Mathematical Subject Classification: 11L05
УДК 511

Г. С. Белозеров
Одесский национальный университет имени И. И. Мечникова

О ЧИСЛЕ РЕШЕНИЙ ОДНОГО СРАВНЕНИЯ В КОЛЬЦЕ $Z[i]$

Бєлозьоров Г. С. Про кількість розв'язків однієї еквіваленції в кільці $Z[i]$. Розглядається задача побудування точної формули для кількості рішень $\rho(\alpha,\beta,\gamma)$ еквіваленції $\alpha(x^2+y^2)\equiv\beta \pmod{\gamma}$ в кільці цілих гаусових чисел $Z[i]$. Користуючись мультiплiкативнiстю функції $\rho(\alpha,\beta,\gamma)$ по γ, достатньо прорахувати $\rho(\alpha,\beta,\wp^n)$, де $\wp$ – простий елемент в $Z[i]$. При цьому задача переформулюється до проблеми обчислення спеціальних тригонометричних сум, зокрема, сум Гауса. Подібні результати можуть бути використані в аналітичній теорії чисел там, де досліджуються адитивні задачі з сумами квадратів цілих чисел.
Ключові слова: еквіваленція, кільце цілих гаусових чисел, сума Гауса, скінчене поле.

Белозеров Г. С. О числе решений одного сравнения в кольце $Z[i]$. Рассматривается задача построения точной формулы для числа решений $\rho(\alpha,\beta,\gamma)$ сравнения $\alpha(x^2+y^2)\equiv\beta \pmod{\gamma}$ в кольце целых гауссовых чисел $Z\,[i]$. Пользуясь мультипликативностью функции $\rho(\alpha,\beta,\gamma)$ по γ, достаточно вычислить $\rho(\alpha,\beta,\wp^n)$, где $\wp$ – простой элемент в $Z[i]$. При этом задача переформулируется в проблему вычисления специальных тригонометрических сумм, в частности, сумм Гаусса. Результаты подобного рода востребованы в аналитической теории чисел в той части, где исследуются аддитивные задачи с суммами квадратов целых чисел.
Ключевые слова: сравнение, кольцо целых гауссовых чисел, сумма Гаусса, конечное поле.

Belozerov G. S. About number of solutions of one congruence on ring $Z[i]$. The task of building the exact formula for the number of solutions $\rho(\alpha,\beta,\gamma)$ of the congruence $\alpha(x^2+y^2)\equiv\beta \pmod{\gamma}$ over the ring of Gaussian integer $Z\,[i]$ is investigated. Using the multiplicative function $\rho(\alpha,\beta,\gamma)$ on γ is sufficient to calculate $\rho(\alpha,\beta,\wp^n)$, where $\wp$ – prime element in $Z[i]$. Here the problem is reformulated into a problem of computing of special exponential sums, in particular, Gauss sums. The results of this kind of demand in analytic number theory, in the part where the investigated additive problems with the sums of the squares of integers.
Key words: congruence, ring of Gaussian integer, Gauss sums , finite field.

Введение.

Оценки числа решений сравнений или точные формулы, представляющие соответствующие количества, бывают часто востребованы во многих задачах аналитической теории чисел. Это касается не только кольца рациональных целых, но и других колец целых алгебраических чисел. В данном случае речь пойдет о количестве решений сравнения $\alpha(x^2+y^2)\equiv\beta \pmod{\gamma}$, где $(\alpha,\gamma)=1$ в кольце целых гауссовых чисел. Если обозначить указанное количество через $\rho(\alpha,\beta,\gamma)$, то будем рассматривать сумму

$$\rho(\alpha,\beta,\gamma) = \sum_{\substack{x,y\in Z[i]\\ \alpha(x^2+y^2)\equiv\beta \pmod{\gamma}}} 1 \quad . \tag{1}$$

В силу известной мультипликативности функции $\rho(\alpha,\beta,\gamma)$ по γ достаточно вычислить результат по модулю $\wp^n$, где $\wp$ – простое число в $Z[i]$, т.е. либо $\wp = p \equiv 3 \pmod 4$, либо $\wp\bar{\wp} = p \equiv 1 \pmod 4$, либо $\wp = 1+i$.

Основные результаты. Пусть сначала рассматривается случай $\wp$, где $\wp\bar{\wp} = p \equiv 1 \pmod 4$. Обозначим через $G_{\wp^n}$, $n \in N$, полную систему вычетов по модулю $\wp^n$ в $Z[i]$, а через $G^*_{\wp^n}$ — приведенную систему вычетов в этом кольце.

