УДК 517.925

Е. С. Владова
Одесский национальный университет имени И. И. Мечникова

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ РЕШЕНИЙ ЦИКЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПРАВИЛЬНО ИЗМЕНЯЮЩИМИСЯ НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ

Владова О. С. Асимптотичні зображення розв'язків циклічних систем диференціальних рівнянь з правильно мінливими нелінійностями. Встановлюються в особливих випадках необхідні і достатні умови існування, а також асимптотичні при $t \uparrow \omega$ ($\omega \le +\infty$) зображення одного класу розв'язків циклічних систем диференціальних рівнянь з правильно мінливими нелінійностями.
Ключові слова: диференціальні рівняння з нелінійностями, асимптотичне зображення.

Владова Е. С. Асимптотические представления решений циклических систем дифференциальных уравнений с правильно изменяющимися нелинейностями. Устанавливаются в особых случаях необходимые и достаточные условия существования, а также асимптотические при $t \uparrow \omega$ ($\omega \le +\infty$) представления одного класса решений циклических систем дифференциальных уравнений с правильно изменяющимися нелинейностями.
Ключевые слова: дифференциальные уравнения с нелинейностями, асимптотическое представление.

Vladova E. S. Asymptotic representations of cyclic differential equations solutions with correct changing nonlinearities. The necessary and sufficient conditions for the existence of one class of solutions of cyclic differential equations' systems in specific cases are established. Also the asymptotic representation when $t \uparrow \omega$ ($\omega \le +\infty$) for one class of solutions of cyclic differential equations' systems with correctly changing nonlinearities is established.
Key words: differential equations with nonlinearities, asymptotic representation.

Введение. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$y_i' = \alpha_i p_i(t)\varphi_{i+1}(y_{i+1}) \qquad (i = \overline{1,n})^1, \tag{1}$$

в которой $\alpha_i \in \{-1, 1\}$ $(i = \overline{1,n})$, $p_i : [a, \omega[\to]0, +\infty[$ $(i = \overline{1,n})$ — непрерывные функции, $-\infty < a < \omega \le +\infty^2$, $\varphi_i : \Delta(Y_i^0) \to]0; +\infty[$ $(i = \overline{1,n})$ — непрерывно дифференцируемые функции, удовлетворяющие условиям

$$\lim_{\substack{y_i \to Y_i^0 \\ y_i \in \Delta(Y_i^0)}} \frac{y_i \varphi_i'(y_i)}{\varphi_i(y_i)} = \sigma_i \quad (i = \overline{1,n}), \quad \prod_{i=1}^{n} \sigma_i \neq 1, \tag{2}$$

[1] Здесь и далее для всех функций и параметров с индексом $n+1$ будем полагать их взаимнооднозначное соответствие с соответствующими величинами с индексом 1.

[2] При $\omega = +\infty$ считаем, что $a > 0$.

где Y_i^0 $(i \in \{1, \dots, n\})$ равно либо 0, либо $\pm\infty$, $\Delta(Y_i^0)$ $(i \in \{1, \dots, n\})$ — односторонняя окрестность Y_i^0.

В силу условий (2) функции φ_i $(i = \overline{1, n})$ являются правильно меняющимися при $y_i \to Y_i^0$ порядков σ_i и поэтому (см. [1]) представимы в виде

$$\varphi_i(y_i) = |y_i|^{\sigma_i} \theta_i(y_i) \quad (i = \overline{1, n}), \tag{3}$$

где θ_i $(i = \overline{1, n})$ — медленно меняющиеся при $y_i \to Y_i^0$ функции. Согласно определению и свойствам медленно меняющихся функций, а также (2)

$$\lim_{y_i \to Y_i^0} \frac{\theta_i(\lambda y_i)}{\theta_i(y_i)} = 1 \text{ для любого } \lambda > 0, \; \lim_{y_i \to Y_i^0} \frac{y_i \theta_i'(y_i)}{\theta_i(y_i)} = 0 \quad (i = \overline{1, n}), \tag{4}$$

причем первые предельные соотношения выполняются равномерно по λ на любом отрезке $[c, d] \in]0, +\infty[$.

В случае, когда $\theta_i(y_i) \equiv 1$ $(i = \overline{1, n})$, система (1) носит название системы типа Эмдена–Фаулера. При $n = 2$ асимптотическое поведение неколеблющихся решений системы типа Эмдена–Фаулера детально исследовано в [2, 3, 4], [5, 6].

Определение 1. Р*ешение* $(y_i)_{i=1}^n$ *системы дифференциальных уравнений* (1) *называется* $\mathcal{P}_\omega(\Lambda_1, \dots, \Lambda_{n-1})$*-решением, если оно определено на промежутке* $[t_0, \omega[\subset [a, \omega[$ *и удовлетворяет следующим условиям:*

$$\begin{gathered} y_i(t) \in \Delta(Y_i^0) \quad \text{\textit{при}} \quad t \in [t_0, \omega[, \quad \lim_{t \uparrow \omega} y_i(t) = Y_i^0, \\ \lim_{t \uparrow \omega} \frac{y_i(t) y_{i+1}'(t)}{y_i'(t) y_{i+1}(t)} = \Lambda_i \quad (i = \overline{1, n-1}). \end{gathered} \tag{5}$$

Целью работы является установление необходимых и достаточных условий существования у системы уравнений (1) $\mathcal{P}_\omega(\Lambda_1, \dots, \Lambda_{n-1})$-решений, а также асимптотических при $t \uparrow \omega$ формул для таких решений в особом случае, когда Λ_i $(i = \overline{1, n-1})$ — вещественные постоянные, среди которых имеются равные нулю.

Замечание 1. *Обратим внимание на то, что определение* 1 *не дает прямой связи между первой и n-ой компонентами* $\mathcal{P}_\omega(\Lambda_1, \dots, \Lambda_{n-1})$*-решения, которые фигурируют в n-ом уравнении системы. Чтобы установить эту связь, введем функции*

$$\lambda_i(t) = \frac{y_i(t) y_{i+1}'(t)}{y_i'(t) y_{i+1}(t)} \quad (i = \overline{1, n}). \tag{6}$$

При этом заметим, что

$$\lambda_n(t) = \frac{y_n(t) y_1'(t)}{y_n'(t) y_1(t)} = \prod_{i=1}^{n-1} \frac{y_i'(t) y_{i+1}(t)}{y_i(t) y_{i+1}'(t)} = \frac{1}{\lambda_1(t) \dots \lambda_{n-1}(t)}. \tag{7}$$

В силу условий (5) $\lim\limits_{t \uparrow \omega} \lambda_i(t) = \Lambda_i$ $(i = \overline{1, n-1})$. *Поэтому при наличии среди* Λ_i $(i = \overline{1, n-1})$ *равных нулю из* (7) *следует, что*

$$\Lambda_n = \lim_{t \uparrow \omega} \lambda_n(t) = \pm\infty.$$

Отсюда, в частности, ясно, что случай, когда среди Λ_i $(i = 1, \dots, n-1)$ *имеется одно, равное* $\pm\infty$, *а остальные равны отличным от нуля постоянным, путем циклического переобозначения переменных, функций и постоянных сводится к рассматриваемому в данной работе. Например, если* $\Lambda_l = \pm\infty$ $(l \in \in \{1, \dots, n-1\})$, *то индексы переобозначаются следующим образом:*

$$l \longrightarrow n, \quad l+1 \longrightarrow 1, \dots, \quad n \longrightarrow n-l, \quad 1 \longrightarrow n-l+1, \quad \dots, \quad l-1 \longrightarrow n-1.$$

При этом будет $\Lambda_i = 0$ *при* $i = n-l$.

Введем теперь вспомогательные обозначения.

Прежде всего, полагая

$$\mu_i = \begin{cases} 1, & \text{если } Y_i^0 = +\infty, \\ & \text{либо } Y_i^0 = 0 \text{ и } \Delta(Y_i^0) - \text{правая окрестность } 0, \\ -1, & \text{если } Y_i^0 = -\infty, \\ & \text{либо } Y_i^0 = 0 \text{ и } \Delta(Y_i^0) - \text{левая окрестность } 0, \end{cases}$$

заметим, что числа μ_i $(i = \overline{1,n})$ определяют знаки компонент $\mathcal{P}_\omega(\Lambda_1, \dots, \Lambda_{n-1})$-решения в некоторой левой окрестности ω.

Далее, введем множества

$$\mathfrak{I} = \{i \in \{1, \dots, n-1\} : 1 - \Lambda_i\sigma_{i+1} \neq 1\}, \quad \bar{\mathfrak{I}} = \{1, \dots, n-1\} \setminus \mathfrak{I}$$

и, учитывая, что среди Λ_i $(i = \overline{1, n-1})$ имеются равные нулю, число

$$m = \max\{i \in \mathfrak{I} : \Lambda_i = 0\}.$$

Считая, что $\prod\limits_{k=m+1}^{n-1} \Lambda_k \neq \prod\limits_{k=1}^{m+1} \sigma_k$, введем вспомогательные функции I_i, Q_i $(i = = \overline{1,n})$ и отличные от нуля постоянные β_i $(i = \overline{1,n})$, полагая

$$I_i(t) = \begin{cases} \int\limits_{A_i}^{t} p_i(\tau)\, d\tau & \text{при} \quad i \in \mathfrak{I}, \\ \int\limits_{A_i}^{t} p_i(\tau) I_{i+1}(\tau)\, d\tau & \text{при} \quad i \in \bar{\mathfrak{I}}, \\ \int\limits_{A_n}^{t} p_n(\tau) q_{m+1}(\tau)\, d\tau & \text{при} \quad i = n, \end{cases} \qquad \beta_i = \begin{cases} 1 - \Lambda_i\sigma_{i+1}, & \text{если} \quad i \in \mathfrak{I}, \\ \beta_{i+1}\Lambda_i, & \text{если} \quad i \in \bar{\mathfrak{I}}, \\ 1 - \dfrac{\prod\limits_{k=1}^{m+1} \sigma_k}{\prod\limits_{k=m+1}^{n-1} \Lambda_k} & \text{при} \quad i = n, \end{cases}$$

$$Q_i(t) = \begin{cases} \alpha_i \beta_i I_i(t) & \text{при} \quad i \in \mathfrak{I} \cup \{n\}, \\ \frac{\alpha_i \beta_i I_i(t)}{I_{i+1}(t)} & \text{при} \quad i \in \bar{\mathfrak{I}}, \end{cases}$$

где каждый из пределов интегрирования $A_i \in \{\omega, a\}$ $(i \in \{1, \dots, n-1\})$, $A_n \in \in \{\omega, b\}$ $(b \in [a, \omega[)$ и выбран так, чтобы соответствующий ему интеграл I_i стремился либо к нулю, либо к ∞ при $t \uparrow \omega$,

$$q_{m+1}(t) = \theta_1 \left(\mu_1 |I_1(t)|^{\frac{1}{\beta_1}}\right) |Q_m(t)|^{\prod\limits_{k=1}^{m} \sigma_k} \prod_{k=1}^{m-1} \left| Q_k(t) \theta_{k+1} \left(\mu_{k+1} |I_{k+1}(t)|^{\frac{1}{\beta_{k+1}}}\right) \right|^{\prod\limits_{i=1}^{k} \sigma_i}.$$

Кроме того, введем числа

$$A_i^* = \begin{cases} \ \ 1, & \text{если } A_i = a, \\ -1, & \text{если } A_i = \omega \end{cases} \quad (i = \overline{1, n-1}), \ \ A_n^* = \begin{cases} \ \ 1, & \text{если } A_n = b, \\ -1, & \text{если } A_n = \omega, \end{cases}$$

позволяющие определять знаки функций I_i $(i = \overline{1, n-1})$ на промежутке $]a, \omega[$ и функции I_n на промежутке $]b, \omega[$, а также следующее определение.

