

УДК 539.371

А. М. Вернодубов, Г. Я. Попов, Ю. С. Процеров

Одесский государственный университет им. И. И. Мечникова

ЗАДАЧИ О НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ СФЕРИЧЕСКИ-СЛОИСТЫХ СРЕД ПРИ СЦЕПЛЕНИИ СЛОЁВ И ГЛАДКОМ КОНТАКТЕ МЕЖДУ НИМИ

У статті розглядається сферично шарувате середовище. Пружні параметри прошарків стрибкоподібно змінюються на сферичних поверхнях. Між прошарками є дефекти у вигляді тріщин. Викладається метод розв'язання задачі концентрації напружень біля цих дефектів при зчепленні прошарків і при гладкому контакті між ними. Спочатку розглядаються загальні випадки, потім приводяться приклади розшукування напружень в двошаровому необмеженому середовищі (без дефектів).

В статье рассматривается сферически слоистая среда. Упругие параметры слоев скачкообразно меняются на сферических поверхностях. Между слоями имеются дефекты в виде трещин. Излагается метод решения задачи концентрации напряжений возле этих дефектов при сцеплении слоев и при гладком контакте между ними. Сначала рассматриваются общие случаи, потом приводятся примеры нахождения напряжения в неограниченной двухслойной среде (без дефектов).

The spherical stratified medium is considered. The elastic parameters of stratum jumpily change on the spherical surfaces. There are defects in the form of cracks between stratum. The method of stress concentration problem solving near these defects for adhesion of stratum and smooth contact between them is stated. At first the general cases are considered, then examples of stress obtaining in the unlimited two-stratified medium (without defects) are given.

Введение. В работе [1] была рассмотрена задача определения напряженно деформируемого состояния неограниченной упругой среды в сферической системе координат r, θ, φ . При этом от смещений u_r, u_θ, u_φ был осуществлен переход к величинам $[u, v, w] = 2G[u_r, u_\theta, u_\varphi]$. (G, μ – модуль сдвига и коэффициент Пуассона упругой среды). Далее вместо величин u и w были введены новые функции z и z^* , а вместо касательных напряжений $\tau_{r\varphi} = \tau_\varphi$ и $\tau_{r\theta} = \tau_\theta$ функции τ и τ^* по формулам (1.1) [1]. При помощи интегральных преобразований Фурье (1.2) [1] и Лежандра (1.3) [1], для которых известны формулы обращения (1.4) [1], были получены выражения для трансформант Фурье-Лежандра искоемых величин

$$\begin{aligned} z_{nk}^*(r) &= X_{nk} \cdot r^k + Y_{nk} \cdot r^{-k-1}, \quad 2\tau_{nk}^*(r) = (k-1)X_{nk}r^{k-1} - (k-2)Y_{nk}r^{-k-2} \\ z_{nk}(r) &= -k \cdot \mu_{k+2}^- \cdot X_{nk}^0 r^{k+1} - (k+1)X_{nk}^1 \cdot r^{k-1} + (k+1) \cdot \mu_{k-2}^+ \cdot Y_{nk}^0 \cdot r^{-k} - kY_{nk}^1 \cdot r^{-k-2} \\ u_{nk}(r) &= \mu_k^+ \cdot X_{nk}^0 \cdot r^{k+1} + X_{nk}^1 \cdot r^{k-1} + \mu_k^- \cdot Y_{nk}^0 r^{-k} - Y_{nk}^1 \cdot r^{-k-2} \\ \sigma_{rnk}(r) &= \mu_k^\sigma \cdot X_{nk}^0 \cdot r^k + (k+1) \cdot X_{nk}^1 \cdot r^{k-2} - \mu_{k+2}^\sigma \cdot Y_{nk}^0 \cdot r^{-k-1} + (k+2) \cdot Y_{nk}^1 \cdot r^{-k-3} \\ \tau_{nk}(r) &= -k \cdot \mu_{k+1}^\tau \cdot X_{nk}^0 \cdot r^k - (k^2-1) \cdot X_{nk}^1 \cdot r^{k-2} - \\ &\quad - (k+1) \cdot \mu_k^\tau \cdot Y_{nk}^0 \cdot r^{-k-1} + k(k+2) \cdot Y_{nk}^1 \cdot r^{-k-3}, \end{aligned} \quad (1.1)$$

где $\mu_k^+ = k-2+4\mu$, $\mu_k^- = k+3-4\mu$, $\mu_k^\sigma = k(k-1)-2-2\mu$, $\mu_k^\tau = k^2-2+2\mu$,

$X_{nk}, Y_{nk}, X_{nk}^{0,1}, Y_{nk}^{0,1}$ – произвольные постоянные, $n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$, $k=0, 1, 2, 3, \dots$

После определения из краевых условий постоянных, при помощи формул обращения можно найти все искоемые величины. При этом напряжения и смещения определяются через вспомогательные функции z, z^*, τ и τ^* по формулам (1.15) [1] при $n \neq 0$ и (1.16) [1] при $n = 0$.