Лемма 1. *Имеет место соотношение*

$$\sum_{x\in G_\gamma} e^{2\pi i \operatorname{Re}\left(\frac{\alpha x}{\gamma}\right)} = \begin{cases} N(\gamma), & \text{если } \alpha \equiv 0 \pmod{\gamma}, \\ 0, & \text{если } \alpha \not\equiv 0 \pmod{\gamma}. \end{cases} . \tag{2}$$

Это элементарный результат из теории тригонометрических сумм, где $N(\gamma)$ есть норма числа γ. Тогда, пользуясь формулой (1), получим

$$\begin{aligned}
\sum_0 &= \rho(\alpha,\beta,\gamma) = \sum_{x,y\in G_{\wp^n}} \frac{1}{N(\wp^n)} \sum_{z\in G_{\wp^n}} e^{2\pi i \operatorname{Re}\left(\frac{(\alpha(x^2+y^2)-\beta)z}{\wp^n}\right)} = \\
&= \frac{1}{N(\wp^n)} \sum_{z\in G_{\wp^n}} e^{-2\pi i \operatorname{Re}\left(\frac{\beta z}{\wp^n}\right)} \sum_{x,y\in G_{\wp^n}} e^{2\pi i \operatorname{Re}\left(\frac{\alpha(x^2+y^2)z}{\wp^n}\right)} = \\
&= N(\wp^n) + \frac{1}{N(\wp^n)} \sum_{\delta=0}^{n-1} \sum_{\substack{z\in G_{\wp^n}\\ (z,\wp^n)=\wp^\delta}} e^{-2\pi i \operatorname{Re}\left(\frac{\beta z}{\wp^n}\right)} \sum_{x,y\in G_{\wp^n}} e^{2\pi i \operatorname{Re}\left(\frac{\alpha(x^2+y^2)z}{\wp^n}\right)} = \\
&= N(\wp^n) + \frac{1}{N(\wp^n)} \sum_{\delta=0}^{n-1} \sum_{z\in G^*_{\wp^{n-\delta}}} e^{-2\pi i \operatorname{Re}\left(\frac{\beta z}{\wp^{n-\delta}}\right)} \sum_{x,y\in G_{\wp^n}} e^{2\pi i \operatorname{Re}\left(\frac{\alpha(x^2+y^2)z}{\wp^{n-\delta}}\right)} = \\
&= N(\wp^n) + \frac{1}{N(\wp^n)} \sum_{\delta=0}^{n-1} N(\wp^\delta) \sum_{z\in G^*_{\wp^{n-\delta}}} e^{-2\pi i \operatorname{Re}\left(\frac{\beta z}{\wp^{n-\delta}}\right)} \cdot \left(H(\alpha z, \wp^{n-\delta})\right)^2,
\end{aligned}$$

где

$$H(\alpha,\wp^k) = \sum_{x\in G_{\wp^k}} e^{2\pi i \operatorname{Re}\left(\frac{\alpha x^2}{\wp^k}\right)}, \quad (\alpha,\wp)=1.$$

Займемся суммой $H(\alpha,\wp^k)$.

Лемма 2. *Имеет место соотношение для* $k \geq 2$

$$H(\alpha,\wp^k) = \begin{cases} N(\wp^{k_1}), & \text{если } k = 2k_1, \quad k_1 \in N, \\ N(\wp^{k_1}) \sum\limits_{u\in G_\wp} e^{2\pi i \operatorname{Re}\left(\frac{\alpha u^2}{\wp}\right)}, & \text{если } k = 2k_1+1. \end{cases}$$

Доказательство. Положим $x = u + \wp^{k-1}v$, где $u \in G_{\wp^{k-1}}$, $v \in G_\wp$. Тогда

$$H(\alpha, \wp^k) = \sum_{u \in G_{\wp^{n-1}}} e^{2\pi i \,\mathrm{Re}\left(\frac{\alpha u^2}{\wp^k}\right)} \sum_{v \in G_\wp} e^{2\pi i \,\mathrm{Re}\left(\frac{2\alpha uv}{\wp}\right)},$$

ибо $\alpha x^2 = \alpha u^2 + 2\alpha uv\wp^{k-1} + \alpha\wp^{2k-2}v^2$, а для $k \geq 2 \quad 2k-2 \geq k$, т.е.

$$\alpha x^2 \equiv \alpha u^2 + 2\alpha uv\wp^{k-1} + \alpha\wp^{2k-2}v^2 \pmod{\wp^k}.$$

И далее,

$$H(\alpha, \wp^k) = N(\wp) \sum_{\substack{u \in G_{\wp^{k-1}} \\ u \equiv 0 \pmod{\wp}}} e^{2\pi i \,\mathrm{Re}\left(\frac{\alpha u^2}{\wp^k}\right)} = N(\wp) \sum_{u \in G_{\wp^{k-2}}} e^{2\pi i \,\mathrm{Re}\left(\frac{\alpha u^2}{\wp^{k-2}}\right)}.$$