Определение 2. *Будем говорить, что функция φ_k $(k \in \{1, \dots, n\})$ удовлетворяет условию* **S**, *если для любой непрерывно дифференцируемой функции $l : \Delta(Y_k^0) \longrightarrow]0, +\infty[$ такой, что*

$$\lim_{\substack{z \to Y_k^0 \\ z \in \Delta(Y_k^0)}} \frac{z\, l'(z)}{l(z)} = 0,$$

функция θ_k допускает асимптотическое соотношение

$$\theta_k(zl(z)) = \theta(z)[1 + o(1)] \qquad \textit{при} \quad z \to Y_k^0 \quad (z \in \Delta(Y_k^0))$$

Условию **S** заведомо удовлетворяют функция φ_k, для которой функция θ_k имеет конечный предел при $y_k \to Y_k^0$, а также функции вида

$$\varphi_k(y_k) = |y_k|^{\sigma_k} |\ln y_k|^{\gamma_1}, \quad \varphi_k(y_k) = |y_k|^{\sigma_k} |\ln y_k|^{\gamma_1} |\ln |\ln y_k||^{\gamma_2},$$

где $\gamma_1, \gamma_2 \neq 0$, и многие другие.

Замечание 2. *Если функция φ_k $(k \in \{1, \dots, n\})$ удовлетворяет условию* **S**, *а функция $y_k : [t_0, \omega[\longrightarrow \Delta(Y_k^0)$ непрерывно дифференцируемая и такая, что*

$$\lim_{t \uparrow \omega} y_k(t) = Y_k^0, \qquad \frac{y_k'(t)}{y_k(t)} = \frac{\xi'(t)}{\xi(t)}\, [r + o(1)] \quad \textit{при} \quad t \uparrow \omega,$$

где r — отличная от нуля вещественная постоянная, ξ — непрерывно дифференцируемая в некоторой левой окрестности ω вещественная функция, для которой $\xi'(t) \neq 0$, то

$$\theta_k(y_k(t)) = \theta_k\left(\mu_k |\xi(t)|^r\right) [1 + o(1)] \quad \textit{при} \quad t \uparrow \omega,$$

поскольку в данном случае

$$y_k(t) = z(t) l(z(t)), \quad \textit{где} \quad z(t) = \mu_k |\xi(t)|^r,$$

и

$$\lim_{\substack{z \to Y_0 \\ z \in \Delta_{Y_0}}} \frac{z\, l'(z)}{l(z)} = \lim_{t \uparrow \omega} \frac{z(t)\, l'(z(t))}{l(z(t))} = \lim_{t \uparrow \omega} \frac{z(t) \left(\frac{y_k(t)}{z(t)}\right)'}{\left(\frac{y_k(t)}{z(t)}\right) z'(t)} = \lim_{t \uparrow \omega} \left[\frac{\xi(t) y_k'(t)}{r \xi'(t) y_k(t)} - 1\right] = 0.$$

Основные результаты.

Теорема 1. *Пусть* $\Lambda_i \in \mathbb{R}$ $(i=\overline{1,n-1})$, *среди них имеются равные нулю,* $m=\max\{i \in \mathfrak{I} : \Lambda_i = 0\} < n-1$. *Пусть, кроме того, функции* φ_k $(k=\overline{1,m})$ *удовлетворяют условию* $\mathbf{S}$ *и* $\prod\limits_{k=1}^{m+1} \sigma_k \neq \prod\limits_{k=m+1}^{n-1} \Lambda_k$. *Тогда для существования у системы дифференциальных уравнений* (1) $\mathcal{P}_\omega(\Lambda_1,\dots,\Lambda_{n-1})$*-решений необходимо, а если алгебраическое уравнение*

$$(1+\lambda)\prod_{j=m+1}^{n-1}(b_j+\lambda) = \prod_{j=1}^{n}\sigma_j \prod_{j=m+1}^{n-1} b_j, \tag{8}$$

где

$$b_j = \left(\prod_{i=j}^{n-1}\Lambda_i\right)^{-1} \qquad (j=\overline{m+1,n-1}),$$

не имеет корней с нулевой действительной частью, то и достаточно, чтобы

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{I_i(t)I'_{i+1}(t)}{I'_i(t)I_{i+1}(t)} = \Lambda_i\frac{\beta_{i+1}}{\beta_i} \quad (i=\overline{1,n-1}) \tag{9}$$

и для каждого $i \in \{1,\dots,n\}$ *выполнялись знаковые условия*

$$A_i^*\beta_i > 0 \quad \text{при} \quad Y_i^0 = \pm\infty, \quad A_i^*\beta_i < 0 \quad \text{при} \quad Y_i^0 = 0, \tag{10}$$

$$\operatorname{sign}[\alpha_i A_i^*\beta_i] = \mu_i. \tag{11}$$

Более того, компоненты каждого такого решения допускают при $t\uparrow\omega$ *асимптотические представления*

$$\frac{y_i(t)}{\varphi_{i+1}(y_{i+1}(t))} = Q_i(t)[1+o(1)] \quad (i=\overline{1,n-1}), \tag{12}$$

$$\frac{y_n(t)}{[\varphi_{m+1}(y_{m+1}(t))]^{\prod_{i=1}^{m}\sigma_i}} = Q_n(t)[1+o(1)], \tag{13}$$

причем существует целое k*-параметрическое семейство таких решений в случае, когда среди чисел*

$$\gamma_i = \begin{cases} \beta_i A_i^* & \text{при} \quad i \in \mathfrak{I}\setminus\{m+1,\dots,n-1\}, \\ \beta_i A_i^* A_{i+1}^* & \text{при} \quad i \in \tilde{\mathfrak{I}}\setminus\{m+1,\dots,n-1\}, \\ A_n^*\left(\dfrac{\prod_{k=1}^{m+1}\sigma_k}{\prod_{k=m+1}^{n-1}\Lambda_k} - 1\right)\operatorname{Re}\lambda_{i-m}^0 & \text{при} \quad i \in \{m+1,\dots,n\}, \end{cases} \tag{14}$$

где λ_j^0 $(j=\overline{1,n-m})$ — *корни (с учетом кратных) алгебраического уравнения* (8), *имеется* k *положительных.*

Замечание 3. *Алгебраическое уравнение* (2.1) *заведомо не имеет корней с нулевой действительной частью, если* $\prod_{k=1}^{n}|\sigma_k|<1$.

Доказательство теоремы. *Необходимость.* Пусть $y_i:[t_0,\omega[\to\Delta(Y_i^0)$ $(i=\overline{1,n})$ — произвольное $\mathcal{P}_\omega(\Lambda_1,\dots,\Lambda_{n-1})$–решение системы дифференциальных уравнений (1). Тогда в силу (1)

$$\frac{y_i'(t)}{\varphi_{i+1}(y_{i+1}(t))}=\alpha_i p_i(t)\quad(i=\overline{1,n})\quad\text{при}\quad t\in[t_0,\omega[.\tag{15}$$

При $i\in\mathfrak{I}$, интегрируя (15) на промежутке от B_i до t, где $B_i=\omega$, если $A_i=\omega$, и $B_i=t_0$, если $A_i=a$, получим

$$\int_{B_i}^{t}\frac{y_i'(\tau)d\tau}{\varphi_{i+1}(y_{i+1}(\tau))}=\alpha_i I_i(t)[1+o(1)]\quad\text{при}\quad t\uparrow\omega.\tag{16}$$

В силу правила Лопиталя

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\frac{y_i(t)}{\varphi_{i+1}(y_{i+1}(t))}}{\int_{B_i}^{t}\frac{y_i'(\tau)d\tau}{\varphi_{i+1}(y_{i+1}(\tau))}}=\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\frac{y_i'(t)}{\varphi_{i+1}(y_{i+1}(t))}-\frac{y_i(t)\varphi_{i+1}'(y_{i+1}(t))y_{i+1}'(t)}{\varphi_{i+1}^2(y_{i+1}(t))}}{\frac{y_i'(t)}{\varphi_{i+1}(y_{i+1}(t))}}=$$

$$=1-\lim_{t\uparrow\omega}\frac{y_{i+1}(t)\varphi_{i+1}'(y_{i+1}(t))}{\varphi_{i+1}(y_{i+1}(t))}\lim_{t\uparrow\omega}\frac{y_i(t)y_{i+1}'(t)}{y_i'(t)y_{i+1}(t)}=1-\Lambda_i\sigma_{i+1}=\beta_i\neq0$$

и поэтому ввиду (16) имеем

$$\frac{y_i(t)}{\varphi_{i+1}(y_{i+1}(t))}=\alpha_i\beta_i I_i(t)[1+o(1)]\quad\text{при}\quad t\uparrow\omega.\tag{17}$$

Следовательно, при $i\in\mathfrak{I}$ соблюдается асимптотическое представление (12) и ввиду (15) и (17)

$$\frac{y_i'(t)}{y_i(t)}=\frac{I_i'(t)}{\beta_i I_i(t)}[1+o(1)]\quad\text{при}\quad t\uparrow\omega.\tag{18}$$

Далее, учитывая, что $m\in\mathfrak{I}$, последовательно, начиная с наибольшего $i\in\bar{\mathfrak{I}}$, которое меньше m, если такие существуют, рассмотрим соотношения (15) при $i\in\bar{\mathfrak{I}}\setminus\{m+1,\dots,n-1\}$, считая, что при больших значениях $i\le m$ соблюдаются соотношения (18). Умножая (15) на $I_{i+1}(t)$ и интегрируя на промежутке от B_i до t, где B_i выбираются таким же образом, как и выше, получим

$$\int_{B_i}^{t}\frac{y_i'(\tau)I_{i+1}(\tau)d\tau}{\varphi_{i+1}(y_{i+1}(\tau))}=\alpha_i I_i(t)[1+o(1)]\qquad\text{при}\quad t\uparrow\omega.\tag{19}$$

В силу правила Лопиталя с использованием определения $P_\omega(\Lambda_1,\dots,\Lambda_{n-1})$- решения и (18) находим

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\frac{y_i(t)I_{i+1}(t)}{\varphi_{i+1}(y_{i+1}(t))}}{\int_{A_i}^{t}\frac{y_i'(\tau)I_{i+1}(\tau)d\tau}{\varphi_{i+1}(y_{i+1}(\tau))}}=$$

$$=\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\frac{y_i'(t)I_{i+1}(t)}{\varphi_{i+1}(y_{i+1}(t))}+\frac{y_i(t)I_{i+1}'(t)}{\varphi_{i+1}(y_{i+1}(t))}-\frac{y_i(t)I_{i+1}(t)\varphi_{i+1}'(y_{i+1}(t))y_{i+1}'(t)}{\varphi_{i+1}^2(y_{i+1}(t))}}{\frac{y_i'(t)I_{i+1}(t)}{\varphi_{i+1}(y_{i+1}(t))}}=$$

$$= 1 + \lim_{t\uparrow\omega} \frac{y_i(t) I'_{i+1}(t)}{y'_i(t) I_{i+1}(t)} - \lim_{t\uparrow\omega} \frac{y_{i+1}(t)\varphi'_{i+1}(y_{i+1}(t))}{\varphi_{i+1}(y_{i+1}(t))} \lim_{t\uparrow\omega} \frac{y_i(t) y'_{i+1}(t)}{y'_i(t) y_{i+1}(t)} = 1 - \Lambda_i \sigma_{i+1} +$$

$$+ \beta_{i+1} \lim_{t\uparrow\omega} \frac{y_i(t) y'_{i+1}(t)}{y'_i(t) y_{i+1}(t)} = \beta_{i+1} \lim_{t\uparrow\omega} \left[\frac{y_i(t) y'_{i+1}(t)}{y'_i(t) y_{i+1}(t)} \right] = \beta_{i+1}\Lambda_i = \beta_i.$$

Отсюда с учетом (19) следует, что

$$\frac{y_i(t)}{\varphi_i(y_{i+1}(t))} = \frac{\alpha_i \beta_i I_i(t)}{I_{i+1}(t)} [1 + o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega$$

(т. е. справедливо асимптотическое представление(12)), и поэтому ввиду (15) соблюдается асимптотическое соотношение (18). Значит, при всех $i \in \bar{\mathfrak{I}} \setminus \{m+ +1, \ldots, n-1\}$ имеют место асимптотические соотношения (12) и (18).