1. Общий случай (многослойная среда). Используя полученное решение, рассмотрим задачу. Пусть дана неограниченная сферически слоистая упругая среда, произвольно нагруженная объёмными силами. Каждый сферический слой $R_{i-1} < r < R_i$ ($i = 0, 1, \dots, m+1$) имеет свои упругие постоянные G_i и μ_i , причем, $R_{-1} = 0, R_{m+1} = \infty$. На сферических поверхностях смены упругих постоянных имеются дефекты типа трещин или тонких включений. В качестве основных неизвестных примем введенные выше функции, трансформанты Фурье-Лежандра которых определяются формулами (1.1), причем для каждого слоя будут свои произвольные постоянные $X_{nk}, Y_{nk}, X_{nk}^{0,1}, Y_{nk}^{0,1}$. Например

$${}_i u_{nk}(r) = {}_i \mu_k^+ \cdot {}_i X_{nk}^0 \cdot r^{k+1} + {}_i X_{nk}^1 \cdot r^{k-1} + {}_i \mu_k^- \cdot {}_i Y_{nk}^0 \cdot r^{-k} - {}_i Y_{nk}^1 \cdot r^{-k-2} + {}_i u_{nk}^0(r) \\ R_{i-1} < r < R_i, \quad i = 0, 1, \dots, m+1. \quad (1.2)$$

Подобные же формулы имеют место для остальных трансформант ${}_i z_{nk}^*, {}_i \tau_{nk}^*, {}_i \sigma_{nk}, {}_i \tau_{nk}$. При этом, чтобы обеспечить регулярность перечисленных трансформант в нуле и на бесконечности, следует положить

$${}_0 X_{n0}^1 = {}_0 X_{n0} = {}_0 Y_{nk} = {}_0 Y_{nk}^0 = {}_0 Y_{nk}^1 = 0, \quad {}_{m+1} X_{nk} = {}_{m+1} X_{nk}^0 = {}_{m+1} X_{nk}^1 = 0. \quad (1.3)$$

При записи формул (1.2) было учтено, что в каждом сферическом слое могут быть приложены свои объёмные силы, которые вызывают свое поле напряжений и смещений. Соответствующие этим полям трансформанты обозначим ${}_i u_{nk}^0, {}_i \sigma_{rnk}^0, \dots$. Поскольку можно считать, что указанное поле возникает в неограниченной среде с постоянными G_i и μ_i , то его компоненты всегда можно определить при помощи известных формул теории упругости, а потому будем считать эти трансформанты известными.

Для учета дефектов, которые могут быть на сферических поверхностях $r = R_i$, следует ввести скачки искомых функций при переходе через эту сферическую поверхность

$$\frac{1}{2G_i} {}_i u(R_i - 0, \theta, \varphi) - \frac{1}{2G_{i+1}} {}_i u(R_i + 0, \theta, \varphi) = \langle u(R_i, \theta, \varphi) \rangle \\ {}_i \sigma_r(R_i - 0, \theta, \varphi) - {}_{i+1} \sigma_n(R_i + 0, \theta, \varphi) = \langle \sigma_n(R_i, \theta, \varphi) \rangle \text{ и т.д.}, \quad (1.4)$$

трансформанты Фурье-Лежандра которых будем обозначать ${}_i u_{nk}^1, {}_i \sigma_{rnk}^1, \dots$.

Задача сводится к определению постоянных ${}_i X_{nk}, {}_i Y_{nk}, {}_i X_{nk}^{0,1}, {}_i Y_{nk}^{0,1}$ ($i = 0, 1, \dots, m+1$). Благодаря введению функций z, z^*, τ, τ^* эта проблема распадается на отдельное нахождение ${}_i X_{nk}, {}_i Y_{nk}$ и ${}_i X_{nk}^{0,1}, {}_i Y_{nk}^{0,1}$.

