

УДК 624.131

Д. В. Мелконян, канд. фіз.-мат. н., доц.
Одеський національний університет ім. І. І. Мечникова,
кафедра інженерної геології та гідрогеології
вул. Дворянська, 2, 65026 Одеса

КОМПЛЕКСНИЙ ПОТЕНЦІАЛ ГЕОДИНАМІЧНОГО ПОЛЯ І ЙОГО ЗВ'ЯЗОК З ЕНЕРГІЄЮ

Геодинамічне поле в масивах гірських порід розглянуто як поле деформації і описано з енергетичної точки зору. Поверхні рівних потенціалів уявлені у вигляді живих перерізів потоку енергії деформації, а лінії деформації пов'язані з розподілом потоку енергії деформації. За допомогою комплексного потенціалу встановлено зв'язок поля деформації з теорією функцій комплексної змінної.

Подібний підхід може бути застосованим для оцінки напружено-деформованого стану і стійкості зсувних схилів та укосів.

Ключові слова: деформація, енергія, потенційне поле, напружено-деформований стан, зсувний схил

В теорії геодинамічного поля використовуються методи аналогового моделювання, що полягають у використанні аналогії між фізичними процесами, які описуються однотипними математичними виразами. Серед таких методів важливе місце займає метод аналогій, оснований на використанні моделюючих пристроїв, фізичні процеси в яких описуються рівнянням Лапласа.

Метод електрогеодинамічних аналогій, що застосовується у теорії геодинамічного поля [1, 2], базується на використанні аналогії між геодинамічним і електричним стаціонарними полями, які описуються аналогічними математичними рівняннями. У випадку електричного поля рівнянню Лапласа задовольняє потенціал електричного поля в тонкому шарі провідної речовини; у випадку геодинамічного поля означеному рівнянню задовольняє потенціал геодинамічного поля в масиві гірських порід.

Як відомо, геологічні неоднорідності в масивах гірських порід впливають на характер розподілу напруг [3, 4]. У зв'язку з цим, вивчення впливу особливостей геологічної будови на характер деформації геодинамічного поля (або сітки, яка складається з систем взаємно ортогональних сімейств кривих: ізопотенційних і силових ліній [1, 2, 5]) важливо для оцінки напружено-деформованого стану і стійкості зсувних схилів. Так, виявлено, що на межі розділу двох шарів з різними деформаційними характеристиками (модуль деформації E_d відрізняється у 10–200 разів) [1, 2] відбувається заломлення ізопотенційних ліній, у зв'язку з чим в межах жорстких шарів виникає концентрація всіх видів напруг (нормальних, головних і дотичних).

Важливо відзначити, що потенційні лінії концентруються у жорстких шарах, отже, дані шари є місцями концентрації напруг, а силові лінії концентруються у слабких шарах, тобто слабкі шари є підготованими поверхнями зміщення. Закони заломлення силових і ізопотенційних ліній, згідно з [1, 2], визначаються, відповідно:

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{E_2^y}{E_1^y} \quad (1)$$

де E_1^y, E_2^y — модулі пружності шарів 1 та 2, відповідно; α_1 і α_2 — кути між силовою лінією і нормаллю n до поверхні розділу шарів 1 та 2,

$$\frac{\operatorname{tg} \beta_1}{\operatorname{tg} \beta_2} = \frac{E_1^y}{E_2^y} \quad (2)$$

де β_1 і β_2 — кути між ізопотенційною лінією і нормаллю n до поверхні розділу шарів 1 та 2.

Згідно з формулами (1) і (2), заломлення силових та ізопотенційних ліній на межі розділу двох шарів з різними деформаційними властивостями відбувається таким чином [1, 2]:

- при вході в слабе середовище (з меншим модулем пружності) силові лінії наближаються до межі розділу шарів (або відхиляються від нормалі до поверхні розділу шарів); концентрація цих ліній в межах більш слабого шару зростає;
- при вході в жорстке середовище (з більшим модулем пружності) ізопотенційні лінії відхиляються від нормалі до поверхні розділу двох шарів, внаслідок чого їхня концентрація в цьому середовищі зростає.

