

УДК 532.13:532.5:519.876.5

Н. Н. Драгуновский, А. П. Царенко

Одесский национальный университет имени И. И. Мечникова

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕЧЕНИЙ ЖИДКОСТИ С ПЕРЕМЕННОЙ ВЯЗКОСТЬЮ

Искренняя признательность профессору Асланову С. К. за ряд полезных советов и замечаний, высказанных им при обсуждении материалов данной статьи.

Драгуновський М. М., Царенко О. П. Математичне моделювання течії рідини зі змінною в'язкістю. Розроблено методику чисельного інтегрування для одного класу крайових задач. Для двох випадків залежності в'язкості від температури отримані розв'язки задачі про течію рідини у круглому трубопроводі із врахуванням теплообміну із зовнішнім середовищем. Знайдено, що стаціонарний режим течії рідини залежить від координати точки перегину на профілі швидкості.

Ключові слова: математичне моделювання, змінна в'язкість, течія рідини.

Драгуновский Н. Н., Царенко А. П. Математическое моделирование течений жидкости с переменной вязкостью. Разработана методика численного интегрирования для одного класса краевых задач. Для двух случаев зависимости вязкости от температуры получены решения задачи о течении жидкости в круглой трубе с учетом теплообмена с внешней средой. Обнаружено, что стационарный режим течения жидкости зависит от координаты точки перегиба на профиле скорости.

Ключевые слова: математическое моделирование, переменная вязкость, течение жидкости.

Dragunovsky N. N., Tsarenko A. P. Mathematical modelling of fluid with variable viscosity flows. The method of numerical integration is developed for one class of boundary tasks. For two cases of dependence of viscosity from a temperature the solutions of task are got about the flow of fluid in a circular pipe taking into account a heat exchange with an external medium. It is discovered, that the stationary mode of flow of liquid depends on the co-ordinate of inflection point on the profile of speed.

Key words: mathematical modelling, variable viscosity, flow of fluid.

ВВЕДЕНИЕ. Математическое моделирование течений ньютоновских жидкостей содержит ряд упрощающих допущений, касающихся, как правило, теплофизических свойств жидкости и позволяющих получать решения соответствующих краевых задач в простом функциональном виде [1]. Классическими примерами таких задач являются сдвиговые течения Куэтта и напорное течение Хагена-Пуазейля в круглой трубе, для которых основным модельным допущением является предположение о неизменности коэффициента вязкости.

Модель, в которой учтена зависимость вязкости жидкости от ее температуры [2], позволила выявить ряд новых свойств и особенностей у стационарных профилей скорости и температуры [3–6], а также обнаружила их принципиальную зависимость между собой и от условий теплообмена с внешней средой.

Сопряженность краевой задачи для стационарного течения и экспоненциальный характер теоретической зависимости [2] вязкости от температуры (физиче-

ская кинетика) позволили найти ее решения [3–6] лишь для асимптотик указанной кинетики в предположении малости диссипативного разогрева жидкости.

Интегрирование уравнений движения вязкой жидкости и баланса тепла [1] с использованием в неизменном виде теоретической зависимости [2] оказалось возможным только численным образом.

В настоящей работе предлагается универсальная методика численного интегрирования краевых задач теории вязких течений с учетом зависимости вязкости жидкости от температуры и условий стационарного теплообмена с внешней средой.

Данная методика использует тот факт [3], что для решения указанных выше классических задач динамики вязких течений можно выполнить последовательное интегрирование уравнения теплопроводности, а затем — уравнения Навье-Стокса.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ.

1. Постановка задачи. Рассмотрим класс нелинейных (нелинейность III рода) краевых задач для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с линейным дифференциальным оператором:

$$\varphi_2(x) \cdot \frac{d^2 f}{dx^2} + \varphi_1(x) \cdot \frac{df}{dx} = \Psi(x, f), \quad (1)$$

и граничными условиями III рода:

$$\begin{cases} \alpha_1 \cdot f' + \beta_1 \cdot f = \phi_1, & \text{при } x = x_0, \\ \alpha_2 \cdot f' + \beta_2 \cdot f = \phi_2, & \text{при } x = x_n, \end{cases} \quad (2)$$

где $x \in [x_0, x_n]$; $\varphi_2(x)$ и $\varphi_1(x)$ — заданные непрерывные на $[x_0, x_n]$ функции, $\Psi(x, f)$ — заданная нелинейная функция; $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \phi_1$ и ϕ_2 — заданные константы.