И теперь, пользуясь спуском по k, имеем

$$H(\alpha, \wp^k) = \begin{cases} N(\wp^{k_1}), & \text{если } \ k = 2k_1, \quad k_1 \in N, \\ N(\wp^{k_1}) \displaystyle\sum_{u \in G_\wp} e^{2\pi i \,\mathrm{Re}\left(\frac{\alpha u^2}{\wp}\right)}, & \text{если } \ k = 2k_1 + 1. \end{cases}$$

Лемма доказана. □

Для нечетного k ($k \geq 1$) имеем $\displaystyle\sum_{u \in G_\wp} e^{2\pi i \,\mathrm{Re}\left(\frac{\alpha u^2}{\wp}\right)} = \sum_{u \in G_\wp} e^{2\pi i \,\mathrm{Re}\left(\frac{\alpha \bar\wp u^2}{p}\right)}$, где $p = \wp\bar\wp$.

Если $\alpha\bar\wp \equiv a \pmod{p}$, где $a \in Z_p$, то последняя сумма превращается в рациональную сумму Гаусса $\displaystyle\sum_{x=1}^{p} e^{2\pi i \frac{ax^2}{p}} = i^{\left(\frac{p-1}{2}\right)^2} \left(\frac{a}{p}\right) p^{1/2}$, а учитывая, что $p \equiv 1 \pmod{4}$, то $\displaystyle\sum_{x=1}^{p} e^{2\pi i \frac{ax^2}{p}} = \left(\frac{a}{p}\right) p^{1/2}$, где $\left(\frac{a}{p}\right)$ – символ Лежандра.

Поэтому, возвращаясь к сумме $H(\alpha\, z, \wp^{n-\delta})$, получаем

$$H(\alpha z, \wp^{n-\delta}) = \begin{cases} N(\wp)^{\frac{n-\delta}{2}}, & \text{если } \ n-\delta \text{ четно}, \\ N(\wp)^{\frac{n-\delta-1}{2}} \left(\dfrac{c}{p}\right) p^{1/2}, & \text{если } \ n-\delta \text{ нечетно}. \end{cases}$$

Здесь $\alpha\bar\wp z \equiv c \pmod{p}, \quad c \in Z_p$. И, наконец,

$$H(\alpha z, \wp^{n-\delta}) = \begin{cases} N(\wp)^{\frac{n-\delta}{2}}, & \text{если } \ n-\delta \text{ четно}, \\ N(\wp)^{\frac{n-\delta}{2}} \left(\dfrac{c}{p}\right)^{1/2}, & \text{если } \ n-\delta \text{ нечетно}. \end{cases}$$

Лемма 3. *Имеет место соотношение*

$$\sum_{z \in G^*_{\wp^k}} e^{2\pi i \,\mathrm{Re}\left(\frac{\beta z}{\wp^k}\right)} = \begin{cases} \varphi(p^k), & \textit{если } \ \beta \vdots p^k, \\ -p^{k-1}, & \textit{если } \ \beta \vdots p^{k-1} \textit{ и } \beta \vdots p^k, \\ 0, & \textit{если } \ \beta \vdots p^{k-1}, \end{cases}$$

где $\wp\bar\wp = p$.

Доказательство. В силу того, что приведенная система вычетов по $\mod \wp^k$ совпадает с приведенной системой вычетов по $\mod p^k$, именно $G^*_{\wp^k} \cong Z^*_{p^k}$, получаем

$$\sum_{z\in G^*_{\wp^k}} e^{2\pi i \operatorname{Re}\left(\frac{\beta z}{\wp^k}\right)} = \sum_{z\in Z^*_{p^k}} e^{2\pi i \operatorname{Re}\left(\frac{\beta z}{p^k}\right)} = \sum_{z\in Z_{p^k}} e^{2\pi i \operatorname{Re}\left(\frac{\beta z}{p^k}\right)} \sum_{d\backslash (p^k,z)} \mu(d) = \sum_1 .$$

Здесь $\mu(d)$– функция Мебиуса. Далее,

$$\sum_1 = \sum_{d\backslash p^k} \mu(d) \sum_{\substack{z\in Z_{p^k}\\ z\equiv 0 \pmod d}} e^{2\pi i \operatorname{Re}\left(\frac{\beta z}{p^k}\right)} = \sum_{z\in Z_{p^k}} e^{2\pi i \operatorname{Re}\left(\frac{\beta z}{p^k}\right)} - \sum_{\substack{z\in Z_{p^k}\\ z\equiv 0 \pmod p}} e^{2\pi i \operatorname{Re}\left(\frac{\beta z}{p^k}\right)} =$$

$$= \sum_{z\in Z_{p^k}} e^{2\pi i \operatorname{Re}\left(\frac{\beta z}{p^k}\right)} - \sum_{z\in Z_{p^{k-1}}} e^{2\pi i \operatorname{Re}\left(\frac{\beta z}{p^{k-1}}\right)},$$