В работе [1] рассмотрен случай, когда сферические слои сцеплены между собой, т.е. перемещения и напряжения непрерывны при переходе от слоя к слою за исключением участков, где они терпят скачки (1.4). Условия непрерывности перемещений u_0, u_φ и касательных напряжений $\tau_\theta, \tau_\varphi$ с учетом (1.1) [1], (1.2), (1.4) приведут к системе для определения постоянных ${}_i X_{nk}, {}_i Y_{nk}$, которую запишем в виде

$$A_i X_i - B_i X_{i+1} = F_i \quad i = 0, 1, \dots, m, \quad (1.5)$$

где A_i, B_i, X_i, F_i определяются по (2.8) [1]. В работе [1] (с.844) построено решение системы (1.5) в виде (2.9) [1], (2.10) [1], (2.14) [1], (2.15) [1].

Полученные формулы полностью определяют неизвестные коэффициенты, содержащиеся в выражениях для $z_{nk}^*(r)$ и $\tau_{nk}^*(r)$. Для определения оставшихся коэффициентов

${}_i X_{nk}^{0,1}, {}_i Y_{nk}^{0,1}$ воспользуемся условиями непрерывности величин $u_{nk}(r), z_{nk}(r), \sigma_{r,nk}(r), \tau_{nk}(r)$ на каждой из сферических поверхностей $r = R_i$ с учетом дефектов. Эти условия приводят к системе определяемой (2.17) – (2.19) [1]. Эту систему уравнений можно привести к уже изученной системе (1.5), если ввести четырехмерные вектора и матрицы (2.20) [1]. Следовательно, её решение запишется в виде (2.9) – (2.10) [1], но в нем вектора и матрицы следует взять согласно (2.20) [1]. Таким образом, все коэффициенты ${}_i X_{nk}, {}_i Y_{nk}, {}_i X_{nk}^{0,1}, {}_i Y_{nk}^{0,1}$ найдены, а значит определены трансформанты (1.2) искомых величин.

Рассмотрим теперь случай, когда сферические слои находятся между собой в гладком контакте, т.е. на границе слоев касательные напряжения равны нулю, а нормальные перемещения и напряжения непрерывны. При этом, разумеется, на сферических поверхностях $r = R_i$ могут быть дефекты, на которых нормальные перемещения и напряжения терпят скачки (1.4).

Из обращения в нуль касательных напряжений $\tau_\theta, \tau_\varphi$ на каждой сферической поверхности $r = R_i$ с учетом (1.1) [1] имеем ${}_i \tau_{nk}^*(R_i) = {}_{i+1} \tau_{nk}^*(R_i) = 0, i = 0, 1, \dots, m$, а значит постоянные ${}_i X_{nk}, {}_i Y_{nk}$ определяются раздельно для каждого слоя из системы уравнений

$$\begin{aligned} (k-1) \cdot {}_0 X_{nk} R_0^{k-1} + 2 \cdot {}_0 \tau_{nk}^{*0} &= 0, \quad {}_0 X_{n0} = 0 \\ \left\{ \begin{aligned} (k-1) \cdot {}_i X_{nk} R_i^{k-1} - (k+2) \cdot {}_i Y_{nk} R_i^{k-2} + 2 \cdot {}_i \tau_{nk}^{*0} &= 0 \\ (k-1) \cdot {}_i X_{nk} R_i^{k-1} - (k+2) \cdot {}_i Y_{nk} R_i^{k-2} + 2 \cdot {}_i \tau_{nk}^{*0} &= 0 \end{aligned} \right., \quad i = 1, 2, \dots, m \\ -(k+2) \cdot {}_{m+1} Y_{nk} R_m^{k-2} + 2 \cdot {}_{m+1} \tau_{nk}^{*0} &= 0. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Отсюда находим

$$\begin{aligned} {}_0 X_{nk} &= -\frac{2}{k-1} R_0^{k+1} {}_0 \tau_{nk}^{*0}; \quad {}_{m+1} Y_{nk} = -\frac{2}{k+2} R_m^{k+2} {}_{m+1} \tau_{nk}^{*0} \\ {}_i X_{nk} &= \frac{2(k+2)}{\Delta_i} (R_i^{k-2} - R_{i-1}^{k-2}) {}_i \tau_{nk}^{*0}; \quad {}_i Y_{nk} = \frac{2(k-1)}{\Delta_i} (R_{i-1}^{k-1} - R_i^{k-1}) {}_i \tau_{nk}^{*0}; \\ i &= 1, 2, \dots, m-1 \end{aligned} \quad (1.7)$$

