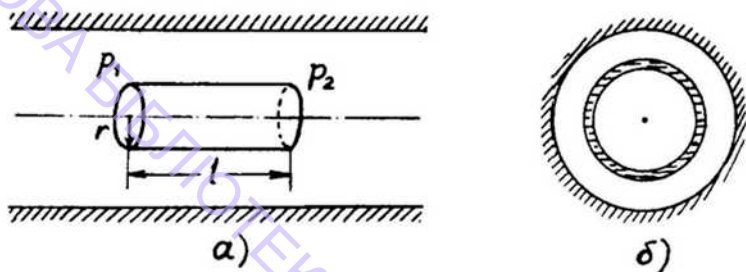


Рис. 46

Оскільки рідина реальна і в ній існують сили тертя, то на зовнішню бокову поверхню циліндра буде діяти сила тертя, яка, згідно (5.16), дорівнює

$$F = \eta \frac{dv}{dr} 2\pi r l, \quad (5.20)$$

де $2\pi r l$ — бокова поверхня циліндра. Рух рідини, а відповідно, і циліндра рівномірний, це означає, що сила тертя повинна врівноважуватись силою, що зумовлена різницею тисків на торцеві поверхні циліндра, а саме:

$$-\eta \frac{dv}{dr} 2\pi r l = \pi r^2 (p_1 - p_2). \quad (5.21)$$

Знак « $-$ » в лівій частині рівняння зумовлений тим, що градієнт $\frac{dv}{dr} < 0$, швидкість зменшується із збільшенням r . Із (5.21) маємо:

$$dv = -\frac{p_1 - p_2}{2\eta l} r dr. \quad (5.22)$$

Зінтегруємо це рівняння:

$$\int_0^v dv = -\frac{p_1 - p_2}{2\eta l} \int_R^r r dr. \quad (5.23)$$

Тут нижня границя інтегрування відповідає шару рідини, що «прилип» до стінок трубки, а верхня границя — змінна. Після інтегрування отримаємо параболічну залежність швидкості шарів рідини від відстані їх до осі трубки (рис. 45):

$$v = \frac{p_1 - p_2}{4\eta l} (R^2 - r^2) \quad (5.24)$$

Найбільша швидкість буде посередині труби

$$v_{\max} = \frac{p_1 - p_2}{4\eta l} R^2. \quad (5.25)$$

Щоб визначити об'єм рідини, що протікає за одиницю часу через поперечний переріз труби, слід розбити його на кільця шириною dr (рис. 46б). Об'єм рідини dV , що протікає за одиницю часу через кільце, дорівнює

$$dV = 2\pi r v dr. \quad (5.26)$$

Весь об'єм знайдемо, інтегруючи цей вираз по r від 0 до R . Підставляючи в цю формулу v із (5.24) після інтегрування отримаємо:

$$V = \frac{(p_1 - p_2)\pi R^4}{8\eta l}. \quad (5.27)$$

Формула носить назву *формули Пуазейля*.

Формула Пуазейля лежить в основі приладів, які використовують для знаходження коефіцієнта в'язкості рідин і газів. Ці прилади називають віскозиметрами. В віскозиметрах всі величини, що входять в формулу (5.27), відомі, і коефіцієнт в'язкості розраховують за формулою:

$$\eta = \frac{(p_1 - p_2)\pi R^4}{8Vl}. \quad (5.28)$$

Проведемо аналогію між формулою Пуазейля і законом Ома $I = \frac{U}{R}$ в електриці для ділянки кола без джерела струму. Різниця потенціалів U відповідає різниці тисків, сила струму I — об'єму рідини, що протікає через поперечний переріз за одиницю часу, а електричний опір — *гідравлічному опору*:

$$R = \frac{8\eta l}{\pi R^4}. \quad (5.29)$$

Аналогія між електричним і гідравлічними опорами дозволяє в деяких випадках скористатись правилом знаходження опору послідовно та паралельно з'єднаних труб чи судів. Так, наприклад, загальний опір трьох послідовно з'єднаних судів з різними опорами (рис. 47а) дорівнює $R = R_1 + R_2 + R_3$.

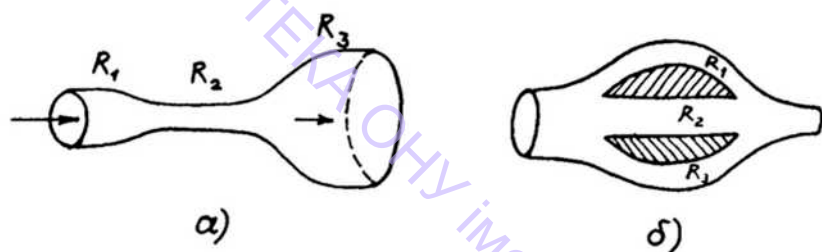


Рис. 47

При паралельному з'єднанні труб чи судів (рис. 47б) опір дорівнює

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}.$$

Коефіцієнт в'язкості можна знайти також по методу Стокса. Рідину, коефіцієнт в'язкості якої визначають, наливають у вертикальну скляну трубку. Зверху пускають кульку відомого радіуса r і густини ρ_k . На кульку будуть діяти сили тяжіння $\frac{4}{3}\pi r^3 \rho_k g$, сила Архімеда $\frac{4}{3}\pi r^3 \rho_p g$ і сила тертя, яка, згідно з законом Сток-

са, дорівнює $F_{\text{пр}} = 6\pi r \eta v$. Коли сили врівноважуються, кулька починає рухатись з постійною швидкістю v , яку можна визначити $v = \frac{S}{t}$. Тоді із умови рівноваги сил

$$\frac{4}{3}\pi r^3 \rho_k g - \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_p g = 6\pi r \eta v \quad (5.30)$$

можна знайти коефіцієнт в'язкості рідини

$$\eta = \frac{2(\rho_k - \rho_p)}{9} \frac{gr^2}{v}. \quad (5.31)$$

В практиці користуються також ротаційними віскозиметрами, в яких досліджувана рідина знаходиться в зазорі між двома дисками чи циліндрами, що знаходяться на одній осі. Один з них нерухомий, а другий обертається з відомою кутовою швидкістю. Коефіцієнт в'язкості знаходять по залежності моменту сили, що діє на нерухомий диск чи циліндр, від кутової швидкості.

В медицині для визначення в'язкості крові використовують віскозиметр Гесса, в основі якого лежить формула Пуа-зейля. Коефіцієнт в'язкості крові людини в нормі становить 4-5 мПа-с, при патології коливається в границях 1,7-23 мПа-с. Венозна кров має дещо більший коефіцієнт в'язкості, ніж артеріальна. При великих фізичних навантаженнях в'язкість крові зростає. Деякі інфекційні захворювання збільшують в'язкість крові, інші, наприклад, черевний тиф, туберкульоз — зменшують. На в'язкість крові мають вплив деякі фармацевтичні препарати.

КОНТРОЛЬНІ ПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ

1. Що таке тиск та в яких одиницях він вимірюється?
2. Які способи опису руху рідин чи газів Ви знаєте?
3. Що таке лінія течії, трубка течії?
4. Яку течію називають стаціонарною?
5. Що таке ідеальна рідина?

6. Сформулюйте та запишіть рівняння нерозривності.
7. Чому в широких і глибоких місцях русла річки швидкість течії менша, ніж у вузьких і мілких?
8. Сформулюйте і запишіть рівняння Бернуллі.
9. Який фундаментальний закон відображає рівняння Бернуллі?
10. В яких місцях трубки змінного перерізу тиск буде більшим? Поясніть чому.
11. Як розрахувати швидкість рідини, що витікає з отвору посудини, розташованому в нижній частині?
12. Чим відрізняється реальна рідина від ідеальної?
13. Чому дорівнює сила тертя між окремими шарами рідини?
14. Що таке коефіцієнт в'язкості? В яких одиницях він вимірюється?
15. Що таке число Рейнольдса?
16. Яку течію називають ламінарною, а яку — турбулентною?
17. Яку залежність має швидкість шарів рідини від відстані їх до осі труби?
18. Чому дорівнює об'єм рідини, що протікає через поперечний переріз тонких трубок за одиницю часу?
19. Які способи визначення коефіцієнта в'язкості ви знаєте?
20. Що таке гідравлічний опір?

----- Розділ 6 -----

КОЛИВАННЯ І ХВИЛІ

6.1. ЗАГАЛЬНІ ВІДОМОСТІ ПРО КОЛИВАННЯ

Коливальним рухом є такий процес, при якому система, будучи виведеною із положення рівноваги, багаторазово відхиляється і кожен раз повертається до положення рівноваги.

Якщо процес повторюється через рівні проміжки часу, такі коливання називаються *періодичними*.

В залежності від фізичної природи коливання бувають різні: механічні, електромагнітні, електромеханічні, біофізичні та інші. Наприклад, коливання маятника, коливання струни, коливання напруги в електромагнітному контурі, серцебиття.

В залежності від характеру взаємодії на коливальну систему, коливання бувають: вільні, затухаючі, вимушені, автоколивання, параметричні.

Вільними називають коливання, що відбуваються в системі, яка, будучи виведеною із положення рівноваги, потім сама повертається у попередній стан і здійснює коливальні рухи без всяких втрат енергії.

Затухаючі коливання відбуваються тоді, коли в системі діють сили тертя і механічна енергія з часом переходить в теплову. Вони затухають.

Вимушеними називаються такі коливання, в процесі яких на коливальну систему діють зовнішні періодичні сили.

Автоколивання супроводжуються також дією зовнішньої періодичної сили, але момент часу, коли відбувається ця взаємодія, задається самою системою. Тобто сама коливальна система керує зовнішньою взаємодією. Наприклад — годинник.

При *параметричних* коливаннях також відбувається зовнішня взаємодія, але за рахунок неї відбувається періодична зміна якогось із параметрів системи.

Найпростішими є *гармонічні* коливання. Це такі коливання, при яких зміна фізичної величини відбувається за законом синуса чи косинуса. Цей вид коливань є дуже важливим, оскільки періодичні коливання іншої форми можуть бути представлені як сума декількох гармонічних коливань.

6.2. ГАРМОНІЧНІ КОЛИВАННЯ

Розглянемо коливання пружинного маятника (рис. 48). Виведемо кульку масою m із положення рівноваги і відпустимо її. Зі сторони пружини на кульку буде діяти сила пружності $F = -kx$, де k — коефіцієнт пружності, а x — зміщення від положення рівноваги. Оскільки рух кульки одномірний, то другий закон Ньютона буде мати такий вигляд:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx, \quad (6.1)$$

де $\frac{d^2 x}{dt^2} = a$ — прискорення кульки. Знак « $-$ » в формулі вказує на те, що зміщення і сила мають протилежні напрямки. Розділимо ліву і праву частини рівняння на масу кульки:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x. \quad (6.2)$$

Позначимо $\frac{k}{m} = \omega_0^2$. Тоді рівняння (6.2) має вигляд:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\omega_0^2 x. \quad (6.3)$$

Відносно x — це є диференціальне рівняння другого порядку. Розв'язком його може бути функція, яка, будучи два рази диференційованою, буде схожа сама на себе і відрізнятись величиною ω_0^2 і знаком « $-$ ». Відомо з математики, що такою функцією може бути синус або косинус, тобто:

$$x = A \sin(\omega_0 t + \varphi_0). \quad (6.4)$$

Таким чином, зміщення кульки від положення рівноваги відбувається за гармонічним законом.

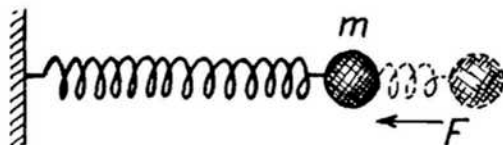


Рис. 48

Сталі величини A , ω_0 , φ_0 є характеристиками даного коливального руху. Величина ω_0 називається власною *циклічною* або *круговою* частотою. Вона дорівнює $\omega_0 = 2\pi\nu$, де ν — звичайна частота, яка показує, скільки коливань відбувається за одиницю часу. *Періодом* коливань називають час одного коливання. Період і звичайна частота пов'язані таким чином: $\nu = \frac{1}{T}$, а *циклічна частота* $\omega = \frac{2\pi}{T}$. Тобто *циклічна частота* дорівнює кількості коливань за 2π секунд. Оскільки максимальне значення синуса дорівнює одиниці, то максимальне значення зміщення x дорівнює A і називається *амплітудою* коливань. Величина x змінюється в границях від A до $-A$. Аргумент синуса $(\omega_0 t + \varphi_0)$ називають *фазою* коливань. Це є кут в даний момент часу. Величина φ_0 — *початкова фаза*, коли $t = 0$.

Із формули (6.3) *циклічна частота* дорівнює $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Тобто частота вільних коливань пружинного маятника залежить від коефіцієнта пружності пружини і маси кульки. Відповідно, *період* коливань дорівнює

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}. \quad (6.5)$$

Оскільки рух *одномірний*, то швидкість коливань $v = \frac{dx}{dt}$. Похідна від (6.4) дорівнює

$$v = \frac{dx}{dt} = A\omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0),$$

або

$$v = A\omega_0 \sin\left(\omega_0 t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right). \quad (6.6)$$

Із формули видно, що швидкість кульки також змінюється за гармонічним законом з частотою ω_0 , амплітудою $A\omega_0$ і фазою $\left(\omega_0 t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right)$. Тобто по фазі швидкість відрізняється від зміщення на кут $\frac{\pi}{2}$.

Оскільки швидкість змінюється з часом, то кулька рухається з прискоренням, яке дорівнює $a = \frac{dv}{dt}$:

$$a = \frac{dv}{dt} = -A\omega_0^2 \sin(\omega_0 t + \varphi_0),$$

або

$$a = A\omega_0^2 \sin(\omega_0 t + \varphi_0 + \pi). \quad (6.7)$$

Прискорення також змінюється з часом за гармонічним законом з такою ж частотою ω_0 , амплітудою $A\omega_0^2$ і фазою $(\omega_0 t + \varphi_0 + \pi)$, яка відрізняється від фази зміщення на π , а від фази швидкості на $\frac{\pi}{2}$. На рис. 49 зображені залежності x , v і a від часу.

Як видно, в момент проходження рівноваги $x = 0$ швидкість максимальна $\omega_0 A$, прискорення дорівнює нулю. Коли ж кулька максимально відхиляється від положення рівноваги ($x = +A$ або $x = -A$), швидкість її дорівнює нулю, а прискорення максимальне ($\omega_0^2 A$, або $-\omega_0^2 A$).

Із формул (3.13) і (6.4), а також (3.18) і (6.6) можна знайти потенціальну та кінетичну енергії коливальної системи в залежності від часу:

$$\begin{aligned} W_n &= \frac{kx^2}{2} = \frac{kA^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi_0)}{2}, \\ W_k &= \frac{kv^2}{2} = \frac{mA^2 \omega_0^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi_0)}{2}. \end{aligned} \quad (6.8)$$

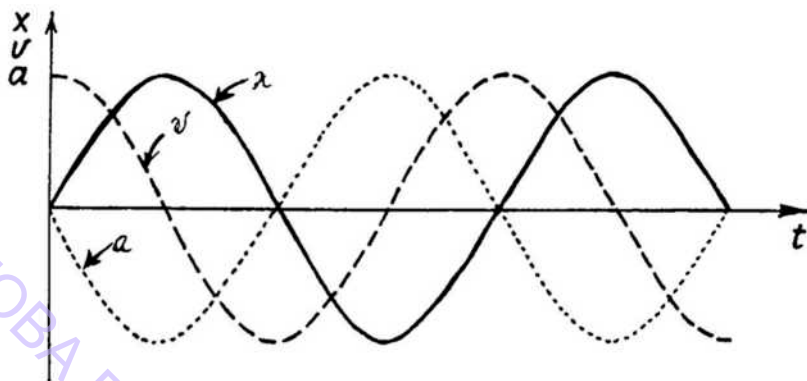


Рис. 49

Повна енергія системи при гармонічних коливаннях дорівнює

$$W = W_n + W_k = \frac{m\omega_0^2 A^2}{2}. \quad (6.9)$$

Тут враховано, що $k = m\omega_0^2$.

Таким чином, повна енергія коливальної системи пропорційна квадрату амплітуди і квадрату циклічної частоти. Кінетична і потенціальна енергії змінюються як $\sin^2(\omega_0 t + \varphi_0)$ і $\cos^2(\omega_0 t + \varphi_0)$, тобто, коли одна із них збільшується, друга зменшується. Іншими словами, процес коливання зв'язаний з періодичним переходом кінетичної енергії в потенціальну, і навпаки.

Такі ж самі висновки можна зробити, розглядаючи *математичний маятник*, який являє собою матеріальну точку, підвішену на невагомій, недеформованій нитці (рис. 50). В даному випадку замість сили пружності матеріальну точку в положення рівноваги буде повертати сила іншого походження, а саме складова сили тяжіння. Сили, які призводять до таких же самих закономірностей, незалежно від їх природи, називають *квазіпружними*.

Другий закон Ньютона для математичного маятника має вигляд:

$$m \frac{d^2 S}{dt^2} = -mg \sin \alpha. \quad (6.10)$$

Для невеликих відхилень $\sin \alpha \approx \frac{S}{l}$, тут S — зміщення, l — довжина нитки.

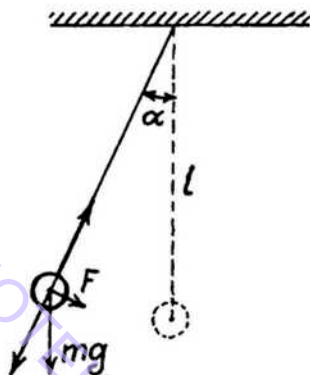


Рис. 50

Тоді остання формула буде мати такий вигляд:

$$\frac{d^2 S}{dt^2} = -\frac{g}{l} S. \quad (6.11)$$

Це рівняння аналогічне (6.2). Позначивши $\frac{g}{l} = \omega_0^2$, отримаємо

$$\frac{d^2 S}{dt^2} = -\omega_0^2 S. \quad (6.12)$$

Рішенням цього рівняння є $S = A \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$, де $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$ — циклічна частота коливань.

Період коливань математичного маятника дорівнює:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (6.13)$$

Він залежить від довжини нитки та прискорення вільного падіння і не залежить від амплітуди та маси кульки.

6.3. СКЛАДАННЯ ГАРМОНІЧНИХ КОЛИВАНЬ

Нехай тіло одночасно приймає участь в двох однаково направлених гармонічних коливаннях однакової частоти із різними фазами:

$$x_1 = A_1 \sin(\omega t + \varphi_1) \text{ і } x_2 = A_2 \sin(\omega t + \varphi_2). \quad (6.14)$$

Очевидно, що результуюче коливання буде дорівнювати алгебраїчній сумі зміщень $x = x_1 + x_2$. Після відповідних математичних дій зміщення результуючого коливання буде мати вигляд

$$x = A \sin(\omega t + \varphi_0), \quad (6.15)$$

$$\text{де } A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}, \text{ а } \operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2}.$$

Із останніх співвідношень виходить, якщо $\varphi_2 - \varphi_1 = 2\pi k$, де $k = 0, 1, 2, \dots$, то $A = A_1 + A_2$; якщо $\varphi_2 - \varphi_1 = (2k + 1)\pi$, де $k = 0, 1, 2, 3, \dots$, то $A = A_1 - A_2$. У випадку однакових амплітуд $A_1 = A_2 = A$, коли різниця фаз дорівнює непарному числу π , результуюча амплітуда буде дорівнювати нулю. Такі коливання гасять одне одного. Якщо різниця фаз дорівнює парному числу π , результуюча амплітуда дорівнює $2A$. Коливання підсилюють одно одне.

Розглянемо складання двох взаємно перпендикулярних коливань з різними амплітудами, однаковими частотами, однаковими фазами, які описуються рівняннями

$$x = A_1 \sin \omega t, \quad y = A_2 \sin \omega t. \quad (6.16)$$

Розділивши ці рівняння одне на друге, отримаємо:

$$\frac{x}{y} = \frac{A_1}{A_2}, \text{ або } y = \frac{A_2}{A_1} x. \quad (6.17)$$

Це рівняння прямої лінії. Таким чином, результуюче коливання відбувається вздовж прямої лінії, яка проходить під кутом

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{A_2}{A_1} \text{ через I та III квадранти з амплітудою } A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}.$$

Якщо різниця фаз двох взаємно перпендикулярних коливань буде дорівнювати $\frac{\pi}{2}$, рівняння коливань мають вигляд:

$$x = A_1 \sin \omega t, \quad y = A_2 \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right). \quad (6.18)$$

Перетворимо ці рівняння наступним чином:

$$\frac{x}{A_1} = \sin \omega t; \quad \frac{y}{A_2} = \cos \omega t.$$

Піднесемо до квадрату ліві і праві частини цих рівнянь і складемо їх, тоді отримаємо:

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} = 1. \quad (6.19)$$

Це рівняння еліпса. Таким чином, результуюче коливання відбувається по еліпсу з півосями, які дорівнюють амплітудам A_1 і A_2 , і за годинниковою стрілкою.

Аналогічно можна показати у випадку, коли різниця фаз буде дорівнювати π , отримаємо результуюче коливання, яке буде відбуватися вздовж прямої лінії, що проходить через II і IV квадранти.

Якщо різниця фаз буде дорівнювати $\frac{3}{2}\pi$, результуюче коливання відбувається по такому самому еліпсу, але проти годинникової стрілки. На рис. 51 показані різні види траєкторій коливань, які є результатом складання взаємно перпендикулярних коливань, що відбуваються з однаковими частотами, різними амплітудами, при різних різницях фаз $\theta = \varphi_1 - \varphi_2$.

Якщо будуть складуватись два взаємно перпендикулярні коливання з різними частотами, то траєкторії результуючих коливань будуть мати досить складний вигляд та форму. Ці траєкторії називають *фігурами Ліссажу*. Їх можна спостерігати на екрані осцилографа, якщо електронний промінь змусити завершувати коливання у взаємно перпендикулярних напрямках.

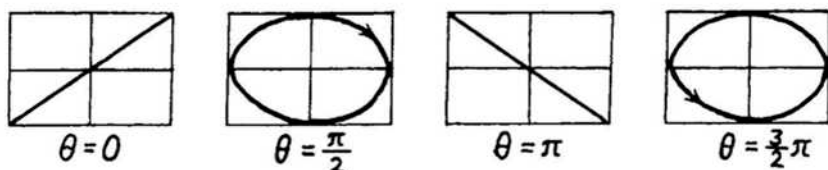


Рис. 51

6.4. ВИМУШЕНІ КОЛИВАННЯ

У реальних коливальних системах, крім квазіпружної сили, завжди діють сили тертя, дія яких призводить до зменшення механічної енергії. Вона переходить в теплову. Оскільки енергія пропорційна квадрату амплітуди, то це означає, що амплітуда коливань з часом буде зменшуватись. Коливання будуть згасаючими. Для того, щоб система здійснювала незгасаючі коливання, необхідно весь час ззовні поповнювати втрату механічної енергії. Для цього необхідно на систему подіяти зовнішньою періодичною силою. Наприклад:

$$F = F_0 \sin \omega t, \quad (6.20)$$

де F_0 — амплітудне значення сили, а ω — кругова частота коливань сили. Цю силу називають *вимушеною*, а коливання системи — *вимушеними*.

Розглянемо пружинний маятник, на який, крім сили пружності, діють сила рідинного тертя (2.25) і примушуюча сила (6.20). Другий закон Ньютона для одномірного руху має вигляд:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - b \frac{dx}{dt} + F_0 \sin \omega t. \quad (6.21)$$

Поділимо обидві частини на m , отримаємо таке рівняння:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \sin \omega t, \quad (6.22)$$

де $\beta = \frac{b}{2m}$ — коефіцієнт згасання, а $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ — власна частота.

Розв'язок цього диференціального рівняння має вигляд:

$$x = A_0 \cos(\omega t - \varphi). \quad (6.23)$$

Величина амплітуди вимушених коливань і зсув фаз відповідно дорівнюють:

$$A_0 = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}; \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad (6.24)$$

Таким чином, вимушені коливання здійснюються з частотою примушуючої сили. Амплітуда коливань залежить від частоти примушуючої сили, а також від характеристик коливальної системи. Графіки залежності амплітуди вимушених коливань від частоти зовнішньої сили при різних коефіцієнтах згасання представлені на рис. 52.

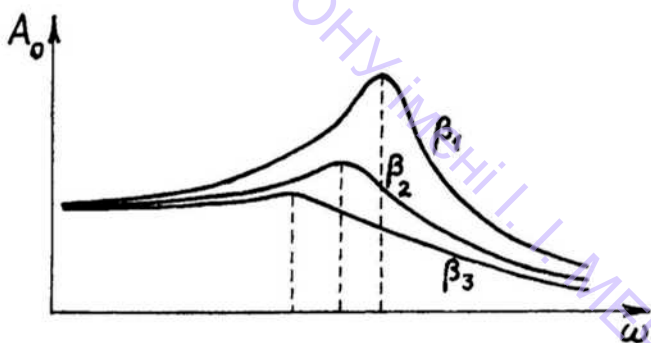


Рис. 52

Як видно із рисунка, при певній частоті амплітуда коливань досягає максимального значення. Це явище називають *резонансом*, а відповідну частоту — *резонансною частотою*.

Щоб визначити резонансну частоту, потрібно знайти максимум функцій амплітуди (6.24), або те ж саме — знайти мінімум підкореневого виразу, тобто дослідити його на екстремум.

Якщо здиференціювати підкореневий вираз по ω і прирівняти до нуля, отримаємо умову, яка визначає $\omega_{рез}$, а саме:

$$-4(\omega_0^2 - \omega^2)\omega + 8\beta^2\omega = 0, \quad (6.25)$$

звідки

$$\omega_{рез} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}. \quad (6.26)$$

Підставляючи це значення в формулу (6.24), отримаємо вираз для амплітуди при резонансі:

$$A_{рез} = \frac{F_0}{2m\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}. \quad (6.27)$$

Із формули (6.26) видно, якщо коефіцієнт затухання $\beta = 0$, тобто сил тертя немає, резонансна частота співпадає з власною частотою $\omega_{рез} = \omega_0$. Із збільшенням коефіцієнта затухання резонансна частота зменшується, рис. 52. Амплітуда коливань при резонансі також залежить від коефіцієнта затухання. Як видно із формули (6.27), а також із рис. 52, із збільшенням β резонансна амплітуда зменшується. При відсутності сил тертя $\beta = 0$ амплітуда при резонансі перетворюється в нескінченність.

При резонансі зовнішня сила діє в такт з вільними коливанням. Вона направлена по швидкості (не по зміщенню). В результаті за період ця сила виконує лише додатну роботу. Умови перекачки енергії від зовнішнього джерела, яке створює періодичну силу, найбільш сприятливі. Відповідно, і енергія вимушених коливань, а значить, і їх амплітуда, максимальні. Якщо ж частота зовнішньої сили не дорівнює власній частоті коливань системи ω_0 , то зовнішня сила лише на протязі частини періоду завершує додатну роботу. На протязі іншої частини періоду сила направлена проти швидкості і виконує від'ємну роботу. В цілому за період робота зовнішньої сили невелика і, відповідно, невелика амплітуда.

Явище резонансу спостерігається при коливаннях будь-якої природи: механічних, звукових, електричних та інших. Воно знаходить широке використання в акустиці для підсилення

звуку, в радіотехніці для підсилення електричних коливань. В багатьох випадках явище резонансу має негативне значення. Його потрібно враховувати при конструюванні різного роду машин, споруд. Власна частота їх не повинна бути близькою, а тим паче не повинна співпадати з частотою можливих зовнішніх взаємодій. Наприклад, власна частота вібрації корпусу корабля чи літака повинна досить сильно відрізнятись від частоти коливань, які можуть бути збуджені обертанням гребного гвинта чи пропелера. В протилежному випадку виникають вібрації, і може статись катастрофа.

6.5. ХВИЛЬОВІ ПРОЦЕСИ

Помістимо в пружне середовище тіло, що може завершувати коливальні рухи. Пружне середовище складається з молекул, які зв'язані між собою силами, що подібні силам пружності. Якщо тіло вивести із положення рівноваги і надати йому можливість коливатись, то сусідні з ним частинки середовища також прийдуть в коливальний рух. Коливання цих частинок завдяки силам пружності передається сусіднім частинкам, і ті також будуть завершувати коливальні рухи і т. д. Таким чином, в середовищі буде розповсюджуватись коливальний рух, який називається *хвильовим процесом*, або *хвилею*. При цьому кожна частинка завершує коливання навколо свого положення рівноваги, а в просторі розповсюджується фаза.

Місце, куди в даний момент часу дійшло коливання, називається *фронтом хвилі*. Перпендикуляр до фронту називають *променем*. В залежності від напрямку коливань частинок відносно напрямку поширення хвильового процесу відрізняють поперечні і поздовжні хвилі.

В *поздовжніх хвилях* частинки завершують коливальні рухи вздовж напрямку поширення хвилі. Вони виникають в середовищах, яким властива пружність об'єму, тобто в твердих тілах, рідинах та газах. В *поперечних хвилях* частинки завершують коливальні рухи в напрямку, перпендикулярному до напрямку

поширення хвилі. Вони виникають в середовищах, що мають пружність форми. Таким середовищам властива деформація зсуву. І тому поперечні хвилі виникають в твердих тілах. Виняток складають хвилі, що виникають на поверхні розділу рідких та газоподібних середовищ (наприклад, хвилі на воді). В них пружність форми забезпечується силою тяжіння та силою поверхневого натягу. На рис. 53 схематично зображені приклади: а) незбудженого середовища, б) поперечної, в) поздовжньої хвилі відповідно.

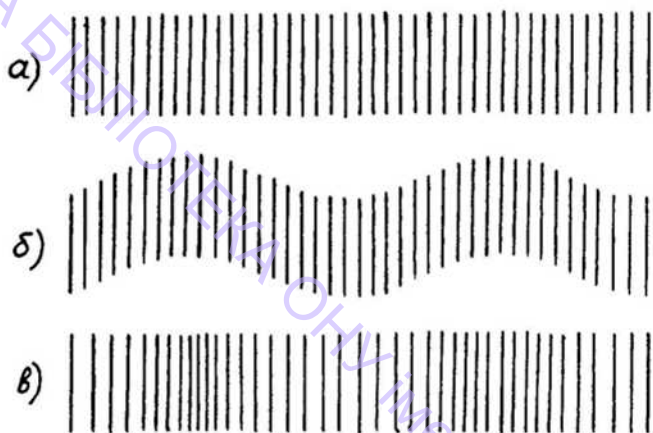


Рис. 53

Швидкістю розповсюдження хвилі називають швидкість розповсюдження фази. Швидкість хвилі залежить від властивостей середовища. Легко зрозуміти, що швидкість розповсюдження буде тим менше, чим більша густина середовища. Дійсно, чим більша маса частинок середовища, які завершують коливальні рухи, тим важче їх розкачати і тим більше часу на це потрібно. Тому в більш густому середовищі хвиля розповсюджується повільніше, ніж в менш густому. Разом з тим коливання розповсюджуються тим швидше, чим сильніший зв'язок між окремими частинками. Цей зв'язок характеризується пружними властивостями середовища, тобто залежить від коефіцієнтів пружності. Швидкість розповсюдження хвилі залежить також від температури.

тури середовища. Із збільшенням температури швидкість поширення хвиль зростає в газах і спадає в твердих тілах.

Найпростішим видом хвиль є *плоскі хвилі*. Тобто такі хвилі, фронтом яких є площина. Плоска хвиля розповсюджується вздовж одного напрямку, і коливання частинок середовища в ній відбуваються однаково в площинах, перпендикулярних до напрямку розповсюдження. Якщо коливання частинок в кожній точці підкоряється гармонічному закону, то хвиля називається *плоскою монохроматичною хвилею*.

Встановимо зв'язок між зміщенням x частинок середовища і відстанню y у цих частинок від джерела для будь-якого моменту часу. Для наочності розглянемо поперечну хвилю. Нехай коливання джерела відбуваються за законом $x = A \sin \omega t$, де A — амплітуда, ω — кругова частота. Тоді всі частинки також будуть виконувати коливальні рухи з тією ж частотою і амплітудою, але з різними фазами. В середовищі виникає синусоїдальна хвиля. Для даного моменту часу зміщення від положення рівноваги для різних частинок буде мати вигляд, зображений на рис. 54.

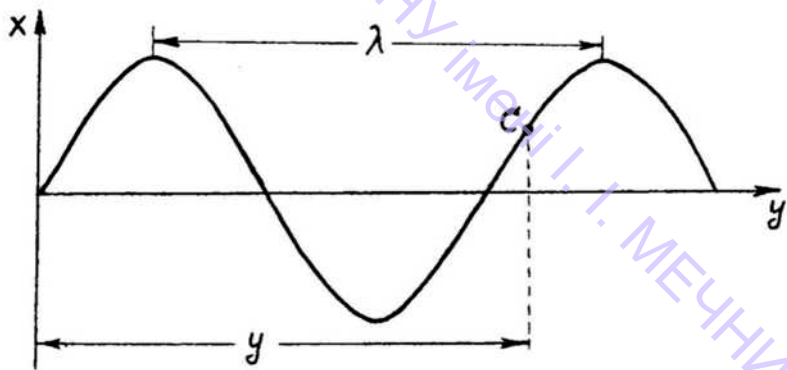


Рис. 54

Для частинки C , що знаходиться на відстані y від джерела, коливальний рух буде відставати по фазі від коливального руху

в точці $y = 0$ на час τ , який дорівнює $\tau = \frac{y}{v}$, де v — швидкість

розповсюдження фази коливань. Тоді рівняння коливань для точки C має вигляд:

$$x = A \sin \omega(t - \tau),$$

або

$$x = A \sin \omega \left(t - \frac{y}{v} \right). \quad (6.28)$$

Співвідношення (6.28) визначає зміщення від положення рівноваги для будь-якої частинки, що знаходиться на відстані y від джерела коливань, в будь-який момент часу. Це і є *рівняння хвилі*.

Враховуючи, що $\omega = \frac{2\pi}{T}$, рівняння хвилі можна представити в іншому вигляді, а саме:

$$x = A \sin \left(\frac{2\pi}{T} t - \frac{2\pi}{T} \frac{y}{v} \right). \quad (6.29)$$

Відстань між двома найближчими частинками, які в даний момент часу знаходяться в однаковій фазі, називають *довжиною хвилі*. На рис. 54 довжина хвилі зображена відстанню між двома сусідніми горбами. Очевидно, що довжина хвилі дорівнює відстані, на яку розповсюджується коливання за період T із швидкістю v :

$$\lambda = vT = \frac{v}{\nu}. \quad (6.30)$$

Враховуючи (6.30), рівняння хвилі запишемо так:

$$x = A \sin \left(\frac{2\pi}{T} t - \frac{2\pi}{\lambda} y \right). \quad (6.31)$$

Величину $\frac{2\pi}{\lambda} = k$ називають *хвильовим числом*. Воно показує, скільки довжин хвиль буде вкладатись на відрізковій довжині 2π . З врахуванням хвильового числа та циклічної частоти рівняння хвилі має вигляд:

$$x = A \sin (\omega t - ky). \quad (6.32)$$

Величина $(\omega t - ky)$ — це фаза коливань. Якщо її зафіксувати,

$$\omega t - ky = \text{const} \quad (6.33)$$

і взяти похідну за часом, то швидкість розповсюдження фази буде дорівнювати

$$v = \frac{\omega}{k}. \quad (6.34)$$

Помітимо, що частота коливань не залежить від властивостей середовища, тоді як довжина хвилі $\lambda = \frac{v}{\nu}$ залежить від них, тому що швидкість розповсюдження хвилі різна в різних середовищах.

Оскільки проходження хвилі супроводжується коливанням частинок середовища, які пов'язані між собою, то разом з хвилею передається і енергія в просторі. *Інтенсивністю хвилі, або густиною потоку енергії називають відношення енергії, яку переносить хвиля через одиничну площадку, перпендикулярну променю, до часу.* Тобто інтенсивність хвилі виражається таким чином:

$$I \sim \left[\frac{\text{Дж}}{\text{м}^2 \text{сек}} \right].$$

Якщо в одиниці об'єму концентрація частинок n

і маса кожної частинки m , тоді у відповідності з (6.9) енергія коливань такого середовища дорівнює

$$E = nW = \frac{nm\omega^2 A^2}{2}. \quad (6.35)$$

Оскільки nm — густина середовища, то

$$E = \frac{\rho\omega^2 A^2}{2}. \quad (6.36)$$

Очевидно, що за 1 сек. через площадку $S = 1 \text{ м}^2$ переноситься енергія частинок, які знаходяться в об'ємі паралелепіпеда з основою 1 м^2 і висотою, що дорівнює швидкості розповсюдження хвилі v (рис. 55):

$$I = Ev = \frac{\rho v \omega^2 A^2}{2}. \quad (6.37)$$

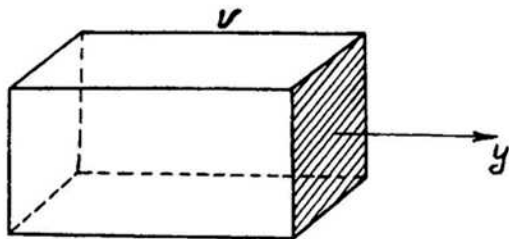


Рис. 55

Таким чином, інтенсивність хвилі пропорційна густині середовища, швидкості хвилі, квадрату частоти і квадрату амплітуди хвилі.

6.6. ІНТЕРФЕРЕНЦІЯ ТА ДИФРАКЦІЯ ХВИЛЬ

Нехай в середовищі є декілька джерел, від яких розповсюджуються хвилі. Розглянемо точку Д, до якої доходять хвилі від цих джерел. Частинка в точці А буде здійснювати коливання, які будуть результатом складання коливань, викликаних кожною з хвиль. Результат складання, як це було показано в (6.3), залежить від співвідношення фаз, періодів і амплітуд хвиль, які приходять в точку А. Цікавим є випадок складання хвиль, які мають однакові частоти, сталу різницю фаз і напрямок коливань частинок у всіх хвилях однаковий. Такі хвилі називаються *когерентними*, а складання їх — *інтерференцією*.

Розглянемо інтерференцію двох когерентних хвиль, які мають однакові амплітуди і знаходяться на різних відстанях від частинки. Зміщення частинки в точці А, куди приходять ці хвилі, буде результатом складання двох коливань

$$x_1 = A \sin(\omega t - ky_1) \text{ і } x_2 = A \sin(\omega t - ky_2). \quad (6.38)$$

Результат складання, як це було показано (6.15), залежить від різниці фаз. В даному випадку

$$\theta = \varphi_2 - \varphi_1 = k(y_1 - y_2), \text{ або } \theta = \frac{2\pi}{\lambda}(y_1 - y_2). \quad (6.39)$$

Якщо $y_1 - y_2 = 0, \lambda, 2\lambda, 3\lambda, \dots$, інакше

$$y_1 - y_2 = k\lambda, \text{ де } k = 0, 1, 2, 3, \dots, \quad (6.40)$$

то результуюча амплітуда A , згідно (6.15), дорівнює $2A$. Хвилі підсилюють одна одну. Це буде умова *максимуму*.