откуда, учитывая (2), получается результат леммы. □

Возвращаясь к сумме $\sum_0$, получаем

$$\sum_0 = N(\wp^n) + \frac{1}{N(\wp^n)} \sum_{\delta=0}^{n-1} N(\wp^\delta) \sum_{z\in G^*_{\wp^{n-\delta}}} e^{-2\pi i \operatorname{Re}\left(\frac{\beta z}{\wp^{n-\delta}}\right)} N(\wp^{n-\delta}) =$$

$$= N(\wp^n) + \sum_{\delta=0}^{n-1} \sum_{z\in G^*_{\wp^{n-\delta}}} e^{-2\pi i \operatorname{Re}\left(\frac{\beta z}{\wp^{n-\delta}}\right)}.$$

Пусть теперь $(\beta, \wp^n) = \wp^l$. Тогда, если $l = n$, то

$$\sum_0 = N(\wp^n) + \sum_{\delta=0}^{n-1} \bar\varphi(\wp^{n-\delta}) = N(\wp^n)\left(1 - \frac{1}{N(\wp)}\right) \sum_{\delta=0}^{n-1} \frac{1}{N(\wp^\delta)} =$$

$$= N(\wp^n) + N(\wp^n) - 1 = 2N(\wp^n) - 1.$$

Здесь $\bar\varphi$ – функция Эйлера в кольце $Z[i]$.

Если $l \le n-1$, то согласно лемме 3 внутренняя сумма в $\sum_0$ должна равняться $\bar\varphi(N(\wp^{n-\delta}))$, если $l \ge n-\delta$, $-N(\wp^{n-\delta-1})$, если $l = n-\delta-1$ и нулю в остальных случаях. Тогда

$$\sum_0 = N(\wp^n) + \sum_{\delta=n-l-1}^{n-1} \sum_{z\in G^*_{\wp^{n-\delta}}} e^{-2\pi i \operatorname{Re}\left(\frac{\beta z}{\wp^{n-\delta}}\right)} =$$

$$= N(\wp^n) - N(\wp^l) + \sum_{\delta=n-l}^{n-1} \bar\varphi(N(\wp^{n-\delta})) = N(\wp^n) - 1.$$

Рассмотрим случай $\wp = p \equiv 3 \pmod 4$. Как и ранее, имеем

$$\sum_0 = N(\wp^n) + \frac{1}{N(\wp^n)} \sum_{\delta=0}^{n-1} N(\wp^\delta) \sum_{z\in G^*_{\wp^{n-\delta}}} e^{-2\pi i \operatorname{Re}\left(\frac{\beta z}{\wp^{n-\delta}}\right)} \cdot \left(H(\alpha z, \wp^{n-\delta})\right)^2,$$

$$H(\alpha z, p^{n-\delta}) = \sum_{x\in G_{p^{n-\delta}}} e^{2\pi i\,\mathrm{Re}\left(\frac{\alpha z x^2}{p^{n-\delta}}\right)},$$

и спуск по $p^{n-\delta}$ дает

$$\begin{aligned} H(\alpha\, z, p^{n-\delta}) &= \sum_{u\in G_{p^{n-\delta-1}}} e^{2\pi i\,\mathrm{Re}\left(\frac{\alpha z u^2}{p^{n-\delta}}\right)} \sum_{v\in G_p} e^{2\pi i\,\mathrm{Re}\left(\frac{2\alpha z u v}{p}\right)} = \\ &= N(p) \sum_{u\in G_{p^{n-\delta-2}}} e^{2\pi i\,\mathrm{Re}\left(\frac{\alpha z u^2}{p^{n-\delta-2}}\right)}. \end{aligned}$$

И, наконец,

$$H(\alpha z, p^{n-\delta}) = \begin{cases} N(p^{\frac{n-\delta}{2}}), & \text{если } n-\delta \text{ четно,} \\ N(p^{\frac{n-\delta-1}{2}}) \sum\limits_{u\in G_p} e^{2\pi i\,\mathrm{Re}\left(\frac{\alpha z u^2}{p}\right)}, & \text{если } n-\delta \text{ нечетно.} \end{cases} \tag{3}$$

Ввиду того, что $[G_p : Z_p] = 2$, можно считать, что внутренняя сумма в (3) рассматривается в поле F_q, где $q = p^2$. Здесь уместно привести результаты из [1]. Именно, пусть сумма Гаусса в поле F_q определяется выражением

$$G(\psi, \chi) = \sum_{c\in F_q^*} \psi(c)\chi(c),$$

где ψ – мультипликативный, а χ – аддитивный характеры поля F_q. Характер χ называется каноническим, если $\chi(x) = e^{2\pi i tr(x)/p}$, где $p = Char(F_q)$, а $\mathrm{tr}(x)$ – абсолютный след элемента x.