Будем решать краевую задачу (1)–(2) конечно-разностным методом с использованием представлений

$$f'(x_i) = \alpha_{i,i_1} f_{i_1} + \alpha_{i,i_1+1} f_{i_1+1} + \dots + \alpha_{i,i} f_i + \dots + \alpha_{i,i_m-1} f_{i_m-1} + \alpha_{i,i_m} f_{i_m}, \quad (3)$$

$$f''(x_i) = \beta_{i,i_1} f_{i_1} + \beta_{i,i_1+1} f_{i_1+1} + \dots + \beta_{i,i} f_i + \dots + \beta_{i,i_m-1} f_{i_m-1} + \beta_{i,i_m} f_{i_m}, \quad (4)$$

где f_i — значения искомой функции $f(x)$ в узлах разностной сетки $x_i, i = \overline{0, n}$, построенной по некоторому закону на интервале интегрирования $[x_0, x_n]$, в частности, это разбиение может носить и равномерный характер.

Представления (3) и (4) содержат неизвестные наперед коэффициенты $\alpha_{i,j}$ и $\beta_{i,j}$, значения которых необходимо предварительно вычислять в рамках отдельно решаемой задачи в зависимости от закона распределения узлов x_i разностной сетки и от порядка $m \geq 3$ данных представлений.

Приближенное решение задачи (1)–(2) будет представлять собой вектор $\mathbf{f}$ чисел $f_i, i = \overline{0, n}$, каждое из которых соответствует значению искомой функции в соответствующей точке разбиения отрезка $[x_0, x_n]$, т.е. $f_i = f(x_i), i = \overline{0, n}$. Упорядоченное множество узлов x_i мы будем далее трактовать как вектор $\mathbf{x}$.

Замена в (1)–(2) производных конечно-разностными представлениями (3) и (4) приводит краевую задачу к системе из $n + 1$ нелинейного алгебраического

уравнения, которую представим в матричном виде:

$$[\Phi_2 \cdot \mathbf{D}_2 + \Phi_1 \cdot \mathbf{D}_1] \cdot \mathbf{f} = \Psi(\mathbf{x}, \mathbf{f}), \quad (5)$$

где $\mathbf{D}_2$ и $\mathbf{D}_1$ — матрицы коэффициентов для вторых и первых производных, $\Phi_2 = \varphi_2(\mathbf{x})$, $\Phi_1 = \varphi_1(\mathbf{x})$ — соответствующие векторы.

Для решения системы (5) будем использовать итерационный метод Пикара [7].

Обозначим через $\mathbf{f}^{(k)}$ — k -тое приближение к искомому решению, тогда итерационная схема Пикара применительно к системе уравнений (5) может быть представлена в виде:

$$\mathbf{f}^{(k+1)} = \mathbf{D} \cdot \Psi(\mathbf{x}, \mathbf{f}^{(k)}), \quad (6)$$

где $\mathbf{D}$ — обратная матрица размера $(n+1) \times (n+1)$, т. е.

$$\mathbf{D} = [\Phi_2 \cdot \mathbf{D}_2 + \Phi_1 \cdot \mathbf{D}_1]^{-1}. \quad (7)$$

Будем считать, что решение системы (5) получено с заданной точностью ε , когда

$$\max_i (|f_i^{(k+1)} - f_i^{(k)}|) < \varepsilon. \quad (8)$$

2. Численный метод. Алгоритм вычисления коэффициентов $\alpha_{i,j}$ и $\beta_{i,j}$ для разностных представлений (3)–(4) построен на основе метода интерполирования функций по Лагранжу [7].

Определяющим параметром этих представлений является число m , задающее количество узлов разностной сетки, по которым эти представления строятся, $m \geq 3$.