Якщо $y_1 - y_2 = \frac{\lambda}{2}; 3\frac{\lambda}{2}; 5\frac{\lambda}{2}, \dots$,
інакше

$$y_1 - y_2 = (2k + 1)\frac{\lambda}{2}, \text{ де } k = 0, 1, 2, 3, \dots, \quad (6.41)$$

результуюча амплітуда дорівнює нулю, і хвилі погасять одна одну. Це умова *мінімуму*.

Оскільки хвилі від джерел розповсюджуються по всім напрямкам, то в просторі будуть точки, що задовольняють як умові (6.40), так і умові (6.41). Тобто будуть точки, де можна спостерігати як максимуми, так і мінімуми коливань. Інтерференційна картина буде стаціонарною, тобто незалежною від часу, і являти собою чергування областей, де будуть підсилення коливань (максимуми), і областей, де коливання відсутні (мінімуми).

Якщо джерела некогерентні, то положення максимумів і мінімумів з часом змінюється, і інтерференційна картина буде розпливатись.

Для розв'язування задач про розповсюдження фронту хвилі, часто користуються *принципом Гюйгенса*, суть якого полягає в наступному: кожна точка фронту хвилі в момент часу t є джерелом вторинних хвиль. Геометрична обвідна фронтів цих вторинних хвиль дає положення хвильової поверхні в будь-який наступний момент часу $(t + \Delta t)$. На рис. 56 показана така побудова для сферичного фронту.

За допомогою принципу Гюйгенса можна знайти закон, якому підлягають хвилі при відбиванні від поверхні розділу двох середовищ (закон відбивання), а також при переході хвилі з одного середовища в інше (закон заломлення).

Принцип Гюйгенса застосовують також для пояснення явища *дифракції*. Дифракція — це явище огинання хвилями перешкокл. які зустрічаються на шляху їх розповсюдження.

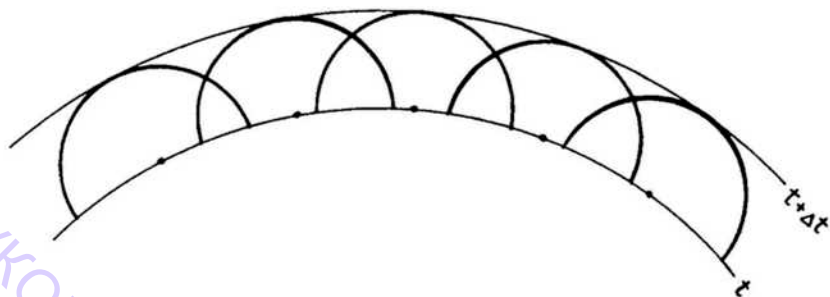


Рис. 56

Розглянемо як приклад використання принципу Гюйгенса у випадку плоскої хвилі, що падає на перешкоду, розміри якої більші, ніж довжина хвилі, рис. 57.

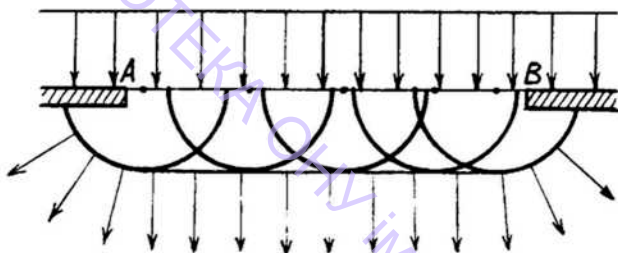


Рис. 57

Коли фронт хвилі доходить до щілини AB , кожна точка його є джерелом вторинних хвиль. Проведемо обвідну і побудуємо фронт хвилі, що пройшла через отвір. Він буде плоским тільки посередині отвору, а у границь буде загинання хвиль за перешкоду. Особливо чітко буде спостерігатись явище дифракції, коли хвиля падає на перешкоду, розміри якої порівняні з довжиною хвилі.

Принцип Гюйгенса пізніше був доповнений *принципом Френеля*, який говорить про те, що хвилю, яка дійшла до якоїсь точки від первинного джерела, можна розглядати як результат інтерференції вторинних хвиль, які приходять в цю точку від вторинних джерел деякого хвильового фронту. Тоді інтен

сивність в точці, до якої дійшла хвиля, визначається шляхом складання інтенсивностей когерентних хвиль від вторинних джерел.

6.7. ЗВУКОВІ, УЛЬТРА- ТА ІНФРАЗВУКОВІ ХВИЛІ

Хвилі, що розповсюджуються в пружному середовищі і сприймаються органами слуху людини, називають *звуковими*, або *акустичними*. Вони являють собою розповсюдження коливань тиску або густини середовища. Звукові хвилі в газах і рідинах є поздовжніми і мають вигляд згущень та розріджень пружного середовища. Частота коливань в звукових хвилях лежить в діапазоні від 20 до 20000 герц. Хвилі з частотою меншою 20 Гц називають *інфразвуком*, а хвилі з частотами більше 20000 Гц — *ультразвуком*, /нфра- і ультрахвилі вухо людини не сприймає.

Характеристиками звукової хвилі є висота звука, гучність і тембр. Це суб'єктивні характеристики, але кожній з них відповідає певна фізична величина.

Висота звука визначається частотою коливань: чим більша частота коливань, тим вищий тон звуку. Але чисті звукові тони, яким відповідають монохроматичні звукові хвилі, можна отримати лише при певних умовах. Як правило, звук являє собою складну суміш пружних монохроматичних хвиль різної частоти. Інтенсивність різних тонів, тобто звукових хвиль з різними частотами, різна. Набір частот коливань, які присутні в даному звукові, називають *акустичним спектром*. Для наочності представлення акустичного спектра користуються графіком залежності інтенсивності звукових тонів від складових частот даного звука. Якщо в звукові присутні коливання всіх частот, то спектр називають *суцільним* (рис. 58а). Якщо ж звук складається із коливань з певними частотами, то спектр називають *лінійчастим* (рис. 58б).

Суцільний акустичний спектр мають різноманітні шуми. Лінійчастий спектр характерний для музикальних звуків. Чистий музикальний звук можна отримати за допомогою *камертона*.

Звукова хвиля збуджується коливальними рухами ніжок камертона і має певну частоту. В більшості музикальних звуків, що мають лінійчастий спектр, до основної частоти ν_1 (рис. 58), яка визначає висоту тону, приєднуються обертони з частотами ν_2, ν_3, ν_4 . Присутність, кількість і інтенсивність цих обертонів і визначають забарвленість звука, або його *тембр*.

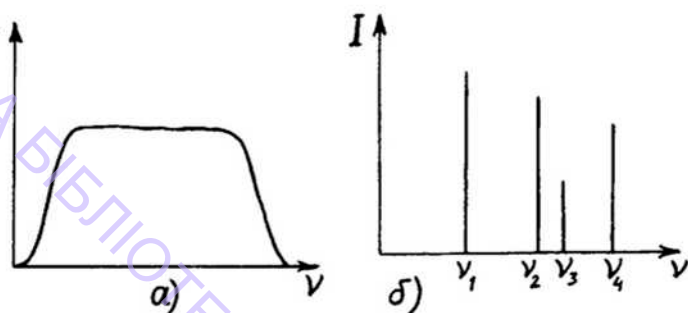


Рис. 58

Для того, щоб вухо людини сприймало звук, звукова хвиля повинна мати якусь певну мінімальну інтенсивність, яка називається *порогом чутливості*. Порог чутливості залежить від частоти звуку. Найбільш чутливе вухо людини до звуків з частотами від 1000 до 4000 Гц. В цій області інтенсивність, що відповідає порогові чутності, дорівнює в середньому $I_0 \approx 10^{-12} \frac{\text{Дж}}{\text{м}^2 \text{сек}}$. При інших частотах поріг чутності лежить вище (рис. 59) (нижня крива).

При інтенсивності порядку $1-10 \frac{\text{Дж}}{\text{м}^2 \text{сек}}$ вухо людини не сприймає хвилю як звук, вона викликає біль. Значення інтенсивності, при якій це відбувається, називається *порогом болячого відчуття* (верхня крива рис. 59).

Гучність звука визначається його інтенсивністю. Але суб'єктивно оцінювана гучність зростає значно повільніше, ніж інтенсивність звукових хвиль. Коли інтенсивність зростає в геометричній прогресії, гучність зростає приблизно за ліній-

ним законом. Тому рівень гучності виражають як логарифм відношення інтенсивності даного звуку I до інтенсивності I_0 , прийняту за початкову, тобто

$$L = \lg \frac{I}{I_0}. \quad (6.42)$$



Рис. 59

Одиниця рівня гучності L визначається формулою (6.42) і називається *белом*. На практиці користуються в 10 разів меншими одиницями — децибелами (*дб*). Тоді формула (6.42) для визначення гучності в децибелах має вигляд

$$L = 10 \lg \frac{I}{I_0}. \quad (6.43)$$

Весь діапазон інтенсивностей звукових хвиль, що сприймає вухо людини, відповідає рівням гучності від 0 до 130 *дб*. Рівень гучності шепоту приблизно дорівнює 10 *дб*, говор людини — 60 *дб*, крик — 80 *дб*, шум мотора літака на відстані 5 м — 120 *дб*.

Ультразвукові хвилі мають частоту коливань в межах від $2 \cdot 10^4$ до 10^9 Гц. Так як енергія пружних коливань і хвиль згідно

з (6.37) пропорційна квадрату частоти, то ультразвукові коливання і хвилі мають значно більшу енергію, ніж звукові, при одній і тій же амплітуді.

Для отримання ультразвукових коливань частіше всього використовують електромеханічні випромінювачі, принцип дії яких заснований на явищі зворотного п'єзоелектричного ефекту. Основною частиною такого генератора є пластина, до якої прикладена електрична напруга змінної ультразвукової частоти. Із-за зворотного п'єзоефекту пластина починає вібрувати, випромінюючи механічну ультразвукову хвилю відповідної частоти.

Застосування ультразвуку в різних галузях народного господарства пов'язано в першу чергу з тим, що будь-які неоднорідності в середовищі, через яке проходить ультразвукова хвиля, приводять до зміни швидкості розповсюдження і поглинання цієї хвилі, відбиття хвилі від границі розділу, появи акустичної кавітації (утворення мікропорожнин в середовищі під дією коливання тиску). Перепад тиску в таких порожнинах може в сотні разів перевищувати нормальний атмосферний тиск. Кавітаційні та інші механізми дії ультразвуку можуть викликати розрив і загибель бактерій, збудження і іонізацію атомів і молекул з утворенням радикалів.

Завдяки своїм властивостям ультразвук знайшов широке застосування в медицині. Так, зміна швидкості і поглинання ультразвуку в різних органах і тканинах лежать в основі відомого методу ультразвукового дослідження (УЗД). Створені спеціальні комп'ютеризовані пристрої, які за певною програмою дозволяють візуалізувати зображення на екрані монітора. Сучасними прикладами застосування УЗД в медицині є ультразвукова ехоенцефалографія — діагностування пухлин та запалень головного мозку, ультразвукова кардіографія — дослідження динаміки серцевої діяльності, ультразвукова локація — в офтальмології та інших.

Ультразвукові хвилі малої інтенсивності використовують для прискорення фізіологічних процесів у клітинах. Ультразвуки великої інтенсивності використовують для руйнування різного

роду пухлин, біологічних тканин. У фармацевтичній промисловості ультразвук, а точніше кавітаційні процеси, що виникають під дією ультразвукової хвилі великої інтенсивності використовують для диспергування і отримання лікарняних порошків і емульсій. Механічні і теплові ефекти, що виникають при дії ультразвуку на біологічні тканини, лежать в основі методу ультразвукової фізіотерапії. За допомогою ультразвукової голографії отримують тривимірні зображення різних біоб'єктів.

Інфразвукові коливання і хвилі мають частоти до 20 Гц. Інфразвук дуже слабо поглинається в газах, рідинах і твердих тілах, і тому може розповсюджуватися без суттєвих втрат на великі відстані. Ця властивість інфразвуку знайшла своє використання в процесі біологічної еволюції як засіб передачі та прийому інформації між живими істотами. Такі тварини, як летючі миші, дельфіни, кити і деякі інші мають, крім ультразвукової локації, ще і органи інфразвукової локації.

Для людини інфразвук з великою амплітудою може бути шкідливим. Він може викликати такий несприятливий вплив на самопочуття організму, як втома, головний біль, сонливість, роздратування та інші. Справа в тому, що деякі процеси в організмі людини відбуваються в інтервалі інфразвукових частот. Наприклад, частота власних коливань тіла людини в лежачому положенні 3-4 Гц, в стоячому 5-12 Гц, а — ритми головного мозку мають частотний інтервал 9-13 Гц, і тому дія інфразвукових хвиль може викликати шкідливі резонансні явища. Високоінтенсивні виробничі шуми і вібрації, які мають складний неперіодичний характер в різних частотних інтервалах, включаючи інфразвуковий, також є шкідливими для людини.

КОНТРОЛЬНІ ПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ

1. Які види коливань ви знаєте?
2. Які коливання називаються гармонічними? Запишіть і поясніть рівняння гармонічних коливань.
3. Від чого залежить період коливань пружинного маятника?

4. Чому дорівнює період коливань математичного маятника?
5. Яке співвідношення між фазами для зміщення, швидкості та прискорення при гармонічних коливаннях?
6. Чому дорівнює енергія гармонічних коливань?
7. Поясніть результат складання двох гармонічних коливань, що відбуваються в одному напрямку.
8. Отримайте результат складання двох гармонічних коливань, що відбуваються у взаємно перпендикулярних напрямках.
9. З якою частотою відбуваються вимушені коливання?
10. Чому дорівнює амплітуда вимушених коливань?
11. Що таке резонанс? Чому дорівнює амплітуда коливань при резонансі?
12. Що таке хвиля? Які види хвиль ви знаєте?
13. Дайте визначення таким характеристикам: фронт хвилі, промінь, фаза, швидкість розповсюдження хвилі.
14. Запишіть рівняння хвилі.
15. Що таке інтенсивність хвилі та чому вона дорівнює?
16. Що таке інтерференція хвиль?
17. Запишіть та поясніть умови отримання максимумів та мінімумів при інтерференції.
18. Сформулюйте принцип Гюйгенса — Френеля.
19. Що таке дифракція хвиль? Наведіть приклади.
20. Які хвилі називаються звуковими?
21. Від чого залежать висота тону, його гучність? Запишіть формулу для вираження гучності звуку.
22. Що таке тембр звуку? Від чого він залежить?
23. Намалуйте та поясніть графік області чутливості вуха людини.
24. Що таке ультразвук? Де його використовують?
25. Що таке інфразвук? Назвіть його особливості.

МОЛЕКУЛЯРНА ФІЗИКА

Вивчаючи рух тіл в механіці, ми не розглядали їх внутрішню будову. Як відомо, тіла, що нас оточують, відрізняються фізичними властивостями. Мають, наприклад, різні температури плавлення, по-різному проводять тепло. Одна і та сама речовина може знаходитись в різних агрегатних станах, наприклад, вода буває у вигляді льоду, рідини, пару. Цілком зрозуміло, що пояснити ці різноманітні фізичні властивості речовин можна, знаючи їх будову, з яких частинок вони складаються, які сили діють між окремими частинками. Питання про внутрішню будову речовин, їх властивості є основним питанням фізики і вивчається в частині загальної фізики, яка носить назву *молекулярна фізика*.

В молекулярній фізиці існують два підходи для вивчення і опису фізичних властивостей речовин — молекулярно-кінетичний і термодинамічний.

Молекулярно-кінетична теорія (МКТ) вивчає властивості молекулярних систем, а також фізичні явища, які відбуваються з системами, як сумарний результат дії молекул. При цьому МКТ користується статистичними методами. Тобто вона не описує рух окремих молекул, а користується такими середніми величинами, які характеризують рух великої кількості молекул. Молекулярно-кінетична теорія встановлює зв'язок між макроскопічними параметрами та середніми значеннями мікроско-

пічних величин, а також дає спосіб розрахунку цих середніх значень на основі законів руху окремих молекул.

Термодинаміка, на відміну від МКТ, розглядає тіла або системи, не цікавлячись їх внутрішньою будовою чи механізмом молекулярного руху. Термодинаміка для опису стану тіл, їх властивостей та процесів, що відбуваються з ними, користується макроскопічними величинами, такими, як тиск, температура, об'єм, внутрішня енергія та інші, а також залежністю між ними.

Розглядаючи будову речовин, зміну їх стану з різних точок зору, МКТ і термодинаміка не існують окремо. Вони завжди взаємно доповнюють одна одну, утворюючи єдину картину в молекулярній фізиці.

7.1. ОСНОВНІ ПОЛОЖЕННЯ МОЛЕКУЛЯРНО-КІНЕТИЧНОЇ ТЕОРІЇ

Уявлення про те, що всі речовини побудовані із малесеньких частинок — *атомів*, висказав ще в V сторіччі до н. е. грецький філософ *Демокрит*. Але наукова теорія про атомістичну природу речовин була створена лише в XVIII-XIX сторіччях *М. В. Ломоносовим*, *Л. Больцманом*, *Д. К. Максвеллом*, *Д. І. Менделєєвим*. Ця теорія основана на трьох положеннях, які спираються на наукові дослідження та матеріалістичні уявлення про навколишній світ.

1. *Всі речовини складаються з атомів чи молекул*, розміри (діаметри) яких мають середній порядок 10^{-8} см. Молекули, що утворюють дану речовину, однакові. Різні речовини складаються із різних молекул. Молекули, в свою чергу, утворюються із ще менших частинок — атомів. Кількість різних атомів дорівнює кількості хімічних елементів в періодичній таблиці та їх ізотопів. На даний момент відомо 110 елементів і біля 1500 їх ізотопів. Атоми, в свою чергу, мають досить складну конструкцію, яка утворена із додатно зарядженого ядра і від'ємно зарядженої електронної оболонки. Ядро також має складну будову. Воно створене елементарними частинками — протонами та нейтронами. Але молекулярна фізика не розглядає питання про будову атомів. Вона користується спрощеною моделлю і розглядає атоми та молекули як тверді кульки сферичної форми.

2. *Молекули чи атоми, що утворюють речовину, знаходяться в стані хаотичного руху*. Рухаючись хаотично, вони зіштовхуються між собою, змінюють свою швидкість та напрямок. Дослідним підтвердженням хаотичного руху молекул є явище дифузії, теплові явища, броунівський рух та багато інших. В 1826 році

англійський ботанік Броун спостерігав під мікроскопом дуже маленькі частинки - спори папороті, зважені у воді. Він виявив, що вони завершували швидкі безладні хаотичні рухи. Такі ж самі хаотичні рухи спостерігались в інших рідинах з різними твердими, але дуже маленькими частинками. Чим менші були розміри частинок, тим інтенсивніше вони рухались. Це явище отримало назву — броунівський рух. На рис. 60 зображена криволінійна траєкторія руху броунівської частинки, а ламаною лінією показані її переміщення через певний проміжок часу. А. Ейнштейн показав, що середнє значення квадрату переміщення пропорційно проміжку часу, за який відбувається це переміщення.

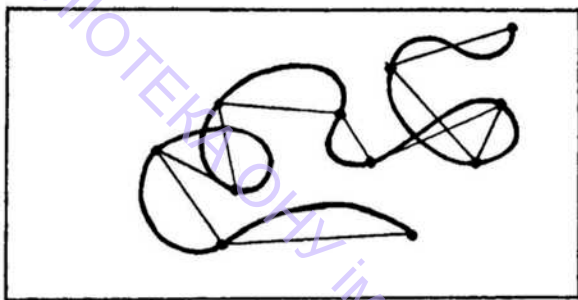


Рис. 60

Такий рух броунівської частинки зумовлений тим, що вона рухається під впливом ударів молекул рідини, в якій вона знаходиться. Частинка великих розмірів зазнає удари молекул з усіх боків, і при великій кількості ударів результуючий імпульс дорівнює нулю, або дуже близький до нуля. Тому вона майже не рухається. Для маленьких частинок внаслідок того, що з різних боків буде різна кількість ударів з різними імпульсами, результуючий імпульс вже не буде дорівнювати нулю, і вона почне хаотично рухатись. Із збільшенням температури інтенсивність броунівського руху зростає. Таким чином, броунівська частинка відтворює хаотичний рух самих молекул, тільки рухається вона значно повільніше самих молекул, завдяки своїй значно більшій масі

3. Між молекулами чи атомами одночасно діють сили притягання та сили відштовхування. Ці сили мають електричну природу і зумовлені взаємодією між позитивно зарядженими ядрами та негативно зарядженими електронними оболонками атомів. І сили притягання, і сили відштовхування зменшуються із збільшенням відстані між молекулами. При цьому сили відштовхування спадають скоріше, ніж сили притягання. Згідно експериментальним і теоретичним дослідженням, міжмолекулярні сили взаємодії f обернено пропорційні n -ій степені відстані r між молекулами:

$$f \sim \frac{1}{r^n}, \quad (7.1)$$

де для сил притягання $n = 7$, а для сил відштовхування n приймає значення від 9 до 15.

На рис. 61 представлений графік залежності сил відштовхування f_v , сил притягання f_p і результуючої сили F від відстані між молекулами r . Сили відштовхування вважаються додатними, сили притягання — від'ємними. Додатні значення результуючої сили $F = f_v - f_p$ відповідають відштовхуванню, а від'ємні — притягання між молекулами. Як видно з рисунка, результуюча сила $F = 0$, коли відстань між молекулами $r = r_0$, і приблизно дорівнює $3 \cdot 10^{-8}$ см. При $r < r_0$ переважають сили відштовхування $F > 0$, а при $r > r_0$ переважають сили притягання $F < 0$. На відстанях $r > 1,5 \cdot 10^{-7}$ см міжмолекулярні сили практично не діють. Таким чином, міжмолекулярні сили діють на відстанях такого ж порядку, як і розміри самих молекул.

Встановимо залежність потенціальної енергії W_n взаємодії молекул від відстані між ними. Будемо вважати, що потенціальна енергія молекул, які знаходяться на відстані $r = \infty$, дорівнює нулю. Коли молекули наближаються одна до одної, то на відстані $r \approx 1,5 \cdot 10^{-7}$ см вони почнуть наближуватися за рахунок сил притягання, і потенціальна енергія почне зменшуватись і досягне мінімуму згідно (3.16), коли $r = r_0$ (при $F = 0$). Подальше наближення здійснюється за рахунок роботи проти сил відштовхування. При цьому потенціальна енергія

буде різко збільшуватись. Таким чином, крива залежності потенціальної енергії від відстані має мінімум при $r = r_0$. Це положення відповідає стійкій рівновазі. Графік цієї залежності називають *потенціальною кривою*, ділянку ABC — *потенціальною ямою*, а ординату BD — *глибиною потенціальної ями*. Вона відповідає мінімальній потенціальній енергії $W_{\min}$ взаємодії молекул і відіграє дуже важливу роль при опису агрегатних станів речовини.

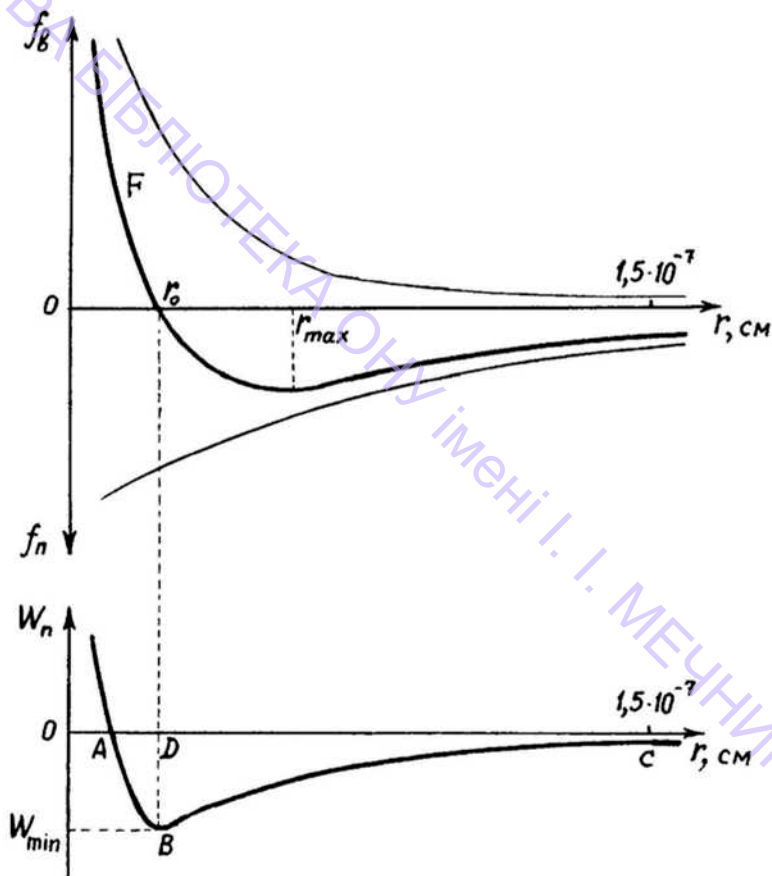


Рис. 61

Коли молекули хаотично рухаються і мають кінетичну енергію, значно більшу, ніж мінімальна потенціальна енергія взаємодії $\mathcal{E}_{\text{кін}} \gg W_{\text{мін}}$, то, зіштовхнувшись, такі молекули розходяться і рухаються в подальшому незалежно одна від одної. При такій умові речовина знаходиться в газоподібному стані. Якщо ж $\mathcal{E}_{\text{кін}} \approx W_{\text{мін}}$, то молекула, наближаючись до іншої, вже не зможе її покинути і незалежно рухатись. Лише отримавши через певний час енергію від сусідніх молекул, зможе знайти собі інше місце. Така модель відповідає рідкому стану речовини. І якщо $\mathcal{E}_{\text{кін}} \ll W_{\text{мін}}$, то молекули здійснюють коливальні рухи навколо положень рівноваги і свої місця не залишають, утворюючи стійку систему. Речовина при такій умові знаходиться в твердому агрегатному стані.

У різних станах речовина має різну будову і різний характер руху молекул.

У газах відстань між молекулами в багато разів перевищує розміри молекул. Взаємодії між молекулами практично немає, і вони рухаються між двома зіткненнями рівномірно і прямо-лінійно. Якщо молекула газу складається з кількох атомів, то при зіткненні, крім поступового, вони ще можуть набувати обертального руху. Відсутністю сил міжмолекулярної взаємодії в газах пояснюється значна швидкість дифузії. Крім того, гази мають велику стисливість, оскільки при стискуванні зменшується середня відстань між молекулами.

В рідинах відстані між молекулами значно менші, ніж у газах. Сили взаємодії між молекулами досить великі. Внаслідок чого молекули рідини здійснюють коливання навколо положення рівноваги. Одночасно молекули, які мають надлишок кінетичної енергії, «перестрибують» в нове положення рівноваги. Отже, тепловий рух молекул рідини є коливальним і поступальним. «Перестрибуванням» молекул з місця на місце піддією зовнішніх сил, наприклад, сили тяжіння, можна пояснити текучість, а також той факт, що рідина не зберігає своєї форми. Дуже мала стисливість рідини зумовлена малими відстанями між молекулами.

У твердих тілах відстань між молекулами ще менша, внаслідок чого сили взаємодії настільки великі, що молекули твер-

дого тіла здійснюють лише коливальні рухи біля положення рівноваги. Отже, тепловий рух молекул в твердих тілах є коливальним. В дуже рідких випадках можливі переходи молекул з одного положення в інше. Тому швидкість дифузії в твердих тілах надзвичайно мала.

7.2. ОСНОВНІ РІВНЯННЯ МОЛЕКУЛЯРНО- КІНЕТИЧНОЇ ТЕОРІЇ ГАЗІВ

Почнемо вивчення молекулярно-кінетичної теорії із найпростішого газоподібного стану речовини. Для цього розглянемо найпростішу модель *ідеального газу*.

Під ідеальним будемо розуміти такий газ, молекули якого можна розглянути як кулі певної маси, нехтуючи їх розмірами. Крім того, молекули такого газу взаємодіють між собою лише через пружне зіткнення. Будь-яка інша взаємодія відсутня. 1, нарешті, молекули ідеального газу рівномірно розподілені по всьому об'єму посудини, де він знаходиться. При нормальних умовах чи умовах, близьких до нормальних, всі реальні гази за своїми властивостями близькі до ідеального.

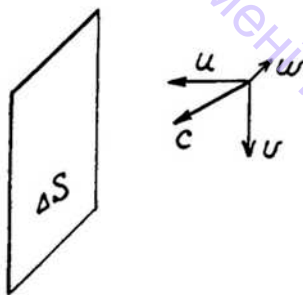


Рис. 62

Виходячи з молекулярно-кінетичних уявлень, визначимо тиск газу на стінки посудини, вважаючи, що молекули взаємодіють зі стінками пружно. Розглянемо рух окремої молекули, яка рухається із швидкістю c в напрямку до стінки. Швид-

кість s розкладемо на три взаємно перпендикулярні складові (рис. 62) — u , v , w , одна з яких перпендикулярна до стінки. Саме ця складова u нас буде цікавити. Якщо маса молекули m , то зміна імпульсу складової швидкості u після удару об стінку буде дорівнювати

$$\Delta p = mu - (-mu) = 2mu. \quad (7.2)$$

Нехай об площадку ΔS за одиницю часу буде вдарятися N штук молекул. Тоді загальна зміна їх імпульсу буде дорівнювати $2muN$. І, оскільки $F = \frac{\Delta p}{\Delta t}$, і $\Delta t = 1$ сек., то сила, з якою молекули діють на площадку ΔS , дорівнює

$$F = 2muN. \quad (7.3)$$

Кількість молекул N , що вдаряються об площадку ΔS за одиницю часу, дорівнює кількості молекул, які знаходяться в кубі (рис. 63) із стороною u .

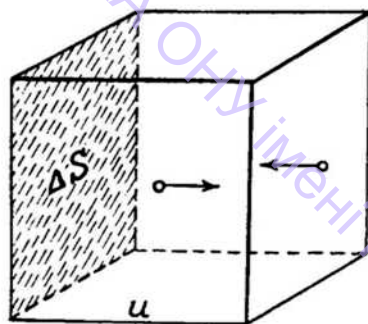


Рис. 63

Саме вони за одну секунду долетять до площадки ΔS і вдаряться об неї.

$$N = nV = n\Delta Su. \quad (7.4)$$

Тут V — об'єм куба; n — концентрація молекул. Із них половина рухаються в сторону площадки ΔS , а друга половина — в протилежну сторону внаслідок хаотичного руху. Тому

$$N = \frac{n\Delta S u}{2}.$$

Тоді

$$F = \frac{2mu^2 n\Delta S}{2} = mu^2 n\Delta S, \quad (7.5)$$

а тиск

$$p = \frac{F}{\Delta S} = mu^2 n. \quad (7.6)$$

Такий тиск на площадку ΔS спричиняли б молекули, якщо б вони всі рухались з однаковими складовими швидкостями. В дійсності вони мають різні швидкості. Нехай із числа n молекул n_1 мають швидкість c_1 , n_2 — швидкість c_2 , n_3 — швидкість c_3 і т. д. Тоді

$$\sum_{i=1}^k n_i = n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_k = n. \quad (7.7)$$

Відповідно, складові цих швидкостей позначимо так:

$$\vec{c}_1 = \vec{u}_1 + \vec{v}_1 + \vec{w}_1, \quad \vec{c}_2 = \vec{u}_2 + \vec{v}_2 + \vec{w}_2, \quad \vec{c}_3 = \vec{u}_3 + \vec{v}_3 + \vec{w}_3 \text{ і т. д.}$$

Тоді тиск на площадку ΔS і, відповідно, на інші взаємно перпендикулярні площадки буде дорівнювати тискові, який спричиняє кожен сорт молекул:

$$\begin{aligned} p_x &= mn_1 u_1^2 + mn_2 u_2^2 + mn_3 u_3^2 + \dots = m \sum_{i=1}^k n_i u_i^2, \\ p_y &= mn_1 v_1^2 + mn_2 v_2^2 + mn_3 v_3^2 + \dots = m \sum_{i=1}^k n_i v_i^2, \\ p_z &= mn_1 w_1^2 + mn_2 w_2^2 + mn_3 w_3^2 + \dots = m \sum_{i=1}^k n_i w_i^2. \end{aligned} \quad (7.8)$$

Внаслідок хаотичного руху молекул, згідно з законом Паскаля, тиск у всі сторони буде однаковий. Тому

$$p_x = p_y = p_z = p. \quad (7.9)$$

Складемо ліві і праві частини рівняння (7.8) і, враховуючи (7.9), отримаємо:

$$3p = m \sum n_i (u_i^2 + v_i^2 + w_i^2). \quad (7.10)$$

Оскільки $u_i^2 + v_i^2 + w_i^2 = c_i^2$, рівняння (7.10) має вигляд:

$$3p = m \sum_{i=1}^k n_i c_i^2. \quad (7.11)$$

За визначенням середнє значення квадрата швидкостей дорівнює

$$\overline{c^2} = \frac{\sum_{i=1}^k n_i c_i^2}{\sum_{i=1}^k n_i}, \text{ звідки } \sum_{i=1}^k n_i c_i^2 = \overline{c^2} \sum_{i=1}^k n_i.$$

З врахуванням (7.7) маємо $\sum_{i=1}^k n_i c_i^2 = n \overline{c^2}$. Тоді формула (7.11) має вигляд:

$$3p = m n \overline{c^2}, \text{ звідки } p = \frac{1}{3} n m \overline{c^2}. \quad (7.12)$$

Помножимо і поділимо праву частину останнього рівняння на двійку і отримаємо

$$p = \frac{2}{3} n \frac{m \overline{c^2}}{2}. \quad (7.13)$$

Це є перше рівняння молекулярно-кінетичної теорії газів. З нього випливає, що тиск газу пропорційний концентрації молекул та середній кінетичній енергії хаотичного поступального руху молекул.

Середня кінетична енергія молекул визначає не лише тиск, вона є також мірою температури. Для того, щоб встановити залежність між середньо-кінетичною енергією і температурою, проведемо такий уявний дослід, який базується на молекулярно-кінетичній теорії. Нехай маємо посудину, поділену навіпіл перегородкою. В одній частині є газ, середньо-кінетична енергія молекул якого велика, а в другій — такий самий газ, середньо-кінетична енергія молекул якого мала. Заберемо перегородку. Внаслідок хаотичного руху молекул,

а також зіткнень між молекулами, через деякий час енергія обох газів стане однаковою (вирівняється). Гази приходять в стан енергетичної рівноваги.

Розглянемо тепер таку саму посудину з перегородкою, але газу тепер мають різні температури. Якщо забрати перегородку, то через деякий час температура обох газів стане однаковою. Газу придуть в стан теплової рівноваги.

Таким чином, макроскопічний параметр — температура, веде себе так само, як і мікроскопічний параметр — середня кінетична енергія хаотичного поступального руху молекул. Це означає, що середня кінетична енергія може бути мірою температури. Але енергія вимірюється в джоулях, а температура — в градусах. Для того, щоб зберегти цю традиційну одиницю температури, слід між ними ввести деякий коефіцієнт пропорційності, і тоді формула зв'язку між енергією і температурою буде мати такий вигляд:

$$\frac{mc^2}{2} = \frac{3}{2} kT, \quad (7.14)$$

де: $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж/град є стала Больцмана, її чисельне значення визначається експериментально. Коефіцієнт $\frac{3}{2}$ вводиться для того, щоб спростити подальші співвідношення між тиском і температурою, а фізичне пояснення його буде розглянуто пізніше.

Рівняння (7. і 4) є другим рівнянням молекулярно-кінетичної теорії. Воно показує, що середня кінетична енергія хаотичного руху молекул пропорційна термодинамічній температурі. Із рівняння (7.14) видно, що температура T не може бути від'ємною. За нуль приймається така температура, при якій енергія поступального руху дорівнює нулю, тобто припиняється поступальний рух молекул. Шкала, за якою вимірюється ця температура, називається абсолютною шкалою, а температура — абсолютною температурою Кельвіна. Таким чином, *абсолютна температура є мірою середньої кінетичної енергії поступального, хаотичного руху молекул.*

Метод вимірювання температур базується на встановленні теплової рівноваги між двома тілами при їх стиканні. Одне з тіл називають термометром. Вимірюючи температуру, можна користуватись різними шкалами. Все залежить від того, де вибрати нуль. Щоб побудувати температурну шкалу, слід вибрати яку-небудь властивість тіла і простежити за її зміною під час нагрівання. Такими термометричними величинами, які змінюються при зміні температури, можуть бути об'єм тіла (тіла при нагріванні розширюються), електричний опір (при нагріванні він зростає). Для встановлення температурної шкали необхідно вибрати також масштаб температур. Для цього користуються реперними точками. Так, за шкалою Цельсія вибирають за нуль температуру плавлення льоду, а за 100 градусів — температуру кипіння води при нормальному атмосферному тиску. Зв'язок між градусами Кельвіна і Цельсія такий

$$T\text{ К} = t^{\circ}\text{C} + 273,16. \quad (7.15)$$

Крім вищезазначених шкал, існують ще шкали Реомюра і Фаренгейта. Зв'язок між ними показано в таблиці.

Шкали	Плавлення льоду	Кипіння води
Цельсія	0 град С	100 град С
Реомюра	0 град R	80 град R
Фаренгейта	32 град F	212 град F

Із першого (7.13) та другого (7.14) рівнянь молекулярно-кінетичної теорії отримаємо основне рівняння МКТ. Підставляючи в (7.13) значення середньо-кінетичної енергії із (7.14), маємо

$$p = nkT. \quad (7.16)$$

Із останнього рівняння знайдемо концентрацію молекул при нормальних умовах. Нагадаємо, що нормальними називаються умови, коли тиск $p=760$ мм. рт. ст., або $1,013 \cdot 10^5$ Па, а температура 273 К, або 0 град. С, тоді

$$n_0 = \frac{p_0}{kT_0} = \frac{1,013 \cdot 10^5}{1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 273} = 2,7 \cdot 10^{25} \frac{1}{\text{м}^3}.$$

Це є число молекул в 1 куб. м при нормальних умовах і називають його *числом Лоушидта*.