$$\Delta_i = (k-1)(k+2)(R_i^{k-1} R_{i-1}^{k-2} - R_{i-1}^{k-1} R_i^{k-2}).$$

Для определения постоянных ${}_i X_{nk}^{0,1}, {}_i Y_{nk}^{0,1}$ обращение в нуль касательных напряжений $\tau_\theta, \tau_\varphi$ на каждой из сферических поверхностей $r = R_i$ с учетом (1.1) [1] и непрерывность нормального смещения u_r и нормального напряжения σ_r на этих поверхностях приводят нас к соотношениям

$$\begin{aligned} \frac{1}{2G_i} {}_i u_{nk}(R_i) - \frac{1}{2G_{i+1}} {}_{i+1} u_{nk}(R_i) &= {}_i u_{nk}^1, \quad {}_i \tau_{nk}(R_i) = 0 \\ {}_i \sigma_{nk}(R_i) - {}_{i+1} \sigma_{nk}(R_i) &= {}_i \sigma_{nk}^1, \quad {}_{i+1} \tau_{nk}(R_i) = 0, \quad i = 0, 1, \dots, m. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Соотношения (1.8) с учетом (1.3), (1.4) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \alpha_i \bar{X}_i - \alpha_i^* \bar{X}_{i+1} + \beta_i \bar{Y}_i - \beta_i^* \bar{Y}_{i+1} &= V_i \\ \gamma_i \bar{X}_i - \gamma_i^* \bar{X}_{i+1} + \delta_i \bar{Y}_i - \delta_i^* \bar{Y}_{i+1} &= S_i, \quad i = 0, 1, \dots, m \end{aligned} \quad (1.9)$$

где

$$\alpha_i = R_i^{k-2} \begin{vmatrix} \frac{{}_i\mu_k^+ R_i^2}{2G_i} & \frac{R_i}{2G_i} \\ -k \cdot {}_i\mu_{k+1}^+ R_i^2 & (1-k^2) \end{vmatrix}, \quad \alpha_i^* = \frac{R_i^{k-1}}{2G_{i+1}} \begin{vmatrix} {}_{i+1}\mu_k^+ R_i^2 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad (1.10)$$

$$\beta_i = R_i^{-k-3} \begin{vmatrix} \frac{{}_i\mu_k^- R_i^3}{2G_i} & -\frac{R_i}{2G_i} \\ -(k+1) \cdot {}_i\mu_k^+ R_i^2 & k(k+2) \end{vmatrix}, \quad \beta_i^* = \frac{R_i^{-k-2}}{2G_{i+1}} \begin{vmatrix} {}_{i+1}\mu_k^- R_i^2 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix},$$

$$\gamma_i = R_i^{k-2} \begin{vmatrix} {}_i\mu_k^\sigma R_i^2 & k-1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \gamma_i^* = R_i^{k-2} \begin{vmatrix} {}_{i+1}\mu_k^\sigma R_i^2 & k-1 \\ -k \cdot {}_{i+1}\mu_{k+1}^+ R_i^2 & 1-k^2 \end{vmatrix},$$

$$\delta_i = R_i^{-k-3} \begin{vmatrix} -{}_i\mu_{k+2}^\sigma R_i^2 & k+2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \delta_i^* = R_i^{-k-3} \begin{vmatrix} -{}_{i+1}\mu_{k+2}^\sigma R_i^2 & k+2 \\ -(k+1) \cdot {}_{i+1}\mu_k^+ R_i^2 & k(k+2) \end{vmatrix},$$

$$\bar{X}_i = \begin{vmatrix} {}_iX_{nk}^0 \\ {}_iX_{nk}^1 \end{vmatrix}; \quad \bar{Y}_i = \begin{vmatrix} {}_iY_{nk}^0 \\ {}_iY_{nk}^1 \end{vmatrix}; \quad V_i = \begin{vmatrix} {}_iU_{nk} \\ -{}_i\tau_{nk}^0(R_i) \end{vmatrix}; \quad S_i = \begin{vmatrix} {}_i\sum_{nk} \\ -{}_{i+1}\tau_{nk}^0(R_i) \end{vmatrix}.$$

При этом ${}_iU_{nk}$ и ${}_i\sum_{nk}$ определяются формулами (2.17) [1].