Поскольку при всех $i \in \{1, \ldots, m\}$ функции φ_i удовлетворяют условию $\mathbf{S}$ и имеют место асимптотические соотношения (18), то ввиду замечания 1.2

$$\varphi_i(y_i(t)) = |y_i(t)|^{\sigma_i} \theta_i \left(\mu_i |I_i(t)|^{\frac{1}{\beta_i}} \right) [1 + o(1)] \quad (i = \overline{1, m}) \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega.$$

Учитывая эти соотношения и установленные при $i = \overline{1, m}$ асимптотические соотношения (12), находим, что

$$\varphi_1(y_1(t)) = |y_1(t)|^{\sigma_1} \theta_1 \left(\mu_1 |I_1(t)|^{\frac{1}{\beta_1}} \right) [1 + o(1)] =$$

$$= \theta_1 \left(\mu_1 |I_1(t)|^{\frac{1}{\beta_1}} \right) \left| |y_2(t)|^{\sigma_2} Q_1(t) \theta_2 \left(\mu_2 |I_2(t)|^{\frac{1}{\beta_2}} \right) \right|^{\sigma_1} [1 + o(1)] =$$

$$= \theta_1 \left(\mu_1 |I_1(t)|^{\frac{1}{\beta_1}} \right) \left| Q_1(t) \theta_2 \left(\mu_2 |I_2(t)|^{\frac{1}{\beta_2}} \right) \right|^{\sigma_1} \left| |y_3(t)|^{\sigma_3} Q_2(t) \theta_3 \left(\mu_3 |I_3(t)|^{\frac{1}{\beta_3}} \right) \right|^{\sigma_1 \sigma_2} \times$$

$$\times [1 + o(1)] = \ldots = q_{m+1}(t) \left[\varphi_{m+1}(y_{m+1}(t)) \right]^{\prod\limits_{i=1}^{m} \sigma_i} [1 + o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega.$$

В силу данного представления и последнего из соотношений (15)

$$\frac{y'_n(t)}{\left[\varphi_{m+1}(y_{m+1}(t)) \right]^{\prod\limits_{k=1}^{m} \sigma_k}} = \alpha_n p_n(t) q_{m+1}(t) [1 + o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega \tag{20}$$

Интегрируя (20) на промежутке от B_n до t, где $B_n = \omega$, если $A_n = \omega$, и $B_n = t_0$, если $A_n = b$, получим

$$\int\limits_{B_n}^{t} \frac{y'_n(\tau)\, d\tau}{\left[\varphi_{m+1}(y_{m+1}(\tau)) \right]^{\prod\limits_{k=1}^{m} \sigma_k}} = \alpha_n I_n(t) [1 + o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega.$$

Используя правило Лопиталя, с учетом (2), (5) и условия $\prod\limits_{k=1}^{m+1} \sigma_k \neq \prod\limits_{k=m+1}^{n-1} \Lambda_k$, находим

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\dfrac{y_n(t)}{\left[\varphi_{m+1}(y_{m+1}(t)) \right]^{\prod\limits_{k=1}^{m} \sigma_k}}}{\int\limits_{B_n}^{t} \dfrac{y'_n(\tau)\, d\tau}{\left[\varphi_{m+1}(y_{m+1}(\tau)) \right]^{\prod\limits_{k=1}^{m} \sigma_k}}} =$$

$$= \lim_{t\uparrow\omega} \frac{\frac{y_n'(t)}{[\varphi_{m+1}(y_{m+1}(t))]^{\prod\limits_{k=1}^{m}\sigma_k}} \left[1 - \left(\prod\limits_{k=1}^{m}\sigma_k\right) \frac{y_{m+1}(t)\varphi_{m+1}'(y_{m+1}(t))}{\varphi_{m+1}(y_{m+1}(t))} \frac{y_{m+1}'(t)y_n(t)}{y_{m+1}(t)y_n'(t)}\right]}{\frac{y_n'(t)}{[\varphi_n(y_n(t))]^{\prod\limits_{k=1}^{n-1}\sigma_k}}} =$$

$$= 1 - \left(\prod_{j=1}^{m+1}\sigma_j\right) \lim_{t\uparrow\omega} \frac{y_{m+1}'(t)y_{m+2}(t)}{y_{m+1}(t)y_{m+2}'(t)} \cdots \frac{y_{n-1}'(t)y_n(t)}{y_{n-1}(t)y_n'(t)} = 1 - \frac{\prod\limits_{j=1}^{m+1}\sigma_j}{\prod\limits_{j=m+1}^{n-1}\Lambda_j} = \beta_n.$$

Поэтому из предыдущего асимптотического соотношения следует, что

$$\frac{y_n(t)}{[\varphi_{m+1}(y_{m+1}(t))]^{\prod\limits_{k=1}^{m}\sigma_k}} = \alpha_n\beta_n I_n(t)[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t\uparrow\omega.$$

Значит, имеет место представление (13) и в силу (20) соблюдается (18) при $i = n$.

Теперь, учитывая установленное при $i = n$ асимптотическое соотношение (18), аналогично тому, как и выше (путем умножения (15) на $I_{i+1}(t)$ с последующим интегрированием на промежутке от B_i до t) показываем, начиная с наибольшего $i \in \bar{\mathfrak{I}}$, большего, чем m (если такие существуют), что при всех $i \in \bar{\mathfrak{I}} \setminus \{1,\dots,m\}$ имеют место асимптотические соотношения (12) и (18).

Поскольку соотношения (18) справедливы при $i = \overline{1,n}$ и рассматриваемое решение удовлетворяет последнему предельному соотношению из определения $\mathcal{P}_\omega(\Lambda_1,\dots,\Lambda_{n-1})$-решения, то для каждого $i \in \{1,\dots,n-1\}$ выполняются условия (9). Кроме того, из (18) следует, что

$$|y_i(t)| = |I_i(t)|^{\frac{1}{\beta_i}+o(1)} \quad (i=\overline{1,n}) \quad \text{при} \quad t\uparrow\omega,$$

откуда с учетом условия $\lim\limits_{t\uparrow\omega} y_i(t) = Y_i^0$ из определения $\mathcal{P}_\omega(\Lambda_1,\dots,\Lambda_{n-1})$- решения и определения числа A_i^* вытекают знаковые условия (10).

Справедливость знаковых условий (11) непосредственно следует из (12), (13), если учесть знаки функций y_i и I_i $(i=\overline{1,n})$ на промежутке $[t_0,\omega[$.

Достаточность. Предположим, что соблюдаются условия (9)–(11) и алгебраическое уравнение (8) не имеет корней с нулевой действительной частью. Покажем, что в этом случае система (1) имеет хотя бы одно $\mathcal{P}_\omega(\Lambda_1,\dots,\Lambda_{n-1})$-решение, допускающее при $t\uparrow\omega$ асимптотические представления (12), (13), и выясним вопрос о количестве таких решений.

Сначала рассматривая систему соотношений вида

$$\begin{cases} \dfrac{y_i}{\varphi_{i+1}(y_{i+1})} = Q_i(t)(1+v_i) \quad (i=\overline{1,n-1}), \\ \dfrac{y_n}{[\varphi_{m+1}(y_{m+1})]^{\prod\limits_{k=1}^{m}\sigma_k}} = Q_n(t)(1+v_n), \end{cases} \tag{21}$$

установим, что она однозначно определяет заданные на множестве $D = [t_1,\omega[\times\mathbb{R}^n_{\frac{1}{2}}$, где $t_1 \in [a,\omega[$ и $\mathbb{R}^n_{\frac{1}{2}} = \{\bar{x} \equiv (x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n : |x_k| \le 1/2 \ (k=\overline{1,n})\}$, непрерывно дифференцируемые неявные функции $y_i = Y_i(t,\bar v)$ $(i=\overline{1,n})$ следующего вида

$$Y_i(t,\bar v) = \mu_i |I_i(t)|^{\frac{1}{\beta_i}[1+z_i(t,\bar v)]} \quad (i=\overline{1,n}), \tag{22}$$

где функции z_i $(i=\overline{1,n})$ таковы, что

$$|z_i(t,\bar v)| \le \frac12 \quad \text{при} \quad (t,\bar v)\in D$$

и

$$\lim_{t\uparrow\omega} z_i(t,\bar v) = 0 \quad \text{равномерно по} \quad \bar v \in \mathbb{R}^n_{\frac12}.$$

Для этого, полагая в (21)

$$y_i = \mu_i |I_i(t)|^{\frac{1}{\beta_i}(1+z_i)} \quad (i=\overline{1,n}), \tag{23}$$

получим с учетом (3) систему соотношений вида

$$\begin{cases} \dfrac{|I_i(t)|^{\frac{1}{\beta_i}(1+z_i)}}{|I_{i+1}(t)|^{\frac{\sigma_{i+1}}{\beta_{i+1}}(1+z_{i+1})}} = \mu_i Q_i(t)\theta_{i+1}\left(\mu_{i+1}|I_{i+1}(t)|^{\frac{1}{\beta_{i+1}}(1+z_{i+1})}\right)(1+v_i) \\ i=\overline{1,n-1}, \\ \dfrac{|I_n(t)|^{\frac{1}{\beta_n}(1+z_n)}}{|I_{m+1}(t)|^{\frac{\prod_{k=1}^{m+1}\sigma_k}{\beta_{m+1}}(1+z_{m+1})}} = \\ \qquad = \mu_n Q_n(t)\left[\theta_{m+1}\left(\mu_{m+1}|I_{m+1}(t)|^{\frac{1}{\beta_{m+1}}(1+z_m)}\right)\right]^{\prod_{k=1}^{m}\sigma_k}(1+v_n), \end{cases}$$

определенную в силу знаковых условий (10), (11) при всех $|v_i|\le\frac12$, $|z_i|\le\frac12$ $(i= =\overline{1,n})$ и t из некоторой левой окрестности ω.