7.3. ГАЗОВІ ЗАКОНИ

Із основного рівняння кінетичної теорії газів можна вивести всі газові закони, які були експериментально встановлені ще в XVIII–XIX сторіччях. Підставимо в рівняння (7.16) вираз для концентрації молекул $n = \frac{N}{V}$, де N — загальна кількість молекул, а V — об'єм, в якому вони знаходяться. Тоді рівняння буде мати такий вигляд:

$$p = \frac{N}{V} kT. \quad (7.17)$$

Якщо $N = N_A = 6,02 \cdot 10^{23}$ 1/моль, тобто числу Авогадро (це кількість молекул в одному молі), тоді рівняння (7.17) запишемо так:

$$pV = N_A kT. \quad (7.18)$$

В цьому рівнянні добуток $N_A k$ є добутком двох констант — числа Авогадро і сталої Больцмана. Позначимо цей добуток так

$$N_A \cdot k = R \quad (7.19)$$

і отримаємо нову константу, яку називають *універсальною газовою сталою*. Вона дорівнює

$$R = 6,02 \cdot 10^{23} \frac{1}{\text{моль}} \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \frac{\text{Дж}}{\text{град}} = 8,3 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{град}}.$$

З врахування цього рівняння (7.18) має вигляд

$$pV = RT. \quad (7.20)$$

Це є рівняння стану газу, записане через макроскопічні параметри (p , V , T) для одного молю газу.

Якщо буде ν молів газу, то $N = \nu N_A$, і тоді рівняння (7.17) буде мати вигляд:

$$pV = \nu N_A kT, \text{ або } pV = \nu RT. \quad (7.21)$$

Враховуючи, що $\nu = \frac{M}{\mu}$, де M — маса газу, а μ — молярна маса газу, рівняння (7.21) запишемо так:

$$pV = \frac{M}{\mu} RT. \quad (7.22)$$

Це є рівняння стану для газу масою M та молярною масою μ . Воно отримало назву *рівняння Менделєєва — Клапейрона*.

Розділимо ліву і праву частину рівняння Менделєєва-Клапейрона на температуру для даного газу зі сталою масою, отримуємо

$$\frac{pV}{T} = \text{const}. \quad (7.23)$$

Це рівняння отримало назву *об'єднаний газовий закон*. Він об'єднує всі три макроскопічні параметри (p , V , T), які можуть змінюватись, але вираз $\frac{pV}{T}$ повинен залишатись сталою величиною для даної маси газу.

Із об'єданого газового закону легко отримати рівняння для ізопроесів. Це такі процеси, при яких один із параметрів не змінюється.

Ізотермічний процес відбувається при сталій температурі. Якщо $T = \text{const}$, то із (7.23) маємо таке рівняння:

$$pV = \text{const}. \quad (7.24)$$

Воно отримало назву *закон Бойля — Маріотта*. Графічно цей закон зображається гіперболою (рис. 64), яку називають *ізотермою*.

Чим більша температура, тим вище лежить ізотерма. Закон Бойля — Маріотта дає змогу встановити залежність між густиною газу і його тиском. Дійсно, для даної маси газу із зміною об'єму

газу змінюється його густина, оскільки $\rho_1 = \frac{m}{V_1}$, а $\rho_2 = \frac{m}{V_2}$, то

$$\rho_1 V_1 = \rho_2 V_2, \quad (7.25)$$

де ρ — густина газу.

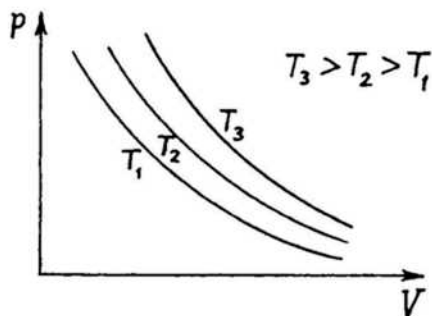


Рис. 64

Враховуючи закон Бойля — Маріюта, отримуємо

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{p_1}{p_2}. \quad (7.26)$$

Цей вираз можна також вважати законом Бойля — Маріюта.

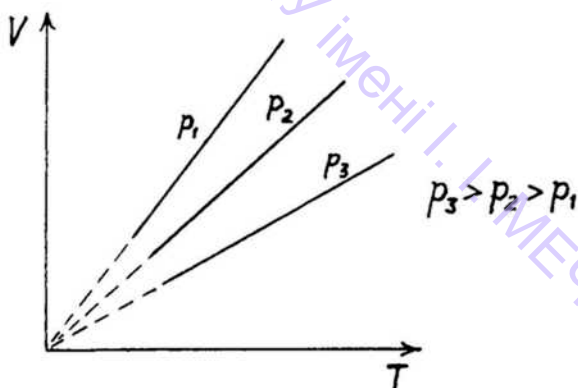


Рис. 65

Ізобаричний процес відбувається при сталому тиску. Якщо $p = \text{const}$, то із об'єднаного газового закону (7.23) отримаємо рівняння

$$\frac{V}{T} = \text{const.} \quad (7.27)$$

Це так званий *закон Гей — Люссака*. Графічно залежність (7.27) зображена на рис. 65. Чим більша температура, тим більший об'єм при сталому тискові. Графіки $V = f(T)$ називають *ізобарами*.

Ізохоричний процес. Газ нагрівається при сталому об'ємі $V = \text{const.}$ Рівняння ізохоричного процесу впливає також із (7.23) і має вигляд

$$\frac{p}{T} = \text{const.} \quad (7.28)$$

Співвідношення носить назву *закон Шарля*. Графік цього процесу зображено на рис. 66.

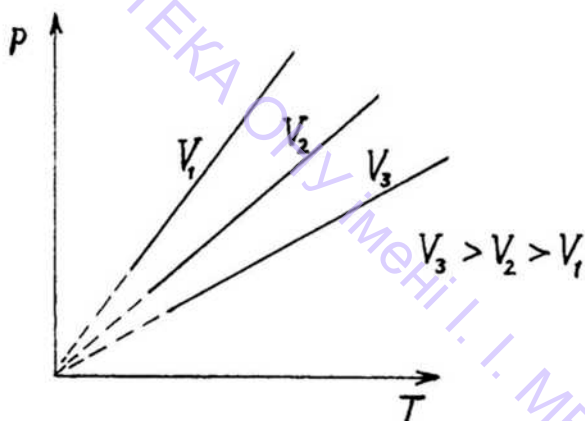


Рис. 66

Із збільшенням температури при сталому об'ємі тиск лінійно збільшується. Графіки залежності $p = f(T)$ називають *ізохорами*. Чим більший кут нахилу ізохори, тим при меншому об'ємі відбувається процес.

Закон Дальтона. Розглянемо суміш газів, яка перебуває в деякому об'ємі під тиском p . Якщо відкачати всі гази, крім одного, тоді цей газ буде займати весь об'єм і створювати тиск

p_1 , який називається *парціальним тиском* даного газу. Кожен із газів даної суміші створює свій парціальний тиск. Між тиском газової суміші і парціальними тисками окремих газів, що входять до суміші, існує таке співвідношення:

$$p = p_1 + p_2 + p_3 + \dots, \quad (7.29)$$

яке носить назву закон Дальтона: тиск суміші ідеальних газів дорівнює сумі парціальних тисків цих газів, що входять до неї.

7.4. РОЗПОДІЛ МОЛЕКУЛ ЗА ШВИДКОСТЯМИ

Молекули газу весь час знаходяться в хаотичному русі, зіштовхуються між собою (як це буде показано нижче) приблизно 10^9 співударів за секунду і при цьому змінюють свою швидкість як за напрямком, так і за величиною. Оскільки всі напрямки рівноімовірні, розподіл молекул за напрямком буде рівномірним. Що ж стосується розподілу за величиною, то не всі молекули мають однакові швидкості. Дійсно, молекул, швидкості яких наближаються до нуля, повинно бути досить мало. З іншого боку, кількість молекул з дуже великими швидкостями повинна бути також невеликою. Зрозуміло, що більше всього повинно бути молекул, швидкості яких мають проміжні значення, близькі до середнього.

При записуванні другого рівняння молекулярно-кінетичної теорії, в формулу (7.14) для середнього значення кінетичної енергії хаотичного руху молекул входить середнє значення квадрату швидкості $\overline{c^2}$, яке дорівнює

$$\overline{c^2} = \frac{3kT}{m}. \quad (7.30)$$

За визначенням, *середньоквадратичною швидкістю* називають

$$\bar{c} = \sqrt{\overline{c^2}}. \quad (7.31)$$

Підставляючи в підкореневий вираз середнє значення квадрата швидкості із формули (7.30), знаходимо середню квадратичну швидкість:

$$\bar{c} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}. \quad (7.32)$$

Як видно, середня квадратична швидкість пропорційна кореню квадратному із температури. Якщо чисельник і знаменник підкореневого виразу помножити на число Авогадро і врахувати, що $kN_A = R$, а $mN_A = \mu$, то середню квадратичну швидкість записуємо так:

$$\bar{c} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}. \quad (7.33)$$

Із рівняння Менделєєва — Клапейрона (7.22) $\frac{RT}{\mu} = \frac{pV}{M}$, і, враховуючи, що $\frac{M}{V} = \rho$ — густина газу, середню квадратичну швидкість можна записати ще таким чином:

$$\bar{c} = \sqrt{\frac{3p}{\rho}}. \quad (7.34)$$

Розрахуємо середню квадратичну швидкість молекул азоту при нормальних умовах за формулою (7.33):

$$\bar{c}_{N_2} = \sqrt{\frac{3 \cdot 8,3 \cdot 273}{0,028}} \approx 500 \text{ м/с}.$$

З такою середньою швидкістю можуть рухатись молекули від зштовхування до зштовхування під час хаотичного руху.

Середня квадратична швидкість — це статистична характеристика руху молекул, отримана шляхом осереднення різних значень швидкостей великої кількості молекул. В дійсності молекули рухаються з різними швидкостями. Для того, щоб описати розподіл молекул за швидкостями, розіб'ємо весь діапазон цих швидкостей на маленькі інтервали dc . Нехай із загальної кількості молекул N в інтервал dc потрапляють dN штук

молекул. Зрозуміло, що dN залежить від ширини інтервалу. Чим більша ширина інтервалу, тим більше молекул туди потрапляють $dN \sim dc$, а також від загальної кількості молекул $dN \sim N$. Кількість молекул, що потрапляють в інтервал dc , залежить також від того, біля якої швидкості буде розташований цей інтервал. Якщо, наприклад, інтервал буде розташований біля швидкостей, близьких до нуля, або біля дуже великих швидкостей, то в нього буде потрапляти мала кількість молекул dN , а якщо цей інтервал взяти біля швидкостей, що мають середнє значення, то в нього потрапить багато молекул. Цю залежність записують так: $dN \sim f(c)$. Тут $f(c)$ — функція розподілу молекул за швидкостями.

Таким чином, кількість молекул dN пропорційна ширині інтервалу dc , загальній кількості молекул N , а також функції розподілу молекул за швидкостями:

$$dN = Nf(c)dc. \quad (7.35)$$

В цій формулі $\frac{dN}{N}$ є частина, або доля молекул, що потрапляють в інтервал dc , який розташований навколо швидкості c . В математиці це відношення називають *ймовірністю* потрапляння молекул в інтервал dc . Таким чином,

$$\frac{dN}{N} = f(c)dc, \quad (7.36)$$

ймовірність потрапляння молекул в інтервал dc пропорційна ширині інтервалу і залежить від функції розподілу. Тобто від того, де знаходиться цей інтервал. Чим більший інтервал, тим більша ймовірність потрапляння молекул в цей інтервал. Відношення ймовірності $\frac{dN}{N}$ до ширини інтервалу dc називають *густиною ймовірності*. Фактично густина ймовірності дорівнює ймовірності потрапляння молекул в одиничний інтервал швидкостей і дорівнює вона функції розподілу молекул за швидкостями:

$$\frac{dN}{Ndc} = f(c). \quad (7.37)$$

Іншими словами, функція розподілу $f(c)$, яка дорівнює густині ймовірності, біля кожної швидкості буде мати своє значення і фактично показує, який розподіл молекул за швидкостями. Використовуючи кінетичну теорію газів, а також теорію ймовірностей, вперше цю функцію розподілу (математично) вивів англійський фізик Д. К. Максвелл. Вона має такий вигляд:

$$f(c) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} c^2 e^{-\frac{mc^2}{2kT}}, \quad (7.38)$$

де m — маса молекули, k — стала Больцмана, T — температура газу. Графік цієї функції зображено на рис. 67.

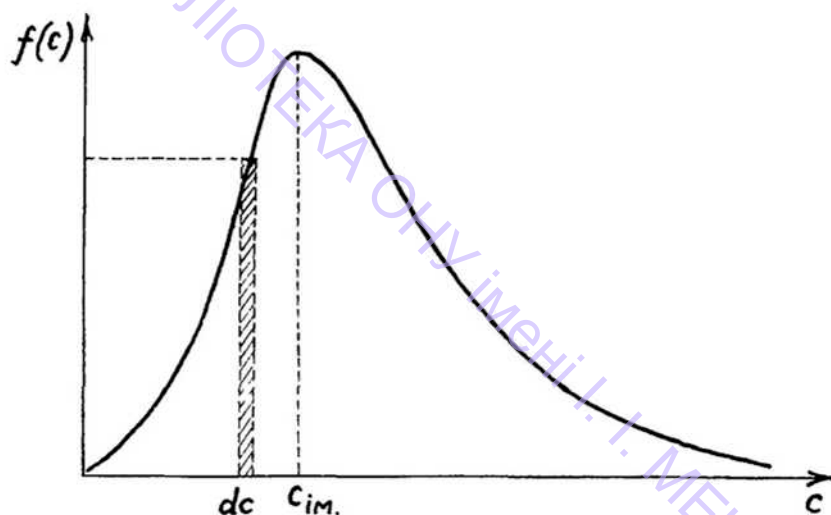


Рис. 67

Із графіка видно, що функція розподілу $f(c)$ дорівнює нулю при $c = 0$, має максимум при деякій швидкості $c_{ім}$, а потім при збільшенні швидкості прямує до нуля. Швидкість, якій відповідає максимум функції розподілу, називають *найбільш ймовірною швидкістю*. Її значення можна знайти, прирівнявши похідну по швидкості c , виразу (7.38), до нуля.

$$c_{im} = \sqrt{\frac{2kT}{m}}, \text{ або } c_{im} = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}}. \quad (7.39)$$

Найбільш ймовірна швидкість так само, як і середня квадратична (7.32, 7.33), пропорційна кореню квадратному із температури.

Якщо на графіку по осі абсцис взяти малий інтервал швидкостей dc і провести ординати його кінців, то побачимо, що площа смуги під кривою між ординатами дорівнює $dS = f(c) \cdot dc$. Згідно (7.36) права частина цього виразу є ймовірність потрапляння молекул в інтервал швидкостей dc . Тому будь-яка площа під кривою та між ординатами інтервалу dc дорівнює ймовірності потрапляння молекул в цей інтервал швидкостей. В загальному випадку для будь-якої площі

$$\Delta S = \frac{\Delta N}{N} = \int_{c_1}^{c_2} f(c) dc. \quad (7.40)$$

А площа під всією кривою, оскільки $\sum \Delta N = N$, дорівнює

$$S = \sum \frac{\Delta N}{N} = \int_0^{\infty} f(c) dc = 1. \quad (7.41)$$

Вираз $\int_0^{\infty} f(c) dc = 1$ називають *умовою нормування* функції розподілу. Вона означає, що ймовірність потрапляння молекули в інтервал швидкостей від нуля до нескінченності дорівнює 1, тобто 100 %. Таку ймовірність називають *вірогідністю*.

Із збільшенням температури графік функції розподілу деформується, а саме, найбільш ймовірна швидкість збільшується, оскільки вона $c_{im} \sim \sqrt{T}$. Доля молекул, що мають малі швидкості, зменшується, доля молекул з великими швидкостями збільшується, а площа під кривою залишається сталою величиною. На рис. 68 показана зміна кривих розподілу із зміною температури.

Таким же чином змінюється ця крива і при зменшенні маси молекул.

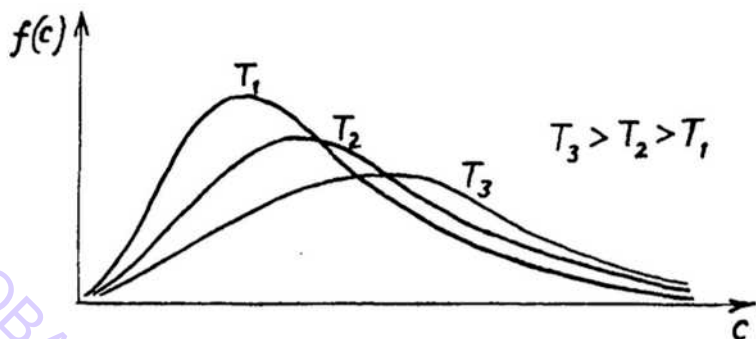


Рис. 68

Із розподілу Максвелла можна отримати вираз для середньої арифметичної швидкості

$$\bar{c} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}, \text{ або } \bar{c} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi \mu}}. \quad (7.42)$$

Формули (7.32), (7.39), (7.42) відповідно для середньої квадратичної, найбільш імовірної, середньої арифметичної швидкостей показують, що вони відрізняються лише числовими коефіцієнтами. При цьому $c_{im} < \bar{c} < \bar{c}$. Кількісний зв'язок між ними такий: $\bar{c} \approx 0,92 \bar{c}$, $c_{im} = 0,82 \bar{c}$.

Якщо є суміш газів, що знаходиться в рівноважному стані, то для кожного сорту молекул буде справедливий розподіл (7.38) зі своїм значенням маси молекул m .

Виходячи із розподілу за швидкостями

$$dN = N \cdot 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} c^2 e^{-\frac{mc^2}{2kT}} dc, \quad (7.43)$$

можна знайти розподіл молекул за значеннями кінетичної енергії поступового руху. Для цього необхідно перейти від змінної c до змінної ϵ , яка дорівнює $\epsilon = \frac{mc^2}{2}$. Виконуючи в (7.43)

підстановку $c = \sqrt{\frac{2\epsilon}{m}}$ і $dc = \frac{d\epsilon}{\sqrt{2m\epsilon}}$, отримаємо:

$$dN = N \frac{2}{\sqrt{\pi} (kT)^{3/2}} \cdot \sqrt{\epsilon} \cdot e^{-\frac{\epsilon}{kT}} d\epsilon, \quad (7.44)$$

де dN є число молекул, енергія яких має значення в інтервалі від ϵ до $\epsilon + d\epsilon$.

Відмітимо, що розподіл Максвелла справедливий для рівноважного стану і існує він внаслідок хаотичного руху молекул. Тому можна тепер сказати, що рух буде хаотичним, коли він підпорядковується розподілу Максвелла.

Дослідним шляхом вперше швидкості молекул досліджував в 1920 р. Штерн. Результати його дослідів підтвердили вірність оцінок середніх швидкостей атомів, які були отримані із розподілу Максвелла. Більш точніше закон розподілу був перевірений в дослідях Ламмерта (1929 р.). Познайомитись з цими дослідями можна в багатьох класичних виданнях з курсу фізики.

7.5. БАРОМЕТРИЧНА ФОРМУЛА. РОЗПОДІЛ БОЛЬЦМАНА

Розглядаючи молекулярно-кінетичну теорію газів, ми отримали вираз (7.16) для тиску ідеального газу, де на молекули не діють ніякі зовнішні сили. Розглянемо тепер питання про те, як поводить себе ідеальний газ в зовнішньому силовому полі. Для простоти візьмемо поле сили тяжіння. Як відомо, на газові молекули нашої атмосфери, які хаотично рухаються, діє сила тяжіння. Уявимо собі, що на якийсь певний момент часу молекули припинили хаотично рухатись, і на них діє лише сила тяжіння, тоді вони попадають на Землю і вкриють її поверхню якимось шаром певної невеликої товщини. Якщо ж навпаки, уявити собі, що на деякий момент часу на молекули, які хаотично рухаються, припинила діяти сила тяжіння, то вони розлетяться, і атмосфера зникне. Внаслідок того, що одночасно діють ці два фактори, атмосфера має свою будову. А саме, концентрація молекул повітря поблизу поверхні Землі велика. З висотою концентрація зменшується. І на висоті близько 100 км над поверхнею атмосфери немає, концентрація мо-

лекул повітря практично дорівнює нулю. У зв'язку з тим, що концентрація молекул змінюється з висотою, гідростатичний тиск на різних висотах буде змінюватись. Знайдемо залежність гідростатичного тиску від висоти. Для цього розглянемо шар газу товщиною dh . Тоді гідростатичний тиск, зумовлений силою тяжіння цього шару, буде дорівнювати $\rho g dh$. Фактично це є різниця тисків між верхньою та нижньою границею шару висотою dh , тобто

$$dp = -\rho g dh, \quad (7.45)$$

ρ — густина газу, g — прискорення вільного падіння. Знак мінус вказує на те, що dh і dp мають різні знаки, оскільки з висотою тиск зменшується.

Вважаючи газ ідеальним, знайдемо його густину із рівняння Менделєєва — Клапейрона (7.22) і підставимо її значення в (7.45). Тоді отримаємо

$$dp = -\frac{p\mu}{RT} g dh, \quad (7.46)$$

або

$$\frac{dp}{p} = -\frac{\mu g}{RT} dh.$$

Якщо температура з висотою не змінюється, то, інтегруючи останнє співвідношення, знаходимо

$$\ln p = -\frac{\mu g}{RT} h + \ln c,$$

де константу інтегрування зручно в даному випадку позначити через $\ln c$. Потенціювання отриманого виразу дає

$$p = c e^{-\frac{\mu g h}{RT}}.$$

Підставляючи сюди $h = 0$, отримаємо $c = p_0$, де p_0 — тиск на висоті $h = 0$.

Таким чином, при наших припущеннях тиск з висотою змінюється за законом

$$p = p_0 e^{-\frac{\mu gh}{RT}}. \quad (7.47)$$

Ця формула називається *барометричною формулою*. Вона показує, як тиск залежить від висоти. Графік цієї залежності зображено на рис. 69.

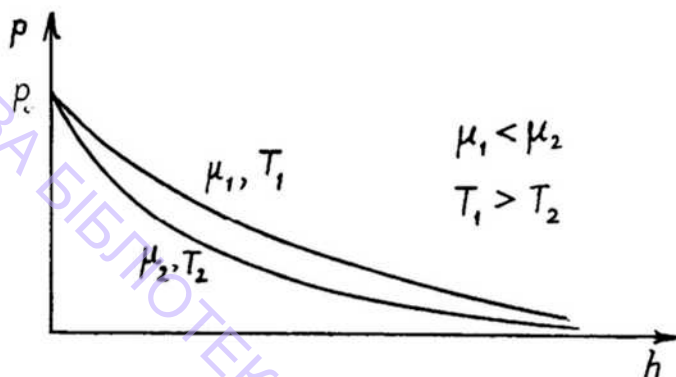


Рис. 69

Тиск з висотою зменшується за експоненціальним законом тим скоріше, чим важчий газ і чим менша температура.

Скористаємось тим, що $p = nkT$, і тоді із (7.47) отримаємо залежність концентрації молекул від висоти при сталій температурі:

$$n = n_0 e^{-\frac{\mu gh}{RT}}. \quad (7.48)$$

В останній формулі замінімо $\mu = mN_A$ і $R = kN_A$, тоді отримаємо:

$$n = n_0 e^{-\frac{mgh}{kT}}. \quad (7.49)$$

В цій формулі mgh є потенціальна енергія молекули на висоті h :

$$\varepsilon_n = mgh. \quad (7.50)$$

Враховуючи це, (7.49) можна записати так:

$$n = n_0 e^{-\frac{\epsilon_n}{kT}}, \quad (7.51)$$

де n_0 — концентрація молекул в тому місці, де потенціальна енергія дорівнює нулю.

Больцман показав, що розподіл (7.51) справедливий не лише для потенціальної енергії поля сили тяжіння, а і для будь-якого потенціального поля сил, для однакових молекул, що хаотично рухаються. Цей розподіл називають *розподілом Больцмана*.

Взагалі при рівноважному стані системи частинок, для яких справедливі закони класичної фізики, число частинок з даним значенням повної енергії E пропорційно величині $e^{-\frac{E}{kT}}$, а також числу можливих станів з цим значенням енергії.

7.6. ЯВИЩА ПЕРЕНОСУ В ГАЗАХ

До цього часу ми розглядали газ, що знаходиться в рівноважному стані. Такий стан у всіх точках характеризується однаковими значеннями температури, тиску, концентрації молекул. Розглянемо тепер явища, які виникають при відхиленні газу від рівноважного стану. Вони отримали назву *явища переносу*. Ми розглянемо три явища такого роду: *дифузію, теплопровідність і в'язкість*. Назва явища переносу пов'язана з тим, що, з точки зору молекулярно-кінетичної теорії, ці явища в газах зумовлені переносом молекулами при їх хаотичному русі із однієї області в іншу якоїсь фізичної величини. Для рідких і твердих тіл механізм переносу фізичних величин інший, ніж в газах. Але макроскопічні формули залишаються в своїй основі такими самими.

Розглянемо посудину з газом, поділену перегородкою на дві частини. В одній половині концентрація молекул більша, ніж в іншій, відповідно, і більша густина. Якщо забрати перегородку, то внаслідок хаотичного руху молекул через деякий час концентрація молекул і, відповідно, густина газів зрівняються. Таким чином, внаслідок хаотичного руху молекули переносять масу m . Це явище називається *дифузією*.

Візьмемо посудину з газом, поділену також перегородкою на дві частини з однаковою концентрацією молекул, але з різними значеннями середньої кінетичної енергії $\varepsilon = \frac{3}{2}kT$ і, відповідно, з різними значеннями температури. Якщо ж забрати перегородку, то з часом за рахунок хаотичного руху молекул і зштовхувань між ними середня кінетична енергія, а відповідно, і температури в обох половинах вирівнюються. Це явище називають *теплопровідністю*. При цьому молекули переносять енергію.

Нарешті, розглянемо потік газу, в якому різні шари рухаються з різними швидкостями u . Тоді за рахунок хаотичного руху молекул, а також зштовхувань між ними, молекули газу будуть переносити із одного шару в інший імпульс $p = mu$. Молекули шару, що має меншу швидкість, будуть сповільнювати рух шару, молекули якого мають більшу швидкість, і навпаки, молекули шару, що має більшу швидкість, рухаючись хаотично, за рахунок переносу імпульсу будуть прискорювати шар молекул, що рухається з меншою швидкістю. Тому внаслідок хаотичного руху молекул і переносу ними імпульсу, між шарами виникає внутрішнє тертя. Це явище переносу називається *в'язкістю в газах*.

Таким чином, у всіх трьох явищах переносу спільним є те, що вони відбуваються за рахунок хаотичного руху молекул, але в кожному окремому випадку переноситься своя певна мікроскопічна величина: маса — в явищі дифузії, середня кінетична енергія — в явищі теплопровідності та імпульс в явищі в'язкості газу. Тому для математичного опису цих явищ можна вивести загальне рівняння переносу якоїсь величини ϕ , яка в кожному окремому випадку буде мати своє певне значення чи то m , чи $\varepsilon = \frac{3}{2}kT$, чи $p = mu$.

Розглядаючи основні положення МКТ ідеального газу, ми не звертали увагу на взаємодію між молекулами. Тепер, щоб описати явища переносу, слід врахувати найпростішу взаємодію між молекулами — *зіткнення*. Під зіткненням будемо розу-

міти процес взаємодії між молекулами, в результаті якого вони змінюють напрям свого руху. Будемо вважати, що молекули газу мають форму кульки діаметром d . Припустимо, що лише одна молекула рухається із середньою швидкістю $\bar{c}$, а решта нерухомі. Під час руху ця молекула буде взаємодіяти з усіма молекулами, центри яких потрапляють в ефективний переріз σ (рис. 70).

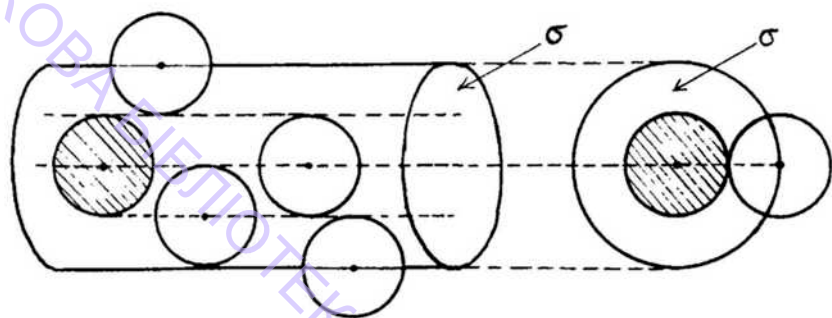


Рис. 70

Тобто центри молекул повинні розташовуватись від центра цієї молекули на відстані, яка менша, або дорівнює діаметру молекули.

Таким чином, з рухомою молекулою будуть взаємодіяти всі інші молекули, центри яких потрапляють в циліндр, радіус основи якого дорівнює d . Площа основи цього циліндра і є площа ефективного перерізу і дорівнює $\sigma = \pi d^2$. Якщо висота циліндра дорівнює $\bar{c}$, тобто середній арифметичний швидкості, то це означає, що молекула за одиницю часу зіштовхується з усіма молекулами, центри яких потрапляють в цей циліндр. Тоді об'єм циліндра буде дорівнювати $V = \pi d^2 \bar{c}$, а кількість молекул, що знаходяться в ньому, — $N = \pi d^2 \bar{c} n$, де n — концентрація молекул. Це і є кількість зіткнень молекули з іншими нерухомими молекулами за одиницю часу. Тепер врахуємо те, що всі молекули рухаються одна відносно одної, тобто потрібно виходити не з абсолютного значення середньої швидкості $\bar{c}$, а із середньої відносної швидкості c_* . Адже рух молекул спри-

чиняє збільшення кількості зіткнень порівняно з числом, коли рухається лише одна молекула, а інші нерухомі. Вважаючи, що всі молекули рухаються з однаковою швидкістю, можна показати, що $\bar{c}_n = \sqrt{2}\bar{c}$. Тоді середнє число зіткнень за одиницю часу буде дорівнювати

$$\bar{z} = \sqrt{2} n d^2 n \bar{c}, \text{ або } \bar{z} = \sqrt{2} \sigma n \bar{c}. \quad (7.52)$$

Оцінимо кількість зіткнень молекули азоту за одну секунду при нормальних умовах

$$\bar{z} = \sqrt{2} \cdot 3,14 \cdot (0,37 \cdot 10^{-9})^2 \cdot 2,7 \cdot 10^{25} \cdot 500 = 8,2 \cdot 10^9 \frac{1}{\text{сек}}.$$

Між двома зіткненнями молекули газу рухаються прямолінійно і проходять певний шлях, який називається *довжина вільного пробігу*. Довжина вільного пробігу, як це видно із рис. 71а, може бути різною.

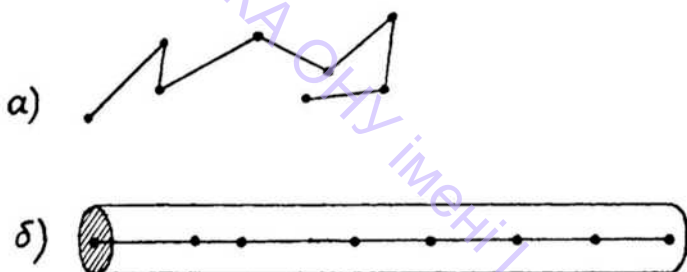


Рис. 71

Знайдемо середню довжину вільного пробігу. Для цього траєкторію руху молекули за одиницю часу розтягнемо в пряму лінію (рис. 71б) і побудуємо навколо неї циліндр з основою, що дорівнює ефективному перерізу σ , і висотою $\bar{c}$, тоді кількість зіткнень за одиницю часу буде дорівнювати кількості молекул в цьому циліндрі. Якщо відомі значення кількості зіткнень між молекулами за одиницю часу і середня швидкість, тобто висота циліндра, то довжину вільного пробігу можна знайти так:

$$\bar{\lambda} = \frac{\bar{c}}{\bar{z}} = \frac{\bar{c}}{\sqrt{2} \sigma n \bar{c}}, \text{ або } \bar{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2} \sigma n}. \quad (7.53)$$

Отже, $\bar{\lambda}$ обернено пропорційна концентрації молекул. Але $n \sim p$, тобто $\bar{\lambda}$ обернено пропорційна тиску. Із збільшенням тиску $\bar{\lambda}$ зменшується.

Оцінімо довжину вільного пробігу молекул азоту при нормальних умовах:

$$\bar{\lambda} = \frac{500}{8,2 \cdot 10^9} = 6,1 \cdot 10^{-8} \text{ м.}$$

Познайомившись з цими газо-кінетичними величинами, приступимо до виводу загального рівняння для *стаціонарних* явищ переносу. Стаціонарними називаються явища, які протікають незмінно з часом. Для цього визначимо кількість молекул, які переходять за час Δt через деяку площадку ΔS , яку умовно помістимо в газі (рис. 72).

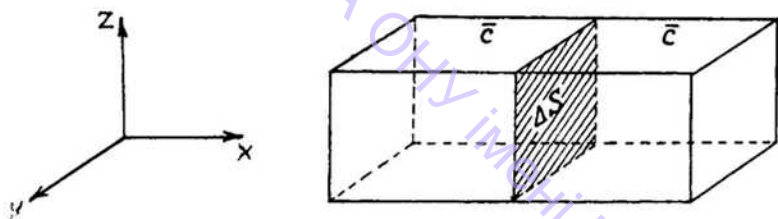


Рис. 72

Площадку розмістимо перпендикулярно до осі Ox . Оскільки молекули газу рухаються хаотично, то всі напрямки руху рівномірні. Тобто вздовж осі Ox рухається $\frac{1}{3}$ всіх молекул. Із них половина, тобто $\frac{1}{6}$ рухається справа наліво і $\frac{1}{6}$ — зліва направо. Тоді за 1 сек. площадку ΔS справа наліво перетнуть всі молекули, що знаходяться в об'ємі прямокутного паралелепіпеда з основою ΔS і висотою $\bar{c}$, тобто $N = \frac{1}{6} \Delta S \bar{c} n$, де n — концентра-

ція. А за час Δt — $N_1 = \frac{1}{6} \Delta S \bar{c} n \Delta t$. Рухаючись, ці молекули переносяться через площадку ΔS фізичну величину ϕ (масу, енергію, імпульс). Тоді кількість фізичної величини, що переноситься в одному напрямку через площадку ΔS за час Δt , буде дорівнювати

$$N\phi = \frac{1}{6} (n\phi) \bar{c} \Delta S \Delta t. \quad (7.54)$$

Така ж кількість фізичної величини буде перенесена в зворотному напрямку.

Уявимо, що газ буде неоднорідним, тобто концентрація молекул в різних місцях об'єму буде різна, і самі молекули мають різні значення фізичної величини ϕ . Тоді кількість фізичної величини в одиниці об'єму ($n\phi$) також буде різна в різних місцях об'єму газу. Нехай кількість ($n\phi$) зменшується в напрямку OX . Тоді зліва від площадки ΔS буде $(n\phi)_1$, а справа — $(n\phi)_2$. В цьому випадку через площадку ΔS зліва направо буде переноситись більша кількість фізичної величини $N\phi$. Тоді загальний переніс буде дорівнювати

$$\Delta(N\phi) = (N\phi)_1 - (N\phi)_2 = \frac{1}{6} [(n\phi)_1 - (n\phi)_2] \cdot \bar{c} \Delta S \cdot \Delta t. \quad (7.55)$$

З'ясуємо, на якій відстані від площадки ΔS слід взяти значення ($n\phi$). Обмін значеннями ϕ , а також зміна концентрації відбуваються при зіткненнях молекул, тобто на відстані $\bar{\lambda}$, що дорівнює середній довжині вільного пробігу молекул. Тому саме на такій відстані від площадки ΔS вліво і вправо потрібно брати значення ($n\phi$). Таким чином, відстань між ними дорівнює $2\bar{\lambda}$. Помножимо і поділимо праву частину (7.55) на $2\bar{\lambda}$ і отримаємо

$$\Delta(N\phi) = \frac{1}{3} \bar{c} \bar{\lambda} \frac{(n\phi)_1 - (n\phi)_2}{2\bar{\lambda}} \Delta S \cdot \Delta t. \quad (7.56)$$

В загальному випадку відношення $\frac{(n\phi)_1 - (n\phi)_2}{2\bar{\lambda}}$ являє собою градієнт ($n\phi$). Він показує, як швидко у просторі зміню-

ється фізична величина ($n\phi$). Поділивши ліву і праву частини в (7.56) на $\Delta S \cdot \Delta t$, отримаємо

$$\frac{\Delta(N\phi)}{\Delta S \cdot \Delta t} = -\frac{1}{3} \bar{c} \bar{\lambda} \text{grad} n\phi. \quad (7.57)$$

Вираз зліва в цій формулі називають *поток* фізичної величини. Потік — це векторна величина. Він спрямований в ту сторону, куди розповсюджується фізична величина, тобто від більшого значення до меншого, а градієнт завжди спрямований в сторону більшої фізичної величини. Тому в рівнянні (7.57) стоїть знак мінус ($-$). Це і є загальне рівняння для явищ переносу в стаціонарному випадку, тобто коли чисельні значення ($n\phi$) з часом не змінюються. На його основі розглянемо тепер конкретні явища переносу.

Дифузія. Як було зазначено вище, в процесі дифузії переноситься фізична величина — маса m . Підставимо в рівняння (7.57) замість ϕ значення m (маса молекули газу), тоді

$$\frac{\Delta(Nm)}{\Delta S \cdot \Delta t} = -\frac{1}{3} \bar{c} \bar{\lambda} \text{grad}(nm). \quad (7.58)$$

В цій формулі $\frac{\Delta(Nm)}{\Delta S \cdot \Delta t} = \mathfrak{J}$ є потік маси, а $nm = \rho$ — густина газу. З врахуванням цих позначень рівняння (7.58) має вигляд

$$\mathfrak{J} = -\frac{1}{3} \bar{c} \bar{\lambda} \text{grad} \rho. \quad (7.59)$$

Величину $\frac{1}{3} \bar{c} \bar{\lambda}$ позначимо через D . Називають її *коефіцієнтом дифузії* газу. Тоді рівняння (7.59) записують так:

$$\mathfrak{J} = -D \text{grad} \rho. \quad (7.60)$$

Це рівняння для стаціонарної дифузії отримало назву *рівняння Фіка*. Потік маси пропорційний коефіцієнту дифузії і градієнту густини. Із цього рівняння дамо визначення коефіцієнта дифузії. Він чисельно дорівнює потоку маси при одиничному градієнту густини

$$D = \frac{\Im}{\text{grad} \rho}. \quad (7.61)$$

Оскільки $D = \frac{1}{3} \bar{\lambda} \bar{c}$, а $\bar{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2} \sigma n}$, $\bar{c} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi \mu}}$, $p = nkT$, то кое-

фіцієнт дифузії пропорційний кореню із температури і обернено пропорційний тискові.