Лемма 4. *Пусть p — простое нечетное число, $s \in N$, F_q — конечное поле порядка $q = p^2$. Если η — квадратичный характер, а χ — канонический аддитивный характер поля F_q, то*

$$G(\eta, \chi) = \begin{cases} (-1)^{s-1} q^{1/2}, & \textit{если } p \equiv 1 \pmod 4, \\ (-1)^{s-1} i^s q^{1/2}, & \textit{если } p \equiv 3 \pmod 4. \end{cases}$$

Доказательство. В [1].

Лемма 5. *Пусть χ– нетривиальный аддитивный характер поля F_q, где q – нечетно, и пусть $f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0 \in F_q[x]$. Тогда*

$$\sum_{c\in F_q} \chi(f(c)) = \chi(a_0 - a_1^2(4a_2)^{-1})\eta(a_2) \cdot G(\eta, \chi),$$

где η – квадратичный характер поля F_q.

Доказательство. В [1].

Теперь получаем

$$\sum_{u\in G_p} e^{2\pi i\,\mathrm{Re}\left(\frac{\alpha z u^2}{p}\right)} = \sum_{u\in F_q} e^{2\pi i tr\left(\frac{\alpha z u^2}{p}\right)} = \eta(\alpha z) G(\eta, e^{2\pi i tr(x)/p}),$$

ибо $a_0 = a_1 = 0, \quad a_2 = \alpha\, z$. Значит,

$$H(\alpha\, z, p^{n-\delta}) = \begin{cases} N(p^{\frac{n-\delta}{2}}), & \text{если } n-\delta \text{ четно}, \\ N(p^{\frac{n-\delta-1}{2}})\eta(\alpha\, z)G(\eta, e^{2\pi i tr(x)/p}), & \text{если } n-\delta \text{ нечетно}. \end{cases}.$$

Учитывая лемму 4, имеем

$$H(\alpha\, z, p^{n-\delta}) = \begin{cases} N(p^{\frac{n-\delta}{2}}), & \text{если } n-\delta \text{ четно}, \\ N(p^{\frac{n-\delta-1}{2}})\eta(\alpha\, z), & \text{если } n-\delta \text{ нечетно}. \end{cases}.$$

И тогда для $\sum\limits_0$ получаем

$$\begin{aligned} \sum_0 &= N(p^n) + \frac{1}{N(p^n)}\sum_{\delta=0}^{n-1} N(p^\delta) \sum_{z\in G^*_{p^{n-\delta}}} e^{-2\pi i\,\mathrm{Re}\left(\frac{\beta\, z}{p^{n-\delta}}\right)} \cdot N(p^{n-\delta}) = \\ &= N(p^n) + \sum_{\delta=0}^{n-1} \sum_{z\in G^*_{p^{n-\delta}}} e^{-2\pi i\,\mathrm{Re}\left(\frac{\beta\, z}{p^{n-\delta}}\right)}. \end{aligned}$$

Пусть снова $(\beta, p^n) = p^l$. Тогда, как и ранее, для $l = n$ имеем

$$\sum_0 = 2N(p^n) - 1.$$

Если $l \le n-1$, то

$$\sum_0 = N(p^n) + \sum_{\delta=0}^{n-1} \sum_{z\in G^*_{p^{n-\delta}}} e^{-2\pi i\,\mathrm{Re}\left(\frac{\beta\, z}{p^{n-\delta}}\right)} = N(p^n) + \sum_{\delta=0}^{n-1} \sum_{z\in G^*_{p^{n-\delta}}} e^{-2\pi i\,\mathrm{Re}\left(\frac{\beta_1\, z}{p^{n-\delta-l}}\right)},$$

где $(\beta_1, p) = 1$. Тогда

$$\begin{aligned} \sum_0 &= N(p^n) + \sum_{0\le\delta<n-l} \sum_{z\in G^*_{p^{n-\delta}}} e^{-2\pi i\,\mathrm{Re}\left(\frac{\beta_1\, z}{p^{n-\delta-l}}\right)} + \\ &\quad + \sum_{n-l\le\delta\le n-1} \sum_{z\in G^*_{p^{n-\delta}}} e^{-2\pi i\,\mathrm{Re}\left(\frac{\beta_1\, z}{p^{n-\delta-l}}\right)} = \\ &= N(p^n) + \sum_{0\le\delta<n-l} N(p^l) \sum_{z\in G^*_{p^{n-\delta-l}}} e^{-2\pi i\,\mathrm{Re}\left(\frac{\beta_1\, z}{p^{n-\delta-l}}\right)} \\ &\quad + \sum_{n-l\le\delta\le n-1} N(p^l) \sum_{z\in G^*_{p^{n-\delta-l}}} e^{-2\pi i\,\mathrm{Re}\left(\frac{\beta_1\, z}{p^{n-\delta-l}}\right)} = \\ &= N(p^n) + \sum_2 + \sum_3. \end{aligned}$$

Лемма 6 (обобщенная лемма Рамануджана)**.** *В условиях $Z[i]$ и $(\beta, p) = 1$ имеем*

$$\sum_{z\in G^*_{p^k}} e^{2\pi i\,\mathrm{Re}\left(\frac{\beta\, z}{p^k}\right)} = \begin{cases} 0, & \textit{если } k > 1, \\ -1, & \textit{если } k = 1. \end{cases}$$

Доказательство. Аналогично лемме 3.