Отсюда после логарифмирования находим, что

$$\begin{cases} 1+z_i - \dfrac{\beta_i\sigma_{i+1}}{\beta_{i+1}}\dfrac{\ln|I_{i+1}(t)|}{\ln|I_i(t)|}(1+z_{i+1}) = \dfrac{\beta_i\ln|Q_i(t)|}{\ln|I_i(t)|} + \\ +\dfrac{\beta_i\ln\theta_{i+1}\left(\mu_{i+1}|I_{i+1}(t)|^{\frac{1}{\beta_{i+1}}(1+z_{i+1})}\right)}{\ln|I_i(t)|} + \dfrac{\beta_i\ln|1+v_i|}{\ln|I_i(t)|} \quad (i=\overline{1,n-1}), \\ 1+z_n - \dfrac{\beta_n\prod\limits_{k=1}^{m+1}\sigma_k}{\beta_{m+1}}\dfrac{\ln|I_{m+1}(t)|}{\ln|I_n(t)|}(1+z_{m+1}) = \dfrac{\beta_n\ln|Q_n(t)|}{\ln|I_n(t)|} + \\ +\dfrac{\beta_n\left(\prod\limits_{k=1}^{m}\sigma_k\right)\ln\theta_{m+1}\left(\mu_{m+1}|I_{m+1}(t)|^{\frac{1}{\beta_{m+1}}(1+z_{m+1})}\right)}{\ln|I_n(t)|} + \dfrac{\beta_n\ln|1+v_n|}{\ln|I_n(t)|}. \end{cases}$$

Частично разрешая эту систему соотношений (как систему линейных неоднородных уравнений относительно неизвестных z_i ($i=\overline{1,n}$)), получим, что

$$z_i = a_i(t) + b_i(t,\bar{v}) + Z_i(t,\bar{z}) \quad (i=\overline{1,n}), \tag{24}$$

где функции a_i, b_i, Z_i ($i=\overline{1,n}$) определяются следующими рекуррентными соотношениями

$$a_{m+1}(t) = -1 + \left[1 - \left(\prod_{k=1}^{m+1}\sigma_k\right)\frac{\beta_n \ln|I_{m+1}(t)|}{\beta_{m+1}\ln|I_n(t)|}\prod_{k=m+1}^{n-1}\frac{\sigma_{k+1}\beta_k\ln|I_{k+1}(t)|}{\beta_{k+1}\ln|I_k(t)|}\right]^{-1}\times$$

$$\times\sum_{k=m+1}^{n}\frac{\beta_k\ln|Q_k(t)|}{\ln|I_k(t)|}\prod_{j=m+1}^{k-1}\frac{\beta_j\sigma_{j+1}\ln|I_{j+1}(t)|}{\beta_{j+1}\ln|I_j(t)|},$$

$$b_{m+1}(t,\bar{v}) = \left[1 - \left(\prod_{k=1}^{m+1}\sigma_k\right)\frac{\beta_n \ln|I_{m+1}(t)|}{\beta_{m+1}\ln|I_n(t)|}\prod_{k=m+1}^{n-1}\frac{\sigma_{k+1}\beta_k\ln|I_{k+1}(t)|}{\beta_{k+1}\ln|I_k(t)|}\right]^{-1}\times$$

$$\times\sum_{k=m+1}^{n}\frac{\beta_k\ln|1+v_k|}{\ln|I_k(t)|}\prod_{j=m+1}^{k-1}\frac{\beta_j\sigma_{j+1}\ln|I_{j+1}(t)|}{\beta_{j+1}\ln|I_j(t)|},$$

$$Z_{m+1}(t,\bar{z}) = \left[1 - \left(\prod_{k=1}^{m+1}\sigma_k\right)\frac{\beta_n \ln|I_{m+1}(t)|}{\beta_{m+1}\ln|I_n(t)|}\prod_{k=m+1}^{n-1}\frac{\sigma_{k+1}\beta_k\ln|I_{k+1}(t)|}{\beta_{k+1}\ln|I_k(t)|}\right]^{-1}\times$$

$$\times\left[\sum_{k=m+1}^{n-1}\frac{\beta_k\ln\theta_{k+1}\left(\mu_{k+1}|I_{k+1}(t)|^{\frac{1}{\beta_{k+1}}(1+z_{k+1})}\right)}{\ln|I_k(t)|}\prod_{j=m+1}^{k-1}\frac{\beta_j\sigma_{j+1}\ln|I_{j+1}(t)|}{\beta_{j+1}\ln|I_j(t)|}+\right.$$

$$\left.+\frac{\beta_n\left(\prod\limits_{k=1}^{m}\sigma_k\right)\ln\theta_{m+1}\left(\mu_{m+1}|I_{m+1}(t)|^{\frac{1}{\beta_{m+1}}(1+z_{m+1})}\right)}{\ln|I_n(t)|}\prod_{j=m+1}^{n-1}\frac{\beta_j\sigma_{j+1}\ln|I_{j+1}(t)|}{\beta_{j+1}\ln|I_j(t)|}\right],$$

$$a_n(t) = -1 + \frac{\beta_n\prod\limits_{k=1}^{m+1}\sigma_k}{\beta_{m+1}}\frac{\ln|I_{m+1}(t)|}{\ln|I_n(t)|}[1+a_{m+1}(t)] + \frac{\beta_n\ln|Q_n(t)|}{\ln|I_n(t)|},$$

$$b_n(t,\bar{v}) = \frac{\beta_n\prod\limits_{k=1}^{m+1}\sigma_k}{\beta_{m+1}}\frac{\ln|I_{m+1}(t)|}{\ln|I_n(t)|}b_{m+1}(t,\bar{v}) + \frac{\beta_n\ln|1+v_n|}{\ln|I_n(t)|},$$

$$Z_n(t,\bar{z}) = \frac{\beta_n\prod\limits_{k=1}^{m+1}\sigma_k}{\beta_{m+1}}\frac{\ln|I_{m+1}(t)|}{\ln|I_n(t)|}Z_{m+1}(t,\bar{z}) +$$

$$+\frac{\beta_n\left(\prod\limits_{k=1}^{m}\sigma_k\right)\ln\theta_{m+1}\left(\mu_{m+1}|I_{m+1}(t)|^{\frac{1}{\beta_{m+1}}(1+z_{m+1})}\right)}{\ln|I_n(t)|},$$

и при $i \in \{1, \dots, n-1\} \setminus \{m+1\}$

$$a_i(t) = -1 + \frac{\beta_i \sigma_{i+1}}{\beta_{i+1}} \frac{\ln|I_{i+1}(t)|}{\ln|I_i(t)|}[1 + a_{i+1}(t)] + \frac{\beta_i \ln|Q_i(t)|}{\ln|I_i(t)|},$$

$$b_i(t, \bar{v}) = \frac{\beta_i \sigma_{i+1}}{\beta_{i+1}} \frac{\ln|I_{i+1}(t)|}{\ln|I_i(t)|} b_{i+1}(t, \bar{v}) + \frac{\beta_i \ln|1 + v_i|}{\ln|I_i(t)|},$$

$$Z_i(t, \bar{z}) = \frac{\beta_i \sigma_{i+1}}{\beta_{i+1}} \frac{\ln|I_{i+1}(t)|}{\ln|I_i(t)|} Z_{i+1}(t, \bar{z}) + \frac{\beta_i \ln\theta_{i+1}\left(\mu_{i+1}|I_{i+1}(t)|^{\frac{1}{\beta_{i+1}}(1+z_{i+1})}\right)}{\ln|I_i(t)|}.$$

Здесь $\lim_{t\uparrow\omega} I_i(t)$ $(i = \overline{1,n})$ равен либо нулю, либо $\pm\infty$. Кроме того, с использованием правила Лопиталя, (9), (4) и введенных обозначений β_i $(i = \overline{1,n})$ имеем

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\beta_i \ln|I_{i+1}(t)|}{\beta_{i+1}\ln|I_i(t)|} = \lim_{t\uparrow\omega} \frac{\beta_i I_i(t) I'_{i+1}(t)}{\beta_{i+1} I'_i(t) I_{i+1}(t)} = \Lambda_i \quad (i = \overline{1, n-1}),$$

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\beta_n \ln|I_{m+1}(t)|}{\beta_{m+1}\ln|I_n(t)|} = \lim_{t\uparrow\omega} \frac{\beta_n I'_{m+1}(t) I_n(t)}{\beta_{m+1} I_{m+1}(t) I'_n(t)} = \left(\Lambda_{m+1} \dots \Lambda_{n-1}\right)^{-1},$$

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\beta_i \ln|Q_i(t)|}{\ln|I_i(t)|} = \begin{cases} \beta_i = 1 - \Lambda_i \sigma_{i+1} \quad \text{при} \quad i \in \Im, \\ \beta_n = 1 - \dfrac{\prod\limits_{k=1}^{m+1} \sigma_k}{\prod\limits_{k=m+1}^{n-1} \Lambda_k} \quad \text{при} \quad i = n, \end{cases}$$

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\beta_i \ln|Q_i(t)|}{\ln|I_i(t)|} = \beta_i \lim_{t\uparrow\omega}\left(1 - \frac{I_i(t) I'_{i+1}(t)}{I'_i(t) I_{i+1}(t)}\right) = \beta_i\left(1 - \frac{\beta_{i+1}}{\beta_i}\Lambda_i\right) = 0 \quad \text{при} \quad i \in \bar{\Im},$$

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\ln\theta_i\left(\mu_i|I_i(t)|^{\frac{1}{\beta_i}(1+z_i)}\right)}{\ln|I_i(t)|} = \frac{1}{\beta_i}(1+z_i) \lim_{t\uparrow\omega} \frac{\ln\theta_i\left(\mu_i|I_i(t)|^{\frac{1}{\beta_i}(1+z_i)}\right)}{\ln\left|\mu_i|I_i(t)|\right|^{\frac{1}{\beta_i}(1+z_i)}} =$$

$$= \frac{1}{\beta_i}(1+z_i) \lim_{y\to Y_i^0} \frac{\ln\theta_i(y)}{\ln|y|} = \frac{1}{\beta_i}(1+z_i) \lim_{y\to Y_i^0} \frac{y\theta'_i(y)}{\theta_i(y)} = 0 \text{ равномерно по } |z_i| \le \frac{1}{2}.$$

В силу этих предельных соотношений, начиная с $i = m+1$, а затем при $i = m, m-1, \dots, 1$ и $i = m+2, \dots, n$, находим, что

$$\lim_{t\uparrow\omega} a_i(t) = 0 \quad (i = \overline{1,n}), \tag{25}$$

$$\lim_{t\uparrow\omega} b_i(t, \bar{v}) = 0 \quad (i = \overline{1,n}) \quad \text{равномерно по} \quad \bar{v} \in \mathbb{R}^n_{\frac{1}{2}}, \tag{26}$$

$$\lim_{t\uparrow\omega} Z_i(t, \bar{z}) = 0 \quad (i = \overline{1,n}) \quad \text{равномерно по} \quad \bar{z} \in \mathbb{R}^n_{\frac{1}{2}}. \tag{27}$$

Более того, для каждого $i \in \{1, \dots, n\}$

$$\frac{1}{\ln|I_i(t)|} \cdot \frac{\partial\left[\ln\theta_i\left(\mu_i|I_i(t)|^{\frac{1}{\beta_i}(1+z_i)}\right)\right]}{\partial z_i} = \frac{1}{\beta_i} \frac{\mu_i|I_i(t)|^{\frac{1}{\beta_i}(1+z_i)}\theta'_i\left(\mu_i|I_i(t)|^{\frac{1}{\beta_i}(1+z_i)}\right)}{\theta_i\left(\mu_i|I_i(t)|^{\frac{1}{\beta_i}(1+z_i)}\right)}$$

и поэтому ввиду (4) стремится к нулю при $t \uparrow \omega$ равномерно по $|z_i| \le \frac{1}{2}$. С учетом этого факта так же, как и выше, начиная с $i = m+1$, получим, что

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\partial Z_i(t,\bar z)}{\partial z_k} = 0 \quad (i,k=\overline{1,n}) \quad \text{равномерно по} \quad \bar z \in \mathbb{R}^n_{\frac{1}{2}}. \tag{28}$$

В силу условий (25)–(28) существует число $t_0 \in [a,\omega[$ такое, что соблюдаются неравенства

$$|a_i(t) + b_i(t,\bar v) + Z_i(t,\bar z)| \le \frac{1}{2n} \quad (i=\overline{1,n}) \tag{29}$$

при $(t,\bar v,\bar z) \in [t_0,\omega[\times \mathbb{R}^n_{\frac{1}{2}} \times \mathbb{R}^n_{\frac{1}{2}}$ и условия Липшица

$$|Z_i(t,\bar z^1) - Z_i(t,\bar z^2)| \le \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n} |z_k^1 - z_k^2| \quad (i=\overline{1,n}) \tag{30}$$

при $(t,\bar z^1),(t,\bar z^2) \in [t_0,\omega[\times \mathbb{R}^n_{\frac{1}{2}}$.