При збільшенні відношення модулів пружності ($E_1^y : E_2^y$ або $E_2^y : E_1^y$) відбуваються більш значні деформації геодинамічної сітки, що видно з формул (1) і (2). Окрім цього, на характер розподілу ліній геодинамічного поля впливає конфігурація схилу [6].

Дослідження напруженого стану і стійкості зсувних схилів на північно-західному узбережжі Чорного моря [1] методами теорії геодинамічного поля показують, що у зсувних схилах із заляганням вапняку у середній частині схилу відбувається концентрація нормальних і дотичних напруг. Значення даних напруг виявляються найбільш високими у порівнянні з тими, що спостерігаються у зсувних схилах із заляганням шару вапняку в їхній основі або у верхній частині.

Метод оцінки деформації геодинамічної сітки у масивах гірських порід [1, 2] використовує аналогію між електричним і геодинамічним стаціонарними полями, що описуються законами Ома і Гука, відповідно:

$$J = \frac{1}{\rho} E \quad (3)$$

$$\lambda = \frac{1-\mu}{E_y} F \quad (4)$$

де ρ — питомий електричний опір, E — вектор напруженості електричного поля, J — густина струму, μ — коефіцієнт Пуассона, E_y — модуль пружності, F — вектор геостатичного поля ($F = \text{grad}\theta$, де потенціал дорівнює $\theta = \sigma_{xz} + \sigma$; σ_x і σ_z — головні напруги); $\lambda = \lambda_x + \lambda_z$; λ_x і λ_z — відповідно проекції градієнту (або проекції вектору) швидкості деформації на осі Ox та Oz .

При розв'язанні багатьох задач, стосовно напруженого стану схилів та укосів, в роботах [1, 2] розглянуто нові граничні умови: були задані граничні значення гармонійної функції q замість граничних значень дотичних і нормальних напруг, що звичайно використовуються у задачах механіки. У зв'язку з цим модель описується диференціальним рівнянням Лапласа

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} = 0. \quad (5)$$

В цьому випадку геодинамічне поле є потенційним, соленоїдним і безвихровим [7, 8, 9]. Скалярна величина $\theta(x, z)$ називається фізичним потенціалом геодинамічного поля.

В даній роботі геодинамічне поле розглядається як потенційне поле деформації і вивчається з енергетичної точки зору. Сітка поля уявлена системою ізопотенційних ліній і ліній деформації.

З урахуванням закону Гука (4) у диференціальному вигляді, з рівняння (5) можна отримати

$$\frac{\partial \lambda_x}{\partial x} + \frac{\partial \lambda_z}{\partial z} = 0. \quad (6)$$

Дане рівняння назовемо рівнянням нерозривності ліній деформації геодинамічного поля. Враховуючи, що

$$\lambda_x = \frac{\partial \epsilon}{\partial x}; \quad \lambda_z = \frac{\partial \epsilon}{\partial z}, \quad (7)$$

де $\epsilon = \epsilon_x + \epsilon_z$; ϵ_x і ϵ_z — проекції поздовжньої деформації, відповідно, на осі Ox і Oz , з рівнянь (7) отримаємо

$$\frac{\partial^2 \epsilon}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \epsilon}{\partial z^2} = 0, \quad (8)$$

тобто ϵ задовольняє рівнянню Лапласа і, таким чином, є гармонійною функцією в області деформації. Скалярна величина $\epsilon(x, z)$ називається потенціалом швидкості деформації геодинамічного поля.

Потенційні функції θ і ϵ породжують векторне силове поле [1, 5] і векторне поле деформацій [7], відповідно. Скалярні поля $\theta(x, z)$ і $\epsilon(x, z)$ можна якісно охарактеризувати, знаючи векторні поля градієнту (силове поле і поле деформації).