Теперь в соответствии с леммой 6 $\sum\limits_{2} = -N(p^l)$, а $\sum\limits_{3} = N(p^l)\cdot\bar{\varphi}(p^{n-\delta-l})$. Поэтому

$$\sum_{0} = N(p^n) - 1.$$

Рассмотрим последний случай $\wp = 1+i$. Стандартная выкладка опять дает

$$\sum_{0} \;=\; N(\wp^n) + \frac{1}{N(\wp^n)}\sum_{\delta=0}^{n-2} N(\wp^\delta) \sum_{z\in G^*_{\wp^{n-\delta}}} e^{-2\pi i\,\mathrm{Re}\left(\frac{\bar{\alpha}\beta\, z}{\wp^{n-\delta}}\right)}\cdot\left(H(z\,,\,\wp^{n-\delta})\right)^2.$$

Изменение в суммировании по δ связано с тем, что $H(\,z,\wp) = 0$, и $\alpha\bar{\alpha}\equiv 1 \pmod{\wp^n}$. А для $H(z,\wp^2)$ нетрудно получить значение, если обозначить $z = w_1 + iw_2$. При этом, учитывая, что $(z,\wp) = 1$, заметим, что w_1 и w_2 имеют разную четность. Поэтому

$$H(z,\wp^2) = \begin{cases} 0, & \text{если } w_1 \text{ четно,}\\ 4, & \text{если } w_1 \text{ нечетно} \end{cases}$$

И, следовательно, в этом случае

$$\begin{aligned}\sum_{0} &= N(\wp^2) + \frac{1}{N(\wp^2)}\cdot N(\wp)\sum_{\substack{z\in G^*_{\wp^2}\\ \mathrm{Re}(z)\equiv 1 \ (\mathrm{mod}\ 2)}} e^{-2\pi i\,\mathrm{Re}\left(\frac{\bar{\alpha}\beta z}{\wp^2}\right)}\cdot N\left(\wp^4\right) =\\ &= N(\wp^2) + N(\wp^2)\cdot e^{-i\pi\,\mathrm{Im}(\bar{\alpha}\beta)}.\end{aligned}$$

Для вычисления значения $H(z,\wp^3)$ можно воспользоваться полной системой вычетов вида $\{0,\ \pm 1,\ \pm i,\ 1\pm i,\ 2\}$. И тогда получим, что $H(z,\wp^3) = 0$. Поэтому при $n = 3$

$$\begin{aligned}\sum_{0} &= N(\wp^3) + \frac{1}{N(\wp^3)}\cdot N(\wp)\sum_{\substack{z\in G^*_{\wp^2}\\ \mathrm{Re}(z)\equiv 1 \ (\mathrm{mod}\ 2)}} e^{-2\pi i\,\mathrm{Re}\left(\frac{\bar{\alpha}\beta z}{\wp^2}\right)}\cdot (H(z,\wp^2))^2 =\\ &= N(\wp^3) + N(\wp^2)\cdot e^{-i\pi\,\mathrm{Im}(\bar{\alpha}\beta)}.\end{aligned}$$

Снова рассмотрим сумму $H(z,\wp^k)$, $k\geq 4$. Легко видеть, что при $k = 2k_1$ и $x = u + \wp^{k_1}v$, где $u, v\in G_{\wp^{k_1}}$, выводим для H

$$\begin{aligned}H(z,\wp^k) &= \sum_{u\in G_{\wp^{k_1}}} e^{2\pi i\,\mathrm{Re}\left(\frac{zu^2}{p^k}\right)} \sum_{v\in G_{\wp^{k_1}}} e^{2\pi i\,\mathrm{Re}\left(\frac{2z\,uv}{\wp^{k_1}}\right)} =\\ &= N(\wp^{k_1})\sum_{\substack{u\in G_{\wp^{k_1}}\\ 2u\,\vdots\,\wp^{k_1}}} e^{2\pi i\,\mathrm{Re}\left(\frac{zu^2}{\wp^k}\right)} = N(\wp^{k_1})\sum_{u_1\in G_{\wp^2}} e^{-2\pi i\,\mathrm{Re}\left(\frac{zu_1^2}{\wp^4}\right)} =\\ &= N(\wp^{k_1})\sum_{u_1\in G_{\wp^2}} e^{2\pi i\,\mathrm{Re}\left(\frac{zu_1^2}{4}\right)}.\end{aligned}$$

