Одеський національний університет імені І. І. Мечникова

(повне найменування вищого навчального закладу)

Інститут математики, економіки і механіки

(повне найменування інституту/факультету)

Кафедра диференціальних рівнянь

(повна назва кафедри)

Дипломна робота

магістра

(освітньо-кваліфікаційний рівень)

на тему: **«Асимптотика розв'язків диференціальних рівнянь з правильно та швидко змінними нелінійностями»**

«Asymptotic behavior of solutions of differential equations with regularly and rapidly varying nonlinearities»

Виконала: студентка денної форми навчання

спеціальності 8.04020101 Математика (за напрямами)

Колун Наталія Павлівна

Керівник д.фіз.-мат.н., проф. Євтухов В.М.________

Рецензент к.фіз.-мат.н., доц. Білозерова М.О.

Рекомендовано до захисту:

Протокол засідання кафедри

№______від ________________р.

Завідувач кафедри

__________ ______________________

(підпис) (прізвище, ініціали)

Захищено на засіданні ДЕК №_____

протокол №____від ______________р.

Оцінка ______________/________/______

(за національною шкалою,шкалою ECTS, бали)

Голова ДЕК

__________ ______________________

(підпис) (прізвище, ініціали)

Одеса - 2015

Содержание

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время в теории дифференциальных уравнений активно изучается задача об асимптотических свойствах решений дифференциальных уравнений второго порядка, содержащих в правой части суммы слагаемых с разными нелинейностями.

Большую роль в данных исследованиях играет уравнение Эмдена-Фаулера

$$y'' = \alpha_0 p(t)|y|^{\sigma}|y'|^{\lambda} sign y,$$

где $\alpha_0 \in \{-1, 1\}$, $p : [a, +\infty[\to]0, +\infty[$ - непрерывная функция,$-\infty < a < \omega \leq +\infty$, которое возникает в астрофизике, газовой динамике, механике жидкостей, теории плазмы продуктов сгорания и других областях естествознания.

Со временем, в связи с практическим применением результатов, возникла необходимость изучения обобщения уравнения Эмдена-Фаулера, в котором в правой части вместо степенной функции стоит функция общего вида φ , определенная и отличная от нуля в некоторой односторонней окрестности $Y_0(-\infty \leq Y_0 \leq +\infty)$. Данные уравнения можно классифицировать следующим образом: уравнения, где функция φ - правильно меняющаяся при $y \to Y_0$ с показателем равным единице; уравнения, где функция φ - правильно меняющаяся при $y \to Y_0$ с показателем отличным от единице и уравнения, где функция φ - быстро меняющаяся при $y \to Y_0$.

Для случая, когда функция φ является правильно меняющейся при $y \to Y_0$, были получены асимптотические представления решений такого типа уравнений в работах В.Марича, И.Т.Кигурадзе, Т.А.Чантурия, Д.Изюмова, А.В.Костина, В.М.Евтухова, Л.Кирилловой. Среди работ, посвященных случаю когда функция φ является быстро меняющейся при $y \to Y_0$, следует отметить работы Н.Г.Дрик, В.Н.Шинкаренко, В.М.Харькова.

В 1899 году, в работах Е.Бореля [6] и Е.Линделефа [12], посвященных уравнению вида

$$\sum_{i=1}^{N} a_i t^{l_i} u^{m_i} (u')^{n_i} = 0,$$

в котором $a_i \in \mathbb{R}, l_i, m_i, n_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, было положено начало исследованию обыкновенных дифференциальных уравнений, содержащих суммы слагаемых со степенными нелинейностями. Для частного случая этого уравнения, а именно для уравнения вида

$$u' = \frac{P(t,u)}{Q(t,u)},$$

где P и Q - многочлены относительно t и u, в 1912 году была опубликована работа Харди [18], в которой была разработана методика установления точных асимптотических представлений для всех решений, определенных в окрестности $+\infty$. Учитывая данную методику, в 1914 году, Фаулеру [16], для уравнения

$$u'' = \frac{P(t,u)}{Q(t,u)},$$

в котором P и Q - многочлены относительно t и u, удалось установить оценки для правильных решений.