Інтегруючи рівняння (5), отримаємо функцію $\theta = f(x, z)$. Задавши для цієї функції постійні значення $\theta(x, z) = \text{const}$, отримаємо рівняння плоских кривих — ліній рівних потенціалів.

Розглянемо поверхню рівних потенціалів ($\theta = \text{const}$). Проведемо в точці К цієї поверхні дотичну τ і вектор швидкості деформації λ (рис. 1). З аналітичної геометрії відомо, що кут α' , який утворюється вектором λ з дотичною τ , визначається як:

$$\cos \alpha' = \frac{\lambda_x dx + \lambda_y dy + \lambda_z dz}{\lambda d\tau} \quad (9)$$

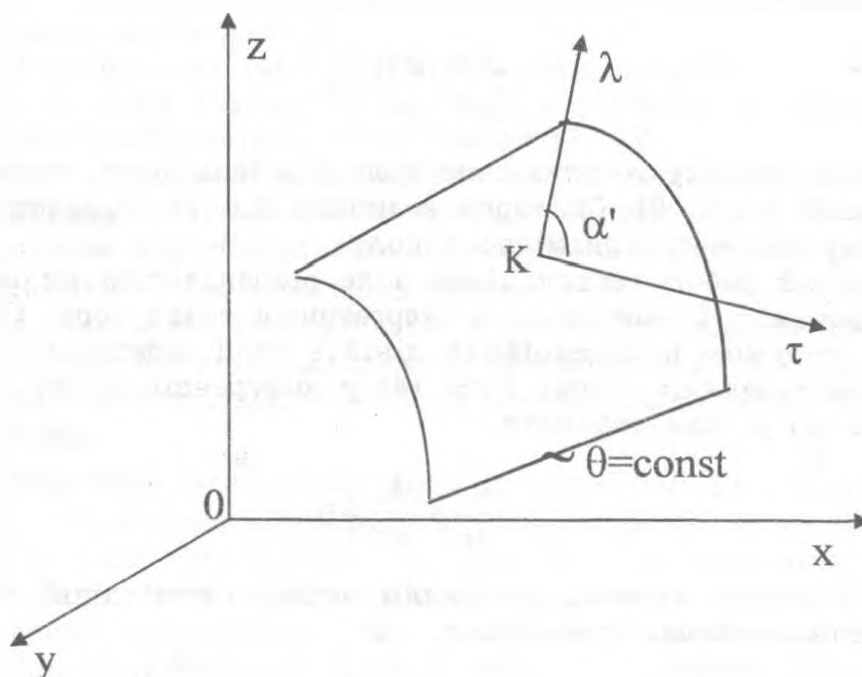


Рис. 1. Поверхня рівних потенціалів

Виходячи з формули (4), у випадку просторової задачі числівник вираження (9) можна уявити у вигляді:

$$\lambda_x dx + \lambda_y dy + \lambda_z dz = \frac{1-\mu}{E_y} d\theta. \quad (10)$$

Однак $d\tau$ розташований на поверхні рівних потенціалів $\theta = \text{const}$, на якій $d\theta = 0$. З цього випливає, що $\cos \alpha' = 0$, отже $\alpha' = \frac{\pi}{2}$. Таким чином,

вектор швидкості деформації у будь-якій точці спрямований по нормалі до поверхні рівних потенціалів, що проходить через точку К.

Тоді можна зробити висновок, що лінії деформації є ортогональними до поверхонь рівних потенціалів (для об'ємної задачі) або до ліній рівних потенціалів (для плоскої задачі). Звідси випливає, що поверхні рівних потенціалів є живими перерізами потоку енергії деформації. У випадку плоскої задачі лінії деформації будуть плоскими кривими, а поверхні рівних потенціалів — циліндричними поверхнями.