Оцінимо коефіцієнт дифузії азоту при нормальних умовах.

$$D = \frac{1}{3} 6,1 \cdot 10^{-8} \cdot 500 \approx 10 \cdot 10^{-6} \frac{\text{м}^2}{\text{с}}.$$

Розглянуте вище явище дифузії фактично є явищем само-дифузії, тобто молекули газу за рахунок хаотичного руху розповсюджуються між молекулами того ж самого газу. Якщо ж в явищі дифузії приймають участь різні гази, то рівняння (7.60) залишається справедливим, але коефіцієнт дифузії (взаємодифузії) записують через коефіцієнти самодифузії газів D_1 і D_2 таким чином:

$$D = \frac{D_1 n_1 + D_2 n_2}{n_1 + n_2}, \quad (7.62)$$

де n_1 і n_2 — концентрації цих газів.

Розглянуте явище дифузії в стаціонарному випадку відображає загальну картину дифузії. В природі, в техніці явище дифузії відіграє дуже важливу роль. Наведемо деякі приклади цього явища: дихання людини, тварин відбувається шляхом дифузії кисню із зовнішнього середовища в організм. Шляхом дифузії відбувається обмін киснем та органічними речовинами у рослин. Важливим елементом функціонування клітинних мембран є також дифузія. Однак, рівняння для дифузії в кожному випадку, зберігаючи загальні риси, будуть різними.

Теплопровідність. В цьому явищі фізична величина, що переноситься завдяки хаотичному рухові молекул, є енергія $\phi = \varepsilon = \frac{3}{2} kT$. Підставимо це значення в загальне рівняння (7.57), тоді отримаємо

$$\frac{\Delta(N\varepsilon)}{\Delta S \cdot \Delta t} = -\frac{1}{3} \bar{c} \bar{\lambda} \text{grad} \left(n \frac{3}{2} kT \right). \quad (7.63)$$

Зробимо деякі перетворення, а саме, помножимо чисельник і знаменник виразу під градієнтом на N_A — число Авогадро і m — масу молекули. Врахуємо також, що $kN_A = R$, а $\frac{3}{2}R$, як це буде показано пізніше в розділі 8, — молярна теплоємність при сталому об'ємі C_v , $mN_A = \mu$ — молярна маса, $\frac{C_v}{\mu} = c_v$ — питома теплоємність при сталому об'ємі, $mn = \rho$ — густина газу. Всі ці величини не залежать від координат, і їх можна винести з-під градієнта. Тоді, після всіх цих дій, рівняння (7.63) буде мати вигляд (7.64)

$$\frac{\Delta(N\varepsilon)}{\Delta S \cdot \Delta t} = -\frac{1}{3} \bar{c} \bar{\lambda} c_v \rho \text{grad} T. \quad (7.64)$$

Позначимо величини $\frac{\Delta(N\varepsilon)}{\Delta S \cdot \Delta t}$ через q — потік тепла, а $\frac{1}{3} \bar{c} \bar{\lambda} c_v \rho = \kappa$ — коефіцієнт теплопровідності і запишемо останнє рівняння таким чином

$$q = -\kappa \text{grad} T. \quad (7.65)$$

Це є рівняння для стаціонарної теплопровідності. Воно носить назву *рівняння Фур'є*. Потік тепла пропорційний коефіцієнту теплопровідності і градієнту температури. Із цього рівняння коефіцієнт теплопровідності є потік тепла при одиничному градієнті температури.

$$\kappa = \frac{q}{\text{grad} T}. \quad (7.66)$$

Оскільки і $\kappa = \frac{1}{3} \bar{c} \bar{\lambda} c_v \rho$ і $\lambda \sim \frac{1}{p}$, $\bar{c} \sim \sqrt{T}$, $\rho \sim p$, c_v не залежить від T і p , то отримаємо $\kappa \sim \sqrt{T}$ і не залежить від тиску. Але у до-
сить розріджених газах теплопровідність залежить від тиску. Із

зменшенням тиску збільшується довжина вільного пробігу молекул і, коли вона дорівнює розмірам посудини, де знаходиться газ, то кількість енергії, що переноситься від однієї стінки до іншої, буде залежати від концентрації молекул, а значить, і від тиску. Це явище використовують в термосах (посудина Дьюара). Між подвійними стінками цієї посудини знаходиться дуже розріджений газ, який має дуже малий коефіцієнт теплопровідності.

В'язкість. Фізична величина, що переноситься в цьому явищі, це імпульс $\Phi = p = mu$, де u — швидкість шару молекул. Підставляємо цю величину в загальне рівняння (7.57). Тоді отримуємо

$$\frac{\Delta(Nmu)}{\Delta S \cdot \Delta t} = -\frac{1}{3} \bar{c} \bar{\lambda} \text{grad}(nmu). \quad (7.67)$$

Враховуючи, що $\frac{\Delta(Nmu)}{\Delta S \cdot \Delta t} = L$ є потік імпульсу, а $nm = \rho$ — густина газу — стала величина, і її можна винести з-під градієнта, рівняння (7.67) буде мати вигляд

$$L = -\frac{1}{3} \bar{c} \bar{\lambda} \rho \text{grad} u. \quad (7.68)$$

Позначимо $\frac{1}{3} \bar{c} \bar{\lambda} \rho$ через η — коефіцієнт в'язкості, і рівняння (7.68) запишемо у вигляді:

$$L = -\eta \text{grad} u. \quad (7.69)$$

Це рівняння для стаціонарної в'язкості називається *рівнянням Ньютона* для внутрішнього тертя в газах. Потік імпульсу пропорційний коефіцієнту в'язкості і градієнту швидкості. Коефіцієнт в'язкості із цього рівняння дорівнює

$$\eta = \frac{L}{\text{grad} u}, \quad (7.70)$$

тобто потокові імпульсу при одиничному градієнті швидкості.

Коефіцієнт в'язкості, що дорівнює $\frac{1}{3} \bar{c} \bar{\lambda} \rho$, також пропорційний

кореню із температури і не залежить від тиску. Рівняння (7.69) можна переписати ще так:

$$\frac{\Delta p}{\Delta S \cdot \Delta t} = -\eta \text{grad} u, \text{ або } \frac{\Delta p}{\Delta t} = -\eta \text{grad} u \cdot \Delta S,$$

а оскільки $\frac{\Delta p}{\Delta t} = F$, згідно з другим законом Ньютона, то $F = \eta \frac{du}{dr} \Delta S$.

Сила тертя, яка зумовлена переносом імпульсу, що діє на площадку, пропорційна коефіцієнту в'язкості, градієнту швидкості і площі. З цією формулою ми зустрічалися в механіці, коли розглядали рідинне тертя. Хоча формули і однакові, але в рідинах механізм внутрішнього тертя інший. В рідинах він зумовлений силами взаємодії між молекулами.

Оцінімо коефіцієнт в'язкості для молекул азоту при нормальних умовах:

$$\eta = \frac{1}{3} 6,1 \cdot 10^{-8} \cdot 5 \cdot 10^2 \cdot 1,25 = 12,7 \cdot 10^{-6} \frac{\text{кг}}{\text{м} \cdot \text{с}}.$$

Якщо порівнювати коефіцієнти переносу, то між ними існують такі співвідношення: $\frac{\eta}{\rho} = \nu$ є коефіцієнт кінематичної в'язкості, або $\frac{\eta}{\rho} = D$ є коефіцієнт дифузії, $\kappa \left(\frac{1}{c_v \rho} \right) = a$ — коефіцієнт температуропровідності газу, або є коефіцієнт дифузії. Отримані співвідношення знаходяться у гарній відповідності з експериментальними даними. Це підтверджує вірність розглянутої нами молекулярно-кінетичної теорії.

КОНТРОЛЬНІ ПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ

1. Сформулюйте основні положення МКТ.
2. Яке співвідношення між потенціальною і кінетичною енергіями молекули для різних станів речовини?
3. Виведіть перше рівняння МКТ.

4. Запишіть і поясніть друге рівняння МКТ.
5. Що таке термодинамічна температура?
6. Покажіть, як можна отримати рівняння Менделєєва — Клапейрона.
7. Запишіть основні газові закони для ізопроцесів та намалюйте їх графіки.
8. Чому дорівнює середня квадратична швидкість молекул газу? Від чого вона залежить?
9. Що таке функція розподілу молекул за швидкостями? Намалюйте її графік для різних температур.
10. Чому дорівнює площа під кривою Максвелла?
11. Запишіть характерні швидкості розподілу Максвелла і покажіть їх на графіку.
12. Виходячи із розподілу Максвелла за швидкостями, знайдіть розподіл за енергіями.
13. Як і чому розподіляється концентрація молекул повітря з висотою?
14. Знайдіть залежність тиску повітря від висоти.
15. Який вигляд має розподіл молекул за потенціальною енергією в силовому полі?
16. Які мікроскопічні величини переносяться завдяки хаотичному рухові молекул в явищах переносу?
17. Що таке ефективний переріз молекули?
18. Чому дорівнює середня кількість зіткнень молекули за одиницю часу? Від чого вона залежить?
19. Чому дорівнює кількість зіткнень молекул газу в одиниці об'єму за 1 сек.?
20. Що таке довжина вільного пробігу молекули? Від чого вона залежить?
21. Що таке коефіцієнт дифузії газу? Від чого він залежить? В яких одиницях він вимірюється?
22. Дайте визначення коефіцієнту теплопровідності. Від чого він залежить?
23. Сформулюйте означення коефіцієнта в'язкості газу. Чому він дорівнює? Від чого залежить?
24. Які співвідношення між коефіцієнтами переносу?

Розділ 8

ТЕРМОДИНАМІКА

8.1. МЕТОД ТЕРМОДИНАМІКИ

На відміну від молекулярно-кінетичної теорії, термодинаміка не розглядає мікроструктуру системи і ті мікропроцеси, що в ній відбуваються. Термодинаміка вивчає кількісні закономірності системи, користуючись макроскопічними параметрами, які характеризують систему в цілому і не притаманні в застосуванні до окремих частинок.

Термодинаміка базується на трьох фундаментальних законах, які є узагальненням численних дослідних фактів. Внаслідок цього висновки термодинаміки мають досить загальний характер. Їх можна застосовувати до магнітних, оптичних, хімічних явищ, до процесів, що відбуваються усередині зірок та інших. Термодинамічні методи знаходять широке застосування в біології. Особливу роль в біології відіграє так звана термодинаміка нерівноважних систем. Нею користуються для опису відкритих систем, якими є живі організми. Питання термодинаміки є дуже важливими для розуміння енергетики організму, теплообміну біологічних систем з навколишнім середовищем та пояснення фізичних процесів, що відбуваються в біологічних мембранах.

В цьому розділі будуть, в основному, розглянуті поняття та закономірності класичної термодинаміки або термодинаміки рівноважних систем.

Рівноважною є така система, в якій параметри стану мають цілком певне і однакове значення у всіх частинах системи і з часом не змінюються. Коли система із одного рівноважного стану переходить в інший, то в системі відбувається термодинамічний процес. *Термодинамічний процес називають рівноважним*, якщо система в будь-який момент часу перебуває в стані

рівноваги. Практично до рівноважного процесу наближаються такі процеси, які відбуваються дуже повільно.

Рівноважний стан системи можна зобразити точкою на графіку залежності між двома параметрами, а термодинамічний рівноважний процес зображають лінією, що з'єднує два рівноважних стани. Якщо в системі відбувається такий процес, то система проходитиме через ряд послідовних нескінченно близьких один до одного станів, а точка, що зображає стан, буде переміщуватись вздовж цієї лінії.

Коловим процесом, або циклом називають такий процес, при якому система виходить з якогось термодинамічного стану і, зазнавши змін, повертається до того ж самого стану.

Процес переходу системи із стану 1 в стан 2 називають *оборотним*, якщо можливий процес переходу системи із стану 2 в стан 1 через ті ж самі проміжкові стани, але в зворотному порядку і при цьому ні в системі, ні в навколишньому середовищі ніяких змін не буде: в іншому випадку процес називають *необоротним*. Прикладом оборотного процесу в механіці може бути коливання маятника, якби воно відбувалось без тертя. За один період маятник повертався б через проміжкові стани в попереднє положення, і при цьому ніяких змін ні з маятником, ні в навколишньому середовищі не відбувається. Аналогічні механічні процеси, які відбувались би без тертя, були б оборотними. Але тертя існує завжди. Тому всі механічні процеси, де частина механічної енергії за рахунок тертя переходить в теплову, є необоротними.

Прикладом необоротних процесів в молекулярній фізиці є явища дифузії, теплообміну. Тепло доволіно від більш нагрітого тіла до менш нагрітого переходить, а зворотний процес сам по собі проходити не може. Щоб забрати тепло від менш нагрітого тіла і передати тілу з більшою температурою, як це робиться в холодильниках, повинно бути зовнішнє втручання. Тому такий процес буде необоротним. Взагалі в природі оборотних процесів немає. Оборотні процеси — це ідеальне поняття, але воно необхідне для вивчення реальних процесів.

8.2. ВНУТРІШНЯ ЕНЕРГІЯ ГАЗІВ

В ідеальному газі молекули не взаємодіють між собою, тому вони не мають потенціальної енергії. Середня кінетична енергія, що зумовлена хаотичним рухом, для однієї молекули, згідно (7.14), дорівнює $\bar{\epsilon} = \frac{3}{2}kT$. Для одного молю ідеального одноатомного газу, що містить $N_A = 6,02 \cdot 10^{23}$ молекул, середня кінетична енергія, яку називають *внутрішньою енергією*, дорівнює

$$U = \bar{\epsilon} \cdot N_A = \frac{3}{2}kTN_A, \text{ або } U = \frac{3}{2}RT. \quad (8.1)$$

Елементарна зміна внутрішньої енергії одного молю ідеального одноатомного газу дорівнює $dU = \frac{3}{2}RdT$. Якщо кількість газу дорівнює ν молів, то внутрішня енергія

$$U = \frac{3}{2}\nu RT, \text{ або } U = \frac{3}{2} \frac{M}{\mu} RT. \quad (8.2)$$

Відповідно елементарна зміна внутрішньої енергії для ν молів дорівнює $dU = \frac{3}{2}\nu RdT$.

Отримані вирази для внутрішньої енергії ідеального одноатомного газу враховують лише енергію поступального руху молекул. Проте поряд з поступальним рухом багатоатомні молекули можуть обертатися, а окремі атоми, що входять до складу молекули, можуть здійснювати ще і коливальні рухи. Дійсно, багатоатомну молекулу можна схематично зобразити по-різному, в залежності від кількості атомів в молекулі. Наприклад, молекули 2-атомних газів O_2 , H_2 , N_2 і інші мають вигляд гантелі. Молекули 3-атомних газів CO_2 , H_2O , NO_2 — зображають у формі трикутника, в вершинах якого розташовані відповідні атоми. Ось такі молекули, крім поступального руху, і можуть приймати участь в обертальному і коливальному рухах. Для розрахунку середньої кінетичної енергії таких рухів вводять так звані *ступені вільності рухів*.

Числом ступенів вільності тіла називають число незалежних координат, що визначають положення і конфігурацію тіла в просторі і за допомогою яких можна описати рух тіл.

Таким чином, молекули ідеальних газів, які зображають у вигляді матеріальних точок, в просторі можуть рухатись в трьох незалежних напрямках, відповідно, вздовж осі X , Y , Z , і тому вони мають три ступені вільності. Молекули багатоатомних газів, крім того, що їх центр мас приймає участь у поступальному русі і може рухатись в трьох незалежних напрямках, також можуть приймати участь в обертальному русі навколо тих самих напрямків. І таким чином, кількість ступенів вільності їх буде дорівнювати шести: три лінійні і три кутові. При досить високих температурах атоми молекул можуть приймати участь в коливальних рухах. Кількість ступенів вільності коливального руху молекули залежить від кількості атомів в молекулі.

Взагалі складна молекула ідеального газу може мати $3n$ -п ступенів вільності, де n — кількість атомів в молекулі. Із них на поступальний та обертальний рухи припадає шість ступенів вільності. Відповідно, коливальних ступенів може бути $3n-6$.

Згідно з теоремою Больцмана, доказ якої ми розглядати не будемо, якщо система молекул знаходиться в тепловій рівновазі при температурі T , то середня кінетична енергія рівномірно розподілена між всіма ступенями вільності, і на кожен з них припадає $\frac{1}{2}kT$.

Тепер зрозуміло, чому в формулі (7.14) для середньої кінетичної енергії молекул одноатомного ідеального газу стоїть коефіцієнт $\frac{3}{2}$. Для 2-атомних і багатоатомних молекул середня кінетична енергія буде дорівнювати:

$$\bar{\epsilon} = \frac{i}{2}kT, \quad (8.3)$$

де i — кількість ступенів вільності. Відповідно внутрішню енергію записують так:

$$U = \frac{i}{2} \frac{M}{\mu} RT. \quad (8.4)$$

Як видно із формул (8.2) і (8.4), внутрішня енергія прямо пропорційно залежить від температури. Чим більша температура, тим більша внутрішня енергія. Внутрішня енергія залежить також від кількості ступенів вільності, які, в свою чергу, можуть бути різними при різних температурах. Наприклад, при нормальних умовах, а також при умовах, близьких до нормальних, молекули 2-атомних і багатоатомних газів приймають участь в поступальному і обертовому рухах. Тому кількість ступенів вільності для 2-атомних молекул буде дорівнювати 5 (обертатись навколо осі, що з'єднує 2 атоми, молекула не може), а для 3-атомних і багатоатомних — 6. Слід також зазначити, що на кожен ступінь вільності коливального руху приходить енергія $\frac{1}{2}kT$ у вигляді кінетичної, і $\frac{1}{2}kT$ у вигляді потенціальної. Тому, коли при високих температурах в молекулах багатоатомних газів збуджені коливальні рухи, то на кожен ступінь вільності коливального руху припадає енергія kT .

Якщо термодинамічна система бере участь у коловому процесі, тобто виходить з певного стану, зазнає ряд змін і знову повертається у початковий стан, то це означає, що температура системи не змінилась. А, оскільки внутрішня енергія залежить від температури, то повна зміна внутрішньої енергії в коловому процесі дорівнює нулю

$$\Delta U = \oint dU = 0. \quad (8.5)$$

Інтеграл по замкненому контуру дорівнює нулю лише тоді, коли підінтегральний вираз є повним диференціалом якоїсь функції. Отже, dU є повним диференціалом. При переході системи з першого стану в інший зміна внутрішньої енергії

$$\Delta U = \int_{U_1}^{U_2} dU = U_2 - U_1. \quad (8.6)$$

Це означає, що зміна внутрішньої енергії під час переходу визначається значеннями енергії у початковому і кінцевому станах і не залежить від того шляху, яким вона переходить в цей стан. Отже, внутрішня енергія системи є однозначною функцією її стану.

Елементарну зміну внутрішньої енергії системи можна ви-значити таким чином:

$$dU = \frac{i}{2} \frac{M}{\mu} R dT. \quad (8.7)$$

Цією формулою користуються для розрахунків зміни внутрішньої енергії, коли газ ідеальний, або за своїми властивостями близький до ідеального. Якщо ж газ стиснути так, щоб відстань між молекулами була незначною, тоді між ними почнуть діяти сили притягання і відштовхування, і для розрахунку внутрішньої енергії слід враховувати потенціальну енергію взаємодії між молекулами. Такий газ не є ідеальним.

8.3. РОБОТА ТЕРМОДИНАМІЧНОЇ СИСТЕМИ

Розглянемо газ, що знаходиться в циліндрі з легкорухомим поршнем. Площа поршня дорівнює S . На поршень покладемо вантаж. Тоді газ в циліндрі буде перебувати під тиском $p = \frac{F}{S}$, де F — сила тяжіння, що діє на вантаж. Якщо газ нагріти, то він розшириться, і поршень переміститься на висоту dh , при цьому тиск залишиться таким самим. Елементарна робота, яку виконує газ при розширенні, дорівнює

$$dA = Fdh, \text{ або } dA = pSdh,$$

а оскільки Sdh є зміна об'єму газу dV , то

$$dA = p dV. \quad (8.8)$$

Якщо газ розширюється в циліндрі під поршнем від об'єму V_1 до об'єму V_2 і при цьому тиск змінюється, то цей процес на

графіку залежності $p(V)$ буде зображатись кривою лінією (1, 2), рис. 73.

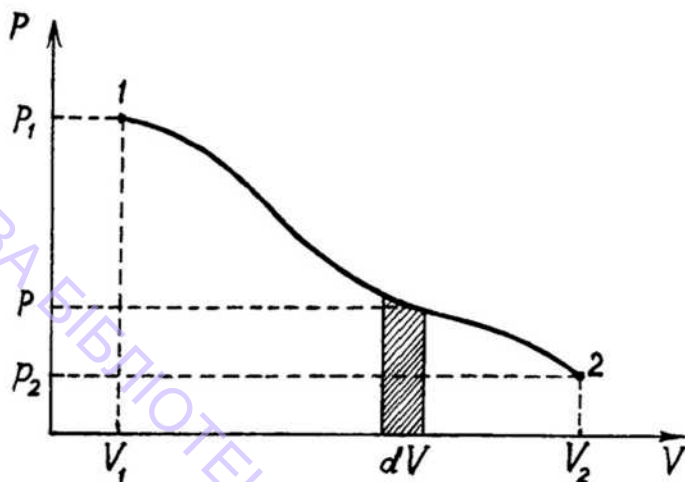


Рис. 73

Розглянемо маленький інтервал розширення dV , для якого тиск можна вважати незмінним. Тоді елементарна робота $dA = pdV$ на графіку буде зображатись площею вузької смуги шириною dV і висотою p . Повна робота при розширенні газу від об'єму V_1 до об'єму V_2 буде дорівнювати на графіку всій площі, що обмежена кривою 1, 2, ординатами p_1 і p_2 і віссю абсцис, тобто

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p dV. \quad (8.9)$$

Це є загальна формула для розрахунку роботи при будь-яких процесах. Користуючись нею, розглянемо, чому дорівнює робота при ізопроцесах.

Для *ізобарного* процесу $p = \text{const}$ робота дорівнює

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p dV = p \int_{V_1}^{V_2} dV = p(V_2 - V_1). \quad (8.10)$$

На графіку залежності $p(V)$ робота дорівнює площі прямокутника висотою p і шириною $V_2 - V_1$.

При *ізотермічному* процесі $T = \text{const}$, тиск змінюється і, якщо його виразити із рівняння Менделєєва — Клапейрона через зміну об'єму $p = \frac{RT}{V}$, то для одного моля робота дорівнює

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p dV = RT \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = RT \ln \frac{V_2}{V_1}, \quad (8.11)$$

а для ν молів —

$$A = \frac{M}{\mu} RT \ln \frac{V_2}{V_1}. \quad (8.12)$$

На графіку залежності $p(V)$ робота зображається площею під ізотермою.

Для *ізохорного* процесу $V = \text{const}$, зміна об'єму $dV = 0$, і робота дорівнює нулю.

Слід зауважити, що робота вважається додатною, якщо газ розширюється і виконує роботу, і від'ємною, якщо газ стискується і над ним виконують роботу.

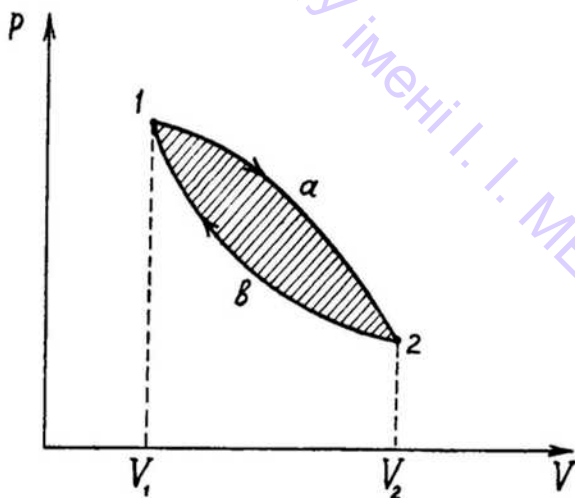


Рис. 74

Робота при *коловому* процесі ($\oint p \, dv$), рис. 74, дорівнює площі всередині замкненого циклу. При переході (1д2) газ розширюється і виконує додатну роботу, що дорівнює площі під кривою 1-д-2. При переході (2в1) об'єм зменшується, газ стискується і виконує від'ємну роботу, що дорівнює площі під кривою (2в1). Зрозуміло, що повертатись в попереднє положення можна різними шляхами. При цьому робота за цикл буде різна. Тому робота, на відміну від внутрішньої енергії, не є функцією стану системи, а залежить від того, як відбувається процес. Вона є функцією процесу.

8.4. КІЛЬКІСТЬ ТЕПЛОТИ. ТЕПЛОЄМНІСТЬ

Як було показано раніше (8.2), внутрішня енергія даної маси ідеального газу залежить від температури. Зміна енергії, як це відомо з механіки, зв'язана з роботою. Енергія тіла змінюється, якщо тіло виконує роботу або над тілом виконується робота, і ця зміна дорівнює виконаній роботі. Виходячи з цього, можна зробити висновки, що для нагрівання газу або якогось тіла, над ним необхідно виконати роботу, а для охолодження необхідно створити такі умови, при яких воно само могло б виконати роботу. Тобто температуру тіла можна змінити шляхом затрати механічної роботи. Наприклад, при терті тіла нагріваються. Ще в давнину люди таким чином добували вогонь. Але існує інший спосіб зміни температури тіла.

Розглянемо два тіла в різних теплових станах. Нехай в першому інтенсивність хаотичного руху молекул більша, ніж в другому. Відповідно, і температура, яка є мірою середньої кінетичної енергії хаотичного руху молекул, в першому тілі більша, ніж в другому. Якщо привести ці тіла в *тепловий контакт*, то молекули першого тіла, зіштовхуючись на границі з молекулами другого, збільшать інтенсивність теплового руху останніх. Внаслідок цього внутрішня енергія першого тіла зменшиться, а другого — збільшиться.

Внутрішня енергія, що передається при тепловому контакті від першого тіла до другого на молекулярному рівні, називається

вається *кількістю переданої теплоти*. Насправді при передачі теплоти ми також маємо справу з роботою, але цю роботу виконують не макроскопічні тіла, що рухаються впорядковано, а мікрочастинки, які рухаються хаотично. Зауважимо, що теплота може передаватись не лише при тепловому контакті, а також шляхом конвекції, як було розглянуто раніше (7.65) в газоподібних середовищах, а також шляхом випромінювання, як це буде показано пізніше в оптиці (в прозорих середовищах та у вакуумі). Оскільки кількість переданої тілу теплоти в результаті теплового контакту вимірюється зміною внутрішньої енергії, то і кількість теплоти повинна вимірюватись в тих же одиницях, що і внутрішня енергія, тобто в *джоулях*. Історично склалось так, що одиницею кількості теплоти була *калорія*. Одна калорія чисельно дорівнює такій кількості теплоти, яку потрібно надати одному граму води, щоб нагріти його на один градус. Пізніше дослідним шляхом було встановлено, що нагрівання, спричинене однією калорією, дає такий самий результат, як і робота, що дорівнює 4,18 джоулів.

Співвідношення 1 калорія = 4,18 джоулів носить назву *механічний еквівалент теплоти*, а величина, обернена 1 джоуль = 0,24 калорії, — *тепловий еквівалент механічної роботи*.

Для кількісної характеристики переданої теплоти встановлена фізична величина, що носить назву *теплоємність*. Теплоємністю тіла називається кількість теплоти, яку необхідно надати тілу, або відняти від нього, для зміни його температури на один градус. Якщо кількість переданої тілу теплоти позначити через AQ , а зміну температури через ΔT , то теплоємність тіла дорівнює

$$C = \frac{AQ}{\Delta T}. \quad (8.13)$$

Теплоємність, віднесена до одиниці маси речовини, називається *питомою теплоємністю*

$$c = \frac{AQ}{\Delta T m}. \quad (8.14)$$

Зрозуміло, що вона характеризує не саме тіло, а речовину, з якої складається тіло. Теплоємність, віднесена до одного молю речовини, називається *молярною теплоємністю*

$$C = \frac{\Delta Q}{\Delta T_v}. \quad (8.15)$$

Так само, як і питома, вона є характеристикою речовини. Згідно з визначенням, питома теплоємність вимірюється в $\frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{град}}$, а молярна — в $\frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{град}}$. Між питомою та молярною теплоємностями існує таке співвідношення

$$c = \frac{C}{\mu}, \quad (8.16)$$

тут c — питома теплоємність, C — молярна теплоємність, μ — молярна маса речовини.

Якщо дослідним шляхом визначити питому чи молярну теплоємність для різних речовин, то, згідно з (8.14) і (8.15), кількість теплоти підраховують, відповідно, таким чином:

$$\Delta Q = cm\Delta T, \text{ або } \Delta Q = C_v\Delta T. \quad (8.17)$$

Теплоємність і, відповідно, кількість переданої теплоти для газів залежить від тих умов, за яких відбувається ця передача. Для різних процесів кількість теплоти буде різною. Тому кількість теплоти так само, як і робота термодинамічної системи, є функція процесу.

Елементарна кількість теплоти, що передається системі, дорівнює

$$dQ = cmdT, \text{ або } dQ = C_vdT. \quad (8.18)$$

Оскільки кількість теплоти не є функція стану системи, а є функцією процесу, то dQ не є повним диференціалом.

Теплоємність газу залежить від того, при яких умовах він нагрівається: при сталому об'ємі, чи при сталому тиску. В першому випадку все тепло йде на нагрівання газу, тобто на збільшення його внутрішньої енергії. В другому випадку, крім того,

що газ нагрівається, він ще розширюється і виконує роботу, тому теплоти для нагрівання на один градус необхідно передати більше. Тому і молярна теплоємність при сталому тиску, яку позначають C_p , буде більша, ніж молярна теплоємність при сталому об'ємі, яку позначають C_v , тобто

$$C_p > C_v \quad (8.19)$$

При сталому об'ємі тепло, що передається системі, йде на збільшення внутрішньої енергії $dQ = dU$, тому для одного молю ідеального одноатомного газу з врахуванням (8.1) ця рівність має вигляд:

$$C_v dT = \frac{3}{2} R dT. \quad (8.20)$$

Розділимо ліву і праву частину цієї рівності на dT , і для молярної теплоємності при сталому об'ємі отримаємо:

$$C_v = \frac{3}{2} R. \quad (8.21)$$

Враховуючи ступені вільності, можна показати, що

$$C_v = \frac{i}{2} R. \quad (8.22)$$

При сталому тиску кількість теплоти, що передається системі, йде на нагрівання газу і на виконання роботи $dQ = dU + dA$, або, з врахуванням (8.1) і (8.8), для одного молю одноатомного ідеального газу

$$C_p dT = \frac{3}{2} R dT + p dV. \quad (8.23)$$

Із рівняння Менделєєва — Клапейрона при сталому тиску $p dV = R dT$, тому

$$C_p dT = \frac{3}{2} R dT + R dT. \quad (8.24)$$

Розділимо ліву і праву частину на dT і для молярної теплоємності при сталому тиску отримаємо

$$C_p = \frac{3}{2}R + R, \quad (8.25)$$

оскільки, згідно з (8.21) $\frac{3}{2}R = C_v$, то

$$C_p = C_v + R. \quad (8.26)$$

Це співвідношення називається *рівнянням Майєра*. Підставляючи в формулу значення C_v із (8.22), для багатоатомних газів маємо

$$C_p = \frac{i}{2}R + R = \frac{i+2}{2}R. \quad (8.27)$$

Велике практичне значення в термодинаміці має відношення $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$, яке називають *коефіцієнтом Пуассона*. Для ідеального одноатомного газу

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{\frac{3}{2}R + R}{\frac{3}{2}R} = \frac{5}{3} = 1,66. \quad (8.28)$$

Для багатоатомних газів

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{\frac{i+2}{2}R}{\frac{i}{2}R} = \frac{i+2}{i}. \quad (8.29)$$

Із формул (8.21) і (8.26) видно, що молярні теплоємності C_v і C_p не залежать від температури. Але, як показують досліди, це справедливо лише для одноатомних газів.

Теплоємності багатоатомних газів (8.22) і (8.27) залежать від ступенів вільності. При низьких температурах теплоємності багатоатомних газів практично такі, як і в одноатомних, а при високих температурах вони збільшуються. Це пояснюється тим, що при низьких температурах «виморожуються» обертальні і коливальні ступені вільності, а при високих температурах, навпаки, вони «збуджуються». Тому теплоємність багатоатомних

газів залежить від температури. Ця залежність носить квантовий характер і розглядається в окремих розділах термодинаміки.

8.5. ПЕРШИЙ ЗАКОН ТЕРМОДИНАМІКИ

Перший закон термодинаміки фактично є узагальнений закон збереження енергії в молекулярній фізиці. Він зв'язує механічну і теплову енергії. Як було розглянуто раніше, внутрішню енергію газу можна змінити за рахунок двох процесів: виконання над газом роботи і надання йому певної кількості теплоти. Тоді закон збереження енергії записується так:

$$\Delta U = A_{\text{зовн}} + \Delta Q. \quad (8.30)$$

Якщо роботу над системою виконують зовнішні сили (газ стискується), то робота зовнішніх сил буде додатною, а робота системи (газу) від'ємною. Якщо ж газ розширюється, то робота системи буде додатною, а робота зовнішніх сил від'ємною. Тому $-A_{\text{зовн}} = A$ системи. Теж саме стосується кількості теплоти: якщо газ отримує теплоту, вона буде додатною, і якщо навпаки — газ віддає теплоту — вона буде від'ємною. З врахуванням цих зауважень, закон (8.30) можна переписати так

$$\Delta Q = \Delta U + A. \quad (8.31)$$

Це є математична форма запису першого закону термодинаміки, а формулюється він так: *кількість теплоти, що передається системі, йде на зміну внутрішньої енергії системи і на виконання системою роботи проти зовнішніх сил.*

Для елементарної зміни внутрішньої енергії системи dU , малої кількості теплоти, наданої системі dQ , і елементарної роботи, що виконує система dA , перший закон термодинаміки записують так:

$$dQ = dU + dA. \quad (8.32)$$

Щоб підкреслити, що внутрішня енергія є функцією стану системи, а dU — повний диференціал, на відміну від кількості

теплоти і роботи, які є функціями процесу, а dQ і dA не є повні диференціали, вираз (8.32) записують ще так

$$\delta Q = dU + \delta A. \quad (8.33)$$

Якщо мова йде не про елементарні зміни, а про кінцеві, то необхідно просумувати всі dQ і dA і, таким чином, розрахувати зміну внутрішньої енергії при переході системи із стану 1 в стан 2:

$$\int_1^2 dQ = \int_1^2 dU + \int_1^2 dA. \quad (8.34)$$

Тут важливо відзначити, що кількість підведеного тепла і виконана робота залежать від того, як відбувається процес, а зміна внутрішньої енергії $\int_1^2 dU = U_2 - U_1$ не залежить від того, як відбувається процес, а визначається початковим і кінцевим станами системи.

Особливе значення має коловий процес, коли система повертається в попереднє положення, тоді $\oint dU = 0$. Перший закон термодинаміки в такому випадку записують так:

$$\oint dQ = \oint dA, \quad (8.35)$$

знак $\oint$ означає інтегрування по замкненому контуру. Робота при колових процесах не може бути більшою, ніж кількість теплоти.

Цей висновок мав історичне значення, він підвів підсумок чисельним експериментам щодо створення «вічного двигуна» (Perpetuum mobile) першого роду. Під вічним двигуном першого роду розуміють такий двигун, який, повторюючи колові процеси, здатний виконати більшу роботу, ніж кількість поглиненої теплоти. Інакше кажучи, вічний двигун першого роду — це такий двигун, який сам би породжував енергію. Багато було спроб побудувати такий вічний двигун, проте це нікому не вдалось, оскільки він заперечує першому закону термодинаміки — закону збереження та перетворення енергії.

8.6. ЗАСТОСУВАННЯ ПЕРШОГО ЗАКОНУ ТЕРМОДИНАМІКИ ДО ІЗОПРОЦЕСІВ

1. *Ізотермічний процес* $T = \text{const}$, $pV = \text{const}$. При ізотермічному процесі температура не змінюється, відповідно, не змінюється і внутрішня енергія (8.1). Тому зміна внутрішньої енергії $dU = 0$. Згідно з (8.32) перший закон термодинаміки для ізотермічного процесу має вигляд

$$dQ = dA. \quad (8.36)$$

Тепло, що передається системі, йде на виконання системою роботи, і оскільки $dT = 0$, а $C_V = \frac{dQ}{dT}$, то теплоємність при ізотермічному процесі $C_T = \infty$.

2. *Ізохоричний процес* $V = \text{const}$, $\frac{p}{T} = \text{const}$. При ізохоричному процесі об'єм системи не змінюється, і, відповідно, робота $dA = pdV$ дорівнює нулю, оскільки $dV = 0$. Перший закон термодинаміки тоді має вигляд:

$$dQ = dU. \quad (8.37)$$

Тепло, що передається системі, йде на збільшення внутрішньої енергії системи. Молярна теплоємність при ізохорному процесі дорівнює

$$C_V = \frac{dQ}{dT} = \frac{dU}{dT} = \frac{i}{2} R.$$

3. *Ізобаричний процес* $p = \text{const}$, $\frac{V}{T} = \text{const}$. Оскільки тиск при ізобаричному процесі повинен залишатись сталим, газ буде нагріватись і розширюватись, і тим самим збільшувати внутрішню енергію і виконувати роботу. Тому перший закон термодинаміки для ізобаричного процесу має вигляд:

$$dQ = dU + dA. \quad (8.38)$$

Молярна теплоємність, як було показано раніше, дорівнює:

$$C_p = \frac{dQ}{dT} = \frac{dU + dA}{dT} = \frac{C_v dT}{dT} + \frac{pdV}{dT} = C_v + R. \quad (8.39)$$

4. *Адіабатичний процес* $dQ = 0$. *Адіабатичним* називається такий процес, який відбувається без теплообміну з навколишнім середовищем. Практично такі процеси відбуваються при повній теплоізоляції системи, або коли вони відбуваються так швидко, що система не встигає за цей час обмінятися теплом з навколишнім середовищем.

Перший закон термодинаміки для адіабатичного процесу записують так:

$$dU + dA = 0, \text{ або } -dU = dA. \quad (8.40)$$

Робота виконується за рахунок зміни внутрішньої енергії системи. Теплоємність при адіабатичному процесі $C_{ad} = \frac{dQ}{dT} = 0$, оскільки $dQ = 0$.

При адіабатичному процесі змінюються всі три параметри стану (p , V , T). Скориставшись (8.40), встановимо (попарно) зв'язок між параметрами. Дійсно, для одного молю ідеального газу з врахуванням $pV = RT$ маємо

$$C_v dT + pdV = 0, \text{ або } C_v \frac{dT}{T} + \frac{RdV}{V} = 0. \quad (8.41)$$

Інтегруючи останній вираз, отримуємо рівняння Пуассона для адіабатичного процесу

$$TV^{\gamma-1} = \text{const}, \quad (8.42)$$

де $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$. Користуючись рівнянням Менделєєва — Клапейрона, рівняння (8.42) можна записати через інші параметри, а саме:

$$pV^{\gamma} = \text{const}, \quad Tp^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = \text{const}. \quad (8.43)$$

Читачам пропонується самим вивести ці формули.