Очевидно, что качество аппроксимаций производных, а вместе с ними и численного решения задачи (1)–(2), существенным образом зависит от величины m .

Пусть общее количество интервалов, на которые разбивается область $[x_0, x_n]$, равно n . Следовательно, мы имеем заданные по какому-либо правилу узлы x_i , где индекс i пробегает значения от 0 до n . Пусть построение конечно-разностных представлений (3)–(4) выполняется для узла x_i — опорный узел.

Введем обозначение $[x_{i_1}; x_{i_m}]$ для частичного интервала интерполирования, содержащего в себе опорный узел x_i . Индексы i_1 и i_m узлов-границ частичного интервала $[x_{i_1}; x_{i_m}]$ определяются из условия, что опорный узел x_i располагается "посередине" этого интервала. Это требование всегда будет выполняться, если задавать количество узлов $m \geq 3$ нечетным числом. Таким образом,

$$i_1 = i - [m/2] \quad \text{и} \quad i_m = i + [m/2], \quad (9)$$

где $[m/2]$ — целое от деления m пополам, например, при $m = 7$ будет $[m/2] = 3$.

Если при реализации алгоритма (9) индекс i_1 оказывается отрицательным (или индекс i_m превышает значение n), то это означает, что слева (или справа) от опорного узла x_i недостаточно узлов для построения "центральной" разностной формулы. Поэтому для таких опорных узлов мы будем строить "правые" (или "левые") разностные представления.

В первом случае мы в качестве индекса i_1 будем брать 0, а индексу i_m дадим значение $m - 1$, т. е.

$$x_{i_1} = x_0 \quad \text{и} \quad x_{i_m} = x_{m-1}. \quad (10)$$

Во втором случае индексу i_m дадим значение n , а индексу i_1 — значение $n - m + 1$:

$$x_{i_1} = x_{n-m+1} \quad \text{и} \quad x_{i_m} = x_n. \quad (11)$$

Во всех перечисленных случаях (9)–(11) для частичного интервала интерполирования будет выделено из основной таблицы ровно m узлов ($m - 1$ интервал интерполирования).

Такой подход обеспечивает наилучшее для многочлена Лагранжа "качество" аппроксимации функции $f(x)$ и ее производных $f'(x)$ и $f''(x)$.

Пусть нам необходимо вычислить коэффициенты $\alpha_{i,j}$ для i -й строки матрицы $\mathbf{D}_1$, т. е. построить разностное представление (3) для первой производной искомой функции $f(x)$. Опорным узлом представления (3) будет x_i , а интервалом интерполирования — отрезок $[x_{i_1}; x_{i_m}]$, индексные границы i_1 и i_m которого мы уже установили (9)–(11).

На интервале $[x_{i_1}; x_{i_m}]$ многочлен Лагранжа и его первая производная имеют вид:

$$L_i(x) = \sum_{j=i_1}^{i_m} \left(f_j \cdot \frac{l_{ij}(x)}{c_{ij}} \right) \quad \text{и} \quad L'_i(x) = \sum_{j=i_1}^{i_m} \left(f_j \cdot \frac{l'_{ij}(x)}{c_{ij}} \right), \quad f_j = f(x_j), \quad (12)$$

где

$$l_{ij}(x) = (x - x_{i_1}) \cdot (x - x_{i_1+1}) \cdot \dots \cdot (x - x_{j-1}) \cdot (x - x_{j+1}) \cdot \dots \cdot (x - x_{i_m-1}) \cdot (x - x_{i_m}), \quad (13)$$

$$c_{ij} = (x_j - x_{i_1}) \cdot (x_j - x_{i_1+1}) \cdot \dots \cdot (x_j - x_{j-1}) \cdot (x_j - x_{j+1}) \cdot \dots \cdot (x_j - x_{i_m-1}) \cdot (x_j - x_{i_m}). \quad (14)$$

Основным элементом формул (12) является многочлен $l_{ij}(x)$ степени $m - 1$. Нам предстоит составить алгоритм формирования производной $l'_{ij}(x)$ от этого многочлена с последующим вычислением значения этой производной $l'_{ij}(x_i)$ в опорном узле x_i .