Выбрав таким образом число t_0, обозначим через $\mathbf{B}$ банахово пространство вектор-функций $z = (z_i)_{i=1}^n$, каждая компонента которого z_i $(i \in \{1,\dots,n\})$ определена, непрерывна и ограничена на множестве $D_0 = [t_0,\omega[\times \mathbb{R}^n_{\frac{1}{2}}$ с нормой

$$||z|| = \sup\left\{\sum_{i=1}^{n} |z_i(t,\bar v)| : (t,\bar v) \in D_0\right\}.$$

Выделим из него подпространство $\mathbf{B}_0$ тех функций из $\mathbf{B}$, для которых $||z|| \le \frac{1}{2}$, и рассмотрим на $\mathbf{B}_0$, выбрав предварительно произвольным образом число $\nu \in$ $\in (0,1)$, оператор $\Phi = (\Phi_i)_{i=1}^n$, определенный соотношениями

$$\begin{gathered}\Phi_i(z)(t,\bar v) = z_i(t,\bar v) - \\ -\nu\left[z_i(t,\bar v) - a_i(t) - b_i(t,\bar v) - Z_i(t, z_1(t,\bar v),\dots z_n(t,\bar v))\right] \ \ (i=\overline{1,n}).\end{gathered} \tag{31}$$

Для любого $z \in \mathbf{B}_0$ в силу условий (29) имеем

$$|\Phi_i(z)(t,\bar v)| \le (1-\nu)|z_i(t,\bar v)| + \frac{\nu}{2n} \quad (i=\overline{1,n}) \quad \text{при} \quad (t,\bar v) \in D_0.$$

Поэтому при $(t,\bar v) \in D_0$

$$\sum_{i=1}^{n} |\Phi_i(z)(t,\bar v)| \le (1-\nu)\sum_{i=1}^{n} |z_i(t,\bar v)| + \frac{1}{2}\nu \le (1-\nu)||z|| + \frac{1}{2}\nu \le (1-\nu)\frac{1}{2} + \nu\frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Отсюда следует, что $||\Phi(z)|| \le \frac{1}{2}$, т. е. $\Phi(\mathbf{B}_0) \subset \mathbf{B}_0$.

Пусть теперь $z, \tilde z \in \mathbf{B}_0$. Тогда в силу (30) при $(t,\bar v) \in D_0$

$$\begin{gathered}|\Phi_i(z)(t,\bar v) - \Phi_i(\tilde z)(t,\bar v)| \le (1-\nu)|z_i(t,\bar v) - \tilde z_i(t,\bar v)| + \\ +\nu|Z_i(t, z_1(t,\bar v),\dots,z_n(t,\bar v) - Z_i(t,\tilde z_1(t,\bar v),\dots,\tilde z_n(t,\bar v)| \le \\ \le (1-\nu)|z_i(t,\bar v_i) - \tilde z_i(t,\bar v_i)| + \frac{\nu}{n+1}\sum_{k=1}^{n} |z_k(t,\bar v) - \tilde z_k(t,\bar v)| \quad (i=\overline{1,n}).\end{gathered}$$

Значит, при $(t,\bar v)\in D_0$ $(i=\overline{1,n})$

$$\sum_{i=1}^{n}|\Phi_i(z)(t,\bar v_i)-\Phi_i(\tilde z)(t,\bar v_i)|\le$$

$$\le\left(1-\frac{\nu}{n+1}\right)\sum_{i=1}^{n}|z_i(t,\bar v)-\tilde z_i(t,\bar v)|\le\left(1-\frac{\nu}{n+1}\right)\|z-\tilde z\|,$$

откуда следует, что

$$\|\Phi(z)-\Phi(\tilde z)\|\le\left(1-\frac{\nu}{n+1}\right)\|z-\tilde z\|.$$

Тем самым показано, что оператор Φ отображает пространство $\mathbf{B}_0$ в себя и является на нем оператором сжатия. Тогда согласно принципу сжатых отображений существует единственная вектор-функция $z\in\mathbf{B}_0$ такая, что $z=\Phi(z)$. В силу (31) эта вектор-функция с непрерывными компонентами $z_i: D_0\longrightarrow\mathbb{R}$ $(i==\overline{1,n})$ является единственным решением системы (24), удовлетворяющим условию $\|z\|\le\frac12$. Из (24) с учетом этого условия и (25)–(27) следует, что компоненты данного решения $z_i(t,\bar v)$ $(i=\overline{1,n})$ стремятся к нулю при $t\uparrow\omega$ равномерно по $\bar v\in\mathbb{R}^n_{\frac12}$. Непрерывная дифференцируемость этих компонент на некотором множестве $D=[t_1,\omega[\times\mathbb{R}^n_{\frac12}$, где $t_1\in[t_0,\omega[$, непосредственно вытекает из известной локальной теоремы о существовании неявных функций, определяемых системой соотношений. В силу замены (23) полученной вектор-функции $z=(z_i)_{i=1}^n$ соответствует непрерывно дифференцируемая вектор-функция $(Y_i)_{i=1}^n:[t_1,\omega[\times\mathbb{R}^n_{\frac12}$ с компонентами вида (22), которая является решением системы (21), причем ввиду (22) и знаковых условий (10), (11)

$$\lim_{t\uparrow\omega}Y_i(t,\bar v)=Y_i^0\quad\text{равномерно по}\quad\bar v\in\mathbb{R}^n_{\frac12}\quad(i=\overline{1,n}).\tag{32}$$

Кроме того, из (21) следует, что

$$\begin{cases}\dfrac{(Y_i(t,\bar v))'_t}{Y_i(t,\bar v)}=\dfrac{O'_i(t)}{Q_i(t)}+\dfrac{Y_{i+1}(t,\bar v)\varphi'_{i+1}(Y_{i+1}(t,\bar v))}{\varphi_{i+1}(Y_{i+1}(t,\bar v))}\dfrac{(Y_{i+1}(t,\bar v))'_t}{Y_{i+1}(t,\bar v)}\quad(i=\overline{1,n-1}),\\[3ex]\dfrac{(Y_n(t,\bar v))'_t}{Y_n(t,\bar v)}=\dfrac{O'_n(t)}{Q_n(t)}+\left(\prod\limits_{k=1}^{m}\sigma_k\right)\dfrac{Y_{m+1}(t,\bar v)\varphi'_{m+1}(Y_{m+1}(t,\bar v))}{\varphi_{m+1}(Y_{m+1}(t,\bar v))}\dfrac{(Y_{m+1}(t,\bar v))'_t}{Y_{m+1}(t,\bar v)}.\end{cases}\tag{33}$$

Здесь ввиду (32) и (2)

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{Y_i(t,\bar v_i)\varphi'_i\left(Y_i(t,\bar v_i)\right)}{\varphi_i\left(Y_i(t,\bar v_i)\right)}=\sigma_i\quad(i=\overline{1,n})\quad\text{равномерно по}\quad\bar v\in\mathbb{R}^n_{\frac12}\tag{34}$$

и согласно вида функций Q_i $(i=\overline{1,n})$

$$\frac{Q'_i(t)}{Q_i(t)}=\begin{cases}\dfrac{I'_i(t)}{I_i(t)}&\text{при}\quad i\in\mathfrak{I}\cup\{n\},\\[3ex]\dfrac{I'_i(t)}{I_i(t)}-\dfrac{I'_{i+1}(t)}{I_{i+1}(t)}&\text{при}\quad i\in\bar{\mathfrak{I}}.\end{cases}\tag{35}$$

Из (33) сначала находим, что

$$\frac{(Y_{m+1}(t,\bar v))'_t}{Y_{m+1}(t,\bar v)} = \left[1-\left(\prod_{k=1}^{m}\sigma_k\right)\prod_{k=m+1}^{n}\frac{Y_k(t,\bar v)\varphi'_k\left(Y_k(t,\bar v)\right)}{\varphi_k\left(Y_k(t,\bar v)\right)}\right]^{-1}\times$$

$$\times\left(\sum_{k=m+1}^{n}\frac{Q'_k(t)}{Q_k(t)}\prod_{j=m+1}^{k-1}\frac{Y_{j+1}(t,\bar v)\varphi'_{j+1}\left(Y_{j+1}(t,\bar v)\right)}{\varphi_j\left(Y_j(t,\bar v)\right)}\right).$$

Отсюда в силу (34), (35) и (9) имеем

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{I_{m+1}(t)\left(Y_{m+1}(t,\bar v)\right)'_t}{I'_{m+1}(t)Y_{m+1}(t,\bar v)} = \frac{1}{\beta_{\ m+1}} \qquad \text{равномерно по} \quad \bar v\in\mathbb{R}^n_{\frac12}.$$

Далее, учитывая это предельное соотношение, из (33) последовательно, начиная с $i=n$ и до $i=m+2$, а затем начиная с $i=m$ и до $i=1$, находим, используя (34), (35), (9), что

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{I_i(t)\left(Y_i(t,\bar v)\right)'_t}{I'_i(t)Y_i(t,\bar v)} = \frac{1}{\beta_{\ i}} \qquad \text{равномерно по} \quad \bar v\in\mathbb{R}^n_{\frac12}. \tag{36}$$

Теперь, применяя к системе дифференциальных уравнений (1) преобразование

$$y_i(t) = Y_i(t,\bar v_i(t)) \quad (i=\overline{1,n}) \tag{37}$$

и учитывая, что вектор-функция $(Y_i(t,\bar v(t)))_{i=1}^n$ при $t\in[t_1,\omega[$ и $\bar v(t)\in\mathbb{R}^n_{\frac12}$ является решением системы уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{y_i(t)}{\varphi_{i+1}(y_{i+1}(t))} = Q_i(t)[1+v_i(t)] \quad (i=\overline{1,n-1}), \\[2ex] \dfrac{y_n(t)}{[\varphi_{m+1}(y_{m+1}(t))]^{\prod_{k=1}^{m}\sigma_k}} = Q_n(t)[1+v_n(t)], \end{cases} \tag{38}$$

получим систему дифференциальных уравнений вида

$$\begin{cases} v'_i = \dfrac{I'_i(t)}{\beta_i I_i(t)} - \dfrac{Q'_i(t)}{Q_i(t)}(1+v_i) - \dfrac{I'_{i+1}(t)}{\beta_{i+1}I_{i+1}(t)}\cdot\dfrac{1+v_i}{1+v_{i+1}}H_{i+1}(t,\bar v) \\[2ex] i=\overline{1,n-2}, \\[2ex] v'_{n-1} = \dfrac{I'_{n-1}(t)}{\beta_{n-1}I_{n-1}(t)} - \dfrac{Q'_{n-1}(t)}{Q_{n-1}(t)}(1+v_{n-1}) - \dfrac{1+v_{n-1}}{1+v_n}H_n(t,\bar v)\dfrac{H(t,\bar v)}{Q_n(t)}, \\[2ex] v'_n = \dfrac{H(t,\bar v)}{Q_n(t)} - \dfrac{Q'_n(t)}{Q_n(t)}(1+v_n) - \left(\prod_{k=1}^{m}\sigma_k\right)\dfrac{1+v_n}{1+v_{m+1}}H_{m+1}(t,\bar v)\dfrac{I'_{m+1}(t)}{\beta_{m+1}I_{m+1}(t)}, \end{cases} \tag{39}$$

где

$$H_i(t,\bar v)=\frac{Y_i(t,\bar v)\varphi_i'(Y_i(t,\bar v))}{\varphi_i(Y_i(t,\bar v))}\quad (i=\overline{1,n}),\quad H(t,\bar v_1)=\frac{\alpha_n p_n(t)\varphi_1(Y_1(t,\bar v))}{[\varphi_{m+1}(Y_{m+1}(t,\bar v))]^{\prod\limits_{k=1}^{m}\sigma_k}}.$$