Оскільки $\gamma = \frac{C_p}{C_v} > 1$, то, порівнюючи рівняння ізотермічного

го $pV = \text{const}$ і адіабатичного $pV^\gamma = \text{const}$ процесів, бачимо, що на графіку залежності $p(V)$ адіабата проходить крутіше, ніж ізотерма (рис. 75).

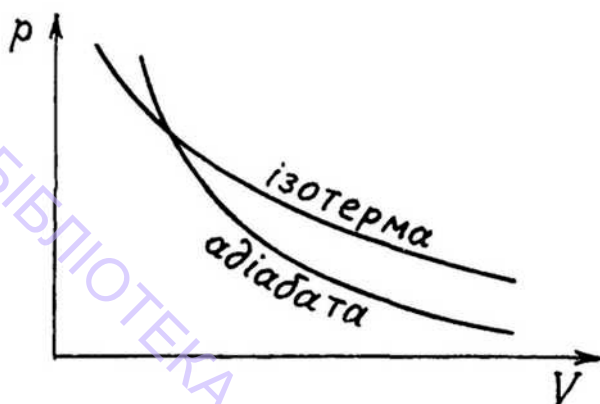


Рис. 75

Елементарна робота при адіабатичному процесі $dA = -dU$. Для одного моля $dA = -C_v dT$. Після інтегрування для повної роботи маємо

$$A = C_v(T_1 - T_2). \quad (8.44)$$

5. Політропний процес $C = \text{const}$. Політропним називають процес, що відбувається в системах з незмінною теплоємністю C . Враховуючи, що $dQ = CdT$, запишемо перший закон термодинаміки для одного моля ідеального газу при політропному процесі: $CdT = C_v dT + pdV$.

Щоб вивести рівняння політропного процесу, здиференціюємо рівняння стану: $pdV + Vdp = RdT$, врахуємо (8.26) і виключимо із першого закону термодинаміки dT . Тоді отримаємо:

$$pdV(C_p - C) = Vdp(C - C_v).$$

Після розділення змінних величин, і введення позначення $n = \frac{C - C_p}{C - C_v}$, останнє рівняння приходить до вигляду:

$$\frac{dp}{p} + n \frac{dV}{V} = 0.$$

Після інтегрування отримаємо рівняння політропи:

$$pV^n = \text{const.} \quad (8.45)$$

Не важко переконатись, що розглянуті вище ізопроцеси є окремим випадком рівняння (8.45). Дійсно, для ізобарного процесу $C = C_p$ і $n = 0$; для ізотермічного $C = \infty$ і $n = 1$; для адіабатичного $C = 0$ і $n = \gamma$; і для ізохорного процесу $C = C_v$ і $n = \infty$.

8.7. ТЕПЛОВІ ДВИГУНИ. ЦИКЛ КАРНО

Тепловий двигун — це пристрій, за допомогою якого тепла енергія перетворюється на механічну роботу. Для того, щоб такий двигун на протязі довгого часу міг перетворювати теплову енергію в механічну роботу, не змінюючи своїх характеристик, він повинен виконувати роботу циклічно за допомогою колових процесів.

Розглянемо принцип дії такого циклічного теплового двигуна. Уявимо теплову машину у вигляді циліндра з газом і рухомим поршнем. Ця частина теплового двигуна називається *робочим тілом*. Саме в ній тепла енергія буде перетворюватися в механічну роботу. Для того, щоб газ виконав роботу, його об'єм повинен збільшитися, тобто повинно відбутися розширення газу. Збільшення об'єму газу можна досягти шляхом його нагрівання. Для цього циліндр приводять в тепловий контакт з *нагрівником* — температура якого більша, ніж температура газу. Газ, отримавши від нагрівника кількість теплоти Q_r виконує додатну роботу A_z . На графіку (рис. 74) ця робота відповідає площі під кривою 1я2. Для того, щоб газ знову повторив цей

процес і виконав нову додатну роботу, поршень необхідно повернути в початкове положення, тобто стиснути газ. А для цього слід виконати роботу A_2 , яка тепер уже буде від'ємною. Але, якщо піти в зворотному напрямку через ті ж самі проміжні стани, то ніякої вигоди в отриманні додатної роботи не буде. Тому повертатись в початкове положення необхідно іншим шляхом, а саме, так, щоб $A_2 < A_1$.

На графіку (рис. 74) це буде крива $2a1$. Тобто стиск повинен відбуватись при меншому тиску, ніж відбувалось розширення. Оскільки меншому тиску відповідає менша температура, то газ повинен охолоджуватись. Для цього циліндр приводять в тепловий контакт з *холодильником*, температура якого нижче температури газу, і туди відводять кількість теплоти Q_2 . Після цього газ при меншій температурі стискають до початкового положення. Оскільки газ повернувся в початкове положення, то внутрішня енергія газу, яка є функцією стану системи, не змінилась. За цикл газ виконав роботу $A = A_1 - A_2$, яка дорівнює площі всередині колового процесу $1a2a1$ (рис. 74). Згідно з першим законом термодинаміки, ця робота виконана за рахунок різниці теплоти Q_1 — отриманій від нагрівача, і Q_2 — яку віддали холодильнику:

$$A = Q_1 - Q_2. \quad (8.46)$$

Відношення роботи A до теплоти Q_1 , отриманої двигуном від нагрівача, називають *коефіцієнтом корисної дії* теплової машини:

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}. \quad (8.47)$$

Цикл можна здійснити і в зворотному напрямку, тобто спочатку газ розширити вздовж кривої $1a2$ (рис. 74), а потім стиснути вздовж $2a1$. В цьому випадку газ при розширенні буде віднімати тепло від холодильника. Над газом зовнішні сили будуть виконувати роботу і при стиску, що відбувається при більш високій температурі, тепло буде поступати до нагрівника. За таким принципом працюють домашні холодильники, кондиціонери.

Схематично тепловий циклічний двигун, що працює в прямому та зворотному напрямках, зображено на рис. 76.

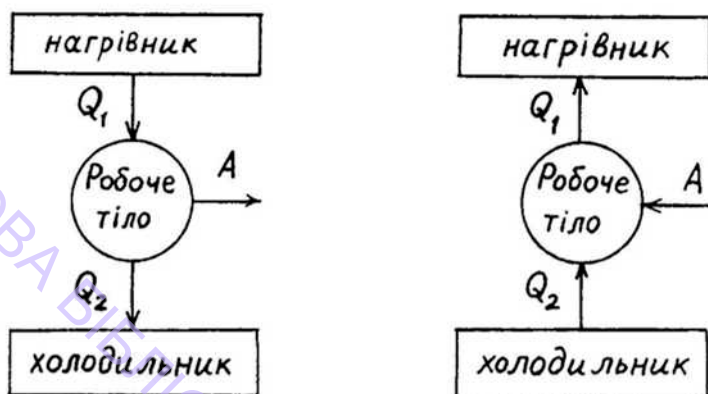


Рис. 76

Серед різного роду теплових двигунів особливе місце займає ідеальний тепловий двигун, роботу якого розглянув французький інженер Саді Карно. В тепловому ідеальному двигуні Карно відбуваються оборотні процеси. Розглянемо його роботу.

Нехай в циліндрі під поршнем знаходиться 1 моль ідеального газу. Його стан характеризується параметрами p_1 , V_1 , T_1 (рис. 77).

Приведемо газ в тепловий контакт з нагрівником, температура якого T_1 , і дамо йому можливість ізотермічно розширюватись до об'єму V_2 . Газ, отримавши від нагрівника кількість теплоти

Q_1 , виконає роботу, яка, згідно з (8.11), дорівнює $A_{12} = RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1}$.

Оскільки процес ізотермічний і внутрішня енергія не змінюється, то $Q_1 = A_{12}$. Із положення 2 дамо можливість газу адіабатично розширюватись від об'єму V_2 до об'єму V_3 . Температура газу при цьому зменшиться до T_2 , оскільки робота буде виконуватись за рахунок внутрішньої енергії і, згідно з (8.44)

$$A_{23} = C_V(T_1 - T_2).$$

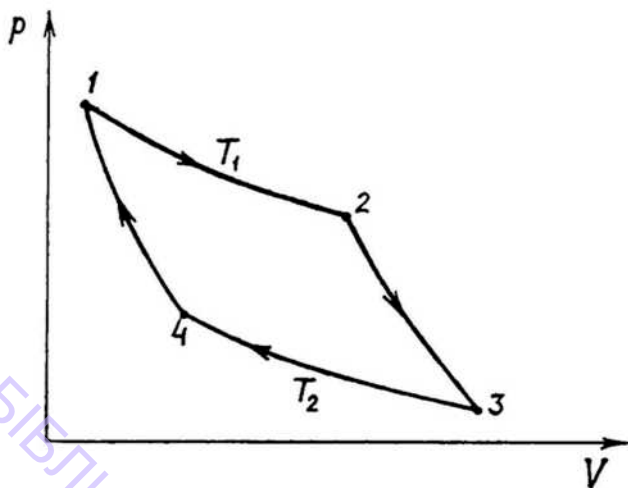


Рис. 77

Після цього газ будемо повертати в початкове положення, стискаючи його ізотермічно при температурі T_2 . Для цього робоче тіло необхідно привести в тепловий контакт з холодильником і від газу забирати тепло Q_2 , яке при ізотермічному стиску буде дорівнювати виконаній роботі $Q_2 = A_{34}$. Сама ж робота дорівнює $A_{34} = RT_2 \ln \frac{V_3}{V_4}$. Далі із положення 4 газ поверта-

ємо в положення 1 шляхом адіабатичного стиску. При цьому температура збільшується від T_2 до T_1 , а робота стиску дорівнює $A_{41} = C_V(T_1 - T_2)$. В цілому за цикл виконується робота $A = A_{12} + A_{23} - A_{34} - A_{41}$.

Для розрахунку коефіцієнта корисної дії такого теплового двигуна підставимо в формулу (8.47) відповідні значення:

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1} + C_V(T_1 - T_2) - RT_2 \ln \frac{V_3}{V_4} - C_V(T_1 - T_2)}{RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1}}. \quad (8.48)$$

Запишемо рівняння Пуассона (8.42) для адіабатичних процесів (2, 3) і (4, 1):

$$\left(\frac{V_2}{V_3}\right)^{\gamma-1} = \frac{T_2}{T_1}, \quad \left(\frac{V_1}{V_4}\right)^{\gamma-1} = \frac{T_2}{T_1}.$$

Із цих рівнянь знаходимо $\frac{V_2}{V_3} = \frac{V_1}{V_4}$ або $\frac{V_2}{V_1} = \frac{V_3}{V_4}$. Оскільки всі логарифми в (8.48) однакові, то після відповідних скорочень, отримаємо:

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1}. \quad (8.49)$$

Із останньої формули видно, що коефіцієнт корисної дії ідеальної теплової машини залежить від температури нагрівника T_1 і холодильника T_2 . Він завжди менше 1. Він міг би дорівнювати одиниці в двох випадках: $T_1 = \infty$ і $T_2 = 0$. Але створити нагрівник з нескінченно великою температурою, або холодильник з температурою нуль за Кельвіном, неможливо. Для збільшення коефіцієнта корисної дії необхідно збільшити різницю температур нагрівника і холодильника. Візьмемо для прикладу найбільш сприятливі реально можливі умови: $T_1 = 500$ К (паровий котел високого тиску) і $T_2 = 250$ К (повітряне охолодження в зимовий період). В цьому випадку

$$\eta = \frac{500 - 250}{500} = 0,5 = 50 \, \%.$$

Зрозуміло, що при тих самих умовах реальні машини, завдяки втратам тепла на тертя, будуть мати значно менший коефіцієнт корисної дії. Тертя, як відомо, завжди пов'язане з перетворенням механічної роботи в теплову енергію, тобто є типовим необоротним процесом. Тому коефіцієнт корисної дії необоротного двигуна буде завжди меншим, ніж у оборотного при тих самих умовах. Можна показати, що коефіцієнти корисної дії будь-якого оборотного двигуна, з таким самим нагрівником і холодильником, мають однакове значення.

8.8. ДРУГИЙ ЗАКОН ТЕРМОДИНАМІКИ

Перший закон термодинаміки є законом збереження енергії і може описувати довільні процеси, в яких бере участь теплота. Але для опису термодинамічних процесів одного першого закону недостатньо. Перший закон не дозволяє визначити, в якому напрямку протікають термодинамічні процеси. З точки зору першого закону, кожний процес, що не суперечить законів збереження енергії, є можливим: наприклад, є два тіла, температури яких T_1 і T_2 , причому $T_1 > T_2$. Можна підрахувати їх внутрішні енергії, і перший закон не суперечить можливості передачі тепла від менш нагрітого тіла до більш нагрітого. Згідно з другим законом термодинаміки, тепло може передаватися лише в одному напрямку: від більш нагрітого до менш нагрітого. Тобто другий закон термодинаміки вказує напрям протікання процесів. Існує декілька взаємопов'язаних формулювань другого закону. Перше формулювання (1850 р.) належить Клаузіусу: тепло не може самодовільно переходити від холодного тіла до гарячого без будь-яких інших змін в системі та в навколишньому середовищі. Чайник, що стоїть на столі, сам по собі не може закипіти, охолоджуючи стіл та навколишнє середовище, хоча за підрахунками, згідно з першим законом термодинаміки, енергії в навколишньому середовищі достатньо для того, щоб він закипів.

Інше формулювання другого закону належить Томсону (лорд Кельвін, 1851 р.). Він надав другому закону форму, більш зручну для вивчення процесів в теплових двигунах. Перший закон термодинаміки заперечує можливість створення вічного двигуна першого роду, тобто такої машини, яка виконувала б роботу з нічого, без жодних витрат енергії. Але він не заперечує можливості побудови машини, яка всю теплову енергію перетворювала б в роботу. Наприклад, згідно з першим законом, можна було б побудувати такий двигун, який забирав би тепло від світового океану, охолоджуючи воду всього на 0,1 градуса, і за рахунок цього можна було б отримувати енергію, яка рухала б всі машини на Землі протягом двох тисяч років. Фактично, тоді

був би створений двигун, який називають *вічний двигун другого /?ody(Perpetuum mobile 11)*. Другий закон стверджує, що побудувати такий двигун неможливо. Томсон сформулював другий закон таким чином: процес, при якому теплота переходить в роботу, є необоротним, інакше кажучи, неможливо перетворити в роботу всю теплоту, взяту від тіла з однорідною температурою, не виконуючи ніяких інших змін в системі, або неможливий круговий процес, єдиним результатом якого було б виконання роботи за рахунок охолодження теплового резервуара.

Другий закон термодинаміки стверджує, що реальний процес не можна здійснювати за наявності тільки двох тіл: нагрівника і робочого тіла. Тобто не вся теплота може бути перетворена в роботу. Для здійснення реальних процесів необхідні три тіла: нагрівник, робоче тіло і холодильник. Це означає, що коефіцієнт корисної дії теплового двигуна не може дорівнювати одиниці. Це є ще одне формулювання другого закону.

Кількісне формулювання другого закону термодинаміки можна отримати за допомогою такого поняття, як ентропія.

8.9. ЕНТРОПІЯ

Як було зазначено вище в 8.7, коефіцієнт корисної дії необоротної теплової машини завжди менший, ніж в оборотній. Це твердження можна записати так:

$$\frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} \leq \frac{T_1 - T_2}{T_1}. \quad (8.50)$$

Зліва записано загальне визначення коефіцієнта корисної дії, яке годиться для будь-якої машини, а справа — для ідеальної оборотної машини. Знак рівності відповідає оборотній, а нерівності — необоротній машині. Із виразу (8.50) можна отримати такі співвідношення:

$$\frac{Q_2}{Q_1} \geq \frac{T_2}{T_1}, \text{ або } \frac{Q_2}{T_2} \geq \frac{Q_1}{T_1}. \quad (8.51)$$

Віднімаючи з лівої і з правої частини $\frac{Q_2}{T_2}$, приходимо до виразу

$$\frac{Q_1}{T_1} - \frac{Q_2}{T_2} \leq 0. \quad (8.52)$$

З точки зору робочого тіла, кількість теплоти Q_2 , яку воно віддає холодильнику, можна для подальшої доцільності трактувати як $(-Q_2)$, тобто тепло, яке тіло отримує від холодильника, тоді вираз (8.52) буде мати вигляд

$$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} \leq 0. \quad (8.53)$$

Це співвідношення носить назву *нерівність Клаузіуса*, а відношення кількості теплоти, яку отримує тіло, до температури, при якій це відбувається, називається *приведеною теплою*. Таким чином, використовуючи термінологію Клаузіуса, вираз (8.53) можна прочитати так: якщо якась система завершує цикл, в ході якого вступає в теплообмін з двома тепловими резервуарами, то сума приведених теплот дорівнює нулю, якщо цикл оборотний, і менше нуля, якщо цикл необоротний (рис. 78 а).

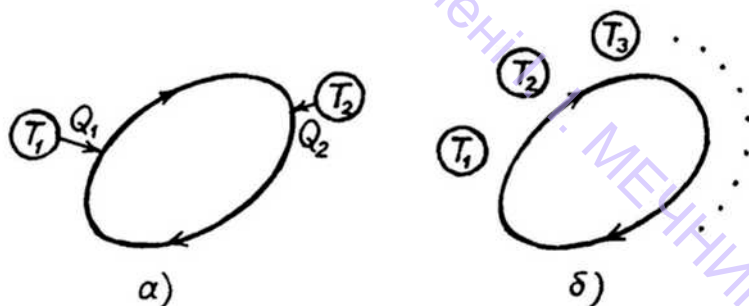


Рис. 78

Якщо система в ході циклу вступає в теплообмін не з двома, а з N тілами (рис. 78б), то по аналогії з (8.53) можна записати таку умову:

$$\sum_{i=1}^N \frac{Q_i}{T_i} \leq 0. \quad (8.54)$$

Сума приведених теплот для будь-якого циклічного процесу не може бути більше нуля. Знак 0 в (8.54) означає, що сума взята по всьому замкнутому циклу.

Для більш узагальнених і точніших розрахунків приведених теплот, ми повинні Q_i вважати дуже малими, але такими, щоб при отриманні системою тепла температура залишалася сталою. Тоді сума в (8.54) перетворюється в криволінійний інтеграл по замкнутому контуру

$$\oint \frac{dQ}{T} \leq 0. \quad (8.55)$$

Розглянемо оборотний циклічний процес, для якого

$$\oint \frac{dQ}{T} = 0. \quad (8.56)$$

Рівність криволінійного інтеграла по замкнутому контуру нулю означає, що підінтегральний вираз $\frac{dQ}{T}$ являє собою повний диференціал деякої функції S , яка є функцією стану системи і називається *ентропією*:

$$\frac{dQ}{T} = dS. \quad (8.57)$$

Тоді вираз (8.56) для оборотного циклічного процесу можна записати так

$$\oint dS = 0. \quad (8.58)$$

Покажемо, як можна розрахувати зміну ентропії при переході системи із одного стану в інший. Нехай система знаходиться в стані 1 і оборотно переходить в стан 2 вздовж шляху 1a2 (рис. 79), а потім також оборотно повертається в попереднє положення вздовж шляху 2a1.

Тобто виконує круговий оборотний процес. Тоді, згідно з (8.58), можна записати:

$$\int_1^2 \frac{dQ}{T} + \int_2^1 \frac{dQ}{T} = 0.$$



Рис. 79

Змінімо границі інтегрування в другому інтегралі:

$$\int_1^2 \frac{dQ}{T} - \int_1^2 \frac{dQ}{T} = 0, \text{ або } \int_1^2 \frac{dQ}{T} = \int_1^2 \frac{dQ}{T}.$$

Із останнього виразу видно, що $\int_1^2 \frac{dQ}{T}$ не залежить від шляху інтегрування для оборотних процесів

$$S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{dQ}{T} = \int_1^2 dS. \quad (8.59)$$

Таким чином, для розрахунку зміни ентропії при переході системи із стану 1 в стан 2 необхідно знайти суму приведених теплот при зміні її стану по будь-якому шляху, який відповідає оборотному процесу.

Розглянемо приклад. Знайдемо зміну ентропії одного моля ідеального газу при переході його із стану (T_1, V_1) в стан (T_2, V_2)

$$dQ = C_v dT + p dV, \quad dQ = T dS,$$

тоді

$$dS = \frac{C_v dT}{T} + \frac{p dV}{T}.$$

Оскільки із рівняння Менделєєва – Клапейрона $\frac{p}{T} = \frac{R}{V}$, то

$$dS = C_v \frac{dT}{T} + R \frac{dV}{V}.$$

Інтегруючи цей вираз, отримаємо:

$$\int_{S_1}^{S_2} dS = \int_{T_1}^{T_2} \frac{C_v dT}{T} + \int_{V_1}^{V_2} R \frac{dV}{V}, \text{ або } S_2 - S_1 = C_v \ln \frac{T_2}{T_1} + R \ln \frac{V_2}{V_1}.$$

Читачам пропонується самим знайти зміну ентропії через параметри (p, V) і (T, p) , скориставшись рівнянням Менделєєва – Клапейрона, а також співвідношенням $C_p - C_v = R$.

Розглянемо знову циклічний процес, який переводить систему із стану 1 в стан 2 шляхом $(1a2)$, але тепер цей процес необоротний. Після цього повертаємо систему в стан 2 шляхом $(2\theta 1)$, який є оборотним процесом. В цілому маємо необоротний круговий процес (рис. 79). Як видно із формули (8.55), для необоротного циклічного процесу $(1a2\theta 1)$ маємо:

$$\int_{1a}^2 \frac{dQ}{T} + \int_2^1 \frac{dQ}{T} < 0. \quad (8.60)$$

(необоротний) (оборотний)

Згідно (8.59) сума приведених теплот для оборотного процесу дорівнює різниці ентропії в кінці та на початку цього процесу, тобто

$$\int_2^1 \frac{dQ}{T} = S_1 - S_2. \quad (8.61)$$

(оборотний)

Тому (8.60) переписуємо так:

$$\int_{1a}^2 \frac{dQ}{T} + S_1 - S_2 < 0, \quad (8.62)$$

(необоротний)

або

$$S_2 - S_1 > \int_{1a}^2 \frac{dQ}{T}. \quad (8.63)$$

(необоротний)

Таким чином, якщо процес в системі необоротний, то сума приведених теплот менше зміни ентропії системи.

Об'єднуючи праві частини (8.59) і (8.63) для випадку оборотних і необоротних процесів, маємо:

$$S_2 - S_1 \geq \int_1^2 \frac{dQ}{T}. \quad (8.64)$$

Знак нерівності відноситься до необоротних процесів, а рівності — до оборотних.

Якщо система замкнена (ізолювана) в тепловому відношенні, то $dQ = 0$, і із (8.64) отримаємо:

$$S_2 - S_1 \geq 0 \quad (8.65)$$

Із (8.65) робимо висновок: якщо система замкнена і в ній відбуваються оборотні процеси — ентропія не змінюється, якщо в системі відбуваються необоротні процеси — ентропія зростає. Зменшуватись в ізолюваній системі ентропія не може. Оскільки в природі всі процеси необоротні, то для реальних процесів в замкнених системах ентропія повинна збільшуватись і досягати максимуму, коли система приходить в рівноважний стан. Це є ще одне формулювання другого закону термодинаміки. Воно вказує, в якому напрямку відбуваються реальні процеси: *можливі лише такі процеси, які ведуть до збільшення ентропії в ізолюованих системах.*

Для кращого розуміння фізичного змісту ентропії розглянемо процес теплообміну в ізолюованій системі між тілом з температурою T_1 і тілом з температурою $T_2 < T_1$. Перше тіло віддає при температурі T_1 кількість тепла ($-dQ$), а друге приймає ту ж саму кількість теплоти при температурі T_2 . Зміна ентропії при цьому буде дорівнювати

$$S_2 - S_1 = \frac{dQ}{T_2} + \frac{-dQ}{T_1} = dQ \left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1} \right) > 0,$$

але $T_2 < T_1$, тому $S_2 > S_1$. Оскільки система замкнена, то внутрішня енергія системи при теплообміні не змінилась, а ентропія збільшилась. Але енергія системи не змінилась кількісно,

проте вона змінилась якісно. Дійсно, спочатку, коли тіла мали різні температури, їх можна було вважати нагрівником і холодильником. І, якщо між ними помістити робоче тіло, то частину внутрішньої енергії можна було б перетворити в механічну роботу. Після того, як відбувся теплообмін, температури вирівнюються, ентропія зростає, і з тієї ж самої енергії отримати механічну роботу уже неможливо. Тобто відбулося зниження якості енергії. Вона знецінилась, втратила здатність переходити в інші види енергії. І ентропія в цьому випадку є мірою знецінення енергії.

Теплова енергія тіла — це енергія хаотичного, безладного руху молекул. Саме невпорядкованістю теплового руху молекул відрізняється тепла енергія від інших видів енергії: механічної, електричної, світлової, де спостерігається певний порядок.

Перетворення теплової енергії в механічну, з цієї точки зору, зводиться таким чином до перетворення хаотичного теплового руху в рух впорядкований. Навпаки, при перетворенні механічної енергії в теплову, перетворюється порядок в безлад. Зрозуміло, що ці два процеси не рівнозначні, перетворити порядок в безлад завжди можливо, а навпаки — ні. Якщо два тіла в системі знаходяться при різних температурах, то в системі є порядок. Коли температури вирівнюються, ентропія зростає, то в системі настає безлад, який самовільно перейти в порядок уже не може. Таким чином, з цієї точки зору, ентропія є мірою безладу в системі.

Мірою безладу в системі є також *термодинамічна ймовірність* стану системи. Дамо цьому поняттю коротеньке пояснення. З молекулярно-кінетичної точки зору кожному стану системи відповідає певний розподіл молекул по об'єму. Уявимо, що досліджувана система поділена на три рівні частини (комірці), і в ній знаходяться три однакові, але якимось чином позначені молекули (*a*, *b*, *c*). В системі вони можуть бути розподілені різними засобами. Наприклад, всі три молекули знаходяться в одній комірці, а інші дві пусті. Таким же чином вони можуть бути розподілені в другій комірці, а потім в третій. В системі

в таких випадках буде спостерігатись нерівномірний розподіл, або інакше кажучи, певний порядок — одна комірка заповнена, інші дві пусті. Таких засобів нерівномірного розподілу буде три. Разом з тим молекули можуть розподілятися по-іншому, наприклад — дві молекули знаходяться в одній комірці, а третя в іншій, або ж в кожній комірці знаходиться по одній молекулі. Таких засобів більш рівномірного і рівномірного розподілу молекул по об'єму, коли в системі немає певного порядку, а існує безлад, значно більше, ніж нерівномірного.

Неважко підрахувати, що всього можливих засобів розподілу молекул в нашому прикладі буде 27. Оскільки молекули рухаються хаотично, то всі 27 розподілів будуть рівноймовірні. Математична ймовірність кожного з них дорівнює $\omega = \frac{1}{27}$.

Оскільки молекули однакові, то всі стани системи, які відповідають однаковим числам молекул в кожній комірці, будуть однакові, незалежно від того, які саме молекули знаходяться в кожній комірці. Так, наприклад, при рівномірному розподілу, коли в кожній комірці знаходиться по одній молекулі, можливі такі мікростани (abc , acb , bac , bca , cab , cba). Математична ймо-

вірність кожного з них дорівнює $\frac{1}{27}$, а ймовірність такого макростану — $\frac{6}{27}$. Термодинамічною ймовірністю називають число

мікростанів, за допомогою яких можна реалізувати даний макростан. Таким чином, термодинамічна ймовірність рівномірного розподілу в даному прикладі дорівнює $W = 6$. На відміну від математичної ймовірності, яка завжди менша одиниці, термодинамічна ймовірність — це велике число.

Із даного прикладу видно, що термодинамічна ймовірність станів системи, де спостерігається рівномірний розподіл, більша, ніж при нерівномірному. Тобто, коли система переходить від порядку до безпорядку, термодинамічна ймовірність зростає. Із збільшенням числа молекул в системі ймовірність рівномірного розподілу буде все більше і більше зростати порівняно з ймовірністю нерівномірного розподілу. Якщо в системі, на-

приклад, є 100 штук молекул, і всі вони рівномірно розподілені по об'єму, то ймовірність того, що внаслідок хаотичного руху всі вони зберуться в одній якійсь певній частині, дуже і дуже мала. Якщо система навіть і буде виведена із рівноваги, то з часом вона прийде в рівноважний стан, термодинамічна ймовірність буде зростати так само, як зростає ентропія, і досягати максимального значення при рівномірному розподілі.

Больцман встановив зв'язок між ентропією і термодинамічною ймовірністю

$$S = k \ln W, \quad (8.66)$$

тут k — стала Больцмана, W — термодинамічна ймовірність.

Ентропія пропорційна натуральному логарифму термодинамічної ймовірності стану системи.

Порівнюючи (8.65) і (8.66), можна дати ще одне формулювання другому закону термодинаміки, яке відображає його статистичний характер: при необоротних процесах в ізольованій системі термодинамічна ймовірність стану системи зростає, при оборотних процесах залишається незмінною.

Слід відмітити, що другий закон термодинаміки, будучи статистичним законом, може порушуватись в системах, які складаються з невеликої кількості молекул. Дійсно, в таких системах ймовірність рівноважного стану, або теж саме рівномірного розподілу молекул по об'єму, не набагато перевищує ймовірність нерівноважного стану. Перехід такої системи в нерівноважний стан і, відповідно, зменшення її ентропії — ймовірний і може мати місце. Прикладом цього є броунівський рух. Під впливом некомпенсованих ударів молекул броунівська частинка може переміщатись вгору проти дії сили тяжіння. Тобто деяка кількість теплоти системи самодовільно переходить в механічну енергію. Теплота перетворюється в роботу. Інакше кажучи, безладний рух молекул переходить в упорядкований рух броунівської частинки. Ентропія і ймовірність зменшуються, що суперечить другому закону термодинаміки. Флуктуації (відхилення від середніх значень) також є прикладом порушення другого закону термодинаміки. Другий закон може також по-

рушуватись в нескінченних системах, коли число станів буде нескінченним. Зрозуміло, що в таких умовах безглуздо говорити про найбільш ймовірний стан системи, оскільки всі стани рівноімовірні.

В кінці зауважимо, якщо перший закон термодинаміки відображає енергетичний баланс процесу, то другий показує його можливий напрям. Так само, як другий закон термодинаміки доповнює перший закон, так ентропія доповнює поняття енергії.

При температурі $T = 0\text{ К}$ термодинамічна система буде знаходитись в твердому стані. Хаотичний рух атомів чи молекул зупиниться. Всі вони займуть положення у визначених місцях. В системі безладу не буде. Буде повний порядок. Такий стан при $T = 0\text{ К}$ є єдиним можливим варіантом. Термодинамічна ймовірність такого стану буде дорівнювати одиниці ($W = 1$). Тоді, згідно з (8.66) $S = k_B \ln W$, а оскільки $\ln 1 = 0$, то і $S = 0$. Тобто при абсолютному нулі ентропія також дорівнює нулю. Це положення носить назву теплової теореми Нернста, або *третього закону термодинаміки*. Слід відзначити, що Нернст прийшов до такого висновку іншим шляхом — вивчаючи зміну теплоємностей тіл при низьких температурах.

8.10. ТЕРМОДИНАМІЧНІ ПОТЕНЦІАЛИ

При розв'язанні багатьох термодинамічних задач аналітичним методом використовують особливі функції, які називають *термодинамічними потенціалами*. Знаючи, як вони виражаються через незалежні параметри системи, можна визначити інші параметри та характеристики термодинамічних процесів.

Розглянемо найбільш відомі термодинамічні потенціали, зв'язок між ними та зв'язок з іншими термодинамічними параметрами. Спочатку про внутрішню енергію.

Підставимо в формулу першого закону термодинаміки (8.32) вираз для роботи (8.8) і кількість теплоти із (8.57):

$$dU = TdS - pdV. \quad (8.67)$$

Зміна внутрішньої енергії dU є повним диференціалом, і тому її можна записати так:

$$dU = \left(\frac{\partial U}{\partial S} \right)_V dS + \left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_S dV. \quad (8.68)$$

Порівнюючи ці дві формули, маємо:

$$T = \left(\frac{\partial U}{\partial S} \right)_V, \quad p = - \left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_S. \quad (8.69)$$

Так можна розрахувати температуру і тиск через зміну внутрішньої енергії і ентропії.

Розглянемо такий термодинамічний потенціал, як *вільна енергія*, або *потенціал Гельмгольца*. Для ізотермічного процесу, згідно першого закону термодинаміки

$$dA = -dU + TdS, \quad (8.70)$$

або

$$dA = -d(U - TS). \quad (8.71)$$

Величина $U - TS$ називається вільною енергією. Позначимо її через F , тоді (8.71) представимо у вигляді

$$dA = -dF. \quad (8.72)$$

При ізотермічному оборотному процесі зміна вільної енергії дорівнює роботі. Оскільки живі організми зберігають незмінною температуру, то можна вважати, що виконувана ними робота дорівнює зменшенню вільної енергії. Якщо система ізотермічно розширюється (збільшується її об'єм), то робота буде додатною і знак мінус в формулі (8.72) означає, що вільна енергія системи зменшується. Навпаки, при стисканні робота від'ємна, а вільна енергія зростає за рахунок зовнішніх сил. При ізотермічному розширенні від об'єму V_1 до V_2 робота одного моля ідеального газу, як відомо, дорівнює $A = RT \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right)$.

Права частина цього рівняння являє собою спад вільної енергії. Це означає, що при даній температурі вільна енергія даної маси

газу тим більша, чим менший об'єм вона займає спочатку, тобто чим більше стиснутий газ. Нагадаємо, що внутрішня енергія ідеального газу не залежить від об'єму. Стиснутий ідеальний газ має таку ж саму внутрішню енергію, як і нетиснутий при тій самій температурі. Але стиснутий газ має більшу вільну енергію, тому що при ізотермічному розширенні може виконати більшу роботу.

При необоротному процесі $TdS > dQ$, і замість (8.71) отримаємо

$$dA < -d(U - TS), \text{ або } dA < -dF, \quad (8.73)$$

тобто при необоротному процесі робота менше зміни вільної енергії. Вільну енергію можна розглядати як потенціальну енергію системи, що знаходиться при сталих температурі і об'ємі. Тому умовою рівноваги термодинамічної системи буде мінімум вільної енергії.

Розглянемо ізобарний процес. Якщо системі надати кількість теплоти, і вона буде розширюватись, тобто виконувати роботу, то, згідно з першим законом термодинаміки,

$$dQ = dU + pdV, \text{ або } dQ = d(U + pV). \quad (8.74)$$

Величину $U + pV$ називають *ентальпією*, або *тепловою функцією Гіббса*, і позначають буквою H , тоді (8.74) записуємо так

$$H = U + pV \text{ і } dQ = dH. \quad (8.75)$$

Зміна ентальпії при рівноважному ізобарному процесі дорівнює поглинутій системою кількості теплоти. Тому ентальпію часто називають *тепловмістом*.

Візьмемо похідну по T при $p = \text{const}$ в формулі (8.75), отримаємо:

$$C_p = \left(\frac{\partial H}{\partial T} \right)_p = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_p + p \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p. \quad (8.76)$$

Теплоємність при сталому тиску C_p дорівнює похідній ентальпії по температурі при ізобарному процесі. Порівнюючи вищенаписані формули з формулами ізохорного процесу, слід

зазначити, що ентальпія при ізобарних процесах відіграє таку ж саму роль, як внутрішня енергія при ізохорних процесах.

Розглянемо ще один термодинамічний потенціал при ізобарно-ізотермічних умовах, наприклад, при плавленні твердих тіл. Перший закон термодинаміки в таких умовах має вигляд

$$TdS = dU + pdV, \text{ або } dU - TdS + pdV = 0,$$

звідки

$$d(U - TS + pV) = 0. \quad (8.77)$$

Величину $U - TS + pV$ називають *ізобарно-ізотермічним потенціалом Гіббса*. Інакше його можна записати ще так:

$$G = U - TS + pV = F + pV = H - TS. \quad (8.78)$$

При оборотних ізотермічному і ізобарному процесах диференціювання виразу (8.78) з врахуванням (8.67) дає

$$\begin{aligned} dG &= TdS - pdV - TdS - SdT + pdV + Vdp = \\ &= -SdT + Vdp = 0. \end{aligned} \quad (8.79)$$

Якщо система приходить в рівноважний стан при необоротному ізобарно-ізотермічному процесі, то в цьому випадку (див. 8.63) $dQ < TdS$ і

$$dG < -SdT + Vdp. \quad (8.80)$$

А оскільки $dT = 0$ і $dp = 0$, то $dG < 0$. Таке зменшення відбувається до тих пір, поки не встановиться рівновага і зміна $dG = 0$.

Таким чином, в ізобарно-ізотермічному процесі потенціал Гіббса так само, як внутрішня енергія і вільна енергія, зменшується і досягає мінімуму при рівновазі.

Розглянуті вище потенціали характеризують стан системи, коли кількість речовини в ній незмінна. Але термодинаміка вивчає також процеси, в яких змінюється число частинок (особливо це стосується різних систем, де відбуваються хімічні перетворення). В цьому випадку зміна внутрішньої енергії

системи зумовлена не тільки теплообміном $dQ = TdS$ і роботою $dA = pdV$, але і зміною числа частинок (молекул) в системі, тому замість (8.67) слід записати

$$dU = TdS - pdV + \mu dN, \quad (8.81)$$

тут dN — зміна числа частинок в системі, а μ — коефіцієнт, який називається *хімічним потенціалом*. Якщо в диференціали Гельмгольца і Гіббса підставити диференціал внутрішньої енергії не в формі (8.67), а в запису (8.81), то, відповідно, отримаємо

$$\begin{aligned} dF &= -SdT - pdV + \mu dN, \\ dG &= -SdT + Vdp + \mu dN. \end{aligned} \quad (8.82)$$

Із (8.81) і (8.82) при сталих парах відповідних параметрів (S, V) , (T, V) і (T, p) маємо

$$\mu = \left(\frac{\partial U}{\partial N} \right)_{SV} = \left(\frac{\partial F}{\partial N} \right)_{TV} = \left(\frac{\partial G}{\partial N} \right)_{Tp}. \quad (8.83)$$

Тобто хімічний потенціал дорівнює зміні термодинамічного потенціалу, що приходить на одну частинку у відповідному процесі.

Хімічний потенціал в (8.81) та в інших розглянутих вище формулах відноситься до частинок (молекул) одного сорту. Якщо в системі є молекули різних сортів, то у вираз повного диференціала термодинамічних потенціалів додають замість одного члена суму

$$\sum_{i=1}^k \mu_i dN_i, \quad (8.84)$$

де μ_i — хімічний потенціал i -х молекул, dN_i — їх число, а k — сорт молекул.