Рівняння (6) визначає умову, за якою величина $-\lambda_x dx + \lambda_z dz$ є повним диференціалом деякої функції $\psi(x, z)$. Тоді диференціальне рівняння ліній деформації визначається

$$d\psi = -\lambda_x dx + \lambda_z dz = 0, \quad (11)$$

$$\lambda_x = \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad \lambda_z = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (12)$$

З рівняння (11) випливає, що

$$\frac{dx}{\lambda_x} = \frac{dz}{\lambda_z} \quad (13)$$

тобто напрямлення дотичної до лінії деформації співпадає з напрямленням вектору λ . В такому випадку можна зробити висновок, що лінією деформації геодинамічного поля називається така лінія, дотична до кожної точки якої співпадає з напрямком вектору швидкості деформації λ в цій точці.

Визначимо фізичний зміст функції ψ . Загальний інтеграл рівняння (11) буде: $\psi(x, z) = \text{const}$. Звідси випливає, що на лінії деформації функція ψ зберігає постійне значення, різне для різних ліній деформації. Тому функцію ψ назовемо функцією деформації. Фізичний зміст функції деформації ψ пов'язаний з розподілом потоку енергії деформації.

Нехай CD — довільна крива в області деформації. Прийmemo цю криву за напрямну циліндричної поверхні (рис. 2). Розглянемо частину цієї поверхні з основою CD і висотою l . Для визначення витрати потоку енергії через цю криву розглянемо довільний нескінченно малий елемент ab кривої CD (рис. 3). Витрата енергії dQ через цей елемент з огляду на нерозривність течії потоку дорівнює алгебраїчній сумі енергетичних втрат через елементи be та ea , що, відповідно, дорівнюють $\lambda_x dz$ і $\lambda_z(-dx)$, тобто $dQ = -\lambda_z dx + \lambda_x dz = d\psi$. Тоді витрата енергії через криву CD буде

$$Q = \int_{CD} dQ = \int_{CD} d\psi = \psi_C - \psi_D,$$

де ψ_C та ψ_D — значення функції деформації в точках C і D.