Поскольку соблюдаются условия (34), (36) и функции φ_i $(i=1,\dots,m)$ удовлетворяют условию **S**, то с учетом замечания 2 имеем

$$H_i(t,\bar v)=\sigma_i+R_i(t,\bar v)\quad (i=\overline{1,n}),$$

$$H(t,\bar v)=\alpha_n p_n(t)q_{m+1}(t)\prod_{k=1}^{m}|1+v_k|^{\prod_{j=1}^{k}\sigma_j}[1+R(t,\bar v)],$$

где

$$\lim_{t\uparrow\omega}R_i(t,\bar v)=0\qquad \text{равномерно по}\quad \bar v\in\mathbb{R}^n_{\frac12}\quad (i=\overline{1,n}),$$

$$\lim_{t\uparrow\omega}R(t,\bar v)=0\qquad \text{равномерно по}\quad \bar v\in\mathbb{R}^n_{\frac12}.$$

В силу этих представлений и условий (9) система уравнений (39) может быть переписана в виде

$$\begin{cases} v_i'=h_i(t)\,[f_i(t,\bar v)-v_i+\Lambda_i\sigma_{i+1}v_{i+1}+V_i(\bar v)]\quad (i=\overline{1,n-2}),\\ v_{n-1}'=h_{n-1}(t)\left[f_{n-1}(t,\bar v)-\Lambda_{n-1}\sigma_n\left(\sum\limits_{k=1}^{m}a_{0k}v_k-v_n\right)-v_{n-1}+V_{n-1}(\bar v)\right],\\ v_n'=h_n(t)\left[f_n(t,\bar v)+\sum\limits_{k=1}^{m}a_{0k}v_k+\dfrac{a_{0m+1}}{\prod\limits_{k=m+1}^{n-1}\Lambda_k}v_{m+1}-v_n+V_n(\bar v)\right], \end{cases}\tag{40}$$

где

$$h_i(t)=\frac{I_i'(t)}{\beta_i I_i(t)}\quad (i=\overline{1,n}),\quad a_{0k}=\prod_{j=1}^{k}\sigma_j\quad (k=\overline{1,m+1}),$$

$$\lim_{t\uparrow\omega}f_i(t,\bar v)=0\quad \text{равномерно по}\quad \bar v\in\mathbb{R}^n_{\frac12}\quad (i=\overline{1,n}),$$

$$V_i(\bar v)=-\Lambda_i\sigma_{i+1}\left[\frac{1+v_i}{1+v_{i+1}}-1-v_i+v_{i+1}\right]\quad (i=\overline{1,n-2}),$$

$$V_{n-1}(\bar v)=-\Lambda_{n-1}\sigma_n\left[\frac{1+v_{n-1}}{1+v_n}\prod_{k=1}^{m}|1+v_k|^{a_{0k}}-1-\sum_{k=1}^{m}a_{0k}v_k-v_{n-1}+v_n\right],$$

$$V_n(\bar v)=\prod_{k=1}^{m}|1+v_k|^{a_{0k}}-1-\sum_{k=1}^{m}a_{0k}-\frac{a_{0m+1}}{\prod\limits_{k=m+1}^{n-1}\Lambda_k}\left(\frac{1+v_n}{1+v_{m+1}}-1-v_n+v_{m+1}\right).$$

Здесь

$$\lim_{|v_1|+\ldots+|v_n|\to 0} \frac{\partial V_i(\bar v)}{\partial v_k} = 0 \quad (i,k=\overline{1,n}),$$

и в силу того, что $\lim\limits_{t\uparrow\omega} I_i(t) \quad (i=\overline{1,n})$ равны либо нулю, либо $\pm\infty$, соблюдаются условия

$$\int\limits_{t_1}^{\omega} h_i(t)\,dt = \pm\infty \quad (i=\overline{1,n}).$$

Поскольку $m = \max\{i \in \mathfrak{I} : \ \Lambda_i = 0\} < n-1$, то в силу условий (9) при $i=\overline{m+1,n-1}$

$$h_i(t) = h_n(t)\frac{h_i(t)}{h_n(t)} = h_n(t)\frac{\beta_n I_n(t) I_i'(t)}{\beta_i I_i(t) I_n'(t)} =$$

$$= h_n(t)\prod_{k=i}^{n-1}\frac{\beta_{k+1} I_k'(t) I_{k+1}(t)}{\beta_k I_k(t) I_{k+1}'(t)} = \frac{h_n(t)[1+o(1)]}{\Lambda_i\Lambda_{i+1}\ldots\Lambda_{n-1}} \quad \text{при} \quad t\uparrow\omega.$$

Поэтому система дифференциальных уравнений (40) может быть переписана в виде

$$\begin{cases} v_i' = h_i(t)\,[f_i(t,\bar v) - v_i + \Lambda_i\sigma_{i+1}v_{i+1} + V_i(\bar v)] \quad (i=\overline{1,m-1}), \\ v_m' = h_m(t)[f_m(t,\bar v) - v_m], \\ v_i' = h_n(t)\left[\tilde f_i(t,\bar v) - \dfrac{v_i}{\Lambda_i\ldots\Lambda_{n-1}} + \dfrac{\sigma_{i+1}}{\Lambda_{i+1}\ldots\Lambda_{n-1}}v_{i+1} + \dfrac{V_i(\bar v)}{\Lambda_i\ldots\Lambda_{n-1}}\right] \\ i=\overline{m+1,n-2}, \\ v_{n-1}' = h_n(t)\left[\bar f_{n-1}(t,\bar v) - \sigma_n\sum\limits_{k=1}^{m} a_{0k}v_k - \dfrac{1}{\Lambda_{n-1}}v_{n-1} + \sigma_n v_n + \dfrac{1}{\Lambda_{n-1}}V_{n-1}(\bar v)\right], \\ v_n' = h_n(t)\left[f_n(t,\bar v) + \sum\limits_{k=1}^{m} a_{0k}v_k + \dfrac{a_{0m+1}}{\prod\limits_{k=m+1}^{n-1}\Lambda_k}v_{m+1} - v_n + V_n(\bar v)\right], \end{cases} \tag{41}$$

где функции $\bar f_i$ $(i=\overline{m+1,n-1})$ обладают такими же свойствами, как и функции f_i $(i=\overline{m+1,n-1})$ в системе (40).

Важной ее особенностью является то, что в m-ом уравнении коэффициент при v_{m+1} равен нулю.

Рассмотрим матрицу

$$B_{m+1}=\begin{pmatrix} -b_{m+1} & \sigma_{m+2}b_{m+2} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0\\ 0 & -b_{m+2} & \sigma_{m+3}b_{m+3} & \dots & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -b_{m+3} & \dots & 0 & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & -b_{n-2} & \sigma_{n-1}b_{n-1} & 0\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -b_{n-1} & \sigma_n\\ a_{0m+1}b_{m+1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

где $b_i=\left(\prod\limits_{k=i}^{n-1}\Lambda_k\right)^{-1}$ $(i=\overline{m+1,n-1})$, составленную из коэффициентов при $v_{m+1},\dots,v_n$, стоящих в скобках последних $n-m$ уравнений системы (41). Ее характеристическое уравнение $\det[B_{m+1}-\lambda E_{n-m}]=0$, где E_{n-m} — единичная матрица размерности $(n-m)\times(n-m)$, имеет вид (8). В силу условий теоремы это уравнение не имеет корней с нулевой действительной частью. Поэтому с использованием доказательства теоремы 2.1 из работы [8] приходим к выводу, что существует невырожденная постоянная матрица D_{m+1} размерности $(n-m)\times\times(n-m)$ и невырожденная непрерывно дифференцируемая и ограниченная вместе с обратной на промежутке $[t_0,\omega[$ матрица $L_{m+1}(t)$, такие, что

$$L^{-1}_{m+1}(t)D^{-1}_{m+1}B_{m+1}D_{m+1}L_{m+1}(t)-\frac{1}{h_n(t)}L^{-1}(t)L'(t)=C_{m+1},$$

где C_{m+1} — верхняя треугольная матрица вида

$$C_{m+1}=\begin{pmatrix} \operatorname{Re}\lambda_1^0 & c_{m+1m+2} & \dots & c_{m+1n-1} & c_{m+1n}\\ 0 & \operatorname{Re}\lambda_2^0 & \dots & c_{m+2n-1} & c_{m+2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & \operatorname{Re}\lambda^0_{n-m-1} & c_{n-1n}\\ 0 & 0 & \dots & 0 & \operatorname{Re}\lambda^0_{n-m} \end{pmatrix},$$

в которой λ_i^0 $(i=\overline{1,n-m})$ — все корни (с учетом кратных) алгебраического уравнения (8), все c_{ik} $(k=\overline{i+1,n})$ при $i\in\{m+1,\dots,n\}$, за возможным исключением лишь одной, равной единице, равны нулю.

Ввиду этого факта система дифференциальных уравнений (41) с помощью преобразования

$$\begin{pmatrix} v_1\\ \vdots\\ v_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} E_m & O_1\\ O_2 & D_{m+1}L_{m+1}(t)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} w_1\\ \vdots\\ w_n\end{pmatrix}, \tag{42}$$

где O_1, O_2 — нулевые матрицы размерностей $m\times(n-m)$ и $(n-m)\times m$ (соответственно), E_m — единичная матрица размерности $m\times m$, приводится к системе дифференциальных уравнений вида

$$\begin{cases} w_i' = h_i(t)\,[f_{1i}(t,\bar w) - w_i + \Lambda_i \sigma_{i+1} w_{i+1} + f_{2i}(\bar w)] \quad (i = \overline{1, m-1}), \\ w_m' = h_m(t)[f_{1m}(t,\bar w) - w_m], \\ w_i' = h_n(t)\left[f_{1i}(t,\bar w) + \sum\limits_{k=1}^{m} c_{ik}(t) w_k + \left(\mathrm{Re}\lambda^0_{i-m}\right) w_i + \sum\limits_{k=i+1}^{n} c_{ik} w_k + f_{2i}(t,\bar w)\right] \\ (i = \overline{m+1, n-1}), \\ w_n' = h_n(t)\left[f_{1n}(t,\bar w) + \sum\limits_{k=1}^{m} c_{nk}(t) w_k + \left(\mathrm{Re}\lambda^0_{n-m}\right) w_n + f_{2n}(t,\bar w)\right], \end{cases} \tag{43}$$

в которой функции c_{ik} $(i = \overline{m+1, n},\ k \in \{1, \dots, m\})$ — непрерывны и ограниченны на промежутке $[t_1, \omega[$, а функции $f_{1i} : [t_1, \omega[\times \mathbb{R}^n_\delta \longrightarrow \mathbb{R}$ $(i = \overline{1, n})$, $f_{2i} : \mathbb{R}^n_\delta \longrightarrow \mathbb{R}$ $(i = \overline{1, m-1})$, $f_{2i} : [t_1, \omega[\times \mathbb{R}^n_\delta \longrightarrow \mathbb{R}$ $(i = \overline{m+1, n})$ — непрерывны, где $\delta > 0$ — некоторое достаточно малое число, и удовлетворяют условиям

$$\lim_{t\uparrow\omega} f_{1i}(t,\bar w) = 0 \quad (i = \overline{1, m}) \quad \text{равномерно по} \quad \bar w \in \mathbb{R}^n_\delta,$$

$$\lim_{|w_1|+\ldots+|w_n|\to 0} \frac{f_{2i}(\bar w)}{|w_1| + \ldots + |w_n|} = 0 \quad (i = \overline{1, m-1}),$$

$$\lim_{|w_1|+\ldots+|w_n|\to 0} \frac{f_{2i}(t,\bar w)}{|w_1| + \ldots + |w_n|} = 0 \quad (i = \overline{m+1, n}) \text{ равномерно по } t \in [t_1, \omega[.$$

В силу ограниченности функций c_{ik} $(i = \overline{m+1, n},\ k \in \{1, \dots, m\})$ на промежутке $[t_1, \omega[$ существует число $\varepsilon > 0$ такое, что постоянные B^0_i $(i = \overline{m+1, n})$, определяемые (начиная с $i = n$) рекуррентными соотношениями

$$B^0_n = \frac{\varepsilon}{|\mathrm{Re}\lambda^0_{n-m}|} \sum_{k=1}^{m} c^0_{nk},$$

$$B^0_i = \frac{1}{|\mathrm{Re}\lambda^0_{i-m}|} \left(\varepsilon \sum_{k=1}^{m} c^0_{ik} + \sum_{k=i+1}^{n} |c_{ik}| B^0_k\right) \quad (i = \overline{m+1, n-1}),$$

где

$$c^0_{ik} = \limsup_{t\uparrow\omega} |c_{ik}(t)| \quad (i = \overline{m+1, n},\ k \in \{1, \dots, m\}),$$

удовлетворяют неравенствам $B^0_i < 1$ $(i = \overline{m+1, n})$.