Без доказу приведемо вираз для хімічного потенціалу ідеальних газів чи ідеальних розчинів, тобто для систем, де відсутня взаємодія молекул i -го сорту між собою:

$$\mu_i = \mu_{0i} + RT \ln \frac{N_i}{N}. \quad (8.85)$$

Формула записана для моля речовини. Тут N_i — число частинок i -го компонента, N — повне число частинок $N = \sum_{i=1}^k N_i$, μ_{0i} — хімічний потенціал чистого i -го компонента.

Практично формулу (8.85) використовують і для реальних систем.

Якщо частинки заряджені (іони, електрони), а система знаходиться в електричному полі, то замість хімічного потенціалу користуються *електрохімічним потенціалом*

$$\tilde{\mu}_i = \mu_i + z_i F \phi, \quad (8.86)$$

де μ_i — хімічний потенціал i -го сорту цих частинок у відсутності електричного поля, z_i — зарядове число, F — стала Фарадея, ϕ — електричний потенціал.

Зміна електрохімічного потенціалу i -го компонента при переході системи із одного стану в інший

$$\Delta \tilde{\mu}_i = \Delta \mu_{0i} + RT \ln \frac{N_{2i}}{N_{1i}} + z_i F (\phi_2 - \phi_1), \quad (8.87)$$

де індекси 1 і 2 відносяться до різних станів термодинамічної системи.

Електрохімічний потенціал так само, як і хімічний, має енергетичний зміст. Пояснимо роль кожного члена в формулі (8.87). Перший член відповідає роботі, яку необхідно виконати, щоб визвати хімічні зміни одного моля i -го компонента при переході з одного стану в інший. Другий член визначає роботу одного моля, яка здійснюється при зміні молярної концентрації від C_{1i} до C_{2i} . Третій член дорівнює роботі проти сил електричного поля при зміні стану одного моля іонів.

8.11. ПОНЯТТЯ ПРО ТЕРМОДИНАМІКУ ВІДКРИТИХ СИСТЕМ

Розглянуті вище питання термодинаміки стосуються в основному рівноважних процесів або процесів, які призводять до рівноважних станів. Реальні процеси в природі є нерівноважними, а більшість систем — відкритими.

Такі процеси і системи розглядаються в нерівноважній термодинаміці. Особливу роль в нерівноважній термодинаміці відіграє *стаціонарний стан*, тобто такий стан, який не залежить від часу.

Не дивлячись на те, що в стаціонарному стані необоротні процеси, що протікають в системі, збільшують ентропію, ентропія системи не змінюється. Як це пояснити?

Представимо зміну ентропії ΔS відкритої системи у вигляді суми:

$$\Delta S = \Delta S_i + \Delta S_e, \quad (8.88)$$

де ΔS_i — зміна ентропії, зумовлена необоротними процесами в системі, ΔS_e — зміна ентропії, зумовлена взаємодією системи з зовнішніми тілами (можуть бути потоки, що проходять через систему). Оскільки стан стаціонарний $\Delta S = 0$, для необоротних процесів в системі $\Delta S_i > 0$, тому $\Delta S_e = \Delta S - \Delta S_i < 0$. Це означає, що ентропія, наприклад, в продуктах, що поступають в систему (речовина, енергія) менша, ніж в продуктах, які виходять із системи.

В рівноважному стані, як було зазначено вище, ентропія максимальна. Для стаціонарних станів Прігожин, вказавши на екстремальне значення деякої функції, сформулював принцип мінімуму виробництва ентропії: *в стаціонарному стані системи швидкість виникнення ентропії внаслідок необоротних процесів має мінімальне значення при заданих зовнішніх умовах, які перешкоджають досягненню системою рівноважного стану,*

$$\frac{dS_i}{dt} > 0 \text{ і мінімальна.} \quad (8.89)$$

Згідно з принципом І. Р. Прігожина, в системі при стаціонарному стані внутрішні нерівноважні процеси (дифузія, теплопровідність, хімічні реакції та ін.) протікають так, що приріст ентропії за кожную секунду мінімальний. Це означає, що система за рахунок внутрішніх необоротних процесів не здатна вийти із стаціонарного стану; навіть, якщо за рахунок невеликих флуктуацій система і відхиляється від стаціонарного стану, то прагнення внутрішніх процесів зменшити $\frac{dS_i}{dt}$ поверне систему в попередній стан.

Як приклад відкритої системи розглянемо біологічний об'єкт. Біологічні об'єкти обмінюються з навколишнім середовищем енергією і речовинами. Живі організми — це системи, що розвиваються, і вони не знаходяться в стаціонарному стані. Але, якщо розглядати невеликі проміжки часу, то можна стан такої системи прийняти за стаціонарний. В такому випадку, як було показано вище (8.88), можна записати, що

$$dS = 0, S = \text{const}, dS_i > 0, dS_e < 0.$$

Для живого організму це означає, що ентропія більша в продуктах виділення, ніж в продуктах живлення. Ентропія системи організм — навколишнє середовище так само, як і ентропія замкненої системи, зростає, а ентропія самого організму є сталою. Оскільки ентропія є міра неупорядкованості системи, то можна зробити такий висновок, що впорядкованість організму зберігається ціною зменшення впорядкованості навколишнього середовища. При деяких патологічних станах ентропія біологічної системи може зростати. Це зв'язано з відсутністю стаціонарності, збільшенням неупорядкованості самої системи, наприклад, при ракових захворюваннях відбувається хаотичне, неупорядковане розростання клітин.

Формулу (8.88) можна записати так:

$$\frac{dS}{dt} = \frac{dS_i}{dt} + \frac{dS_e}{dt}, \quad (8.90)$$

або для стаціонарного стану $S = \text{const}$, $\frac{dS}{dt} = 0$ і

$$\frac{dS_i}{dt} = -\frac{dS_e}{dt}, \quad (8.91)$$

Із останнього співвідношення видно, що для звичайного стану організму швидкість зміни ентропії за рахунок внутрішніх процесів дорівнює швидкості зміни від'ємної ентропії за рахунок обміну речовинами і енергією з навколишнім середовищем. Згідно з принципом Прігожина, $\frac{dS_i}{dt} > 0$ і мінімальна, тому і мінімальне значення має і $\left| -\frac{dS_e}{dt} \right|$. Звідси можна зробити висновок, що швидкість зміни ентропії навколишнього середовища при стаціонарному стані організму також мінімальна.

КОНТРОЛЬНІ ПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ

1. Дайте визначення таким поняттям: рівноважний стан системи; рівноважний процес; коловий процес або цикл, оборотний процес.
2. Що таке внутрішня енергія ідеального газу і чому вона дорівнює для одного молю?
3. Що таке ступінь вільності молекул газу?
4. Скільки і які ступені вільності має я-атомна молекула?
5. Сформулюйте закон рівнорозподілу енергії за ступенями вільності.
6. Чому дорівнює елементарна робота ідеального газу?
7. Як визначається робота на графіку залежності p від K ?
8. Чому дорівнює робота при ізопроцесах?
9. Що таке теплоємність системи?
10. В яких одиницях вимірюється молярна і питома теплоємності?
11. Чому дорівнюють молярні теплоємності при сталому об'ємі та сталому тиску для ідеального газу та яке між ними співвідношення?
12. Як розрахувати кількість теплоти, що отримує чи віддає система?

13. Запишіть та сформулюйте перший закон термодинаміки.
14. Запишіть перший закон термодинаміки для ізопроцесів.
15. Який процес називається адіабатичним? Намалюйте графік та запишіть рівняння адіабатичного процесу.
16. Який процес називають політропічним? Запишіть його рівняння.
17. Що таке тепловий двигун? Намалюйте принципову схему теплового двигуна та запишіть, чому дорівнює коефіцієнт корисної дії.
18. Що таке цикл Карно? Чому дорівнює коефіцієнт корисної дії теплового двигуна Карно?
19. Сформулюйте другий закон термодинаміки.
20. Запишіть і поясніть нерівність Клаузіуса.
21. Що таке ентропія та які її властивості?
22. Розрахуйте зміну ентропії для одного моля ідеального газу при ізопроцесах.
23. Що таке термодинамічна ймовірність? Запишіть формулу зв'язку між ентропією і термодинамічною ймовірністю.
24. В чому суть статистичного формулювання другого закону термодинаміки?
25. Що таке вільна енергія? Чому дорівнює зміна вільної енергії при ізотермічному процесі?
26. Що таке ентальпія? Чому дорівнює зміна ентальпії при ізобарному процесі?
27. Чому дорівнює ізобарно-ізотермічний потенціал?
28. Сформулюйте умову рівноваги системи через термодинамічні потенціали.
29. Що таке хімічний потенціал?
30. Що таке електрохімічний потенціал та чому дорівнює його зміна?
31. Сформулюйте принцип Прігожина для відкритої системи.

9.1. РІВНЯННЯ СТАНУ РЕАЛЬНОГО ГАЗУ

Рівняння Менделєєва — Клапейрона описує стан ідеального газу, молекули якого є матеріальними точками і не взаємодіють між собою, тобто в них відсутні сили притягання і відштовхування. Молекули реального газу мають певні розміри, і коли вони наближаються одна до одної на відстань декількох діаметрів, між ними діють сили притягання і відштовхування. При високому тиску, коли молекули знаходяться близько одна від одної, нехтувати їх розмірами та силами взаємодії неможливо. Невірно буде і описувати стан такого газу за допомогою рівняння Менделєєва — Клапейрона.

Щоб отримати рівняння стану реального газу, нідерландський фізик Ван дер-Ваальс ввів в рівняння Менделєєва — Клапейрона поправки на розмір молекул та сили взаємодії. Нагадаємо, що для одного моля рівняння Менделєєва — Клапейрона має вигляд

$$pV_{\mu} = RT, \quad (9.1)$$

де V_{μ} — молярний об'єм газу або посудини, в якій хаотично рухаються молекули. У реального газу частину цього об'єму займають самі молекули. Тому фактичний вільний об'єм, в якому рухаються молекули реального газу, буде дорівнювати $V_{\mu} - b$, де b — об'єм самих молекул в одному молі. З врахуванням цієї поправки рівняння стану для одного моля буде мати такий вигляд:

$$p(V_{\mu} - b) = RT. \quad (9.2)$$

Об'єм b , що займають самі молекули в посудині, буде більший, ніж сума власних об'ємів всіх молекул. Якщо уявити собі,

що молекули мають форму кульок і скласти їх на купу (рис. 80), то між ними будуть порожні проміжки, недоступні для руху молекул.

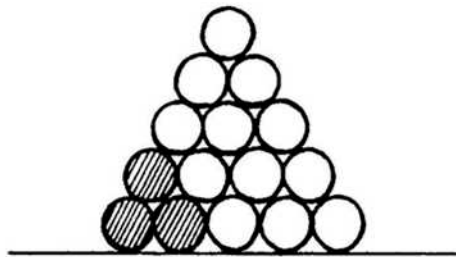


Рис. 80

В дійсності об'єм, недоступний для руху молекул, буде ще більший, оскільки між молекулами діють сили відштовхування, які не допускають такої щільної упаковки. Для розрахунку поправки b скористаємось рис. 70, з якого видно, що центр будь-якої молекули не може наблизитись до центру іншої молекули на відстань меншу, ніж діаметр самої молекули d . Таким чином, для центрів двох молекул недоступним буде сферичний об'єм радіуса d , тобто об'єм, що дорівнює восьми об'ємам молекули. В розрахунку на одну молекулу недоступним буде об'єм, що дорівнює чотирьом об'ємам молекули. А для всіх молекул в одному молі

$$b = 4V_0 N_A, \quad (9.3)$$

де V_0 — власний об'єм молекули, N_A — число Авогадро. Таким чином, поправка b фактично враховує сили відштовхування в реальному газі.

Для врахування поправки на сили притягання між молекулами в реальному газі розглянемо тиск. В формулі (9.1) тиск на ідеальний газ створюють стінки посудини. Дія сил притягання між молекулами в реальному газі призводить до появи додаткового тиску на газ, так званого *внутрішнього тиску* p' . Тому фактичний тиск реального газу більший за тиск p і дорівнює $p + p'$. Підставляємо це значення в рівняння (9.2) і отримаємо:

$$(p + p')(V_\mu - b) = RT. \quad (9.4)$$

Внутрішній тиск p' повинен бути пропорційним квадрату густини газу.

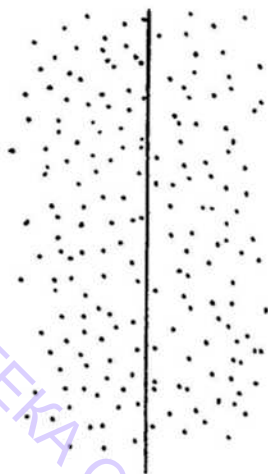


Рис. 81

Дійсно, уявимо газ, розділений площиною на дві половинки (рис. 81), і розглянемо шар молекул зліва і справа від площини. Сила взаємного притягання між шарами пропорційна числу молекул в кожному із них, тобто пропорційна квадрату числа молекул газу, а відповідно, і квадрату концентрації молекул. Але концентрація молекул пропорційна густині газу $\rho = \frac{M}{V}$. В свою чергу, густина $\rho = \frac{M}{V}$ обернено пропорційна об'єму. Тому внутрішній тиск p' буде обернено пропорційний квадрату об'єму, тобто

$$p' = \frac{a}{V_\mu^2}, \quad (9.5)$$

де a — коефіцієнт пропорційності, що визначається силами притягання, а V_μ — об'єм одного моля газу. Підставимо значення p' в формулу (9.4), отримаємо:

$$\left(p + \frac{a}{V_\mu^2}\right)(V_\mu - b) = RT. \quad (9.6)$$

Це і є рівняння Ван дер-Ваальса для одного моля реального газу. Для $v = \frac{M}{\mu}$ молів рівняння стану має вигляд:

$$\left(p + \frac{M^2}{\mu^2} \frac{a}{V^2}\right)\left(V - \frac{M}{\mu} b\right) = \frac{M}{\mu} RT, \quad (9.7)$$

де V — об'єм, M — маса газу, μ — молярна маса.

Величини a і b називаються поправками Ван дер-Ваальса. Вони залежать від природи газу і визначаються дослідним шляхом. При низькому тиску і високій температурі $b \ll V_\mu$ і $\frac{a}{V_\mu^2} \ll p$ поправки в рівнянні Ван дер-Ваальса дуже малі, і воно перетворюється в рівняння Менделєєва — Клапейрона.

9.2. ІЗОТЕРМИ РЕАЛЬНОГО ГАЗУ. КРИТИЧНИЙ СТАН

Ізотерми ідеального газу на графіку залежності $p(V)$ являють собою гіперболи (рис. 64). Розглянемо ізотерми реального газу для декількох температур. Результати розрахунків при заданих поправках a і b представлені на графіку залежності $p(V)$, (рис. 82).

Як видно, при низьких температурах ізотерми мають хвилеподібний характер з мінімумом та максимумом. Із збільшенням температури вони згладжуються. При деякій температурі вони мають точку перегину K , а при більш високих температурах ізотерми Ван дер-Ваальса схожі на ізотерми Бойля-Маріотта для ідеального газу. Математично такий характер ізоTERM можна пояснити таким чином: якщо рівняння (9.6) привести до нормального вигляду, то відносно об'єму V_μ воно буде кубічним рівнянням.

$$pV_\mu^3 - (pb + RT)V_\mu^2 + aV_\mu - ab = 0. \quad (9.8)$$

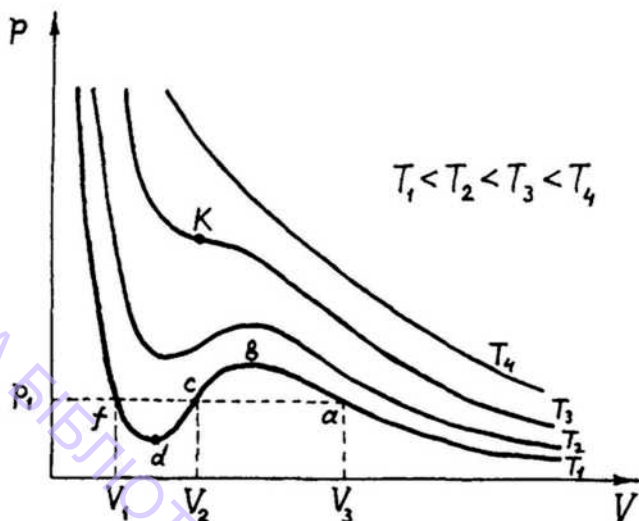


Рис. 82

Як відомо з математики, кубічне рівняння може мати або три дійсних кореня, або один дійсний і два уявних. Першому випадку відповідають ізоТЕРМИ при низьких температурах, де одному значенню тиску p_1 (рис. 82) відповідають три значення об'єму V_1 , V_2 , V_3 , а другому випадку відповідають ізоТЕРМИ при високих температурах, де одному значенню тиску відповідає одне значення об'єму.

Для фізичного пояснення ізоТЕРМ реального газу порівнюємо теоретичні ізоТЕРМИ (рис. 82) з ізоТЕРМАМИ, які отримав англійський хімік Ендрюс дослідним шляхом, стискаючи в циліндрі вуглекислий газ CO_2 (рис. 83).

ІзоТЕРМИ схожі, але в тих місцях, де на теоретичних ізоТЕРМАХ спостерігаються максимуми і мінімуми, на дослідних ізоТЕРМАХ бачимо рівне плато. При високих температурах дослідні ізоТЕРМИ схожі на теоретичні. При низьких температурах, ізоТЕРМІЧНО стискаючи газ, Ендрюс помітив, що тиск збільшується лише до якогось певного значення p_1 , якому відповідав об'єм V_2 . При подальшому стисканні тиск не змінюється, а в циліндрі з'являлись краплинки рідини, які осідали на стінках, а потім

стікали на дно, тобто газ перетворювався на рідину. Цей процес продовжувався при сталому тиску до тих пір, поки газ повністю не перетворювався в рідину, яка займала об'єм V_1 . Рідина, як відомо, мало стислива, тому ліва гілка ізотерми, яка відповідає подальшому стискуванню рідини, круто підіймається вгору.

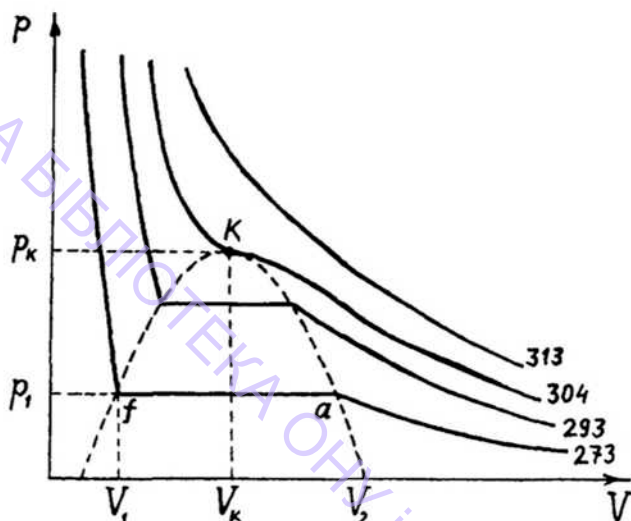


Рис. 83

Таким чином, плато на дослідних ізотермах відповідає процесу скраплення газу. Тиск, при якому відбувається скраплення, залежить від температури. Із збільшенням температури тиск збільшується. Цей тиск називається *пружністю насиченої пари*.

Ділянки теоретичної ізотерми (ab) і (fd) також можуть реалізуватися на практиці. Ділянка (ab) відповідає пересиченій парі, пружність якої більша пружності насиченої пари при даній температурі. А ділянці (fd) відповідає перегріта рідина. Ці ділянки реалізуються для зовсім чистих речовин, в яких відсутні центри конденсації. Процеси, що відповідають ділянці (bd), є дуже нестійкими, і отримати їх на практиці неможливо.

Аналізуючи ізотерми реального газу, бачимо, що з підвищенням температури ділянка співіснування газу і рідини змен-

шується (рис. 83). З підвищенням тиску і температури точки, які позначають газ і рідину (a і f) зближуються між собою. При певній температурі T_k і тиску p_k ці точки зближуються в одну точку K , яка називається *критичною*. На ізотермах Ван дер-Ваальса це точка перегину. Температура T_k називається *критичною температурою*, а p_k і V_k — відповідно, *критичним тиском* і *критичним об'ємом*. Із дослідів Ендрюса і аналогічних дослідів з іншими газами з'ясувалося, що перевести газ в рідинний стан шляхом стискування можна лише при температурі, меншій за критичну. В критичному стані речовина є однорідною. Це і не газ, і не рідина. Або, інакше кажучи, газ настільки густий, що він схожий на рідину, а рідина настільки розріджена, що вона схожа на газ.

Оцінити критичні параметри можна на підставі рівняння Ван дер-Ваальса. Відмітимо лише те, що вони залежать від поправок Ван дер-Ваальса.

Поняття критичної температури має велике значення в фізиці низьких температур і техніці зріджених газів. Завдяки йому стало зрозумілим, що будь-який газ можна перетворити на рідину шляхом стискування та зниження температур нижче критичної.

КОНТРОЛЬНІ ПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ

1. Чим відрізняється реальний газ від ідеального?
2. Що означає поправка b в рівнянні стану реального газу? Чому вона дорівнює?
3. Від чого залежить поправка a в рівнянні стану реального газу?
4. Який фізичний зміст має вираз $\left(p + \frac{a}{V_\mu^2} \right)$?
5. При яких умовах рівняння Ван дер-Ваальса перетворюється в рівняння Менделєєва — Клапейрона?
6. Якого ступеня, відносно об'єму, є рівняння Ван дер-Ваальса?

7. Намалуйте та поясніть хід теоретичних і експериментальних ізотерм реального газу.
8. Що таке пересичена пара і перегріта рідина? Коли вони спостерігаються?
9. Як змінюється густина насиченої пари із збільшенням температури?
10. Що таке критичний стан речовини?
11. Від чого залежать критичні параметри?

Розділ 10

РІДИНИ

10.1. БУДОВА І ВЛАСТИВОСТІ РІДИН

Як було показано в попередньому розділі, при сильному стиску будь-який газ може бути зрідженим, якщо його охолодити до температури, нижче критичної. Якщо рідину продовжувати і далі охолоджувати, то вона перейде в твердий стан.

За своїми властивостями рідини схожі як на гази, так і на тверді тіла і, таким чином, займають проміжний стан між газами і твердими тілами. Наприклад, так само, як і газ, рідина приймає форму посудини, в якій вона знаходиться. З іншого боку, подібно до твердих тіл, рідина мало стислива, має свій певний об'єм, здатна чинити опір як стисканню, так і розтягу.

Подвійний характер властивостей рідин пов'язаний з особливостями будови рідин та руху їх молекул. В газах молекули рухаються хаотично і знаходяться на відстанях, значно більших за розміри самих молекул. В їх розташуванні відсутній будь-який порядок. Навпаки, в кристалічних твердих тілах частинки знаходяться на відстанях одного або декількох діаметрів і завершують коливальні рухи навколо своїх положень рівноваги, які називаються *вузлами кристалічної ґратки*. Розташовані частинки в певному порядку. Цей порядок розповсюджується на значний об'єм і називається *дальній порядок*. Рентгенографічні дослідження рідин підтверджують, що вони за своєю будовою займають проміжний стан між газами та твердими тілами. В розташуванні частинок рідини спостерігається так званий *ближній порядок*. Це означає, що по відношенню до будь-якої частинки розташування найближчих до неї сусідів є впорядкованим. Але по мірі зростання відстані відданої частинки, розташування по відношенню до неї інших частинок стає все більш неупорядкованим. Тобто порядок в

відсутність дальнього порядку в рідинах не виявлена анізотропія, характерна для кристалічних твердих тіл з впорядкованим розташуванням частинок.

В деяких рідинах з видовженими молекулами спостерігається однакова орієнтація молекул в значних об'ємах, завдяки чому спостерігається анізотропія оптичних і деяких інших властивостей. Такі рідини отримали назву *рідких кристалів*. В них впорядкована лише орієнтація молекул, а взаємне розташування молекул, так само, як і в звичайних рідинах, дальнього порядку не має.

Проміжним положенням рідин зумовлені ті обставини, що рідкий стан є дуже складним за своєю будовою і властивостями. Побудова теорії рідинного стану речовин представляє значно більші труднощі, ніж створення теорії твердого тіла, і тим більш, теорії газоподібного стану.

Значний вклад в теорію рідинного стану вніс Я. І. Френкель. За Френкелем, молекули рідини не зв'язані з будь-якими вузлами, як у кристалів, але й не рухаються так вільно, як у газах. Кожна молекула рідини, будучи оточеною тісним кільцем інших молекул, які перебувають від неї на відстані порядку діаметра, на протязі певного часу здійснює коливальні рухи навколо деякого положення рівноваги. Час від часу молекула міняє місце рівноваги стрибком, переміщуючись в нове положення рівноваги, яке знаходиться від попереднього на відстані розмірів самих молекул. Таким чином, молекули, здійснюючи коливальні рухи, повільно переміщуються по рідині. За обчисленням, молекула води, наприклад, за одну секунду встигає змінити місце свого перебування близько 10^{10} разів, роблячи при цьому на кожному місці рівноваги від 100 до 1000 коливань. Френкель описав рух молекули рідини як «дрейфування» серед інших молекул того центра, навколо якого ця молекула коливається. Час коливання навколо положення рівноваги називають *часом релаксації*, або *часом осілого життя*, а місце рівноваги — *місцем осілого життя*.

Для того, щоб молекула рідина перескочила з одного місця осілого життя в інше, вона повинна порушити зв'язки з сусід-

німи молекулами. Після переміщення в нове положення молекула зв'язується з новими сусідами. Цей процес переходу потребує затрати енергії W , яка виділяється при встановленні нових зв'язків. Таким чином, при переміщенні із «старого» місця потенціальна енергія молекули повинна збільшуватись на величину W , після чого молекула може потрапити в нове положення. Про такий перехід кажуть як про перехід через потенціальний бар'єр висотою W , а величину W називають енергією активації.

Перехід через потенціальний бар'єр відбувається при випадковому підвищенні енергії теплового руху окремих молекул за рахунок передачі їм цієї енергії іншими молекулами. Розрахунки показують, що час релаксації залежить від енергії активації W абсолютної температури T та k м чином:

$$\tau = \tau_0 e^{\frac{W}{kT}}, \quad (10.1)$$

де τ_0 — середній період коливань молекули навколо положення рівноваги, k — стала Больцмана.

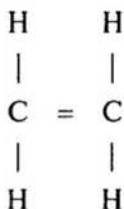
Із формули видно, що при збільшенні температури час релаксації експоненціально зменшується, тим самим зростає рухливість молекул.

Формула (10.1) дозволяє пояснити подвійний характер властивостей рідин по відношенню до зовнішніх силових взаємодій. Якщо тривалість дії зовнішньої сили $\tau \gg \tau$, то частинки рідини всі разом зміщуються в напрямку дії цієї сили, і рідина виявляє властивість текучості. Навпаки, якщо $\tau \ll \tau$, то за час дії сили частинки не встигають змінити свої положення рівноваги, і рідина веде себе як пружне середовище.

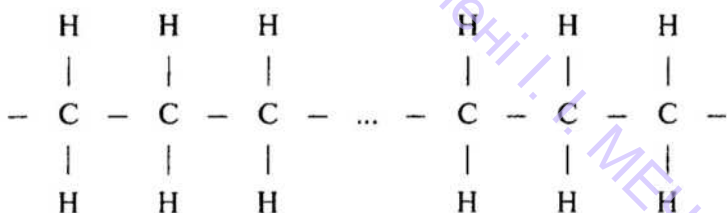
Слід зауважити, що існують тверді тіла, які за своїми властивостями знаходяться ближче до рідин, ніж до кристалічних твердих тіл. Це так звані *аморфні тіла*, вони не виявляють анізотропії. В розташуванні їх частинок спостерігається, як і в рідинах, ближній порядок. Перехід від аморфного твердого тіла до рідини при нагріванні відбувається безперервно, в той час як перехід від кристалічного стану до рідини відбувається стриб-

коподібно. Це дає підстави розглядати аморфні тверді тіла як переохолоджені рідини, частинки яких мають обмежену рухливість. Типовими прикладами аморфних тіл є скло, смола, бітум та ін.

До аморфних тіл можна віднести більшість таких хімічних сполук, як *полімери*. Основними методами одержання синтетичних полімерів є *полімеризація* і *поліконденсація*. Розглянемо ці процеси на конкретних прикладах. Структурна формула етилену має вигляд:



За певних умов, наприклад, під впливом тепла, світла, іонізуючого випромінювання, або хімічним шляхом подвійний зв'язок між атомами вуглецю вдається розірвати. Тоді дві найближчі молекули, що мають вільні зв'язки, можуть утворити більш складні сполуки



До такої сполуки можуть ще приєднатися молекули з вільними зв'язками, молекулярний ланцюг при цьому збільшиться, утворюючи молекули поліетилену. Отже, полімеризація — це реакція сполучення молекул мономеру, що приводить до утворення полімерних ланцюгів. Зазначимо, що реакція полімеризації проходить без виділення сторонніх продуктів. Ступінь полімеризації у полімерів може змінюватися від кількох

десятків до десятків тисяч. Полімери можна одержувати з мономерів, що не мають подвійних зв'язків. При цьому використовується реакція поліконденсації. Макромолекула створюється в результаті процесу, що супроводжується відщепленням від вихідної молекули атомів або атомних угруповань, здатних до хімічної взаємодії. Виникнення при цьому вільних хімічних зв'язків забезпечує сполучення в макромолекули. Реакція поліконденсації відбувається з виділенням сторонніх продуктів, таких як вода, аміак тощо.

Особливий інтерес становлять біополімери, тобто біологічні макромолекули білків, РН К і ДНК, головна особливість яких полягає в тому, що ланцюг білка РН К або ДНК — це не лише молекула якоїсь речовини, а й своєрідна машина, яка виконує певні операції. Наприклад, послідовність ланок молекули ДНК (дезоксирибонуклеїнової кислоти) містить запис інформації (генетичної), і вона кодує «тексти» білків так званим генетичним кодом. Як прочитується текст ДНК і як за інструкцією, що міститься в ньому, будується білок? Ці та подібні питання належать до фізики біополімерів.

10.2. ЯВИЩА ПЕРЕНОСУ В РІДИНАХ

В рідинах так само, як і в газах, у випадках порушення просторової однорідності концентрації, температури і швидкості впорядкованого руху виникають явища переносу: дифузія, теплопровідність, в'язкість. Ці процеси тісно пов'язані з тепловим рухом молекул рідини і в стаціонарному випадку підпорядковуються тим самим законам Фіка, Фур'є і Ньютона, що і для відповідних процесів в газах, але механізм цих процесів дещо інший, ніж в газах. Специфічні особливості теплового руху молекул в рідинах впливають на коефіцієнти переносу і їх залежності від параметрів системи.

Дифузія. Дослід показує, якщо налити в одну посудину дві хімічно не взаємодіючі рідини, то з часом будемо спостерігати суміш двох рідин. Молекули рідин дифундують одні в одну, але

явище дифузії відбувається дуже повільно в порівнянні з газами. Для газів коефіцієнт дифузії дорівнює

$$D = \frac{1}{3} \bar{\lambda} \bar{c}. \quad (10.2)$$

В рідинах роль середньої довжини вільного пробігу відіграє відстань між молекулами δ . Вона в тисячі разів менша довжини вільного пробігу молекул в газах при нормальних умовах. Середня трансляційна швидкість молекул рідини $\langle c \rangle$ дорівнює відношенню відстані між молекулами до часу релаксації (10.1):

$$\langle c \rangle = \frac{\delta}{\tau} = \frac{\delta}{\tau_0} e^{-\frac{W}{kT}}. \quad (10.3)$$

Враховуючи формулу (10.2) і замінивши після детальніших підрахунків коефіцієнт $\frac{1}{3}$ на $\frac{1}{6}$, для коефіцієнта дифузії рідин отримаємо вираз

$$D = \frac{1}{6} \frac{\delta^2}{\tau_0} e^{-\frac{W}{kT}}. \quad (10.4)$$

Із (10.4) видно, що коефіцієнт дифузії із збільшенням температури збільшується. З наближенням температури до критичної коефіцієнт дифузії рідини наближається до коефіцієнта дифузії газів.

Для рідин коефіцієнт дифузії значно менший, ніж для газів. Наприклад, для води при кімнатній температурі $D \approx 1,5 \cdot 10^{-9} \frac{\text{м}^2}{\text{с}}$, а для водяної пари в повітрі при атмосферному тиску і при такій самій температурі $D \approx 2 \cdot 10^{-5} \frac{\text{м}^2}{\text{с}}$.

В біології велику роль відіграє дифузія іонів в клітини через мембрану. При цьому слід розрізняти пасивну і активну дифузії. Пасивна дифузія відбувається в напрямку зменшення концентрації і описується законом Фіка:

$$\frac{dn}{Sdt} = -D \frac{dc}{dx}, \quad (10.5)$$

тут $\frac{dc}{dx}$ — градієнт концентрації, S — величина поверхні розділу, D — коефіцієнт дифузії, який залежить від розмірів молекул і в'язкості розчину. Величину $\frac{dc}{dx}$ замінюють різницею концентрацій між зовнішнім середовищем і клітиною $c_2 - c_1$, коефіцієнт дифузії D замінюють коефіцієнтом p , який враховує опір поверхні клітини дифунзуючим молекулам. Тоді рівняння Фіка має вигляд

$$\frac{dn}{Sdt} = p(c_2 - c_1). \quad (10.6)$$

Активна дифузія визначається метаболізмом (обміном речовини). Вона може йти у напрямку зростання вільної енергії. При активній дифузії велику роль відіграє «трансмембранна різниця потенціалів», яка збільшує селективність проникнення частинок, різних за зарядами. Таким чином, мембрана «контролює» доступ частинок в клітину.

Теплопровідність. В рідинах, як і в газах, теплопровідність має місце, коли існує градієнт температури. Але механізм теплопровідності в рідинах відрізняється від механізму передачі теплоти в газах. Якщо в газах передача енергії відбувається при зіткненні частинок, що приймають участь в хаотичному русі, то перенесення теплоти в рідинах відбувається внаслідок обміну енергією при взаємодії молекул, які коливаються. Частинки, що мають більшу енергію, здійснюють коливання з більшою амплітудою, і при взаємодії з іншими частинками як би розкачують їх, передаючи їм енергію. Такий механізм не забезпечує швидкого переносу енергії, і тому теплопровідність рідин, так само, як і газів, дуже мала. Виключення становлять рідкі метали. Це пояснюється тим, що в рідких металах тепло переноситься не тільки за допомогою коливальних рухів, але і за допомогою вільних електронів, які є в металах і відсутні в інших рідинах.

Для коефіцієнта теплопровідності рідин, з врахуванням передачі енергії за допомогою коливальних рухів, отримаємо вираз:

$$\kappa = \frac{2\nu C_V}{\delta}, \quad (10.7)$$

де ν — частота коливань, δ — відстань між молекулами.

Експериментальні значення теплопровідності не завжди описуються співвідношенням (10.7). Дещо краще узгодження теорії та експерименту дають співвідношення, які можна дістати на підставі припущення, що теплота в рідинах, як і в твердих тілах, передається *фононами*. В цьому випадку коефіцієнт теплопровідності дорівнює

$$\kappa = \frac{1}{3} \nu \lambda \rho C_V, \quad (10.8)$$

де ν — швидкість звуку, ρ — густина рідини, λ — середня довжина вільного пробігу фонона. Коротка інформація про фонони представлена в § 11.2, де розглянуте питання про теплопровідність в кристалічних твердих тілах.

Внаслідок малої теплопровідності в рідинах, для більш швидкого вирівнювання температур, їх перемішують, використовуючи явище конвекції.

В'язкість. Явище в'язкості в рідинах, а також експериментальні методи визначення коефіцієнтів в'язкості були розглянуті в розділі 5. З механізмом внутрішнього тертя в газах ми ознайомились в розділі 7. Механізм в'язкості рідин, на відміну від механізму в'язкості в газах, який зумовлений передачею кількості руху від одного шару газу до іншого, дещо інший. Ця відмінність полягає в тому, що у випадку газу всі явища переносу визначаються довжиною вільного пробігу газових молекул. У випадку рідин тепловий рух молекул відмінний від теплового руху газових молекул. В рідинах молекули коливаються навколо тимчасових положень рівноваги, «перестрибуючи» через час релаксації на нові місця, що знаходяться на відстані розмірів самих молекул. І таким чином, довжина переміщення, або те ж саме, що довжина вільного пробігу, не може відповідати за явище переносу. Тому розглядати в'язкість рідини як результат переносу молекулами імпульсу їх впорядкованого руху не можна. Це видно хоча б

з того, що з підвищенням температури коефіцієнт в'язкості рідини зменшується, а в газах — зростає.

Залежність коефіцієнта в'язкості рідини від температури має складний характер. Для пояснення цього введемо таке поняття, як *рухливість* молекули рідини

$$u_0 = \frac{v}{F}, \quad (10.9)$$

де v — швидкість молекули, яку вона отримує під дією зовнішньої сили F . Величину, обернену коефіцієнту в'язкості $\frac{1}{\eta}$, називають *текучістю рідини*. В теорії рідин показано, що текучість рідини прямо пропорційна рухливості молекул.

$$\frac{1}{\eta} = c u_0. \quad (10.10)$$

Рухливість молекул, як показав А. Ейнштейн, пропорційна коефіцієнту дифузії

$$\frac{1}{\eta} = c_1 D. \quad (10.11)$$

Чим більша рухливість молекул, тим швидше відбувається дифузія. Таким чином,

$$\eta = \frac{1}{c_1 D}. \quad (10.12)$$

Коефіцієнт в'язкості рідин обернено пропорційний коефіцієнту дифузії. Саме цим пояснюється те, що з підвищенням температури в'язкість рідин зменшується, оскільки при цьому дифузія відбувається швидше. Враховуючи (10.4), а саме, температурну залежність коефіцієнта дифузії від температури, для коефіцієнта в'язкості отримаємо

$$\eta = A e^{\frac{W}{kT}}, \quad (10.13)$$

де A — стала, W — енергія активації, k — стала Больцмана, T — абсолютна температура. Із останнього виразу видно, що

із збільшенням температури коефіцієнт в'язкості рідини зменшується, в той час як для газів η зростає пропорційно $\sqrt{T}$.

Що ж стосується залежності коефіцієнта в'язкості від тиску, то при звичайних тисках коефіцієнт в'язкості майже не залежить від тиску, а при тисках в тисячі і десятки тисяч атмосфер сильно зростає із збільшенням тиску. Така залежність коефіцієнта в'язкості від тиску пояснюється збільшенням енергії активації і, відповідно, зростанням часу осілого життя.