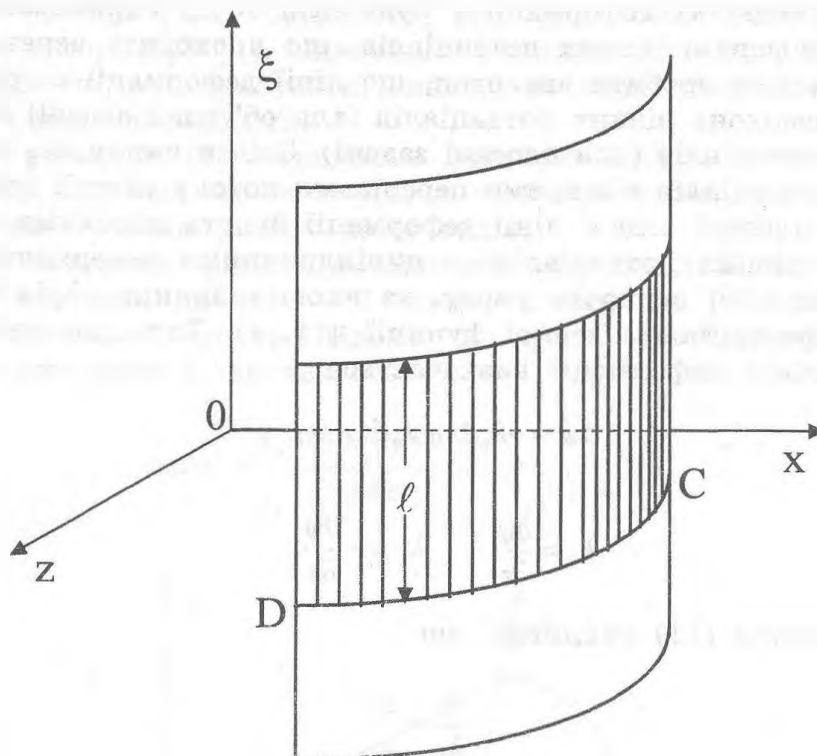


Рис. 2. Площина деформації

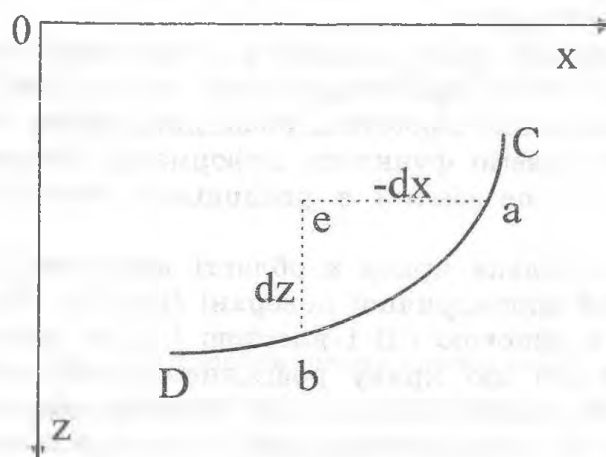


Рис. 3. Витрата енергії через криву CD області деформації

Таким чином, витрата енергії через довільну криву в області деформації дорівнює різниці значень функції деформації на кінцях цієї кривої.

З огляду на рівняння (7) і (12), потенціал швидкості деформації і функція деформації будуть пов'язані між собою умовами Ейлера-Даламбера

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad \frac{\partial \epsilon}{\partial z} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (14)$$

тобто ϵ і ψ є спряжено-гармонійними функціями. З (14) можна бачити, що функція ψ теж задовольняє рівнянню Лапласа

$$\Delta \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0, \quad (15)$$

тобто функція деформації, подібно потенціалу швидкості деформації, буде гармонійною функцією координат точок області деформації.

Потенціал геодинамічного поля деформації з погляду теорії функцій комплексної змінної. Застосування функцій комплексної змінної може суттєво полегшити рішення крайових задач для двовимірного рівняння Лапласа. Іншими словами, цей шлях може значно поширити коло доступних дослідженню задач про плоскі деформації зсувних схилів [10].

Введемо в розгляд дві комплексні змінні

$$f = x + iz; \quad \omega = \epsilon + i\psi. \quad (16)$$

Перша з цих змінних є комплексною координатою точок в області деформації, друга — деякою функцією змінної f , яка називається комплексним потенціалом деформації. Оскільки речовинна частина ϵ і коефіцієнт при уявній частині ψ функції ω будуть спряжено-гармонійними функціями, функція ω буде аналітичною в деформованій області масивів гірських порід. Остання обставина встановлює зв'язок плоскої стаціонарної деформації з теорією функції комплексної змінної, що є необхідним при рішенні крайової задачі для рівняння Лапласа.

Розглянемо комплексну змінну $\lambda_x - i\lambda_z$. Назвемо її комплексною швидкістю деформації. Диференціюючи функцію ω по змінній f і, враховуючи рівняння (7) і (12), знайдемо, що

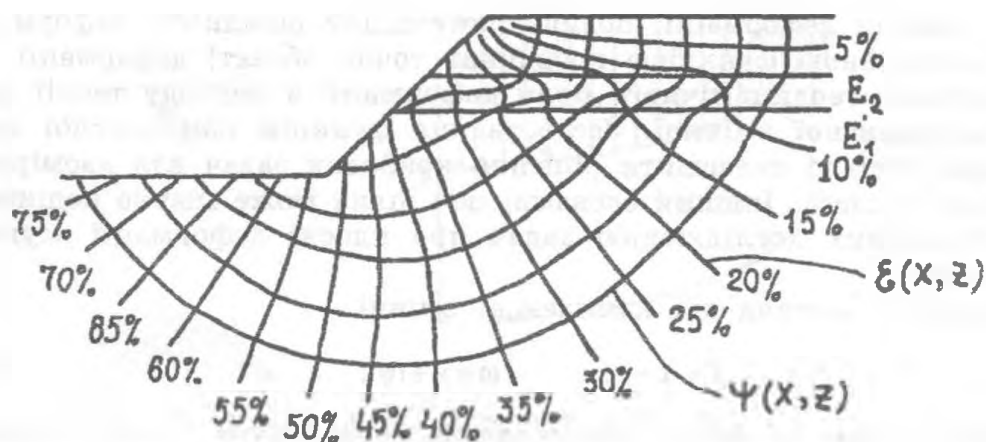
$$\lambda_x - i\lambda_z = \omega'(f) \quad (17)$$