В 1936 году были опубликованы работы [15] и [1], посвященные дифференциальному уравнению вида

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{\lambda^2 t}{2r} - \frac{r}{2} + \frac{1}{2r^3},$$

где t - время, r - радиус-вектор электрона, λ - положительный параметр. Данное уравнение описывает движение электрона в цилиндрическом диоде, находящемся в продольном магнитном поле. Г.Асколи удалось установить асимптотические представления решений данного уравнения при $t \to +\infty$.

В работах Л.А.Беклемишевой [2],[3],[4] были получены асимптотические представления при $t \to +\infty$ для всех правильных решений уравнения

$$y'' = \sum_{i=1}^{n} b_i t^{m_i} y^{\sigma_i}[1 + o_i(1)],$$

где $b_i, m_i \in \mathbb{R}, \sigma_i > 0-$ рациональное число с нечетным знаменателем.

В дальнейшем А.В.Костиным [10] было рассмотрено уравнение следующего вида

$$P(t, u, u') = \sum_{i=1}^{n} \pi_i(t, u)(u')^i = 0,$$

в котором $\pi_i : [t_0, +\infty[\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}, (i = 1, ..., n)$ - непрерывные функции. Полученные результаты были применены при исследовании уравнения

$$P(t, u, u') = \sum_{i+k=1}^{n_1} p_{ik}(t) u^i (u')^k = 0,$$

в котором все $p_{ik} : [t_0, +\infty[\to \mathbb{R}$ - непрерывно-дифференцируемые функции, удовлетворяющие вместе со своими производными первого порядка некоторым дополнительным соотношениям.

А.В.Костин исследовал также уравнение вида

$$y^{(n)} = \frac{\sum_{i=1}^{k} p_i(t) y^{\sigma_{0i}} (y')^{\sigma_{1i}} ... (y^{(n-1)})^{\sigma_{n-1i}} + f_1(t, y, y', ..., y^{(n-1)})}{\sum_{i=k+1}^{m} p_i(t) y^{\sigma_{0i}} (y')^{\sigma_{1i}} ... (y^{(n-1)})^{\sigma_{n+i}} + f_2(t, y, y', ..., y^{(n-1)})},$$

где $\sigma_{ij} \in \mathbb{R}, i = 1, ..., m; j = 0, 1, ..., n - 1; p_i : [a, +\infty[\to \mathbb{C}$ - дважды непрерывно дифференцируемые функции, а $f_1, f_2 : [a, +\infty[\times\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ - малые в некотором смысле непрерывные функции.

В дальнейшем В.М.Евтуховым и Е.В.Шебаниной [19], [10] было рассмотрено дифференциальное уравнение вида

$$y^{(n)} = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i p_i(t) \Pi_{j=0}^{n-1} |y^{(j)}|^{\sigma_{ji}},$$

где $\alpha_i \in \{-1, 1\}, (i = 1, ..., m), p_i : [a, \omega[\rightarrow (0, +\infty), (i = 1, ..., m; -\infty < a < \omega \leq +\infty)$ - непрерывно дифференцируемые функции, $\sigma_{ji} \in \mathbb{R}, (i = 1, ..., m; j = 0, 1, .., n-1)$ и такие, что $\sum_{j=0}^{n-1} \sigma_{jk} \neq \sum_{j=0}^{n-1} \sigma_{ij}, i \neq k$.

Предпосылками для изучения дифференциальных уравнений, содержащих в правой части суммы слагаемых с разными нелинейностями служат, как правило, результаты об асимптотическом поведении решений двучленных дифференциальных уравнений с такими же нелинейностями. Полученные при этом результаты охватывают, однако, лишь случаи, когда нелинейности являются правильно меняющимися функциями. Были установлены условия существования и асимптотическое поведение достаточно широкого класса решений таких уравнений. В случае же, когда нелинейности отличны от правильно меняющихся, законченных результатов для уравнений данного вида получить не удавалось.