Если вновь обозначить $z = w_1 + iw_2$, то простые вычисления дают

$$H(z,\wp^k) = N(\wp^{k_1}) \begin{cases} 2\,, & \text{если } w_1 \text{ — нечетно},\\ 2\,, & \text{если } w_1 \equiv 0 \pmod 4,\\ -2\,, & \text{если } w_1 \equiv 2 \pmod 4. \end{cases}$$

При $k = 2k_1 + 1$, $k \geq 4$, и $x = u + \wp^{k_1+1}v$, где $u \in G_{\wp^{k_1+1}}$, $v \in G_{\wp^{k_1}}$ получаем

$$H(z,\wp^k) = \sum_{u\in G_{\wp^{k_1+1}}} e^{2\pi i\,\mathrm{Re}\left(\frac{zu^2}{p^k}\right)} \sum_{v\in G_{\wp^{k_1}}} e^{2\pi i\,\mathrm{Re}\left(\frac{2z\,uv}{\wp^{k_1}}\right)} =$$

$$= N(\wp^{k_1}) \sum_{\substack{u\in G_{\wp^{k_1+1}}\\ 2u \,\vdots\, \wp^{k_1}}} e^{2\pi i\,\mathrm{Re}\left(\frac{zu^2}{\wp^k}\right)} = N(\wp^{k_1}) \sum_{u_1\in G_{\wp^3}} e^{-2\pi i\,\mathrm{Re}\left(\frac{zu_1^2}{\wp^5}\right)}.$$

Вычисляя непосредственно последнюю сумму, находим, что

$$H(z,\wp^k) = N(\wp^{k_1}) \begin{cases} 2\sqrt{2}\,, & \text{если } w_1 + w_2 \equiv 1 \text{ или } 7 \pmod 8,\\ -2\sqrt{2}\,, & \text{если } w_1 + w_2 \equiv 3 \text{ или } 5 \pmod 8). \end{cases}$$

Теперь, как и ранее, положим $(\beta,\wp^n) = \wp^{l_0}$. Тогда

$$\sum_4 = \sum_{z\in G^*_{\wp^{n-\delta}}} e^{-2\pi i Re\left(\frac{\bar\alpha\beta z}{\wp^{n-\delta}}\right)} \left(H(z,\wp^{n-\delta})\right)^2$$

$$= \sum_{z\in G^*_{\wp^{n-\delta}}} e^{-2\pi i Re\left(\frac{\bar\alpha\beta_1 z}{\wp^{n-\delta-l_0}}\right)} \left(H(z,\wp^{n-\delta})\right)^2,$$

где $\beta = \wp^{l_0}\beta_1$, $\quad (\beta_1,\wp) = 1$. Если $l_0 \geq n-\delta$, то

$$\sum_4 = \bar\varphi(\wp^{n-\delta}) \cdot \left(H(z,\wp^{n-\delta})\right)^2.$$

А если $l_0 < n-\delta$, то при $t = n-\delta-l_0$

$$\sum_4 = N(\wp^{l_0}) \sum_{z\in G^*_{\wp^t}} e^{-2\pi i\,\mathrm{Re}\left(\frac{\bar\alpha\beta_1 z}{\wp^t}\right)} \left(H(z,\wp^{n-\delta})\right)^2 =$$

$$= \left(H(z,\wp^{n-\delta})\right)^2 \begin{cases} -N(\wp^{l_0}), & \text{если} \quad t = 1,\\ 0, & \text{если} \quad t > 1, \end{cases}$$

по лемме 6. Теперь для $n \geq 4$

$$\sum_0 = N(\wp^n) + \frac{1}{N(\wp^n)} \left(\sum_{\delta=0}^{n-4} N(\wp^\delta) \sum_4 + \sum_{\delta=n-3}^{n-2} N(\wp^\delta) \sum_4 \right) = N(\wp^n) + \sum_5 + \sum_6.$$

$$\sum_5 = \frac{1}{N(\wp^n)}\sum_{\delta=0}^{n-4} N(\wp^\delta)\sum_4 \;= \frac{1}{N(\wp^n)}\sum_{\delta=n-l_0}^{n-4} N(\wp^\delta)\cdot\bar{\varphi}(\wp^{n-\delta})\left(H(z,\wp^{n-\delta})\right)^2 - \\ -\frac{1}{N(\wp)}\left(H(z,\wp^{l_0+1})\right)^2 .$$