Полученная система (1.9) совпадает с изученной ранее системой (2.18) [1]. Отличие в них только в определении матриц $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i, \alpha_i^*, \beta_i^*, \gamma_i^*, \delta_i^*$ и векторов правых частей V_i, S_i , а значит, ее решение будет даваться полученными выше формулами.

2. Двухслойная среда. Рассмотрим подробнее частный случай, когда имеется два сферических слоя: $0 < r < R_0$ с параметрами G_0 и μ_0 и $R_0 < r < \infty$ с параметрами G_1 и μ_1 . На бесконечности вдоль оси Oz приложены растягивающие нормальные напряжения $\sigma_z = \sigma_0$. Тогда перемещения вдоль осей Ox, Oy и Oz равны соответственно $U_x = -\mu_1 \sigma_0 E_1^{-1} x$, $U_y = -\mu_1 \sigma_0 E_1^{-1} y$, $U_z = \sigma_0 E_1^{-1} z$, где E_1 – модуль Юнга упругой среды. Используя связь между перемещениями в декартовой и сферической системах координат, найдем перемещения и напряжения от приложенной нагрузки во внешнем слое

$$\begin{aligned} {}_1u^0(r, \theta) &= \sigma_0 \cdot (1 + \mu_1)^{-1} \cdot r \cdot [1 - (1 + \mu_1) \cdot \sin^2 \theta] \\ {}_1z^0(r, \theta) &= -\sigma_0 \cdot r \cdot (2 - 3 \cdot \sin^2 \theta); \quad {}_1z^{*0}(r, \theta) = {}_1\tau^{*0}(r, \theta) = 0; \\ {}_1\tau^0(r, \theta) &= -\sigma_0 \cdot (2 - 3 \cdot \sin^2 \theta); \quad {}_1\sigma_r^0(r, \theta) = \sigma_0 \cdot \cos^2 \theta. \end{aligned} \quad (2.1)$$

В силу осевой симметрии задачи все величины (2.1) не зависят от ϕ , так что во всех предыдущих формулах следует положить $n=0$. Применяя преобразование Фурье и Лежандра (1.3) [1] с учетом формулы 3.12.27 из [2] (с.174), получим их трансформанты

$$\begin{aligned} {}_1u_{0k}^0(r) &= \frac{2\sigma_0 r}{15(1 + \mu_1)} f_k; \quad {}_1z_{0k}^{*0}(r) = {}_1\tau_{0k}^{*0}(r) = 0 \\ {}_1z_{0k}^0(r) &= -\frac{4}{5} \sigma_0 \cdot r \cdot \delta_{k2}; \quad {}_1\tau_{0k}^0(r) = -\frac{4}{5} \sigma_0 \cdot \delta_{k2}, \quad {}_1\sigma_{r0k}^0(r) = \frac{2}{15} \sigma_0 \cdot g_k, \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\text{где } \delta_{nk} = \begin{cases} 1, n=k \\ 0, n \neq k \end{cases} \quad \text{и} \quad f_k = 5(1-2\mu_1)\delta_{k0} + 2(1+\mu_1)\delta_{k2}, \quad g_k = 5\delta_{k0} + 2\delta_{k2}.$$

Таким образом, трансформанты (2.2) отличны от нуля только для случаев $k=0$ и $k=2$.

2.1. Пусть сферические слои жестко сцеплены между собой. Решение системы (1.5) имеет вид:

$$\begin{aligned} {}_0X_{0k} &= 2\Delta_0^{-1} [B_{11}^{(0)} {}_0z_{0k}^{*1} - B_{01}^{(0)} {}_0\tau_{0k}^{*1}], \quad {}_1Y_{0k} = 2\Delta_0^{-1} [A_{10}^{(0)} {}_0z_{0k}^{*1} - A_{00}^{(0)} {}_0\tau_{0k}^{*1}], \\ \Delta_0 &= A_{00}^{(0)} B_{11}^{(0)} - A_{10}^{(0)} B_{01}^{(0)}, \end{aligned} \quad (2.3)$$

где $A_{ij}^{(0)}, B_{ij}^{(0)}$ компоненты матриц A_0 и B_0 из (1.5), а ${}_0z_{0k}^{*1}, {}_0\tau_{0k}^{*1}$ трансформанты скачков соответствующих функций на поверхности раздела сферических слоев. Если дефекты там отсутствуют, то ${}_0X_{0k} = {}_1Y_{0k} = 0$, а значит ${}_i z_{0k}^*(r) = {}_i \tau_{0k}^*(r) = 0, i=0,1$.