10.3. ПОВЕРХНЕВІ ЯВИЩА В РІДИНАХ

Поверхневі шари рідини відрізняються за своєю структурою від внутрішніх шарів. Це обумовлено тим, що молекули поверхневих шарів перебувають в особливих умовах порівняно з молекулами, що знаходяться всередині рідини. Кожна молекула, яка перебуває всередині рідини, оточена з усіх боків іншими молекулами. Сили взаємодії між цієї молекулою і всіма іншими розподілені симетрично в усіх напрямках, тому середнє значення результуючої сили дорівнює нулю, а це відповідає мінімуму потенціальної енергії на кривій залежності потенціальної енергії від відстані (рис. 61). Молекули, що розташовані на поверхні рідини, знаходяться в інших умовах. Концентрація молекул газу над рідиною значно менше порівняно з концентрацією молекул в рідині, тому поверхневі молекули оточені іншими молекулами лише з однієї сторони. Результуюча сила, що прикладена до них, не дорівнює нулю. Вона направлена всередину рідини і перпендикулярно до її поверхні (рис. 84). В такому положенні будуть перебувати всі молекули, що знаходяться в поверхневому шарі товщиною приблизно рівною *радіусу молекулярної дії*. Радіусом молекулярної дії називається відстань, починаючи з якої, силами притягання знехтувати вже неможливо. Радіус молекулярної дії має величину порядку декількох ефективних діаметрів молекули.

Перехід молекули з глибини рідини в поверхневий шар пов'язаний з необхідністю виконання роботи проти сил, дію-

чих в поверхневому шарі. Ця робота йде на збільшення потенціальної енергії молекул. Таким чином, молекули в поверхневому шарі, порівняно з молекулами, що знаходяться всередині рідини, мають додаткову потенціальну енергію. Уявимо собі, що поверхня рідини збільшується. Це означає, що деяка кількість молекул переходить із об'єму рідини в поверхневий шар. Для цього, як ми тільки що бачили, необхідно виконати зовнішню роботу. Чим більшу роботу ми будемо виконувати, тим більше буде зростати площа поверхні, і тому для елементарних величин можна записати таке співвідношення:

$$dA = \sigma dS. \quad (10.14)$$

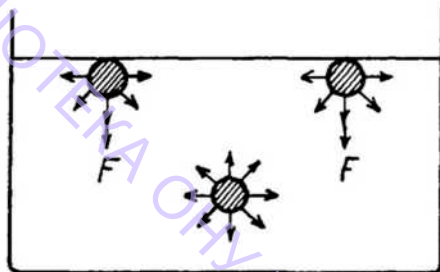


Рис. 84

Оскільки сили взаємодії в різних рідинах різні, коефіцієнт пропорційності також буде різний. Тобто σ є характеристика рідини і називається *коефіцієнтом поверхневого натягу*. Він характеризує властивості поверхні рідини. Вимірюється роботою, необхідною для збільшення поверхні рідини при сталій температурі на одиницю. В системі СІ σ вимірюється в $\left[\frac{\text{Дж}}{\text{м}^2} \right]$.

Оскільки молекули поверхневого шару мають надмірну потенціальну енергію порівняно з молекулами, що знаходяться в об'ємі, і ця енергія вимірюється роботою, то (10.14) можна записати ще так:

$$dW_s = \sigma dS. \quad (10.15)$$

Якщо зміна поверхні S відбувається при сталій температурі, тобто ізотермічно і зворотно, то, як відомо із формули (8.72), потрібна для цього робота дорівнює зміні вільної енергії $dA = -dF$. Тому надмірна потенціальна енергія поверхні рідини є вільною енергією, і тоді

$$\sigma = \frac{dF}{dS}. \quad (10.16)$$

Тобто коефіцієнт поверхневого натягу рідини можна визначити як вільну енергію одиниці площі цієї поверхні. Якщо зміну поверхні рідини виконати адіабатично, то температура рідини зміниться. Наприклад, збільшення поверхні приведе до охолодження рідини.

Як відомо з механіки, всяка система в стані рівноваги має мінімальне значення потенціальної енергії. Для нашого випадку поверхні рідини це означає, що в стані рівноваги вона повинна мати мінімально можливу поверхню. В свою чергу, це означає, що повинні існувати сили, які перешкоджають збільшенню поверхні рідини, тобто намагаються скоротити поверхню. Ці сили повинні бути спрямовані вздовж самої поверхні або по дотичній до неї. Називаються ці сили *силами поверхневого натягу*. При цьому слід пам'ятати, що першочергово причиною виникнення сил поверхневого натягу є сили, які прикладені до молекул поверхневого шару зі сторони молекул, що знаходяться в об'ємі і спрямовані всередину рідини, а в деяких випадках — всередину того середовища, з яким вона межує.

Розглянемо приклад, коли поверхневий шар займає заштриховану частину рамки (рис. 85), в якій перемичка AB рухома.

Сили поверхневого натягу намагаються зменшити поверхню. Прикладемо до перемички силу F і розтягнемо поверхню на відстань dx . Робота, яку ми виконаємо, дорівнює $dA = Fdx$. З іншого боку, робота по збільшенню поверхні, згідно з (10.14), $dA = \sigma dS$, де dS в нашому випадку дорівнює $l dx$. Фактично це одна і та сама робота, але по-різному представлена. Тому $Fdx = \sigma l dx$. Звідси знаходимо

$$\sigma = \frac{F}{l}. \quad (10.17)$$

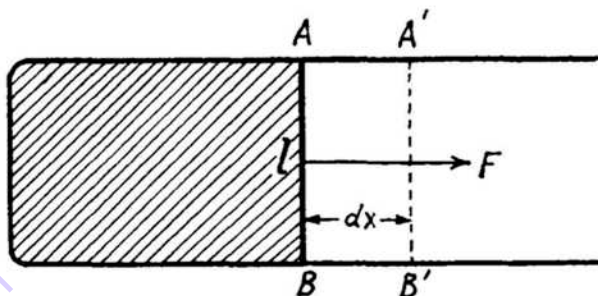


Рис. 85

Таким чином, коефіцієнт поверхневого натягу можна визначити як силу поверхневого натягу, що припадає на одиницю довжини. При такому визначенні він вимірюється в системі СІ

$$\text{в } \left[\frac{\text{Н}}{\text{м}} \right].$$

Силами поверхневого натягу визначається форма краплинок рідини. Відомо, що рідина весь час знаходиться під дією сили тяжіння, і тому краплинки приймають форму, що відповідає мінімуму суми поверхневої енергії і потенціальної енергії тяжіння. З цієї причини крупні краплини, що лежать на підкладці, сплющуються. При зменшенні розмірів краплинок поверхнева енергія відіграє все більшу роль, оскільки об'єм зменшується пропорційно кубові радіуса краплинок, а поверхня — квадрату радіуса. Дуже маленькі краплини приймають форму тіла, що має мінімальну поверхню, відомо, що це є сфера. Якщо рідина знаходиться в умовах невагомості, наприклад, в космосі, то вона приймає сферичну форму при будь-якому об'ємі, завдяки дії сили поверхневого натягу.

Коефіцієнт поверхневого натягу, як було зазначено вище, залежить від сил взаємодії між молекулами рідини, які в різних рідинах різні, тому кожна рідина має свій коефіцієнт поверхневого натягу.

Коефіцієнт поверхневого натягу також залежить від температури. Із збільшенням температури він зменшується. При критичній температурі він дорівнює нулю, оскільки зникає різниця між рідиною і паром, і тим самим зникає сама поверхня.

Поверхневий шар рідини, подібний до пружної плівки, намагається скоротитись і прийняти форму площини. Якщо поверхневий шар зігнутий, то з'являються допоміжні сили, які створюють допоміжний тиск, зумовлений кривиною поверхні. Уявимо сферичну краплю рідини з радіусом r . При збільшенні радіуса сфери збільшується площа її поверхні, а разом з нею і поверхнева енергія. Для цього необхідно виконати роботу. Навпаки, при зменшенні радіуса сфери поверхнева енергія зменшується. Це означає, що робота виконується силами, що діють в самій краплині. Звідси можна зробити висновок, що об'єм рідини під сферичною поверхнею — стиснутий, тобто знаходиться під тиском, який направлений радіально, тобто перпендикулярно до поверхні. Знайдемо цей тиск, що зумовлений кривиною поверхні. Робота по стиску рідини в сферичній краплині дорівнює $dA = p dV$. Зменшення поверхневої енергії $dF = \sigma dS$. В цих формулах dV — зменшення об'єму, а dS — змен-

шення площі. Оскільки $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, а $S = 4\pi r^2$, то $dV = 4\pi r^2 dr$, $dS = 8\pi r dr$, і, підставляючи ці значення в формули для dA і dF та враховуючи, що $|dA| = |dF|$, отримаємо $4\pi r^2 p dr = \sigma 8\pi r dr$. Звідси для тиску на рідину, що створюється сферичною поверхнею, отримаємо такий вираз:

$$p = \frac{2\sigma}{r}. \quad (10.18)$$

Якщо поверхня не сферична, а циліндрична, то допоміжний тиск, що викликаний кривиною поверхні, дорівнює

$$p = \frac{\sigma}{r}. \quad (10.19)$$

Читачам пропонується самим вивести цю формулу аналогічно (10.18).

Для поверхні будь-якої форми тиск зумовлений кривиною і виражається формулою Лапласа:

$$p = \sigma \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right), \quad (10.20)$$

де r_1 і r_2 — головні радіуси кривини в даному місці поверхні.

Допоміжний тиск направлений до центра кривини. Тому у випадку випуклої поверхні рідини він направлений всередину рідини. У випадку увігнутої поверхні рідина буде знаходитись під тиском меншим, ніж та ж сама рідина під плоскою поверхнею, на величину допоміжного тиску.

Розглянемо сили поверхневого натягу на границі стикання двох рідин, що не змішуються. Нехай, як це показано на рис. 86, крапля однієї рідини (2) знаходиться на поверхні іншої рідини (1), а над краплиною буде газ (3). При цьому одні рідини можуть утворювати сочевицю, а інші розтікаються по поверхні, утворюючи тонкий шар.

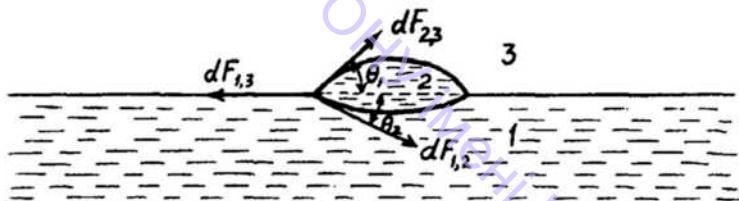


Рис. 86

Границею стикання всіх трьох середовищ є коло, що обмежує сочевицю (вид зверху на рис. 86). На елемент довжини dl цього кола діють три сили поверхневого натягу.

$dF_{1,2} = \sigma_{1,2} dl$ — сила на межі між рідинами 1 і 2;

$dF_{1,3} = \sigma_{1,3} dl$ — сила на межі рідина 1 — газ;

$dF_{2,3} = \sigma_{2,3} dl$ — сила на межі рідина 2 — газ.

Якщо $dl = 1$, то кожна з цих сил дорівнює відповідному коефіцієнту поверхневого натягу. Рівнодійна сил $\vec{\sigma}_{2,3}$ і $\vec{\sigma}_{1,2}$ направлена всередину краплі і стягує її. Навпаки, сила $\vec{\sigma}_{1,3}$ розтягує краплину. Умовою рівноваги краплі на поверхні рідини буде

$\bar{\sigma}_{2,3} + \bar{\sigma}_{1,2} = \bar{\sigma}_{1,3}$. При умові $\bar{\sigma}_{2,3} + \bar{\sigma}_{1,2} > \bar{\sigma}_{1,3}$ рівновага краплини на поверхні іншої рідини можлива. Якщо ж $\bar{\sigma}_{2,3} + \bar{\sigma}_{1,2} < \bar{\sigma}_{1,3}$, то рівновага неможлива, і крапля 2 починає розтікатись по поверхні рідини у вигляді тонкої плівки, наприклад, масло на воді. Кути θ_1 і θ_2 , тобто кути між дотичними до поверхні краплини рідини 2 і поверхнею рідини 1, з якою вона стикається, називаються *крайовими кутами*. Крайові кути при стиканні різних рідин бувають різні. Вони визначаються співвідношенням коефіцієнтів $\sigma_{1,2}$, $\sigma_{1,3}$, $\sigma_{2,3}$. Якщо $\theta = \theta_1 + \theta_2 = 0$, то $\cos \theta = 1$, і рідина 2 розтікається тонким шаром по поверхні рідини 1. В цьому випадку говорять, що рідина 2 змочує рідину 1. В протилежному випадку говорять про *незмочування*.

Аналогічні явища спостерігаються при стиканні рідини з твердим тілом. Форма, яку приймає краплина рідини на поверхні твердого тіла, визначається співвідношенням сил, що діють на рідину: сил тяжіння, сил взаємодії молекул рідини і сил взаємодії між частинками рідини і частинками твердого тіла, з яким вона контактує. Характеристикою співвідношення двох останніх вищезазначених сил є крайовий кут θ , тобто кут, утворений дотичною до поверхні рідини біля її межі з твердим тілом і поверхнею твердого тіла. Якщо $\sigma_{1,3} - \sigma_{1,2} = \sigma_{2,3}$, то $\theta = 0$, і рідина розтікається тонким шаром по поверхні твердого тіла. Це також буде спостерігатись, і при $\sigma_{1,3} - \sigma_{1,2} > \sigma_{2,3}$. Такі явища повного розтікання називаються *повним змочуванням*. Випадок, коли $\sigma_{1,3} + \sigma_{2,3} = \sigma_{1,2}$, а $\theta = \pi$ відповідає повному незмочуванню твердого тіла рідиною, наприклад, вода на парафіні. В більшості випадків спостерігаються проміжкові стани часткове змочування $\theta < \frac{\pi}{2}$ (рис. 87а) або часткове незмочування ($\theta > \frac{\pi}{2}$, рис. 87б).

Взаємодія частинок рідини з частинками твердого тіла впливає на форму поверхні рідини, наливої в посудину. Якщо посудина широка, то форма її поверхні визначається силою тяжіння, яка забезпечує плоску і горизонтальну поверхню. Але біля стінок поверхня рідини буде викривлена. Вона утворює меніск, увігнутий у рідин, які змочують поверхню твердої посудини (рис. 88а), і випуклий у випадку незмочування (рис. 88б).

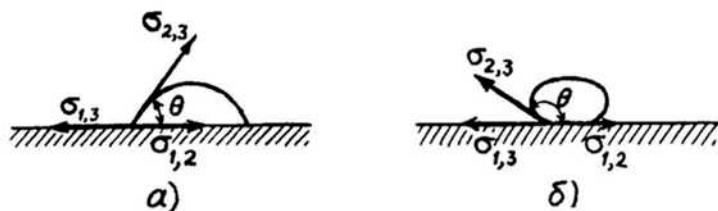


Рис. 87

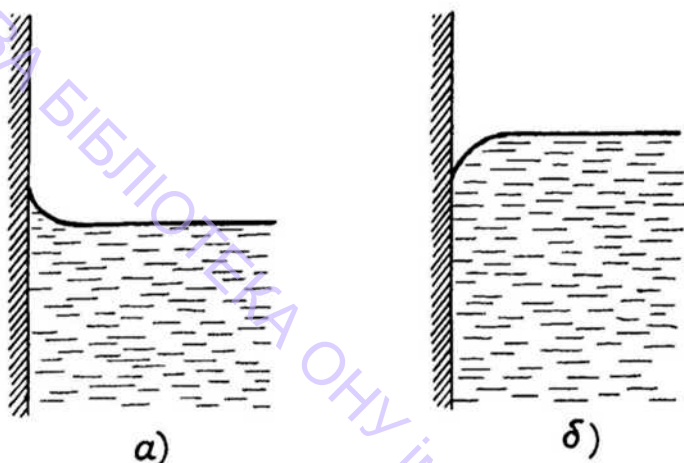


Рис. 88

Якщо посудина являє собою тонкий капіляр і рідина буде змочувати стінки капіляра, то вона утворить криву поверхню. Радіус кривини поверхні рідини в досить тонких капілярах приблизно дорівнює радіусу самого капіляра, таким чином, форма поверхні рідини буде увігнутою і сферичною. У випадку увігнутої поверхні, як було розглянуто вище, рідина буде знаходитись під тиском меншим, ніж під плоскою поверхнею на величину допоміжного тиску, який, згідно з (10.18) буде дорівнювати $p = \frac{2\sigma}{r_0}$, де r_0 — радіус меніска, який дорівнює радіусу капіляра. Завдяки цьому тиску рідина буде підніматись в капілярі на деяку висоту до тих пір, поки гід-

ростатичний тиск ρgh не зрівняється з допоміжним тиском $\frac{2\sigma}{r_0}$. Тобто,

$$\frac{2\sigma}{r_0} = \rho gh, \text{ звідки } h = \frac{2\sigma}{\rho g r_0}. \quad (10.21)$$

Таким чином, у випадку змочування рідиною стінок капіляра, за рахунок поверхневих явищ, вона піднімається в ньому (рис. 89а) на висоту, яка прямо пропорційна коефіцієнту поверхневого натягу і обернено пропорційна радіусу капіляра. Чим вужчий капіляр, тим на більшу висоту в ньому піднімається рідина. У випадку незмочування рідиною стінок капіляра, меніск буде випуклий, і рідина буде знаходитись під допоміжним тиском, який направлений всередину рідини, наприклад, скляний капіляр, опущений у ртуть. Під дією допоміжного тиску $\frac{2\sigma}{r_0}$ рідина буде опускатись в капілярі порівняно з горизонтальною поверхнею на висоту, що також визначається формулою (10.21), рис. 89б.

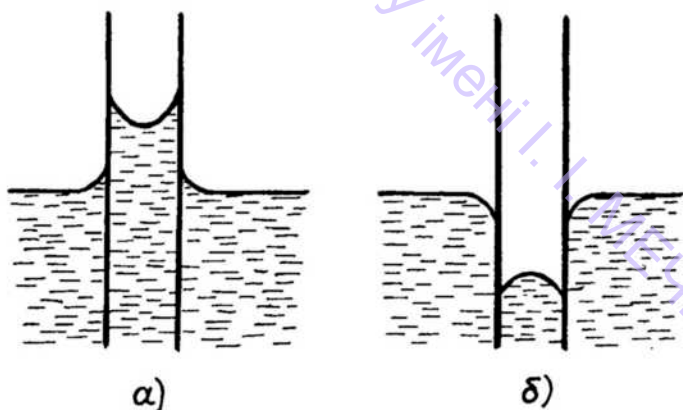


Рис. 89

В дуже тонких капілярах рідина може підніматись на значну висоту. Наприклад, в капілярі діаметром 1 мікрон вода

($\rho = 10^3 \text{ кг/м}^3$, $\sigma = 0,073 \text{ Н/м}$) при умові повного змочування $\theta = 0$, піднімається на висоту

$$h = \frac{2\sigma}{\rho g r} = \frac{2 \cdot 0,073}{10^3 \cdot 9,8 \cdot 5 \cdot 10^{-7}} \approx 30 \text{ м.}$$

Капілярні явища відіграють велику роль в природі, в техніці. Підняття речовин живлення по стеблинам чи стовбурам рослин в значній мірі зумовлено капілярними явищами: розчини піднімаються по тонким капілярним трубочкам, утвореним стінками рослинних клітин. По капілярам ґрунту піднімається вода з глибинних в поверхневій шарі. По капілярам гнота піднімаються пальні та мастильні матеріали. На капілярності ґрунту засноване використання промокального паперу. Бджоли беруть нектар із глибини квіток за допомогою дуже тонкої капілярної трубки, що знаходиться всередині бджолоїного хоботка.

КОНТРОЛЬНІ ПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ

1. Що таке анізотропія? Чи характерна вона для рідин?
2. Як рухаються молекули в рідині?
3. Що таке час релаксації для молекул рідини? Чому він дорівнює?
4. Як залежить час релаксації від температури?
5. Що таке енергія активації для молекул рідини?
6. Якими рівняннями описуються явища дифузії, теплопровідності і в'язкості в стаціонарному випадку для рідин?
7. Від чого залежить і чому дорівнює коефіцієнт дифузії рідини?
8. Чому дорівнює коефіцієнт теплопровідності рідини з фононної точки зору?
9. В чому різниця механізмів в'язкості в рідинах і в газах?
10. Як залежить коефіцієнт в'язкості рідини від температури?
11. Як зв'язані між собою коефіцієнт в'язкості рідини і її коефіцієнт дифузії?
12. Як залежить коефіцієнт в'язкості рідини від тиску?

13. Яка різниця в умовах перебування молекул на поверхні і в об'ємі рідини?
14. Що таке коефіцієнт поверхневого натягу рідини?
15. Що таке сила поверхневого натягу?
16. Чому дорівнює тиск, що створює сферична поверхня рідини?
17. В якому випадку рідина змочує, а в якому не змочує тверду поверхню?
18. Чому виникають капілярні явища?
19. Від чого залежить висота, на яку піднімається рідина в капілярах?

Розділ 1 1

ТВЕРДІ ТІЛА

11.1. БУДОВА КРИСТАЛІЧНИХ ТВЕРДИХ ТІЛ

Як було показано в 7.1, коли кінетична енергія молекули значно менша мінімального значення потенціальної енергії взаємодії з іншими молекулами e_{kij} « fV_{mijn} », речовина знаходиться в твердому агрегатному стані. Відстань між частинками речовини в твердому агрегатному стані порядку розмірів самих частинок. Завдяки тому, що частинки твердого тіла зв'язані між собою міцніше, ніж в рідинах, вони не «дрейфують» серед інших, а лише здійснюють коливання навколо місць осілого життя. Тому тверді тіла, на відміну від рідин, мають постійним не лише об'єм, а і форму.

Основні види твердого стану речовини — кристалічні і аморфні.

Аморфні тіла, наприклад: скло, смола, янтар тощо, так само, як і рідини, мають ближній порядок. їх можна розглянути як переохолоджені рідини, які мають дуже велику в'язкість. Теоретичний опис властивостей аморфних тіл так само, як і опис рідин, є дуже складним. Властивості аморфних тіл в більшості залежать від засобів їх приготування і отримання. Тому до цього часу технологія отримання аморфних тіл з необхідними характеристиками, вивчення їх властивостей і будови базується не на теоретичних моделях, а скоріше на емпіричних даних, які отримують дослідним шляхом.

Значно краще розвинута фізика кристалічних твердих тіл. Великий ступінь впорядкованості частинок в кристалічних твердих тілах дозволяє створити моделі, які описують і пояснюють їх властивості і поведінку в різних фізичних умовах. Характерною ознакою кристала є його правильна геометрична форма. Так, наприклад (рис. 90), кристал солі NaCl має форму

куба а); кристал льоду — форму шестигранної призми б); кристал алмазу — форму октаедра в) і т. д.

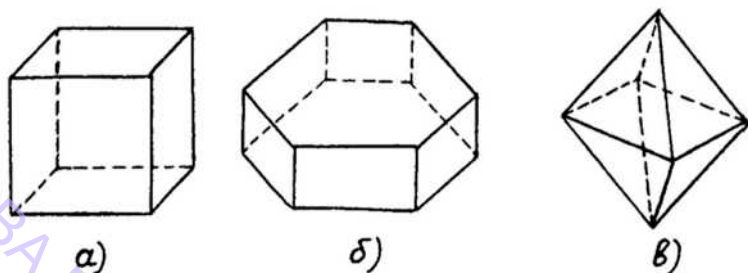


Рис. 90

У кожної кристалічної речовини кут між гранями кристала має своє певне значення (у солі — 90° , у льоду — 120° і т. д.). Ідея про правильну геометричну будову кристалічних твердих тіл виникла ще в XIX сторіччі. Якщо до кристалу прикласти механічну напругу, то він може розколотися на кристалики меншого розміру, але такої ж самої форми. Так, якщо роздробити кристал солі, то отримаємо маленькі кубики і прямокутні паралелепіеди. Ці та інші факти в свій час привели до думки, що кристалічне тіло побудовано із *елементарних комірок* (кубиків або шестигранних призм, або октаедрів і т. д.), які щільно упаковані. Це означає, що в кристалічному тілі частинки (молекули, атоми, іони) розташовані не хаотично, а в чітко симетричному порядку відносно один одного, утворюючи *просторову* або *кристалічну ґратку*. Ця гіпотеза була викладена в 1848 році французьким кристалографом О. Браве. Прикладом просторової ґратки може бути кристалічна ґратка кам'яної солі NaCl (рис. 91 а). Її елементарна комірка з ребром / утворена позитивними іонами натрію і від'ємними іонами хлору, розташованими у вершинах куба.

Форми просторових ґраток можуть бути різні, але не які завгодно. Необхідно, щоб елементарні комірки, що складають просторову ґратку, щільно, без зазорів, прилягали одна до одної. Саме така упаковка комірок буде відповідати мінімуму

потенціальної енергії ґраток. На рис. 9! такий упаківці відпо-
відають кубічні комірки б); комірки у вигляді шестигранних
призм в), але не можна упакувати щільно комірки у вигляді
п'ятигранних призм (рис. 91г). Тому така форма кристалічної
ґратки неможлива.

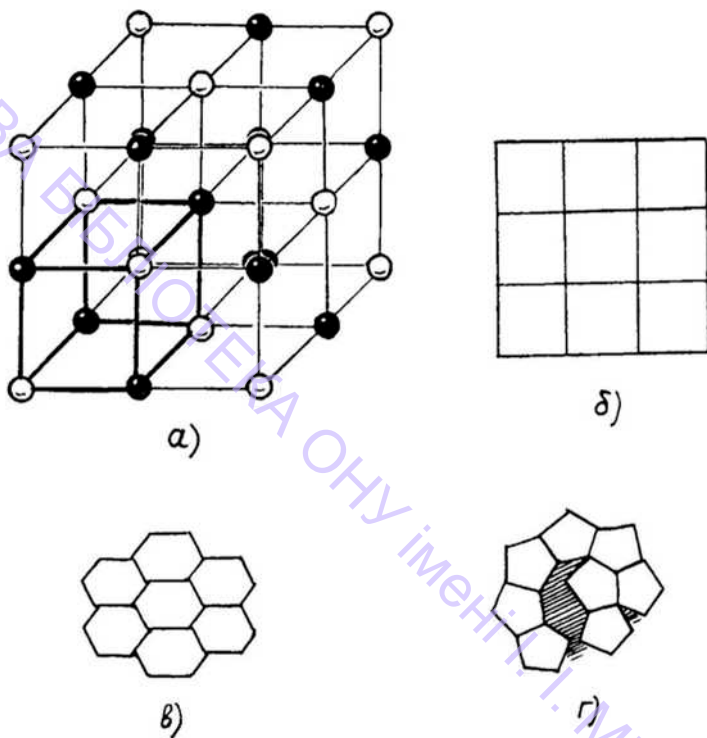


Рис. 91

В 1890 р. Є. С. Федоров теоретично розрахував всі можливі
форми кристалічних ґраток, комірки яких допускають щільну
упаковку. Він встановив, що в природі може існувати 230 видів
різних кристалічних ґраток, які утворюють 32 класи симетрії.
Проведені пізніше експериментальні дослідження кристалів за
допомогою рентгенівського випромінювання підтвердили, що
кристали складаються із симетрично розташованих частинок:

атомів, молекул, іонів, які утворюють кристалічну ґратку. За допомогою рентгеноструктурного аналізу, дослідним шляхом були виявлені всі 230 різних видів кристалічних ґраток.

Симетрія в розташуванні частинок в кристалічній ґратці зумовлена силами взаємодії між ними. Сили притягання і відштовхування повинні врівноважуватись, а їх потенціальна енергія при цьому повинна бути мінімальною.

Характерною особливістю для кристалічних твердих тіл є *анізотропія*. Анізотропія — це здатність кристала у різних напрямках мати різні фізичні властивості. Наприклад, для всіх кристалів характерна анізотропія міцності, для більшості кристалів характерною є анізотропія тепло- і електропровідності, для прозорих кристалів характерна анізотропія променезаломлювання.

Анізотропія пояснюється в основному тим, що в різних напрямках в просторовій ґратці буде різна кількість частинок, що припадають на одиницю довжини. Рис. 92 пояснює цю властивість на прикладі NaCl.

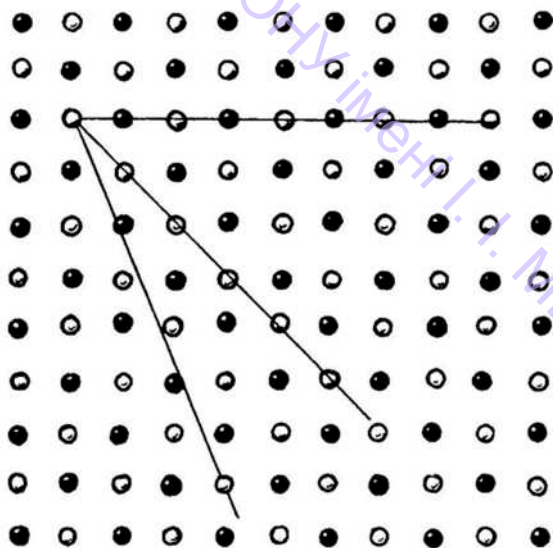


Рис. 92

В різних твердих кристалічних тілах кристалічні властивості виражені неоднаково. Існують тверді тіла, які мають єдину кристалічну ґратку по всьому об'єму. Їх називають *монокристалами*. Це крупні поодинокі кристали, розміри яких в окремих випадках бувають дуже великими. Більшість твердих кристалічних тіл мають *полікристалічну* структуру. Полікристалічні тіла складаються із великої кількості маленьких монокристалів, які хаотично розташовані відносно один до одного. Зрозуміло, що полікристалам не властива анізотропія. Вони *ізотропні*. Ізотропією називається властивість кристала мати однакові фізичні властивості по всім напрямкам. Прикладом полікристалів є метали. Але метали можна отримати і у вигляді монокристала, якщо в повільно охолоджуваний метал ввести маленький монокристалик даного металу (зародок). Навколо нього і буде рости монокристал даного металу.

В залежності від того, які частинки знаходяться у вузлах кристалічної ґратки, розрізняють чотири види кристалічних ґраток: іонну, атомну, молекулярну і металеву.

Іонна ґратка утворена різнойменно зарядженими іонами, які утримуються у вузлах кристалічної ґратки електричними силами. Типовим прикладом є кам'яна сіль. Іонні кристали легко розколюються.

Атомна ґратка утворена нейтральними атомами, які утримуються у вузлах кристалічної ґратки хімічними (валентними) зв'язками. У сусідніх атомів узаємодіють зовнішні (валентні) електрони, прикладом можуть бути алмаз, карборунд. Вони відрізняються своєю міцністю. Атомну ґратку мають також напівпровідники.

Молекулярна ґратка утворена полярними (дипольними) молекулами з вандерваальсовими зв'язками. Вони утримуються у вузлах кристалічної ґратки також електричними силами, але для полярних молекул дія цих сил слабкіша, ніж для іонів. Тому тіла з молекулярною ґраткою легко деформуються. Прикладом може бути більшість органічних сполук: парафін, сухий лід, йод тощо.

Металева ґратка утворена позитивними іонами металу, наприклад: мідь, алюміній, золото тощо. Характерною ознакою

цього типу зв'язку є те, що валентні електрони всіх атомів є вільними і належать всьому кристалу. Металеву ґратку можна уявити собі так: позитивний іонний каркас знаходиться в електронному газі. Стійкість ґратки забезпечується електростатичною силою взаємодії між іонами та електронами.

Приведена вище класифікація кристалічних твердих тіл є умовною. Існують багато твердих тіл, властивості яких не дозволяють віднести їх до одного із розглянутих видів. Ці тверді тіла займають проміжний стан між розглянутими класами твердих тіл.

У деяких твердих тілах здійснюється не один, а два і більше типів зв'язку. Так, в кристалах графіту є три типи зв'язку: ковалентний і металічний в межах одного плоского шару та вандерваальсовський між шарами.

11.2. ТЕПЛОВІ ВЛАСТИВОСТІ КРИСТАЛІЧНИХ ТВЕРДИХ ТІЛ

Наявність в кристалічних твердих тілах впорядкованої кристалічної ґратки визначає їх різноманітні фізичні властивості: механічні, теплові, електричні, магнітні, оптичні. Тут ми розглянемо лише теплові властивості кристалів.

Як було показано вище, тепловий рух частинок в кристалах суттєво відрізняється від теплового руху молекул в газах. Частинки в кристалах здійснюють коливальні рухи навколо положень рівноваги. Енергія коливального руху і є внутрішньою енергією кристала, середнє її значення визначає температуру кристала. При зменшенні температури коливальний рух затухає, а його внутрішня енергія зменшується. Однак, при $T \rightarrow 0$, згідно з квантовою теорією коливального руху, енергія кристала прямує не до нуля, а до якогось певного значення U_0 , яке називається *нульовою енергією*. Детальніше нульова енергія буде розглянута в III частині посібника. Наявність у кристала нульової енергії не суперечить тому, що при $T \rightarrow 0$ ентропія кристала прямує до нуля, оскільки ця енергія не зв'язана з те-

пловим рухом. Ентропія ж визначається хаотичним тепловим рухом частинок кристалу.

Розглянемо теплове розширення кристалічних твердих тіл. Досліди показують, що із збільшенням температури тверді тіла збільшують свої розміри. Відбувається так зване теплове розширення. Для характеристики цього явища вводять так звані коефіцієнт лінійного розширення і коефіцієнт об'ємного розширення. Нехай l_0 — довжина тіла при температурі 0°C . Видовження цього тіла Δl при нагріванні його до температури $t^\circ\text{C}$ пропорційно початковій довжині l_0 і температурі

$$\Delta l = \alpha_l l_0 t, \quad (11.1)$$

де α_l — коефіцієнт лінійного розширення, який характеризує відносне видовження $\frac{\Delta l}{l_0}$ при нагріванні на один градус.

Довжину тіла при температурі t розраховують так:

$$l = l_0 + \Delta l = l_0 (1 + \alpha_l t). \quad (11.2)$$

Коефіцієнти лінійного розширення ізотропних твердих тіл залежать від матеріалу, і для більшості твердих тіл мають порядок $10^{-5} - 10^{-6} \text{ K}^{-1}$. В дійсності вони дещо залежать від температури.

Внаслідок лінійного розширення збільшується об'єм тіла згідно з таким самим законом

$$V = V_0 (1 + \alpha_v t), \quad (11.3)$$

де V — об'єм тіла при $t = 0^\circ\text{C}$, α_v — коефіцієнт об'ємного розширення, що характеризує відносне збільшення об'єму при нагріванні тіла на один градус.

Легко показати, що між коефіцієнтами α_l і α_v для ізотропних тіл існує така залежність

$$\alpha_v = 3\alpha_l, \quad (11.4)$$

Причиною теплового розширення кристалів є тепловий рух їх частинок. Зростання температури приводить до збільшення енергії теплового руху. Згідно з класичними уявлен-

нями, при цьому зростає амплітуда теплових коливань. Але, якщо коливання будуть гармонічними, то збільшення амплітуди не повинно приводити до теплового розширення кристалів. Справа в тому, що гармонічні коливання відбуваються навколо середнього положення, яке не змінюється із збільшенням амплітуди коливання і це не призводить до збільшення відстані між вузлами ґратки, відповідно, до теплового розширення кристала. Для пояснення теплового розширення потрібно врахувати, що коливання частинок в кристалічній ґратці є гармонічними лише при невеликих відхиленнях від положень рівноваги. Із збільшенням температури амплітуда коливань збільшується, і коливання вже стають ангармонічними. Це зумовлено тим, що крива потенціальної енергії частинок в кристалі не є параболою. Повернемося до залежності потенціальної енергії взаємодії частинок кристала від відстані (рис. 93). Горизонтальними лініями 0, 1, 2, 3, 4, 5 позначені різні допустимі коливальні енергетичні рівні. Нульовому рівню відповідає нульова коливальна енергія (про яку йшла мова вище).

В нижній частині потенціальна крива наближено співпадає з параболою, і коливання відбуваються навколо положення z_0 , яке відповідає середній відстані між частинками. При збільшенні температури енергія збільшується, збільшується і амплітуда коливань, і, як це видно із рис. 93, середнє положення частинок зміщується вправо від рівноважного z_0 (крива av), відстань між частинками збільшується, і тим самим кристал розширюється.

Характером теплового руху частинок в твердих тілах визначається механізм теплопровідності. Основне рівняння стаціонарної теплопровідності для твердих тіл має такий самий вигляд, як і для ідеального газу (див. 7.65). Воно визначається рівнянням Фур'є:

$$q = -\kappa \text{grad} T, \quad (11.5)$$

де κ — коефіцієнт теплопровідності твердого тіла, q — потік тепла.

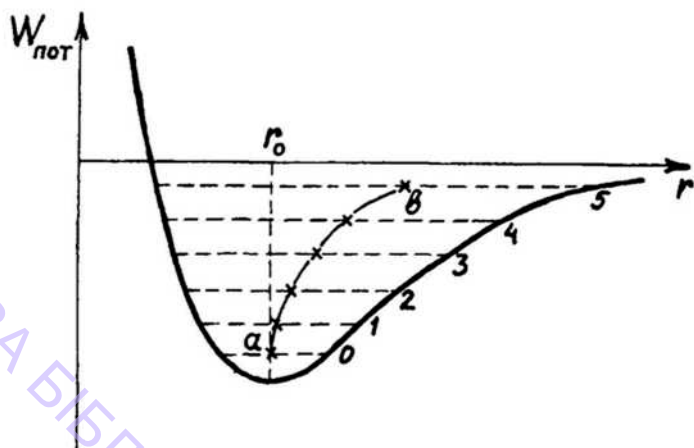


Рис. 93

Але чисельне значення коефіцієнта теплопровідності в твердих тілах значно відрізняється від коефіцієнта теплопровідності в газах. Наприклад, для газів має значення порядку

$10^{-3} \frac{\text{Дж}}{\text{м} \cdot \text{с} \cdot \text{К}}$, у твердих неметалевих тіл — порядку $10^{-1} \frac{\text{Дж}}{\text{м} \cdot \text{с} \cdot \text{К}}$, у металі — $10^1 \frac{\text{Дж}}{\text{м} \cdot \text{с} \cdot \text{К}}$. Така значна різниця пояснюється різ-

ними механізмами теплопередачі в газах і твердих тілах. Як було розглянуто в 7.6, теплопередача в газах відбувається за рахунок передачі кінетичної енергії при зіткненні молекул, що хаотично рухаються. В твердих кристалічних тілах частинки знаходяться у вузлах кристалічної ґратки і завершують коливальні рухи. Ці коливання передаються від частинки до частинки, тобто утворюють хвилі, які і переносять енергію коливань. Швидкість цих хвиль повинна дорівнювати швидкості звукової хвилі в твердих тілах, тобто порядку декількох кілометрів за секунду. Здавалося б, і теплопровідність, що зумовлена таким механізмом, повинна бути дуже великою. Насправді ж, як показують досліди, теплопровідність таких тіл порівняно невелика. Це пояснюється тим, що теплові

коливання не є гармонічними. Пружні хвилі, що породжуються високочастотними коливаннями, на відміну від низькочастотних акустичних хвиль, зустрічаючи на своєму шляху частинки, що ангармонічно коливаються, розсіюються і послаблюються ними. Розсіювання пружних хвиль зростає із збільшенням температури. При цьому теплопровідність зменшується. Можна врахувати розсіювання пружних хвиль, якщо ввести поняття про довжину вільного пробігу цих хвиль в кристалі. Тоді все відбувається так, начебто хвиля обривається після деякого пробігу, а замість неї виникає нова, з іншим напрямком розповсюдження. В квантовій теорії ці хвилі зіставляються з деякими фіктивними квазічастинками, які називаються *фононами*. Тоді для опису процесу теплопередачі тверде тіло уявляють як об'єкт, заповнений фононним газом, і за аналогією з ідеальним газом (7.64), коефіцієнт теплопровідності записують у вигляді

$$\kappa_{\phi} = \frac{1}{3} c_{\phi} \lambda_{\phi} \rho c_v, \quad (11.6)$$

де c_{ϕ} — середня швидкість поширення фононів, λ_{ϕ} — середня довжина їх вільного пробігу, розрахунок якої є дуже складним.