Как следует из формулы (13), многочлен $l_{ij}(x)$ есть произведение из $m - 1$ линейных множителей, в котором "отсутствует" множитель $(x - x_j)$.

Дифференцирование произведения $l_{ij}(x)$ даст нам сумму из $m - 1$ слагаемых. Каждое слагаемое из этой суммы представляет собой исходное произведение $l_{ij}(x)$, в котором отсутствует определенный множитель (по которому выполнялось дифференцирование), т. е. будет произведением из $m - 2$ линейных сомножителей:

$$l'_{ij}(x) = \sum_{\substack{k=i_1 \\ k \neq j}}^{i_m} (x - x_{i_1}) \cdot \dots \cdot (x - x_{k-1}) \cdot (x - x_{k+1}) \cdot \dots \cdot (x - x_{i_m}). \quad (15)$$

При составлении компьютерного алгоритма вычисления $l'_{ij}(x)$ необходимо помнить, что дифференцирование $l_{ij}(x)$ по множителю $(x - x_j)$ вообще не производится по причине его отсутствия в произведении $l_{ij}(x)$. Кроме того, множителя $(x - x_j)$ вообще не будет ни в одном из слагаемых суммы (15).

Таким образом, искомые коэффициенты $\alpha_{i,j}$ в представлении (3) для первой производной $f'(x)$ мы будем вычислять, предполагая, что

$$f'(x_i) \approx L'_i(x_i). \quad (16)$$

Тогда

$$\alpha_{i,j} = l'_{ij}(x_i)/c_{ij}, \quad \text{где} \quad j = \overline{i_1, i_m}. \quad (17)$$

Аналогично изложенному выше, коэффициенты $\beta_{i,j}$ в представлении (4) для второй производной также должны базироваться на выражении (15).

Дифференцирование (15) дает

$$l''_{ij}(x) = \sum_{\substack{k=i_1 \\ k \neq j}}^{i_m} \sum_{\substack{\nu=i_1 \\ \nu \neq j \\ \nu \neq k}}^{i_m} (x - x_{i_1}) \cdot (x - x_{i_1+1}) \cdot \dots \cdot (x - x_{\nu-1}) \cdot (x - x_{\nu+1}) \cdot \dots \cdot (x - x_{i_m-1}) \cdot (x - x_{i_m}) \quad (18)$$

Следовательно, искомые коэффициенты $\beta_{i,j}$ в представлении (4) для второй производной $f''(x)$ вычисляются в предположении, что

$$f''(x_i) \approx L''_i(x_i). \quad (19)$$

Тогда

$$\beta_{i,j} = l''_{ij}(x_i)/c_{ij}, \quad \text{где} \quad j = \overline{i_1, i_m}. \quad (20)$$

Проверка алгоритма определения коэффициентов $\alpha_{i,j}$ и $\beta_{i,j}$ для формул (3)–(4) производилась на функции, представляющей собой многочлен степени $m - 1$:

$$f(x) = (x - 1)(x - 2) \dots (x - m + 1). \quad (21)$$

Очевидно, что при таком тестировании функция $f(x)$ и ее аппроксимация в виде интерполяционного многочлена Лагранжа (12) по m точкам функционально совпадают. Поэтому представления (3)–(4) для первой и второй производных должны для функции (21) давать результаты вычислений вообще без погрешности.

Для минимизации ошибок округления использовалась арифметика с максимально возможным количеством знаков в мантиссе действительные числа — 33 (16 байт). Эту возможность предоставляет вычислителям современный компилятор Intel® Fortran Compiler, функционирующий в составе среды Microsoft Visual Studio. Тестовые вычисления показали абсолютную корректность разработанного алгоритма определения коэффициентов $\alpha_{i,j}$ и $\beta_{i,j}$ для представлений (3)–(4).