де $\omega'(f)$ — похідна функції ω по змінній f . Оскільки похідна аналітичної функції також буде аналітичною функцією, функція $\lambda_x - i\lambda_z$ буде аналітичною в області деформації. Якщо для даної задачі буде визначений комплексний потенціал деформації w , з вищезазначених залежностей можна визначити багато характеристик геодинамічного поля деформації: деформацію, швидкість деформації, потенціал швидкості деформації геодинамічного поля і т. д.

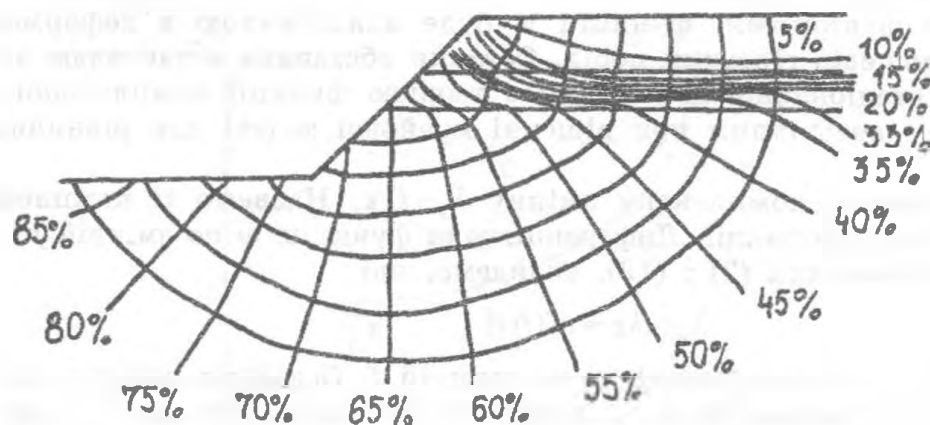
Запропоновану в даній роботі методику можна застосувати при розв'язанні задач про напружено-деформований стан і стійкість зсув-

них схилів засобами теорії функції комплексної змінної. Наприклад, з застосуванням комплексного методу граничних елементів (КМГЕ) [11] рівняння Лапласа і теорія потенціалу дозволяють перейти від інтегрування по області до інтегрування по межі, і, завдяки цьому, значно спрощуються обчислення і чисельне моделювання, тобто, задаючи значення функцій ϵ і ψ на денній поверхні укосу і розв'язуючи задачу Діріхле, можна визначити функції ϵ або ψ всередині масиву порід і побудувати сітку поля деформації.

На рис. 4 а і 4 б наведена геодинамічна сітка в межах зсувного схилу з крутістю 45° при співвідношенні модулів пружності $E_1:E_2 = 10:1$ і $E_1:E_2 = 1:10$, відповідно.



а



б

Рис.4. Деформації геодинамічної сітки в укосі з крутістю 45° і співвідношенням деформаційних характеристик

Таким чином, розгляд потенційного геодинамічного поля з енергетичної точки зору дозволяє уявити лінії геодинамічного поля у вигляді носіїв енергії деформації, в яких енергія може як зберігатися, так і розподілятися через них. Такий підхід дозволяє використовувати закони заломлення ізопотенційних та силових ліній (рівняння (1) і (2)), створювати комплексний потенціал поля деформації і будувати геодинамічну сітку, ступінь деформації якої і оцінює напругу та стійкість схилів і укосів з урахуванням енергії деформації гірських порід. З рівнянь (6) і (7) видно, що при накопиченні великої кількості енергії деформації у масиві гірських порід може відбутися обрив ліній рівних потенціалів внаслідок розриву суцільності масиву порід.