В силу (2.2) и, так как рассматривается двухслойная среда, то систему (2.18)[1] для определения ${}_0X_{0k}^{0,1}, {}_1Y_{0k}^{0,1}$ удобнее записать отдельно для случаев $k=0$ и $k=2$. При $k=0$ согласно (1.3) ${}_0X_{00}^1 = 0$ но тогда в силу (2.2) и ${}_1Y_{00}^{01} = 0$, а для оставшихся двух постоянных из условий непрерывности нормальных смещений и напряжений на границе $r = R_0$ получим

$$\begin{aligned} {}_0X_{00}^0 &= \xi_{00} + \frac{(1-\mu_1)\sigma_0}{(1+\mu_1)\Delta}; \quad {}_0Y_{00}^0 = \eta_{00} - \frac{\sigma_0 R_0^3}{3\Delta} \left[\frac{G_1}{G_0} {}_0\mu_0^+ - \frac{(1-2\mu_1)}{(1+\mu_1)} {}_0\mu_0^\sigma \right] \\ \Delta &= \frac{G_1}{G_0} {}_0\mu_0^+ + \frac{1}{2} {}_0\mu_0^\sigma, \end{aligned} \quad (2.4)$$

где слагаемые ξ_{00} и η_{00} содержат скачки нормальных смещений и напряжений при переходе через сферическую поверхность. При $k=2$ указанную систему удобно записать в виде

$$AX = b \quad A = \begin{bmatrix} \alpha_0 & -\beta_0^* \\ \gamma_0 & -\delta_0^* \end{bmatrix}; \quad X = \begin{bmatrix} {}_0X_{02}^0 \\ {}_0X_{02}^1 \\ {}_1Y_{02}^0 \\ {}_1Y_{02}^1 \end{bmatrix}; \quad b = \begin{bmatrix} \frac{2\sigma_0 R_0}{15G_1} + {}_0\mu_{02}^1 \\ -2\sigma_0 R_0 + {}_0z_{02}^1 \\ \frac{15G_1}{4\sigma_0} + {}_0\sigma_{02}^1 \\ -\frac{4\sigma_0}{15} + {}_0\tau_{02}^1 \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

где матрицы второго порядка $\alpha_0, \beta_0^*, \gamma_0$ и δ_0^* определяются согласно (2.18), (2.19)[1]. Ее решение в форме, удобной для обращения трансформант Лежандра, запишем в виде

$$X_j = \frac{2\sigma_0}{15} Q_j + \xi_j; \quad Q_j = \frac{R_0}{G_1} (A_{j1}^{-1} - 3A_{j2}^{-1}) + 2(A_{j3}^{-1} - 3A_{j4}^{-1}); \quad j=1..4, \quad (2.6)$$

где X_j — компоненты вектора X , а A_{ji}^{-1} — компоненты обратной матрицы A^{-1} . Слагаемые ξ_j содержат скачки функций при переходе через сферическую поверхность $r = R_0$. Для определения смещений и напряжений надо подставить найденные величины в форму-

лы (1.2) и воспользоваться формулами обращения и соотношениями (1.12)[1]. Например, напряжения во внутреннем и внешнем сферических слоях запишутся в виде

$$\begin{aligned} {}_0\sigma_r(r, \theta) &= \frac{1}{2} {}_0\mu_0^{\sigma} X_{00}^0 + \frac{\sigma_0}{6} [Q_2 - {}_0\mu_2^{\sigma} r^2 Q_1] (3 \cos^2 \theta - 1) + {}_0\bar{\sigma}_r(\theta) \\ {}_0\tau_0(r, \theta) &= -\frac{\sigma_0}{12} [3Q_2 + 2{}_0\mu_3^{\tau} r^2 Q_1] \sin 2\theta + {}_0\bar{\tau}_0(\theta) \end{aligned} \quad (2.7)$$

$${}_1\sigma_r(r, \theta) = \sigma_0 \cos^2 \theta + {}_1Y_{00}^1 r^{-3} - \frac{\sigma_0}{6} r^{-3} [{}_1\mu_4^{\sigma} \cdot Q_3 - 4r^{-2} Q_4] (3 \cos^2 \theta - 1) + {}_1\bar{\sigma}_r(\theta)$$

$${}_1\tau_0(r, \theta) = -\frac{\sigma_0}{6} r^{-3} [{}_1\mu_2^{\tau} \cdot Q_3 - 4r^{-2} Q_4] \sin 2\theta + {}_1\bar{\tau}_0(\theta),$$

где величины ${}_i\bar{\sigma}_r(\theta)$ и ${}_i\bar{\tau}_0(\theta)$ содержат скачки функций при переходе через сферическую поверхность.