При таком выборе постоянной $\varepsilon > 0$ система дифференциальных уравнений (43) с помощью преобразования

$$w_i = \varepsilon z_i \quad (i = \overline{1, m}), \quad w_i = z_i \quad (i = \overline{m+1, n}) \tag{44}$$

сводится к системе дифференциальных уравнений, для которой соблюдаются все условия теоремы 1.2 из работы [7]. Согласно этой теореме у данной системы существует хотя бы одно решение $(z_i)_{i=1}^n : [t_2, \omega[\times \mathbb{R}^n$ $(t_2 \in [t_1, \omega[)$, стремящееся к нулю при $t \uparrow \omega$, причем таких решений существует целое k-параметрическое семейство, если среди чисел (14) имеется k положительных. Каждому такому решению в силу замен (44), (42) и (37) соответствует решение системы дифференциальных уравнений (1), удовлетворяющее при $t \uparrow \omega$ асимптотическим соотношениям (12), (13). Более того, учитывая вид (22) функций (37) и условия (9)–(11), нетрудно заметить, что все эти решения являются $\mathcal{P}_\omega(\Lambda_1, \dots, \Lambda_{n-1})$-решениями системы (1). Теорема полностью доказана.

Теперь укажем условия, при которых асимптотические представления (12), (13) могут быть записаны в явном виде.

Теорема 2.2. *Пусть* $\Lambda_i \in \mathbb{R}$ $(i = \overline{1, n-1})$, *среди них имеются равные нулю,* $m = \max\{i \in \Im : \Lambda_i = 0\} < n-1$ *и* $\prod\limits_{k=1}^{m+1} \sigma_k \neq \prod\limits_{k=m+1}^{n-1} \Lambda_k$. *Пусть, кроме того, все функции* φ_k $(k = \overline{1,n})$ *удовлетворяют условию* $\mathbf{S}$. *Тогда каждое* $\mathcal{P}_\omega(\Lambda_1, \dots, \Lambda_{n-1})$*-решение (в случае их существования) системы дифференциальных уравнений* (1.1) *допускает при* $t \uparrow \omega$ *асимптотические представления*

$$y_{m+1}(t) = \mu_{m+1} \prod_{k=m+1}^{n-1} \left| Q_k(t)\theta_{k+1}\left(\mu_{k+1}|I_{k+1}(t)|^{\frac{1}{\beta_{k+1}}}\right)\right|^{\frac{\prod\limits_{j=m+2}^{k}\sigma_j}{1-\prod\limits_{j=1}^{n}\sigma_j}} \times$$

$$\times \left| Q_n(t)\left[\theta_{m+1}\left(\mu_{m+1}|I_{m+1}(t)|^{\frac{1}{\beta_{m+1}}}\right)\right]^{\prod\limits_{j=1}^{m}\sigma_j}\right|^{\frac{\prod\limits_{j=m+2}^{n}\sigma_j}{1-\prod\limits_{j=1}^{n}\sigma_j}} [1+o(1)],$$

$$y_i(t) = \mu_i |y_{m+1}(t)|^{\prod\limits_{j=i+1}^{m+1}\sigma_j} \prod_{k=i}^{m} \left| Q_k(t)\theta_{k+1}\left(\mu_{k+1}|I_{k+1}(t)|^{\frac{1}{\beta_{k+1}}}\right)\right|^{\prod\limits_{j=i+1}^{k}\sigma_j} [1+o(1)]$$

$(i = \overline{1,m})$,

$$y_i(t) = \mu_i \, |y_{m+1}(t)|^{\prod\limits_{j=1}^{m+1}\sigma_j \prod\limits_{j=i+1}^{n}\sigma_j} \prod_{k=i}^{n-1} \left| Q_k(t)\theta_{k+1}\left(\mu_{k+1}|I_{k+1}(t)|^{\frac{1}{\beta_{k+1}}}\right)\right|^{\prod\limits_{j=i+1}^{k}\sigma_j} \times$$

$$\times \left| Q_n(t)\left[\theta_{m+1}\left(\mu_{m+1}|I_{m+1}(t)|^{\frac{1}{\beta_{m+1}}}\right)\right]^{\prod\limits_{j=1}^{m}\sigma_j}\right|^{\prod\limits_{j=i+1}^{n}\sigma_j} [1+o(1)]. \quad (i = \overline{m+2, n}). \quad (45)$$

Доказательство. При установлении теоремы 1 было показано, что для существования $\mathcal{P}_\omega(\Lambda_1, \dots, \Lambda_{n-1})$-решений у системы дифференциальных уравнений (1) необходимо, чтобы соблюдались условия (9)–(11) и чтобы каждое такое решение допускало при $t \uparrow \omega$ асимптотические представления (12), (13). Кроме того, было получено для таких решений асимптотическое соотношение (18). Поскольку все функции φ_i $(i = \overline{1,n})$ удовлетворяют условию $\mathbf{S}$, в силу (18) и замечания 2

$$\theta_i(y_i(t)) = \theta_i\left(\mu_i \, |I_i(t)|^{\frac{1}{\beta_i}}\right)[1+o(1)] \quad (i = \overline{1,n}) \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega.$$

Поэтому асимптотические представления (12), (13) можно переписать в виде

$$\frac{y_i(t)}{|y_{i+1}(t)|^{\sigma_{i+1}}} = Q_i(t)\theta_{i+1}\left(\mu_{i+1}\,|I_{i+1}(t)|^{\frac{1}{\beta_{i+1}}}\right)[1+o(1)] \quad (i=\overline{1,n-1}),$$

$$\frac{y_n(t)}{|y_{m+1}(t)|^{\prod\limits_{j=1}^{m+1}\sigma_j}} = Q_n(t)\left[\theta_{m+1}\left(\mu_{m+1}|I_{m+1}(t)|^{\frac{1}{\beta_{m+1}}}\right)\right]^{\prod\limits_{j=1}^{m}\sigma_j}[1+o(1)]$$

при $t\uparrow\omega$. Отсюда последовательно, начиная с $i=n$, получаем все асимптотические представления (45). Теорема доказана.

Замечание 4. *При $m=n-1$ условие $\prod\limits_{k=1}^{m+1}\sigma_k \neq \prod\limits_{k=m+1}^{n-1}\Lambda_k$ заведомо выполняется, поскольку $\prod\limits_{k=1}^{n}\sigma_k \neq 1$. В этом случае теоремы 1 и 2 остаются справедливыми. Этот факт легко может быть установлен по той же самой схеме, с той лишь разницей, что здесь в системе (39) несколько другой вид будет иметь последнее уравнение.*

Установленные теоремы позволяют для системы дифференциальных уравнений (1) выяснить также вопрос о наличии и асимптотике при $t\uparrow\omega$ $\mathcal{P}_\omega(\Lambda_1,\dots,\Lambda_{n-1})$-решений в случае, когда среди Λ_i $(i=\overline{1,n-1})$ имеется одно, например Λ_l, равное $\pm\infty$, а остальные равны отличным от нуля вещественным постоянным. Вводя в этом случае обозначение

$$\Lambda_n = \lim_{t\uparrow\omega}\frac{y_n(t)y_1'(t)}{y_n'(t)y_1(t)}$$

и учитывая замечание 1, приходим к выводу, что $\Lambda_n = 0$.

Принимая во внимание этот факт, перепишем систему дифференциальных уравнений (1), циклически переставляя в ней уравнения, в следующем виде:

$$\begin{cases} \frac{dy_i}{dt} = \alpha_i p_i(t)\varphi_{i+1}(y_{i+1}) \quad (i=\overline{l+1,n-1}),\\ \frac{dy_n}{dt} = \alpha_n p_n(t)\varphi_1(y_1),\\ \frac{dy_i}{dt} = \alpha_i p_i(t)\varphi_{i+1}(y_{i+1}) \quad (i=\overline{1,l-1}). \end{cases} \tag{46}$$

Значит, вопрос для системы (1) о наличии и асимптотике $\mathcal{P}_\omega(\Lambda_1,\dots,\Lambda_{n-1})$-решений равносилен вопросу для системы (46) о наличии и асимптотике $\mathcal{P}_\omega(\Lambda_{l+1},\dots,\Lambda_n,\Lambda_1,\dots,\Lambda_{l-1})$-решений, который в свою очередь уже может быть выяснен с использованием теорем 1, 2 и замечания 4 при условии, что $\sigma_1\prod\limits_{k=l+1}^{n-l}\sigma_k \neq$ $\neq \prod\limits_{k=1}^{l-1}\Lambda_k$.

Чтобы сформулировать результаты, относящиеся к данному случаю, возникает необходимость, в связи с изменением порядка следования уравнений в системе дифференциальных уравнений, переопределить необходимые для этой цели вспомогательные обозначения.

Введем множества

$$\mathfrak{I}_0 = \{1, \dots, n\} \setminus \{l\}, \quad \mathfrak{I} = \{i \in \mathfrak{I}_0 \,:\, 1 - \Lambda_i \sigma_{i+1} \neq 0\}, \quad \bar{\mathfrak{I}} = \mathfrak{I}_0 \setminus \mathfrak{I}.$$

Далее, учитывая, что $\sigma_1 \prod\limits_{k=l+1}^{n-l} \sigma_k \neq \prod\limits_{k=1}^{l-1} \Lambda_k$, введем функции I_i, Q_i $(i = \overline{1,n})$ и отличные от нуля постоянные β_i $(i = \overline{1,n})$, полагая

$$I_i(t) = \begin{cases} \int\limits_{A_i}^{t} p_i(\tau)\, d\tau & \text{при} \quad i \in \mathfrak{I}, \\ \int\limits_{A_i}^{t} p_i(\tau) I_{i+1}(\tau)\, d\tau & \text{при} \quad i \in \bar{\mathfrak{I}}, \\ \int\limits_{A_l}^{t} p_l(\tau) q_{n-l+1}(\tau)\, d\tau & \text{при} \quad i = l, \end{cases} \qquad \beta_i = \begin{cases} 1 - \Lambda_i \sigma_{i+1}, & \text{если} \quad i \in \mathfrak{I}, \\ \beta_{i+1} \Lambda_i, & \text{если} \quad i \in \bar{\mathfrak{I}}, \\ 1 - \dfrac{\sigma_1 \prod\limits_{k=l+1}^{n-l} \sigma_k}{\prod\limits_{k=1}^{l-1} \Lambda_k} & \text{при} \quad i = l, \end{cases}$$

$$Q_i(t) = \begin{cases} \alpha_i \beta_i I_i(t) & \text{при} \quad i \in \mathfrak{I} \cup \{l\}, \\ \frac{\alpha_i \beta_i I_i(t)}{I_{i+1}(t)} & \text{при} \quad i \in \bar{\mathfrak{I}}, \end{cases}$$

где каждый из пределов интегрирования $A_i \in \{\omega, a\}$ $(i \in \mathfrak{I})$, $A_l \in \{\omega, b\}$ $(b \in [a, \omega[)$ и выбран так, чтобы соответствующий ему интеграл I_i стремился либо к нулю, либо к ∞ при $t \uparrow \omega$,

$$q_{n-l+1}(t) = \theta_{l+1} \left(\mu_{l+1} |I_{l+1}(t)|^{\frac{1}{\beta_{l+1}}} \right) |Q_{n-l}(t)|^{\prod\limits_{j=l+1}^{n-l} \sigma_j} \times$$

$$\times \prod_{k=l+1}^{n-l-1} \left| Q_k(t) \theta_{k+1} \left(\mu_{k+1} |I_{k+1}(t)|^{\frac{1}{\beta_{k+1}}} \right) \right|^{\prod\limits_{j=l+1}^{k} \sigma_j}.$$

Кроме того, введем числа

$$A_i^* = \begin{cases} 1, & \text{если } A_i = a, \\ -1, & \text{если } A_i = \omega \end{cases} \quad (i \in \mathfrak{I}_0), \quad A_l^* = \begin{cases} 1, & \text{если } A_l = b, \\ -1, & \text{если } A_l = \omega, \end{cases}$$

позволяющие определять знаки функций I_i $(i \in \mathfrak{I}_0)$ на промежутке $]a, \omega[$ и функции I_l на промежутке $]b, \omega[$.