3. Решение задачи. Для применения разработанного подхода к интегрированию краевых задач типа (1)–(2) была выбрана постановка задачи

о напорном неизотермическом течении ньютоновской жидкости в круглой трубе с учетом переменности вязкости и условий теплообмена с внешней средой [3]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dU}{d\xi} = b_0 \xi \cdot \exp\left(\frac{\delta_0 \theta}{1+\theta}\right), \quad U|_{\xi=1} = 0; \\ \xi \frac{d}{d\xi} \left(\xi \frac{d\theta}{d\xi} \right) + a_0 \xi^4 \cdot \exp\left(\frac{\delta_0 \theta}{1+\theta}\right) = 0, \\ \frac{d\theta}{d\xi} \Big|_{\xi=0} = 0, \quad \frac{d\theta}{d\xi} \Big|_{\xi=1} = -Bi \cdot \theta|_{\xi=1}. \end{array} \right. \quad (22)$$

Здесь $U(\xi) = \frac{R\rho_0}{\mu_0} V_z$ и $\theta(\xi) = \frac{T-T_0}{T_0}$ — безразмерные скорость и температура жидкости, $\xi = r/R$ — безразмерная радиальная переменная, R — радиус трубопровода; ρ_0 , μ_0 , λ_0 — плотность, вязкость и теплопроводность жидкости при температуре внешней среды T_0 , $Bi = \alpha_0 R / \lambda_0$ — критерий Био [8], характеризующий интенсивность теплообмена на поверхности трубы, α_0 — коэффициент теплоотдачи во внешнюю среду, $b_0 = \frac{\rho_0 R^3}{2\mu_0^2} \frac{dP}{dz}$ и $a_0 = \frac{R^4}{4\mu_0 \lambda_0 T_0} \left(\frac{dP}{dz} \right)^2$ — безразмерные комбинации, dP/dz — постоянный перепад давления. Постановка (22) записана для теоретической зависимости $\mu(T) = A \cdot \exp(E/T)$ вязкости жидкости от ее температуры [2], которая в безразмерной форме имеет следующий вид:

$$M(\xi) = \frac{\mu}{\mu_0} = \exp\left(\frac{-\delta_0 \theta}{1+\theta}\right), \quad \mu_0 = A \cdot \exp(\delta_0), \quad \delta_0 = \frac{E}{T_0}, \quad (23)$$

где параметр δ_0 для заданной жидкости характеризует интенсивность изменения вязкости при изменении ее температуры.

Необходимо отметить, что δ_0 является ключевым параметром краевой задачи (22). Постоянная δ_0 обеспечивает обратную связь между термодинамическим состоянием движущейся жидкости и ее динамическими характеристиками, при этом математическая постановка требует совокупного интегрирования уравнений движения и баланса тепла.

Модель течения, в которой вязкость жидкости принимается постоянной, т. е. $\delta_0 = 0$, лишена упомянутой обратной связи. В результате динамика такого течения не зависит как от теплового состояния движущейся жидкости, которое формируется благодаря вязкой диссипации, так и от условий теплообмена с внешней средой.

Задача (22) оказалась привлекательной благодаря наличию ее точного решения [3,5] для случая малого ($\theta \ll 1$) диссипативного разогрева жидкости, когда в качестве закона изменения вязкости жидкости от ее температуры выбирается асимптотика теоретического закона (23):

$$M(\xi) = \exp(-\delta_0 \theta). \quad (24)$$

Краевая задача

$$\begin{cases} \xi \frac{d}{d\xi} \left(\xi \frac{d(\delta_0 \theta)}{d\xi} \right) + 8a\xi^4 \exp(\delta_0 \theta) = 0, \\ \frac{d\theta}{d\xi} \Big|_{\xi=0} = 0, \quad \frac{d\theta}{d\xi} \Big|_{\xi=1} = -Bi \cdot \theta \Big|_{\xi=1} \end{cases} \quad (25)$$

для профиля температуры в случае зависимости (24), где $a = \delta_0 a_0 / 8$ — безразмерный параметр, имеет решение [5] в виде

$$\theta(\xi) = \frac{1}{\delta_0} \ln \left[\frac{4c}{a} \cdot (1 + c\xi^4)^{-2} \right], \quad (26)$$

где c — константа интегрирования, определяемая из уравнения

$$\frac{8c}{1+c} = Bi \cdot \ln \left(\frac{4c}{a \cdot (1+c)^2} \right), \quad (27)$$

получаемого из граничного условия теплообмена с внешней средой.