Він показує, що $\lambda_{\phi} = \frac{\text{const}}{T}$.

В металах, крім вищезазначеного механізму теплопередачі, велику роль відіграє механізм теплопровідності, зумовлений вільними електронами, так званий *електронний газ*. При високій температурі електронна теплопровідність відіграє суттєву роль. Саме нею пояснюється висока теплопровідність металів порівняно з неметалами (діелектриками).

При низьких температурах починає переважати ґраткова теплопровідність, а при найнижчій температурі, коли ґраткова теплопровідність дуже мала, знову починає переважати електронна теплопровідність.

При високих температурах в твердих тілах $c_v = \text{const}$, а $\lambda = \frac{\text{const}}{T}$. Отже, $\kappa_{\phi} = \frac{a}{T}$.

В області високих температур κ_ϕ з підвищенням температури зменшується. Для електронної складової $c_{el} = aT$, $\lambda_{el} \sim \frac{1}{T}$ і $\kappa_{el} = \text{const}$. Нагадаємо, що для газів $\kappa \sim \sqrt{T}$.

Розглянемо теплоємність твердих тіл. Порівняно з газами, в твердих тілах практично великої різниці між c_p і c_v немає. Тому говорять про теплоємність твердого тіла, зв'язуючи її зі зміною внутрішньої енергії одиниці маси, або одного моля при нагріванні на один градус. Для неметалевих ґраток внутрішня енергія являє собою сумарну енергію частинок, що утворюють ґратку. Частинки (атоми), що знаходяться у вузлах кристалічної ґратки, можуть завершувати коливання в трьох взаємно перпендикулярних напрямках, тобто мають три коливальних ступеня вільності. Використовуючи закон рівномірного розподілу енергії за ступенями вільності, можна записати внутрішню енергію моля твердого тіла таким чином:

$$U = 3N_A \bar{\epsilon}, \quad (11.7)$$

де $\bar{\epsilon}$ — середня енергія на один ступінь коливального руху атома, N_A — число атомів в молі (число Авоґардо). На кожен коливальний ступінь вільності приходить енергія $\epsilon = kT$. Тому внутрішня енергія моля твердого тіла

$$U = 3N_A kT = 3RT. \quad (11.8)$$

Диференціюючи енергію U за температурою, отримаємо вираз для молярної теплоємності твердого тіла

$$C = \frac{dU}{dT} = 3R = 25 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}} = 6 \frac{\text{кал}}{\text{моль} \cdot \text{К}}. \quad (11.9)$$

В 1812 році П. Дюлонґ і А. Пті при експериментальних дослідженнях теплоємності твердих тіл підтвердили цей результат. Теплоємність одноатомних кристалів при кімнатній температурі близька до значення $3R$ і мало змінюється із збільшенням температури. Пізніше експериментальні дослідження в широкому діапазоні температур показали, що результати (11.9) лише приблизно співпадають з дослідними, а в деяких випадках є зо-

всім невірними. Дійсно, із (11.9) видно, що молярна теплоємність не залежить ні від температури, ні від властивостей кристалів. Досліди показали, що в дійсності така залежність існує, особливо це видно при низьких температурах. При низьких температурах, як це видно із рис. 94, теплоємність різко зменшується і поблизу температури абсолютного нуля змінюється пропорційно T^3 для неметалевих кристалів і пропорційно T для металів. При температурі, що прямує до нуля, теплоємність твердих тіл також прямує до нуля. Теплоємність деяких речовин, наприклад, алмазу, бору навіть при великих температурах значно відрізняється від теоретичних. Не узгоджується з класичними уявленнями і теплоємність металів. Дійсно, метали,

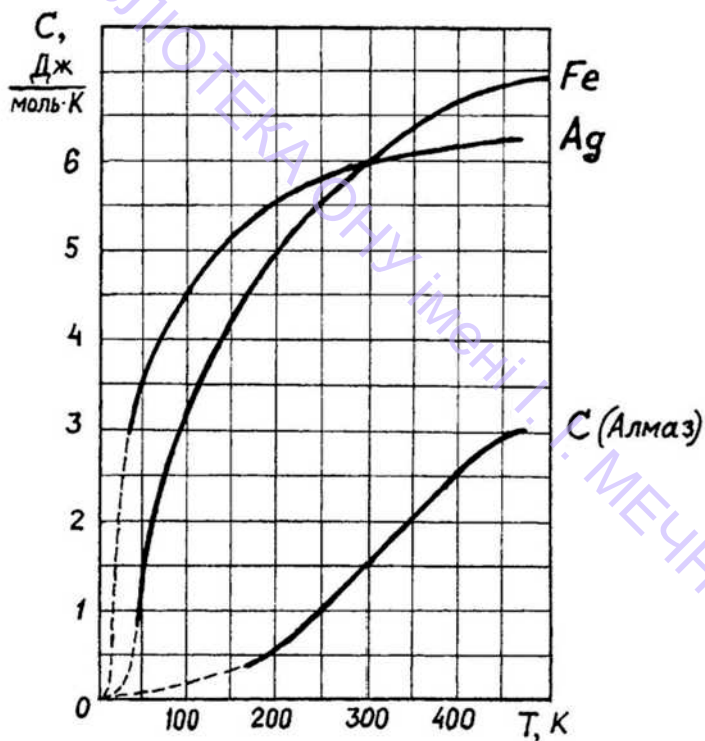


Рис. 94

крім граткової теплопровідності, мають ще і електронну провідність. З класичної точки зору, вільні електрони мають три ступеня вільності. Якщо вважати, що їх кількість дорівнює кількості атомів і на кожен ступень вільності приходить енергія

$$\varepsilon = \frac{1}{2} kT, \text{ то вони повинні внести вклад в теплоємність } c = 1,5R.$$

Тобто збільшити її на 50 відсотків. В дійсності цього немає.

Причиною розходження класичної теорії теплоємності з дослідними даними є обмежене використання закону рівномірного розподілу енергії за ступенями вільності. Точну теорію теплоємності можна побудувати лише на основі квантової механіки.

КОНТРОЛЬНІ ПИТАННЯ / ЗАВДАННЯ

1. Чим відрізняється рух частинок в твердих тілах порівняно з їх рухом в рідині?
2. Яка різниця в будові кристалічних і аморфних твердих тіл?
3. Яку будову має кристалічна гратка кам'яної солі?
4. Що таке анізотропія кристалу?
5. Які види кристалічних граток ви знаєте?
6. Що таке нульова енергія кристалу?
7. Як пояснити теплове розширення кристалічних тіл?
8. Яким рівнянням описується стаціонарна теплопровідність твердих тіл?
9. Поясніть механізм теплопровідності в твердих тілах?
10. Чому дорівнює коефіцієнт теплопровідності твердих тіл? Як він залежить від температури?
11. Яку характерну особливість має теплопровідність металів?
12. Чому дорівнює теплоємність твердих тіл?

Розділ 12

ФАЗОВІ ПЕРЕХОДИ

12.1. ФАЗИ РЕЧОВИНИ

В термодинаміці *фазою* називається фізично однорідна, однакова за своїми властивостями частина речовини, відокремлена від інших частин певною межею. Якщо система складається із одної однорідної або, інакше кажучи, *гомогенної* речовини, то в цьому випадку говорять, що вона має одну фазу, наприклад—водяна пара. Якщо система складається із декількох різних частин, кожна з яких гомогенна, то вона має декілька фаз. Такі системи називаються *гетерогенними*. Наприклад: лід, вода, водяна пара. В системі стільки фаз, скільки в ній однорідних, однакових за своїми властивостями частин. Різними фазами є різні агрегатні стани речовини. Але поняття фази ширше, ніж поняття агрегатний стан. В межах одного агрегатного стану речовина може знаходитись в декількох фазах, які відрізняються за своїми властивостями, складом, будовою. Наприклад: тверда речовина — лід може зустрічатись в п'яти різних кристалічних фазах. Алмаз і графіт в твердому агрегатному стані є фазами вуглецю. Від співвідношення між середньою кінетичною і середньою потенціальною енергіями частинок речовини (молекул, атомів, іонів) залежить, в якій фазі буде знаходитись речовина (7.1). А це співвідношення, в свою чергу, залежить від зовнішніх умов: температури і тиску.

Процеси, при яких речовина переходить із однієї фази в іншу, називаються *фазовими переходами*. Типовими фазовими переходами є випаровування рідини, плавлення твердого тіла і зворотні їм процеси — конденсація і кристалізація. Для фазових переходів характерною ознакою є стрибкоподібність. Наприклад, при нагріванні рідини її властивості змінюються поступово, а при досягненні температури кипіння рідина по-

чинає при сталій температурі перетворюватись в пару, властивості якої суттєво відрізняються від властивостей рідини.

Різні фази однієї і тієї ж речовини можуть знаходитись в рівновазі одна з одною. Рівновага двох фаз відбувається лише при певних значеннях температури і тиску. При зміні тиску змінюється температура рівноваги, і навпаки. Залежність між температурою рівноваги і тиском зображається на графіку (p, T) лінією

$$p = f(T). \quad (12.1)$$

На рис. 95 представлена крива, вздовж якої рідина і її насичена пара знаходяться в рівновазі.

Крива розділяє площину на дві частини. Точки вище кривої відповідають стану речовини в рідкій фазі, а нижче — газоподібній. Подібні діаграми називаються *фазовими діаграмами*, або просто *діаграмами стану*.

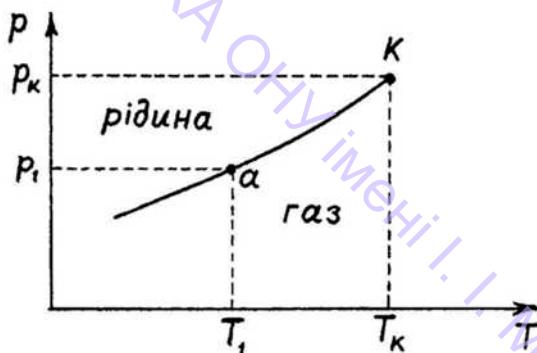


Рис. 95

В рівновазі можуть знаходитись і три фази. Такий стан на діаграмі буде зображатись точкою, котру називають *потрійною точкою*, див. нижче рис. 99.

Для переходу речовини з однієї фази в іншу необхідна затрата або виділення деякої кількості теплоти, так званої *теплоти фазового переходу*. Існують фазові переходи, які не супроводжуються поглинаннями чи виділенням тепла. Такі переходи називаються

ваються *фазовими переходами другого роду*, на відміну від переходів, які супроводжуються тепловими ефектами і називаються *фазовими переходами першого роду*. Розглянемо теплові фазові переходи першого роду.

12.2. ВИПАРОВУВАННЯ І КОНДЕНСАЦІЯ

Ці фазові переходи відбуваються при взаємних перетвореннях рідини в пар, і навпаки. При кожній температурі в рідині є деяка кількість молекул, енергія яких достатня для того, щоб подолати притягання сусідніх молекул, прорватися через поверхневий шар рідини і вилетіти за межі рідини. Так відбувається випаровування рідини. Чим вище температура, тим більше буде таких молекул і тим інтенсивніше буде відбуватись випаровування.

Видалення із рідини найбільш швидких молекул приводить до того, що середня енергія молекул в рідині зменшується і рідина охолоджується. Для того, щоб процес випаровування рідини відбувався при сталій температурі, до рідини необхідно підводити деяку кількість теплоти, яка називається *теплотою випаровування*.

Питомаю теплотою випаровування називають кількість теплоти, яку необхідно надати одиниці маси рідини, що знаходиться при певній температурі, щоб перевести її в пару при тій же температурі. Теплота випаровування залежить від температури рідини. Із збільшенням температури теплота випаровування зменшується.

Зворотний процес — перехід молекул газу в рідину — називають *конденсацією*. При конденсації пари в рідину теплота виділяється в такій же кількості, яка поглинається при випаровуванні.

Нехай рідина знаходиться в закритій посудині і займає певну частину її об'єму. З поверхні рідини відбувається випаровування, тиск пари над поверхнею рідини в закритій посудині буде зростати. Частина молекул із пари може повертатись в рідину, і

з часом по мірі збільшення тиску цей процес буде все більш інтенсивним. При деякому тиску встановиться рівновага: скільки молекул вилітає із рідини, стільки і залітає назад в рідину. При такій умові пару називають *насиченою*. Її густина і тиск при даній температурі мають певні значення. Якщо збільшимо об'єм над рідиною, не змінюючи температуру, пара перестане бути насиченою, і частина рідини випаровується. Цей процес буде продовжуватись до тих пір, поки пара знову не стане насиченою. Якщо збільшити температуру, то тиск, при якому знову встановиться рівновага, буде також збільшуватись.

Нехай над поверхнею рідини, крім її власної пари, будуть знаходитись інші гази, наприклад повітря, тоді вони не повинні впливати на умову фазової рівноваги між рідиною і її парою. Випаровування буде продовжуватись до тих пір, поки парціальний тиск її пари не буде дорівнювати тиску насиченої пари при даній температурі. Поки тиск насиченої пари при даній температурі менше повного тиску, випаровування відбувається повільно. При деякій температурі виникає бурхливий процес — рідина закипає. В середині рідини утворюються бульбашки з насиченою парою, які збільшуються в розмірах і піднімаються вгору. Температура кипіння є та температура, при якій тиск насиченої пари дорівнює зовнішньому тиску.

Стискуючи пару при постійній температурі, ми повторимо процес випаровування в зворотному напрямку, тобто змусимо його конденсуватись. При цьому рідка фаза з'являється у вигляді малесеньких краплинок — туману. Утворення цих краплинок відбувається навколо центрів конденсації (пилинок, іонів). Якщо таких центрів конденсації немає, то пара може буди пересиченою, утворюється нестійка рівновага. Досить із числа молекул пари утворитись невеликій краплинці, як на ній пересичена пара почне конденсуватись.

Аналогічно центрами утворення газової фази в рідині є сторонні включення, а саме, пухирці повітря, пилинки тощо.

Якщо рідину очистити від таких центрів пароутворення, то вона буде зберігатись при тисках, менших за тиск насиченої пари при даній температурі. Її називають перегрітою рідиною.

Пересичена пара і перегріта рідина на практиці не стійкі, це так звані метастабільні стани. Рівновага в них легко порушується, і система бурхливо переходить в стійкий для даної температури стан.

Повернемося до ізотерм реального газу (9.2), рис. 82, 83. Стискування реального газу при незмінній температурі призводить до зменшення об'єму і збільшення тиску. Такий процес буде продовжуватись до певного значення тиску. Далі при незмінному тиску із зменшенням об'єму почнеться процес конденсації. Тобто відбувається фазовий перехід, при якому тиск і температура залишаються незмінними. На рис. 95 цьому фазовому переходу відповідає точка a з параметрами p_c , T_c . Якщо температура буде збільшуватись, то, як видно із рис. 83, тиск, при якому відбувається фазовий перехід, буде також збільшуватись. Ділянка ізотерми піднімається вгору і скорочується. На рис. 95 це буде відповідати тому, що точка a буде рухатись вгору по кривій фазового переходу. Цей процес буде продовжуватись до тих пір, поки не дістанемось критичної точки K . Якщо по ізотермам рухатись в зворотному напрямку, тобто збільшувати об'єм над рідиною, то почнеться процес випаровування. Для цього необхідно підводити теплоту випаровування, інакше ізотермічного процесу не буде. На ізотермі рис. 82 ділянки ab і fd відповідають вищезгаданим метастабільним станам пересиченої пари та перегрітої рідини.

12.3. ПЛАВЛЕННЯ І КРИСТАЛІЗАЦІЯ

Якщо до речовини, що знаходиться в кристалічному стані, щосекунди підводити одну і ту ж кількість теплоти, то її температура, як це показано на рис. 96а (крива 1) буде зростати. При деякій температурі T_m , незважаючи на те, що тепло підводиться, температура перестане збільшуватись. Одночасно спостерігається плавлення твердого тіла. Після того, як вся речовина розплавиться, тобто перейде в рідкий стан, температура знову почне підніматись.

Крива нагрівання аморфного тіла має дещо інший вигляд (рис. 96а) (крива 2). При рівномірному нагріванні аморфних речовин температура їх також збільшується. Але вони не мають певної температури, при якій відбувається плавлення. Цей процес відбувається не стрибком, а безперервно. Можна лише вказати інтервал температур, в межах якого речовина із твердого стану переходить в рідкий. Це пояснюється тим, що аморфні тіла в своїй будові мають ближній порядок і скоріше нагадують рідини, відрізняючись від них лише рухливістю молекул.

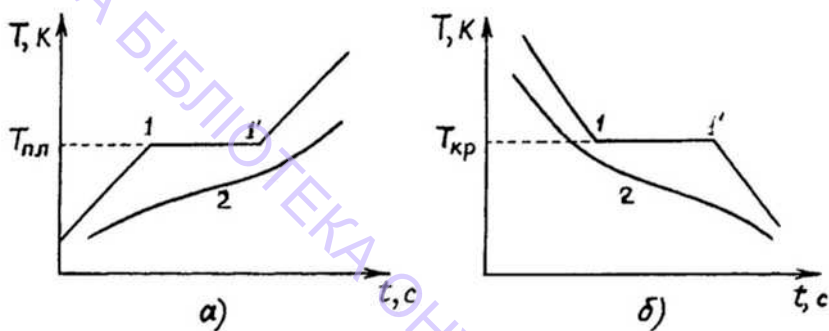


Рис. 96

Для фазового переходу твердої кристалічної речовини в рідку необхідно затратити деяку кількість теплоти, яку називають *теплотою плавлення*.

Питома теплота плавлення називається кількість теплоти, яку необхідно надати при температурі плавлення одиниці маси твердої речовини, щоб її розплавити.

При охолодженні рідини спостерігається зворотний процес (рис. 96б). Спочатку температура рідини зменшується, потім починається кристалізація, яка відбувається при незмінній температурі. Коли вся рідина повністю кристалізується, температура кристалу знову почне падати. Ділянка 1 Г відповідає двофазному стану речовини. Для даної речовини температура плавлення дорівнює температурі кристалізації.

Пояснити такий хід процесів плавлення і кристалізації з молекулярної точки зору можна таким чином: по мірі нагрівання

твердої речовини кінетична енергія молекул збільшується, але не достатньо, щоб розірвати зв'язки і зруйнувати кристалічну ґратку. Тому речовина продовжує залишатись в кристалічному стані. Коли кристал нагрівається до температури плавлення, кінетична енергія його молекул стає достатньою для руйнування кристалічної ґратки. Вся теплота тепер йде на виконання роботи по руйнуванню ґратки. Тому температура не змінюється до тих пір, поки не розплавиться весь кристал. Після цього тепло йде на збільшення кінетичної енергії рідкої речовини, і її температура починає збільшуватись.

Аналогічно пояснюється і характер процесу кристалізації при охолодженні рідкої кристалічної речовини. Виконуючи роботу по створенню кристалічної ґратки, молекулярні сили повертають у вигляді теплоти ту енергію, яка була витрачена на руйнування ґратки при плавленні. Тому, незважаючи на охолодження речовини, її температура залишається незмінною.

Для впорядкованого розташування молекул речовини при кристалізації необхідний якийсь певний час. Якщо рідину охолоджувати дуже швидко, то зростаючи при цьому в'язкість може перешкодити розміщенню молекул в певному порядку, і тоді замість кристалу може утворитись аморфна тверда речовина. Наявність в рідині готових кристаликів (зародків) створює умови і прискорює кристалізацію рідини, подібно до того, як наявність центрів конденсацій прискорює конденсацію пари. Тому, наприклад, при виробництві цукру в сироп засипають цукрову пудру і отримують кристалики цукру. Ретельно очищену від зародків рідину можна охолодити нижче, ніж температура кристалізації, щоб почався процес утворення кристаликів. Стан такої переохолодженої рідини є метастабільним.

Температура плавлення залежить від зовнішнього тиску. Для більшості речовин із збільшенням тиску температура дещо збільшується, але в незначній мірі.

Існують речовини, такі, наприклад, як лід, чавун, вісмут, сурма, в яких температура плавлення зменшується із збільшен-

ням тиску. Ці залежності між тиском і температурою зображені на рис. 97 відповідними кривими а) і б) і, фактично, є кривими фазових переходів.

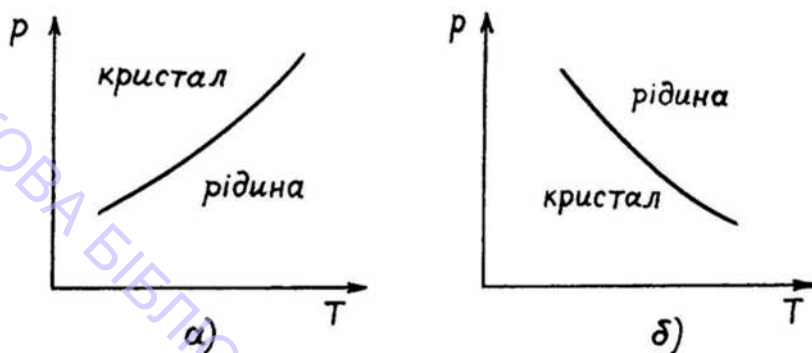


Рис. 97

Будь-яка точка на цих кривих визначає умови, при яких кристалічна і рідинна фази знаходяться в рівновазі.

Випаровування може відбуватись не лише з поверхні рідини, а і з поверхні твердого тіла. Цей процес називають *сублімацією*. Вона спостерігається в таких речовинах, як нафталін, камфора та інші. У більшості твердих тіл сублімація виражена дуже слабо, оскільки міцні зв'язки частинок в кристалах утруднюють відрив їх з поверхні. При сублімації, як і при випаровуванні, речовина охолоджується. Питома теплота сублімації дорівнює сумі питомих теплот плавлення і випаровування. Зворотній процес сублімації є кристалізація насиченої пари. Саме таким шляхом утворюються в атмосфері сніжинки.

Для процесу сублімації так само, як і для плавлення і випаровування, можна побудувати криву рівноваги твердого тіла і пари.

Як було показано в попередніх параграфах, дві фази речовини можуть знаходитись в рівновазі лише при певних значеннях температури і тиску. На діаграмах (p, T) розглянуті вище фазові переходи зображуються лініями, в кожній точці яких існує фазова рівновага.

Для кількісного опису всіх фазових переходів першого роду виведемо співвідношення між фізичними параметрами, якими характеризуються ці процеси. Для виводу формули розглянемо цикл Карно, в якому робочим тілом є рідина і її насичена пара, і з ними відбуваються фазові переходи — випаровування і конденсація. Нагрівник передає робочому тілу кількість теплоти Q_1 , при цьому відбувається фазовий перехід при сталій температурі T і тиску p (рис. 98) із стану 1 в стан 2. За рахунок теплоти Q_1 маса рідини m випаровується. Кількість теплоти, яка необхідна для випаровування, дорівнює $Q_1 = \lambda m$, де λ — питома теплота випаровування. Далі із стану 2 в нескінченно близький стан 3 пару переведемо адіабатно. Температура її зменшиться на dT , а тиск — на dp . Із стану 3 в стан 4 систему переведемо шляхом ізотермічного стискання, при цьому холодильнику віддамо теплоту Q_2 при температурі $T - dT$. При такому переході відбувається процес конденсації. Цикл закінчується адіабатним переходом із стану 4 в стан 1.

При ізотермічному переході 1, 2 зміна об'єму системи дорівнює $m(V_2 - V_1)$, де V_2 — питомий об'єм насиченої пари при температурі T , а V_1 — питомий об'єм рідини. Оскільки зміна тиску dp нескінченно мала, то фігуру 1234 можна розглядати як паралелограм з основою $m(V_2 - V_1)$ і висотою dp . Його площа дорівнює роботі за цикл (див. § 8.7):

$$dA = dQ = Q_1 - Q_2 = m(V_2 - V_1)dp, \quad (12.2)$$

а коефіцієнт корисної дії оборотного циклу Карно (12.3)

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{dT}{T} = \frac{(V_2 - V_1)dp}{\lambda}, \quad (12.3)$$

$$\frac{dp}{dT} = \frac{\lambda}{T(V_2 - V_1)}. \quad (12.4)$$

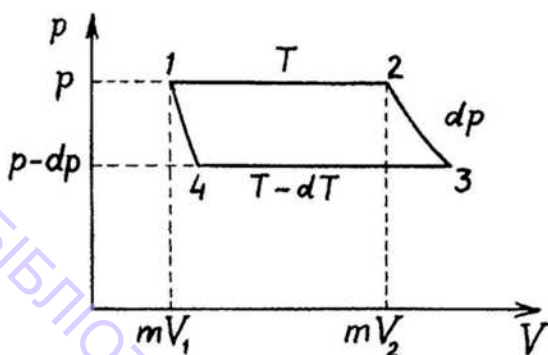


Рис. 98

Отримане рівняння називається рівнянням *Клапейрона — Клаузіуса*. Його можна застосовувати для будь-яких фазових переходів першого роду. Воно кількісно описує динамічну рівновагу між різними фазами речовини.

Залежність між тиском і температурою при фазових переходах можна зобразити графічно. Такий графік називають *діаграмою стану речовини*, або *діаграмою рівноваги фаз*, рис. 99.

Лінії діаграми є кривими фазової рівноваги. В кожній точці на відповідних лініях при заданих p і T відбувається фазовий перехід. На лінії OK в рівновазі знаходяться рідина і її насичена пара. Тут відбувається випаровування або конденсація. Точка K відповідає критичному стану речовини. На лінії OB в рівновазі знаходяться тверде тіло і рідина. А кожна точка відповідає плавленню або кристалізації. На лінії OA в рівновазі будуть тверде тіло і газ. Їм відповідає процес сублімації.

В точці O в рівновазі знаходяться всі три фази. Вона є потрійною точкою, наприклад, для води потрійна точка відповідає одночасному існуванню в рівновазі льоду, води і водяної пари при температурі $0,0075$ град. С і тиску $4,58$ мм рт. ст.

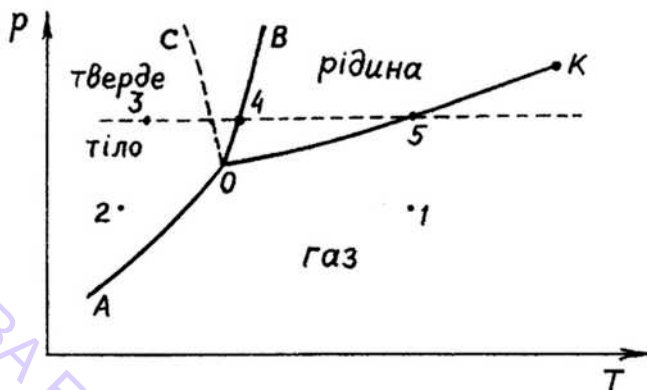


Рис. 99

Нахил фазових кривих визначається рівнянням (12.4). Так, знак похідної $\frac{dp}{dT}$, яка графічно визначає нахил фазових кривих, залежить від того, якими змінами питомого об'єму супроводжується фазовий перехід, що відбувається при поглинанні тепла. При випаровуванні твердого тіла чи рідини питомий об'єм завжди збільшується $V_2 > V_1$, і знак похідної $\frac{dp}{dT}$ буде додатним. Тобто із збільшенням тиску температура збільшується. При плавленні питомий об'єм, як правило, також збільшується, тому $\frac{dp}{dT} > 0$. Але у деяких речовин, до яких відноситься і лід, питомий об'єм рідкої фази менший, ніж твердї $V_2 < V_1$. В цьому випадку $\frac{dp}{dT} < 0$, і збільшення тиску призводить до зменшення температури плавлення (рис. 97б). На діаграмі стану рис. 99 це показано пунктирною кривою OC.

Діаграмою рівноваги фаз зручно користуватись, щоб визначити, в якому стані знаходиться речовина при заданих умовах (p , T). Наприклад, при умовах, що відповідають точці 1, речовина знаходиться в газоподібному стані, при умовах, що відповідають точці 2, — в твердому стані. На діаграмі зручно зо-

бражати процеси зміни стану речовини, наприклад, ізобарне ($p = \text{const}$) нагрівання речовини, що знаходиться в твердому стані (точка 3) зображається пунктирною лінією, яка паралельна осі абсцис. При нагріванні температура твердого тіла збільшується. В точці 4 відбувається плавлення, тверде тіло переходить в рідкий стан. Потім збільшується температура рідини. В точці 5 рідина перетворюється в газ, і далі температура газу збільшується.

Фазові перетворення є яскравим прикладом закону діалектики про перехід кількісних змін в якісні. Так, поступове підвищення температури твердого тіла призводить до поступового підвищення кінетичної енергії молекул, але тіло продовжує залишатись в твердому стані. На певній стадії нагрівання відбувається стрибкоподібний процес. При певній температурі тіло плавиться, переходячи в якісно новий стан.

КОНТРОЛЬНІ ПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ

1. Що таке фаза речовини?
2. Чим можна пояснити, що одна і та сама речовина може знаходитись в різних фазах?
3. Які фазові переходи ви знаєте?
4. Яку характерну особливість мають фазові переходи?
5. Яка умова співвідношення речовини одночасно в двох фазах?
6. Що таке фазова діаграма? Намалюйте схематично фазову діаграму для якоїсь речовини.
7. Що таке потрійна точка?
8. Намалюйте фазову криву для процесу переходу рідини в газ, а також твердого тіла в рідину.
9. Що таке сублимація?
10. Яким рівнянням описуються фазові переходи першого роду?
11. На діаграмі фазових переходів покажіть і поясніть процес ізобарного нагрівання.
12. Від чого залежить нахил фазових кривих на діаграмі стану?

**Список літератури,
що використовувалася
в навчальному посібнику**

1. Грабовский Р. И. Курс физики: Учебное пособие для вузов. — 5-е изд., перераб. и доп. — М.: Высшая школа, 1980. - 608 с.
2. Чулановская М. В. Курс физики для биологов: Учебник. Часть 1. — Л.: Изд-во ЛГУ, 1972. — 248 с.
3. Савельев И. В. Курс общей физики: Учебное пособие для вузов. Т. 1. — 4-е изд., перераб. — М.: Наука, 1980. — 512 с.
4. Дутчак Я. Й., Якібчук П. М. Молекулярна фізика. Навчальний посібник. — К.: НМК ВО, 1991. — 348 с.
5. Чолпан П. П. Фізика: Підручник для студентів природничих факультетів. — К.: Вища школа, 2003. — 568 с.
6. Чалий О.В. та ін. Медична і біологічна фізика: Підручник для студентів вищих медичних закладів. — К.: Книга плюс, 2004. - 760 с.
7. Ремизов А. Н., Максина А. П, Потапенко А. Я. Медицинская и биологическая физика: Учебник для медицинских вузов. — М.: Дрофа, 2003. — 560 с.
8. Большова К. М., Пустовалов Г. Е. Краткий курс общей физики. Часть 1: Курс лекций. — М.: Изд. МГУ, 1983. — 128 с.
9. Гуло Д. Д., Пустовалов Г. Е. Краткий курс физики. Часть 2: Курс лекций. — М.: Изд. МГУ, 1983. — 168 с.
10. Суцинский М. М. Курс физики: Учебное пособие для вузов. Т. 1. — М.: Наука, 1983. — 352 с.
11. Гершензон Е. М. и др. Курс общей физики, молекулярная физика: Учебное пособие для вузов. — М.: Просвещение, 1982. - 208 с.

ЗМІСТ

Передмова	3
-----------------	---

Вступ

1. Предмет фізики	6
2. Математична символіка, поняття та операції над фізичними величинами	8

МЕХАНІКА	15
----------------	----

Розділ 1. Кінематика

і. і. Механічний рух. Система відліку	16
1.2. Кінематичне рівняння руху, траєкторія, переміщення, шлях	18
1.3. Швидкість	21
1.4. Прискорення	22
1.5. Кінематика обертального руху	29
1.6. Приклади розв'язування задач в кінематиці	33
Контрольні питання і завдання	36

Розділ 2. Динаміка

2.1. Загальні поняття про динаміку	38
2.2. Перший закон Ньютона	39
2.3. Другий закон Ньютона	41
2.4. Третій закон Ньютона	46
2.5. Види сил та їх властивості	49
2.6. Динаміка системи матеріальних точок	62
2.7. Динаміка руху матеріальної точки по колу	65
2.8. Неінерціальні системи	68
Контрольні питання і завдання	83

Розділ 3. Робота і енергія

3.1. Робота і потужність.....	85
3.2. Робота різних видів сил	88
3.3. Енергія.....	90
3.4. Закон зміни та збереження механічної енергії.....	94
<i>Контрольні питання і завдання.....</i>	<i>97</i>

Розділ 4. Динаміка твердого тіла

4.1. Рух абсолютно твердого тіла	98
4.2. Момент сили та момент імпульсу. Рівняння моментів	99
4.3. Обертання твердого тіла навколо осі	103
4.4. Закон збереження моменту імпульсу	107
4.5. Кінетична енергія та робота при обертальному русі ...	109
<i>Контрольні питання і завдання.....</i>	<i>112</i>

Розділ 5. Динаміка рідин і газів

5.1. Загальні поняття для опису руху рідин та газів.....	113
5.2. Основні рівняння динаміки руху ідеальної рідини	115
5.3. Гідродинаміка реальних рідин	120
<i>Контрольні питання і завдання.....</i>	<i>126</i>

Розділ 6. Коливання і хвилі

6.1. Загальні відомості про коливання	128
6.2. Гармонічні коливання.....	129
6.3. Складання гармонічних коливань	134
6.4. Вимушені коливання	136
6.5. Хвильові процеси	139
6.6. Інтерференція та дифракція хвиль.....	144
6.7. Звукові, ультра- та інфразвукові хвилі.....	147
<i>Контрольні питання і завдання.....</i>	<i>151</i>

МОЛЕКУЛЯРНА ФІЗИКА	153
--------------------------	-----

Розділ 7. Молекулярно-кінетична теорія

7.1. Основні положення молекулярно-кінетичної теорії	155
7.2. Основні рівняння молекулярно-кінетичної теорії газів	160
7.3. Газові закони	166
7.4. Розподіл молекул за швидкостями	170
7.5. Барометрична формула. Розподіл Больцмана	176
7.6. Явища переносу в газах	179
<i>Контрольні питання і завдання</i>	189

Розділ 8. Термодинаміка

8.1. Метод термодинаміки	191
8.2. Внутрішня енергія газів	193
8.3. Робота термодинамічної системи	196
8.4. Кількість теплоти. Теплоємність	199
8.5. Перший закон термодинаміки	204
8.6. Застосування першого закону термодинаміки до ізопроеесів	206
8.7. Теплові двигуни. Цикл Карно	209
8.8. Другий закон термодинаміки	214
8.9. Ентропія	215
8.10.	
Термодинамічні потенціали	224
8.11. Поняття про термодинаміку відкритих систем ...	230
<i>Контрольні питання і завдання</i>	232

Розділ 9. Реальний газ

9.1. Рівняння стану реального газу	234
9.2. ізотерми реального газу. Критичний стан	237
<i>Контрольні питання і завдання</i>	240

Розділ 10. Рідини

10.1. Будова і властивості рідин	242
10.2. Явища переносу в рідинах.....	246
10.3. Поверхневі явища в рідинах	251
<i>Контрольні питання і завдання</i>	260

Розділ 11. Тверді тіла

11.1. Будова кристалічних твердих тіл	262
11.2. Теплові властивості кристалічних твердих тіл	267
<i>Контрольні питання і завдання</i>	274

Розділ 12. Фазові переходи

12.1. Фази речовини.....	275
12.2. Випаровування і конденсація	277
12.3. Плавлення і кристалізація	279
12.4. Рівняння Клапейрона — Клаузіуса. Діаграма стану речовини	283
<i>Контрольні питання і завдання</i>	286

<i>Список літератури, що використовувалася в навчальному посібнику</i>	287
---	-----

Навчальне видання

КОПІЙКА Кузьма Михайлович

КОПІЙКА Олександр Кузьмич

КУРС ЗАГАЛЬНОЇ ФІЗИКИ ДЛЯ БІОЛОГІВ

Навчальний посібник

у трьох частинах

Частина I

МЕХАНІКА

I МОЛЕКУЛЯРНА ФІЗИКА

Завідувачка редакції *Т. М. Забанова*

Редактор *Н. Я. Рихтік*

Технічний редактор *М. М. Бушин*

Дизайнер обкладинки *А. О. Ємельянов*

Коректор *О. Г. Дайбова*

Здано у виробництво 03.11.2010. Підписано до друку 08.12.2010.
Формат 60х84/16. Папір офсетний. Гарнітура «Newton». Друк офсетний.
Ум. друк. арк. 17,21. Тираж 300 прим. Вид. № 186. Зам. № 800.

Видавництво і друкарня «Астропринт»
65091, м. Одеса, пул. Разумовська, 21
Тел.: (0482) 37-07-95, 37-14-25, 33-07-17, (048) 7-855-855
www.astroprint.odessa.ua

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 1373 від 28.05.2003 р.

Копійка К. М., Копійка О. К.

**К 65 Курс загальної фізики для біологів : [навчальний посібник] : у 3-х ч.
Частина 1 : Механіка і молекулярна фізика / К. М. Копійка, О. К. Копійка.
— Одеса : Астропринт, 2010. — 296 с.**

ISBN 978-966-190-435-3

Курс загальної фізики для біологів в трьох частинах, побудований на лекційному матеріалі, який протягом багатьох років викладався студентам на біологічному факультеті Одеського національного університету імені І. І. Мечникова.

У першій частині посібника викладені фізичні основи механіки і молекулярної фізики. Приводиться огляд фізичних методів, які мають велике практичне значення для сучасних біологічних досліджень.

Навчальний посібник призначено для студентів біологічного факультету класичних університетів. Може бути корисним для студентів медичних вищих навчальних закладів та інших природничих спеціальностей.

ББК 22.36р30я73:28
УДК 539.1:57(075.8)