Данная работа посвящена дифференциальному уравнению второго порядка следующего вида

$$y'' = \alpha_1 p_1(t) \varphi_1(y) + \alpha_2 p_2(t) \varphi_2(y),$$

где $\alpha_i \in \{-1, 1\}$, $p_i : [a, +\infty[\rightarrow]0, +\infty[$ - непрерывные функции, $\varphi_i : \Delta_{Y_0} \rightarrow]0, +\infty[$- дважды непрерывно дифференцируемые функции, удовлетворяющие условиям

$$\varphi_i'(y) \neq 0 \text{ при } y \in \Delta_{Y_0}, \lim_{\substack{y \to Y_0 \\ y \in \Delta_{Y_0}}} \varphi_i(y) = \varphi_0, \varphi_0 \in \{0, +\infty\},$$

$$\lim_{\substack{y\to Y_0\\ y\in\Delta_{Y_0}}} \frac{\varphi_i''(y)\varphi_i(y)}{\varphi'^2_i(y)} = \begin{cases} \frac{\sigma-1}{\sigma} & \text{при} \quad i=1 \\ 1 & \text{при} \quad i=2, \end{cases}$$

$\sigma \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, Y_0 равно либо нулю, либо $\pm\infty$, Δ_{Y_0} - односторонняя окрестность Y_0, $i = 1, 2$.

Считаем $a > 1$ при $\omega = +\infty$ и $a > \omega - 1$ при $\omega < +\infty$.

Работа состоит из двух глав. В первой главе приводятся некоторые вспомогательные сведения и результаты. Во второй главе исследуется вопрос об асимптотических свойствах решений рассматриваемого дифференциального уравнения в случае когда $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$.

ВЫВОДЫ

В данной работе исследовался вопрос о существовании у уравнения (2.1) при $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ $P_\omega(y_0, \lambda_0)-$ решений, а также асимптотических при $t \uparrow \omega$ представлений для таких решений и их производных первого порядка. Были получены следующие результаты:

Теорема 2.1 *Пусть $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$, $\sigma \neq 1$ и соблюдаются условия (2.19). Тогда для существования у уравнения (2.1) $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$- решений необходимо, а если $\lambda_0 \neq -1$ либо $\lambda_0 = -1$ и $\sigma < 1$ то и достаточно, чтобы*

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t) J_1'(t)}{J_1(t)} = \frac{(1-\sigma)\lambda_0}{\lambda_0 - 1}$$

и соблюдались неравенства

$$\alpha_1 \mu_0 \lambda_0 > 0, \mu_0 \mu_1 \lambda_0 (\lambda_0 - 1) \pi_\omega(t) > 0.$$

Более того, для каждого такого решения имеют место при $t \uparrow \omega$ асимптотические представления

$$\frac{y(t)}{\varphi_1(y(t))} = \frac{\alpha_1(\lambda_0 - 1)^2}{\lambda_0} \pi_\omega^2(t) p_1(t)[1 + o(1)],$$

$$\frac{y'(t)}{y(t)} = \frac{\lambda_0}{(\lambda_0 - 1)\pi_\omega(t)}[1 + o(1)].$$

Теорема 2.2 *Пусть $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ и соблюдаются условия (2.20). Тогда для существования у уравнения (2.1) $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$- решений необходимо, чтобы*

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t) J_2'(t)}{J_2(t)} = \frac{\lambda_0 \nu}{1 - \lambda_0},$$

$$\lim_{t \uparrow \omega} g(t) = 1$$

и соблюдались неравенства

$$\alpha_2\mu_0\lambda_0 > 0, \mu_0\mu_1\lambda_0(\lambda_0 - 1)\pi_\omega(t) > 0.$$

Более того, для каждого такого решения имеют место при $t \uparrow \omega$ *асимптотические представления*

$$\frac{y(t)}{\varphi_2(y(t))} = \frac{\alpha_2(\lambda_0 - 1)^2}{\lambda_0}\pi_\omega^2(t)p_2(t)[1 + o(1)],$$

$$\frac{y'(t)}{y(t)} = \frac{\lambda_0}{(\lambda_0 - 1)\pi_\omega(t)}[1 + o(1)].$$

Если же наряду с условиями (2.45)-(2.47), для некоторого $m > 0$

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{J_2'(t)}{J_2(t)(\pi_\omega(t))^{m\beta-1}} = 0,$$

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\exp(\pi_\omega(t))^{m\beta}}{(\pi_\omega(t))^{m\beta}}(g(t) - 1) = 0,$$

то у уравнения (2.1) существуют $P_\omega(y_0, \lambda_0)$ *- решения, допускающие эти представления.*

Работа носит теоретический характер. Результаты могут быть использованы при изучении асимптотических свойств решений дифференциальных уравнений более высоких порядков с правильно и быстро меняющимися нелинейностями.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Ascoli G. Sopra una particolare equazione differenziale del secondo ordine/G. Ascoli// Rend. R. Inst. Lombardo Sc. Lettere – 1936. – 69. – P.167 – 184, P. 185 – 197.