Интегрирование уравнения

$$\frac{dU}{d\xi} = b_0 \frac{4c}{a} \frac{\xi}{(1+c\xi^4)^2} \quad \text{с условием} \quad U(1) = 0 \quad (28)$$

дает безразмерный профиль скорости жидкости в круглой трубе [5]:

$$U(\xi) = b_0 \frac{c}{a} \left(\frac{\xi^2}{1+c\xi^4} - \frac{1}{1+c} + \frac{\arctan(\sqrt{c}\xi^2) - \arctan(\sqrt{c})}{\sqrt{c}} \right). \quad (29)$$

Тестовые вычисления по схеме (6) для задач (25) и (28) показали хорошие результаты. Все без исключения этапы расчетной программы предварительно тестировались, и для каждого алгоритма определялась допускаемая им абсолютная погрешность.

Можно выделить три основных блока вычислений, обладающих ”собственной” погрешностью. Во-первых, это алгоритм обращения матрицы [9]. Во-вторых, схема итераций по Пикару (6). В-третьих, это погрешность, допускаемая нами при замене производных конечно-разностными представлениями (3)–(4).

Присутствует также погрешность определения постоянной интегрирования c для стационарного решения (26), (29). Соответствующее уравнение (27) решалось методом дихотомии с максимально возможной точностью $\sim 10^{-31}$, поэтому влияние данной погрешности на общий результат было сведено к минимуму.

Очевидно, что при последовательном выполнении этапов вычислений общая ошибка может только накапливаться, поэтому нет смысла производить последующие вычисления с требованием их высокой точности, если предыдущие этапы уже выполнены с малой точностью.

Поскольку перед нами стояла задача путем тестовых вычислений определить практические границы применимости предлагаемой расчетной схемы для интегрирования целого класса краевых задач, становится понятным, почему проблеме вычислительной погрешности в настоящей работе уделено так много внимания.

Доработка алгоритма обращения матрицы [9] позволила вычислять матрицу $\mathbf{D}$ (7) размера $(n + 1) \times (n + 1)$ для значений $n = 200$ и $m = 19$ с абсолютной погрешностью, не превышающей 10^{-24} . При $n = 200$ и $m = 3$ погрешность этой процедуры не превышала 10^{-31} , т. е. была в рамках погрешности процессора персонального компьютера для арифметических операций с числами с мантиссой в 32 знака.

Это говорит о практической реализуемости вычислительной схемы (6), поскольку большая погрешность при обращении подобных матриц свидетельствует, в первую очередь, о малой их обусловленности, что ведет, в конечном итоге, к качественно плохому результату интегрирования дифференциальных уравнений типа (1) разностными методами.

В результате анализа результатов тестовых расчетов было также обнаружено, что наибольшие погрешности вычислений искомых функций наблюдаются на границах области интегрирования краевой задачи (25).

Причина в том, что односторонние разностные представления производных (3)–(4) при одинаковом количестве используемых узлов разностной сетки имеют меньший порядок аппроксимации, нежели центральные разностные формулы.

Поэтому для узлов разностной сетки, для которых выполнялось построение односторонних представлений для производных, выполнялось увеличение индексных границ i_1 и i_m для соответствующих многочленов Лагранжа, т. е. использовалось большее количество узлов для представлений (3) и (4).

Вычисления производились для количества узлов сетки $n = 100, 200$ и $m = 5 \div 19$.

В качестве конкретной жидкости было взято масло ТМ-1 [10] со следующими теплофизическими характеристиками:

$$T_0 = 293^\circ K, \delta_0 = 12.6, \rho_0 = 889 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}, \mu_0 = 0.01867 \frac{\text{Н} \cdot \text{с}}{2}, \lambda_0 = 0.119 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{град}} \quad (30)$$

и радиусом трубы $R = 0.03 \text{ м}$.