2.2. Если же сферические слои находятся в гладком контакте между собой, то в силу (2.2) из (1.6) следует, что ${}_0X_{0k} = {}_1Y_{0k} = 0$, а значит ${}_i z_{0k}^*(r) = {}_i \tau_{0k}^*(r) = 0, i = 0, 1$. При $k=0$ получаем те же значения (2.4) для постоянных ${}_0X_{00}^{0,1}, {}_1Y_{00}^1$. При $k=2$ получаем ту же систему (2.5), но в которой матрицы $\alpha_0, \beta_0^*, \gamma_0$ и δ_0^* берутся согласно (1.10), а вектор

$$b = \left(\frac{2\sigma_0 R_0}{15G_1} + {}_0u_{02}^1, \quad 0, \quad \frac{4\sigma_0}{15} + {}_0\sigma_{02}^1, \quad -\frac{4\sigma_0}{15} \right)^T.$$

Ее решение удобней записать в форме

$$X_j = \frac{2\sigma_0}{15} Q_j + \xi_j; \quad Q_j = \frac{R_0}{G_1} A_{j1}^{-1} + 2A_{j3}^{-1} + 6A_{j4}^{-1}; \quad j = 1..4. \quad (2.8)$$

Выражения для напряжений во внутреннем и внешнем сферических слоях имеют тот же вид (2.7), но в нем Q_j следует взять согласно (2.8).

2.3. Были проведены вычисления величины $\sigma_* = \sigma_r \cdot \sigma_0^{-1}$ на поверхности раздела слоев $r = R_0$ для случая жесткого сцепления (формулы (2.6), (2.7)) и случая гладкого контакта (формулы (2.7), (2.8)). При этом полагалось ${}_1\sigma_r(\theta) = {}_1\bar{\tau}_0(\theta) = 0$. Изучался вопрос о зависимости величины σ_* от угла θ и упругих постоянных сферических слоев. Резуль-

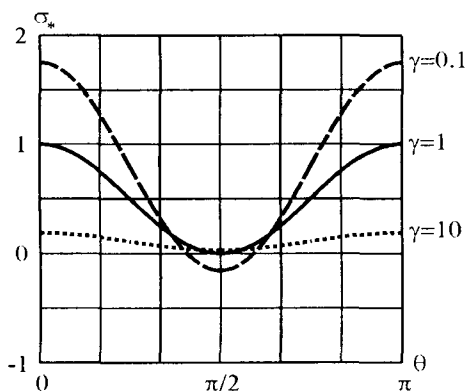


Рис. 1.

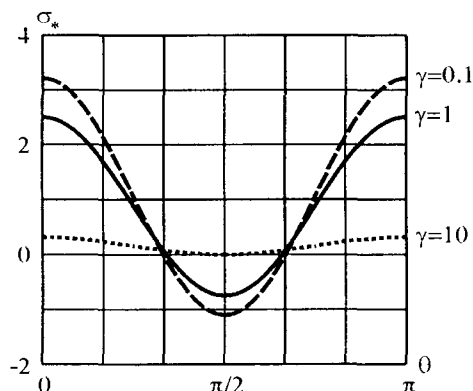


Рис. 2.

таты вычислений при $\mu_0 = \mu_1 = 1/3$ и различных значениях $\gamma = G_1/G_0$ представлены на рис.1 (случай жесткого сцепления) и рис.2 (случай гладкого контакта).

Зоны отрицательного нормального напряжения, являющегося наиболее интересным, возникают в направлении, перпендикулярном действию приложенной нагрузки. Для обоих случаев контакта при убывании γ абсолютная величина отрицательного напряжения возрастает.

1. Попов Г.Я. Задачи концентрации упругих напряжений возле дефектов в сферически слоистых средах / Прикладная математика и механика. – 1998. – Т.62, вып.5. – С.840–853.
2. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т.1. – М.:Наука, 1973. – 296 с.