$$\begin{aligned}\sum_6 &= \sum_{\delta=n-3}^{n-2} N(\wp^{\delta-n})\sum_4 = N(\wp^{-3})\sum_{z\in G^*_{\wp^3}} e^{-2\pi i\,\mathrm{Re}\left(\frac{\bar{\alpha}\beta_1 z}{\wp^{3-l_0}}\right)}\left(H(z,\wp^3)\right)^2 + \\ &+N(\wp^{-2})\sum_{z\in G^*_{\wp^2}} e^{-2\pi i Re\left(\frac{\bar{\alpha}\beta_1 z}{\wp^{2-l_0}}\right)}\left(H(z,\wp^2)\right)^2 = \\ &= N(\wp^{-2})\sum_{z\in G^*_{\wp^2}} e^{-2\pi i\,\mathrm{Re}\left(\frac{\bar{\alpha}\beta_1 z}{\wp^{2-l_0}}\right)}\left(H(z,\wp^2)\right)^2 = \\ &= \begin{cases} N(\wp^2)\,, & \text{если } \; l_0\geq 2, \\ -N(\wp^2)\,, & \text{если } \; l_0 = 1, \\ N(\wp^2)\,, & \text{если } \; l_0 = 0,\ \mathrm{Im}(\bar{\alpha}\beta_1)\equiv 0 \pmod 2, \\ -N(\wp^2)\,, & \text{если } \; l_0 = 0,\ \mathrm{Im}(\bar{\alpha}\beta_1)\equiv 1 \pmod 2. \end{cases}\end{aligned} \tag{4}$$

Наконец, суммируя по δ в $\sum_5$, в итоге получаем

$$\sum_0 = \begin{cases} N(\wp)\,, & \text{если } \; n=1, \\ 2N(\wp^2)\,, & \text{если } \; n=2,\ \mathrm{Im}(\bar{\alpha}\beta)\equiv 0\,(mod 2), \\ 0\,, & \text{если } \; n=2,\ \mathrm{Im}(\bar{\alpha}\beta)\equiv 1\,(mod 2), \\ N(\wp^3)+N(\wp^2)\,, & \text{если } \; n=3,\ \mathrm{Im}(\bar{\alpha}\beta)\equiv 0\,(mod 2), \\ N(\wp^3)-N(\wp^2)\,, & \text{если } \; n=3,\ \mathrm{Im}(\bar{\alpha}\beta)\equiv 1\,(mod 2), \\ N(\wp^4)+N(\wp^5)(N(\wp)-1)+\sum_6\,, & \text{если } \; n=4, \\ N(\wp^n)+N(\wp^5)(N(\wp^{l_0-3})-1)- & \\ -N(\wp^{l_0+2})+\sum_6\,, & \text{если } n\geq 5, \end{cases}$$

где $\sum_6$ определяется формулой (4).

Собирая все вместе, получаем основной результат.

Теорема. *Для числа решений сравнения, определяемого формулой (1), справедливо равенство*

$$\rho(\alpha,\beta,\gamma) = E(\alpha,\beta,\gamma)\cdot\prod_{\substack{\wp^n\,||\,\gamma \\ \wp\neq 1+i}}\left(E(\beta)N(\wp^n)-1\right),$$

где $\wp$*– простые элементы из* $Z[i]$*, а*

$$E(\beta) = \begin{cases} 2, & \textit{если } \; \wp^n|\beta, \\ 1, & \textit{если } \; \wp^n\nmid\beta, \end{cases}$$

$$E(\alpha,\beta,\gamma)=\begin{cases} N(\wp)\ , & \textit{если}\ \ n=1,\\ 2N(\wp^2)\ , & \textit{если}\ \ n=2,\ \operatorname{Im}(\bar{\alpha}\beta)\equiv 0 \pmod 2,\\ 0\ , & \textit{если}\ \ n=2,\ \operatorname{Im}(\bar{\alpha}\beta)\equiv 1 \pmod 2,\\ N(\wp^3)+N(\wp^2)\ , & \textit{если}\ \ n=3,\ \operatorname{Im}(\bar{\alpha}\beta)\equiv 0 \pmod 2,\\ N(\wp^3)-N(\wp^2)\ , & \textit{если}\ \ n=3,\ \operatorname{Im}(\bar{\alpha}\beta)\equiv 1 \pmod 2,\\ N(\wp^4)+N(\wp^5)+\sum\limits_6\ , & \textit{если}\ n=4,\\ N(\wp^n)-N(\wp^5)+\sum\limits_6\ , & \textit{если}\ n\ge 5. \end{cases}$$

Здесь $\wp=1+i$ *и* $\wp^n||\gamma$.

Заключение. Нами рассмотрена задача построения точной формулы для числа решений $\rho(\alpha,\beta,\gamma)$ сравнения $\alpha(x^2+y^2)\equiv\beta \pmod\gamma$ в кольце целых гауссовых чисел $Z\,[i]$. Пользуясь мультипликативностью функции $\rho(\alpha,\beta,\gamma)$ по γ, задача переформулируется в проблему вычисления специальных тригонометрических сумм, в частности, сумм Гаусса. Результаты подобного рода востребованы в аналитической теории чисел при исследовании аддитивных задач с суммами квадратов целых чисел.

1. **Лидл Р.** Конечные поля / Лидл Р., Нидеррайтер Г. – М. : Мир, 1988. — 428 с.