2. Беклемишева Л.А. Об асимптотическом поведении решений некоторых нелинейных дифференциальных уравнений / Л.А. Беклемишева// Докл. АН СССР. – 1956. – 111, №2. – С. 261 – 264.

3. Беклемишева Л.А. Некоторые свойства систем дифференциальных уравнений, близких к каноническим / Л.А. Беклемишева// Вестник МГУ. – 1960. – 4. – С. 26 – 36.

4. Беклемишева Л.А. Об одном нелинейном дифференциальном уравнении второго порядка/ Л.А. Беклемишева// Мат. сб. – 1962. – 56(98), № 2. – С. 207 – 236.

5. Bingham N.H., Goldie C.M., Teugels J.L. Regular variation. - Cambridge; New York; New Rochelle; Melbourne; Sydney: Cambridge University Press, 1987. - 510 c.

6. Borel E. Memoir sur les series divergentes / E. Borel// Annales de L'ecole Normale Superiere. - 1899. - 16. - P. 9 - 136.

7. Евтухов В.М. Асимптотические представления решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений: дис. ...докт. физ.-мат. наук:01.01.02/ Евтухов Вячеслав Михайлович. - Киев, 1998.-295с.

8. Евтухов В.М., Самойленко А.М. Условия существования исчезающих в особой точке решений у вещественных неавтономных систем квазилинейных дифференциальных уравнений//Укр.мат.журн.2010.Т.62.№1.С52-80.

9. Евтухов В.М., Самойленко А.М. Асимптотические представления решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений с правильно меняющимися нелинейностями // Дифференциальные уравнения. -2011. - т.47,№5

10. Evtukhov V.M. Asymptotic behaviour of solutions of n-th order differential equations/ V.M. Evtukhov, E.V. Shebanina // Mem. Differential Equations Math. Phys. Tbilisi. - 1998. - 13. - P. 150 - 153.

11. Костин А.В. О поведении при x... решений обыкновенных дифференциальных и алгебраических уравнений с монотонными коэффициентами / А.В. Костин // Дифференц. уравнения. - 1967. - 3, № 2. -С. 206 - 218.

12. Lindelef E. Sur la croissance des integrales des equations differentielles algebriques du premier ordre / E. Lindelef // Bull. Soc. Math. France. - 1899. - 27. - P. 205 -215.

13. Maric V. Regular variation and differential equations. - Berlin; Heidelberg; New York; Barcelona; Hong Kong; London; Milan; Paris; Singapore; Tokyo: Springer, 2000. - 132 c.

14. Сенета Е. Правильно меняющиеся функции. - М.: Наука, 1985. - 144 с.

15. Polvani G. Questioni riguardanti il magnetron/ G. Polvani, G. Ascoli, A. Giacomini// Rend. Sem. Mat. e Fisico di Milano. - 1936. - 10. - P. 279 - 338.

16. Fowler R.H. The form near infinity of real continuous solutions of a certain differential equation of the second order / R.H. Fowler// Quart. J. Pure Appl. Math. – 1914. – V. 45. – P. 289 - 350.

17. Харьков В.М. Асимптотические представления решений существенно нелинейных дифференциальных и разностных уравнений 2-го порядка: дис....канд. физ.-мат. наук:01.01.02/ Харьков Виталий Михайлович.-Одесса, 2009.-139с.

18. Hardy G.H. Some results concerning the behavior at infinity of a real and continuous solution of an algebraic differential equations of the first order / G.H. Hardy// Proc. London Math. Soc., ser 2. - 1912. - 10. - P. 451 - 468.

19. Шебанина Е.В. Асимптотические представления решений дифференциальных уравнений n-го порядка с нелинейностями типа Эмдена – Фаулера: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.02 / Шебанина Елена Вячеславовна. - Одесса, 1999. - 149с.