Література

1. Зелинский И. П. Теоретические и методические основы моделирования оползней: Дис. ... докт. геол.-мин. наук. — Одесса, 1979. — 395 с.
2. Зелинский И. П. Вопросы теории геодинамического поля в связи с решением инженерно-геологических задач // Инж. геология. — 1987. — № 6. — С. 28–35.
3. Каменова Ю. А., Максимов С. Н., Попов И. В. Опыт моделирования напряженного состояния массива пород в инженерной геологии // Вопросы инженерной геологии и грунтоведения. — Вып. 1. — М.: Изд-во МГУ, 1963.
4. Амброз Ю. А., Федорченко Т. П. К изучению генезиса поверхностей выравнивания северо-западного Причерноморья // Геология побережья и дна Черного и Азовского морей в пределах УССР. — Вып. 2. — 1968.
5. Зелинский И. П., Мелконян Д. В., Янковой А. П. Методика оценки напряженно-деформированного состояния и устойчивости оползневых склонов неоднородного геологического строения // Геологічний журнал. — 2000. — № 3. — С. 74–81.
6. Емельянова Е. П. Основные закономерности оползневых процессов. — М.: Недра, 1972. — 310 с.
7. Овчинников И. К. Теория поля. — М.: Недра, 1979. — 352 с.
8. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1972. — 735 с.
9. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. — М.: Наука, 1987. — 688 с.
10. Мелконян Д. В. Комплексний метод граничних елементів стосовно напружено-деформованого стану зсувних схилів // Вісник Одеського державного університету. — 1999. — Том 4, вип. 5. — С. 55–59.
11. Hromadka II T. V., Lai C. The complex variable boundary element method in engineering analysis. — New York: Springer-Verlag, 1987. — 389 p.

Д. В. Мелконян

Одесский национальный университет им. И. И. Мечникова,
кафедра инженерной геологии и гидрогеологии
ул. Дворянская, 2, 65026 Одесса

КОМПЛЕКСНЫЙ ПОТЕНЦИАЛ ГЕОДИНАМИЧЕСКОГО ПОЛЯ И ЕГО СВЯЗЬ С ЭНЕРГИЕЙ

Резюме

Геодинамическое поле в массивах горных пород рассмотрено как поле деформации и описано с энергетической точки зрения. Поверхности равных потенциалов представлены в виде живых сечений потока энергии деформации, а линии деформации связаны с распределением потока энергии деформации. Посредством комплексного потенциала установлена связь поля деформации с теорией функций комплексной переменной.

Подобный подход может быть применен для оценки напряженно-деформируемого состояния и устойчивости оползневых склонов и откосов.

Ключевые слова: деформация, энергия, потенциальное поле, напряженно-деформируемое состояние, оползневый склон

D.V. Melkonyan

I. I. Mechnikov Odessa National University
Department of Engineering Geology and Hydrogeology
Dvorianskaja St., 2, Odessa, 65026, Ukraine

THE COMPLEX POTENTIAL OF GEODYNAMIC FIELD AND ITS CONNECTION WITH THE ENERGY

Summary

The geodynamic field in the rock masses as field of deformation is suggested and from point of view of energy is described. In this connection the equipotential surfaces as natural section of deformation stream energy are presented, while the deformation lines with the deformation energy stream distribution are connected.

By means of complex potential the connection of deformation field with the complex variable function is established.

This approach can be used for landslides stress strain and stability estimation.

Key words: deformation, energy, potential field, stress strain, landslide