Тогда из теорем 1, 2 с учетом замечания 4 вытекают следующие утверждения.

Следствие 1. *Пусть для некоторого* $l \in \{1, \dots, n-1\}$ $\Lambda_l = \pm\infty$ *и* Λ_i — *отличные от нуля вещественные постоянные при* $i \in \{1, \dots, n-1\} \setminus \{l\}$. *Пусть, кроме того, соблюдается неравенство* $\sigma_1 \prod\limits_{k=l+1}^{n-l} \sigma_k \neq \prod\limits_{k=1}^{l-1} \Lambda_k$ *и функции* φ_k *при* $k \in \{l+1, \dots, n-l\}$ *удовлетворяют условию* **S**. *Тогда для существования у системы дифференциальных уравнений* (1) $\mathcal{P}_\omega(\Lambda_1, \dots, \Lambda_{n-1})$*-решений необходимо, а если алгебраическое уравнение*

$$(1 + \lambda) \prod_{j=1}^{l-1} (b_j + \lambda) = \prod_{1}^{n} \sigma_j \prod_{j=1}^{l-1} b_j, \tag{47}$$

где

$$b_j = \left(\prod_{k=j}^{l-1} \Lambda_k\right)^{-1} \qquad (j = \overline{1, l-1}),$$

не имеет корней с нулевой действительной частью, то и достаточно, чтобы

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{I_i(t)I'_{i+1}(t)}{I'_i(t)I_{i+1}(t)} = \Lambda_i \frac{\beta_{i+1}}{\beta_i} \quad \text{при} \quad i \in \Im_0 \setminus \{n\}, \quad \lim_{t\uparrow\omega} \frac{I_n(t)I'_1(t)}{I'_n(t)I_1(t)} = 0$$

и для каждого $i \in \{1, \dots, n\}$ выполнялись знаковые условия

$$A^*_i\beta_i > 0 \quad \text{при} \quad Y^0_i = \pm\infty, \quad A^*_i\beta_i < 0 \quad \text{при} \quad Y^0_i = 0,$$

$$\operatorname{sign}[\alpha_i A^*_i \beta_i] = \mu_i.$$

Более того, компоненты каждого такого решения допускают при $t \uparrow \omega$ асимптотические представления

$$\frac{y_i(t)}{\varphi_{i+1}(y_{i+1}(t))} = Q_i(t)[1 + o(1)] \quad \text{при} \quad i \in \Im_0,$$

$$\frac{y_l(t)}{[\varphi_1(y_1(t))]^{\prod\limits_{i=l+1}^{n-m}\sigma_i}} = Q_l(t)[1 + o(1)],$$

причем существует целое k-параметрическое семейство таких решений в случае, когда среди чисел

$$\gamma_i = \begin{cases} \beta_i A^*_i & \text{при} \quad i \in \Im \setminus \{1, \dots, l-1\}, \\ \beta_i A^*_i A^*_{i+1} & \text{при} \quad i \in \tilde{\Im} \setminus \{1, \dots, l-1\}, \\ A^*_l \left(\dfrac{\sigma_1 \prod\limits_{j=l+1}^{n-l} \sigma_j}{\prod\limits_{j=1}^{l-1} \Lambda_j} - 1 \right) \operatorname{Re} \lambda^0_{i-m} & \text{при} \quad i \in \{1, \dots, l\}, \end{cases}$$

где λ^0_j $(j = \overline{1, l})$ — корни (с учетом кратных) алгебраического уравнения (47), имеется k положительных.

Следствие 2. *Пусть для некоторого $l \in \{1, \dots, n-1\}$ $\Lambda_l = \pm\infty$, Λ_i — отличные от нуля вещественные постоянные при $i \in \{1, \dots, n-1\} \setminus \{l\}$ и $\sigma_1 \prod\limits_{k=l+1}^{n-l} \sigma_k \neq \prod\limits_{k=1}^{l-1} \Lambda_k$. Пусть, кроме того, все функции φ_i $(i = \overline{1, n})$ удовлетворяют условию* **S**. *Тогда каждое $\mathcal{P}_\omega(\Lambda_1, \dots, \Lambda_{n-1})$-решение (в случае их существования) системы дифференциальных уравнений (1) допускает при $t \uparrow \omega$ асимптотические представления*

$$y_1(t) = \mu_1 \prod_{k=1}^{l-1} \left| Q_k(t)\theta_{k+1}\left(\mu_{k+1}|I_{k+1}(t)|^{\frac{1}{\beta_{k+1}}}\right)\right|^{\frac{\prod\limits_{j=m+2}^{k}\sigma_j}{1-\prod\limits_{j=1}^{n}\sigma_j}} \times$$

$$\times \left| Q_l(t) \left[\theta_1 \left(\mu_1 |I_1(t)|^{\frac{1}{\beta_1}} \right) \right]^{\prod\limits_{j=l+1}^{n-m} \sigma_j} \right|^{\frac{\prod\limits_{j=2}^{l} \sigma_j}{1-\prod\limits_{j=1}^{n} \sigma_j}} [1+o(1)],$$

$$y_i(t) = \mu_i |y_1(t)|^{\sigma_1 \prod\limits_{j=i+1}^{n-m} \sigma_j} \prod_{k=i}^{n-m} \left| Q_k(t) \theta_{k+1} \left(\mu_{k+1} |I_{k+1}(t)|^{\frac{1}{\beta_{k+1}}} \right) \right|^{\prod\limits_{j=i+1}^{k} \sigma_j} [1+o(1)]$$

$(i = \overline{l+1, n-m})$,

$$y_i(t) = \mu_i \, |y_1(t)|^{\sigma_1 \prod\limits_{j=l+1}^{n-m} \sigma_j \prod\limits_{j=i+1}^{l} \sigma_j} \prod_{k=i}^{l-1} \left| Q_k(t) \theta_{k+1} \left(\mu_{k+1} |I_{k+1}(t)|^{\frac{1}{\beta_{k+1}}} \right) \right|^{\prod\limits_{j=i+1}^{k} \sigma_j} \times$$

$$\times \left| Q_l(t) \left[\theta_1 \left(\mu_1 |I_1(t)|^{\frac{1}{\beta_1}} \right) \right]^{\prod\limits_{j=l+1}^{n-m} \sigma_j} \right|^{\prod\limits_{j=i+1}^{l} \sigma_j} [1+o(1)]. \quad (i = \overline{2, l}).$$

Заключение.

В данной работе для циклической системы дифференциальных уравнений (1) с правильно меняющимися нелинейностями введен класс так называемых $\mathcal{P}_\omega(\Lambda_1, \dots, \Lambda_{n-1})$-решений и исследован вопрос о наличии таких решений в особом случае, когда $\Lambda_i \in \mathbb{R}$ $(i = \overline{1, n-1})$ и среди них имеются равные нулю. Особенность данного случая потребовала наложения дополнительного условия **S** на функции φ_i $(i = \overline{1, m})$, где $m = \max\{i \in \{1, \dots, n-1\} : \Lambda_i = 0\}$, и выполнения неравенства $\prod\limits_{k=1}^{m+1} \sigma_k \neq \prod\limits_{k=m+1}^{n-1} \Lambda_k$. В результате были получены необходимые и достаточные условия существования у системы (1) $\mathcal{P}_\omega(\Lambda_1, \dots, \Lambda_{n-1})$-решений, а также неявные асимптотические при $t \uparrow \omega$ $(\omega \leq +\infty)$ формулы для компонент таких решений. Явные асимптотические формулы для компонент данных решений установлены при предположении, что все нелинейности удовлетворяют условию **S**. Установленные теоремы позволили также для системы уравнений (1) получить результаты о существовании и асимптотике при $t \uparrow \omega$ $\mathcal{P}_\omega(\Lambda_1, \dots, \Lambda_{n-1})$-решений в случае, когда среди Λ_i имеется одно равное $\pm\infty$, а остальные равны отличным от нуля вещественным числам.

Результаты работы могут быть использованы, например, для установления асимптотики решений существенно нелинейных дифференциальных уравнений вида

$$y'' = p(t)\varphi_1(y)\varphi_2(y') \quad \text{и} \quad y^{(n)} = p(t)\varphi(y),$$

где $p : [a, \omega[\longrightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$ — непрерывная функция и $\varphi, \varphi_1 : \Delta(Y_0^0) \longrightarrow]0, +\infty[$, $\varphi_2 : \Delta(Y_1^0) \longrightarrow]0, +\infty[$ ($\Delta(Y_i^0)$ — односторонняя окрестность Y_i^0) — непрерывно дифференцируемые и правильно меняющиеся при $y \to Y_0^0$ и $y' \to Y_1^0$ функции некоторых порядков.

1. **Сенета Е.** Правильно меняющиеся функции [текст] / Е. Сенета. – М.: Наука, 1985. – 144 с.
2. **Мирзов Д. Д.** Об асимптотических свойствах решений одной системы типа Эмдена–Фаулера [текст] / Д. Д. Мирзов // Дифференц. уравнения. – 1985. – 21, № 9. – С. 1498–1504.
3. **Мирзов Д. Д.** Некоторые асимптотические свойства решений одной системы типа Эмдена–Фаулера [текст] / Д. Д. Мирзов // Дифференц. уравнения. – 1987. – 23, № 9. – С. 1519–1532.
4. **Мирзов Д. Д.** Асимптотические свойства решений систем нелинейных неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений [текст] / Д. Д. Мирзов. – Майкоп: Адыгейское книжное издательство. – 1993. – 132 с.
5. **Евтухов В. М.** Асимптотические представления правильных решений одной двумерной системы дифференциаальных уравнений [текст] / В. М. Евтухов // Доп. НАН України. – 2002. – № 4. – С. 11–17.
6. **Евтухов В. М.** Асимптотические представления правильных решений одной полулинейной двумерной системы дифференциальных уравнений [текст] / В. М. Евтухов // Доп. НАН України. – 2002. – № 5. – С. 11–17.
7. **Евтухов В. М.** Условия существования исчезающих в особой точке решений у вещественных неавтономных систем квазилинейных дифференциальных уравнений [текст] / В. М. Евтухов, А. М. Самойленко // Укр. Мат. Ж. – 2010. – Т. 62, № 1. – С. 52–80.
8. **Евтухов В. М.** Об исчезающих на бесконечности решениях неавтономных систем квазилинейных дифференциальных уравнений [текст] / В. М. Евтухов // Дифференц. уравнения. – 2003. – 39, № 4. – С. 441–452.