Анализ абсолютной погрешности ε_6 вычислений по схеме (6) для задачи (25), (28) и погрешности ε_7 процедуры обращения матрицы (7) производился для максимальных значений скорости и температуры жидкости

$$U_{\max} = -b_0 \frac{c}{a} \left(\frac{1}{1+c} + \frac{\arctan(\sqrt{c})}{\sqrt{c}} \right), \quad \theta_{\max} = \frac{1}{\delta_0} \ln \left(\frac{4c}{a} \right), \quad (31)$$

достигаемых на оси трубопровода ($\xi = 0$). По этим результатам (для

значения параметра $a = 0.9$ при $Bi = \infty$, $U_{\max} = 3.52$, $\theta_{\max} = 0.0664$) построена следующая таблица:

Таблица 1

	m	3	7	11	15	19
$n = 100$	ε_6	$\sim 10^{-4}$	$\sim 10^{-11}$	$\sim 10^{-14}$	$\sim 10^{-17}$	$\sim 10^{-20}$
	ε_7	$\sim 10^{-31}$	$\sim 10^{-30}$	$\sim 10^{-29}$	$\sim 10^{-27}$	$\sim 10^{-24}$
$n = 200$	ε_6	$\sim 10^{-4}$	$\sim 10^{-12}$	$\sim 10^{-17}$	$\sim 10^{-22}$	$\sim 10^{-23}$
	ε_7	$\sim 10^{-31}$	$\sim 10^{-30}$	$\sim 10^{-29}$	$\sim 10^{-27}$	$\sim 10^{-24}$

Данные, собранные в таблице 1, свидетельствуют о том, что ошибка ε_7 при $m > 19$, допускаемая на начальном этапе общей расчетной схемы при вычислении обратной матрицы (7), будет ограничивать точность итерационной схемы Пикара (6) и конечного результата независимо от порядка аппроксимаций производных (3) и (4).

Можно говорить, что усилия, затраченные на разработку алгоритмов интегрирования задачи (22), безусловно оправдали себя, поскольку мы гарантировано имеем все верные значащие цифры для искомых распределений скорости и температуры при формировании данных действительного типа, для которых отводится 8 байт компьютерной памяти (16 знаков).

Такой солидный запас верных значащих цифр позволит в дальнейшем численным образом исследовать решения задачи (22) на их гидродинамическую устойчивость по отношению к малым возмущениям.

Особый характер сходимости итераций по схеме (6) был отмечен для случаев, когда набор параметров задачи (25) соответствовал "предельному" режиму течения жидкости переменной вязкости в круглой трубе [5].

Соответствующие вычисления позволили нам исследовать "неустранимую" погрешность предлагаемой схемы, называемую погрешностью метода [7].

Так, например, при $Bi = \infty$ предельными значениями являются $a_* = 1$ и $c_* = 1$.

Поведение "неустранимой" погрешности представлено в таблице результатов расчетов значения $U_{\max}$, выполненных при $n = 100$ и $m = 7$ для значений параметра a "близких" к предельной величине $a_* = 1$:

Таблица 2

a	0.9	0.99	0.999	0.9999	0.99999
k	70	160	450	1250	3500
ε_6	$\sim 10^{-11}$	$\sim 10^{-10}$	$\sim 10^{-9}$	$\sim 10^{-9}$	$\sim 10^{-8}$

Наблюдаемое увеличение необходимого количества итераций k сопровождается значительным падением точности ε_6 получаемого решения для

данного количества узлов n и порядка m представлений (3)–(4). Оказалось, что условие (8) завершения итераций по схеме (6), поставленное с погрешностью ε , не гарантирует, что конечный результат будет получен с $\varepsilon \approx \varepsilon_6$. Более того, мы имели $\varepsilon_6 \gg \varepsilon$.

Следовательно, ”предельные” режимы течения вязкой жидкости должны рассчитываться с наибольшей тщательностью и дополнительным контролем получаемого результата.

4. Результаты расчетов. Конечной целью данного исследования было получение численного решения задачи (22) и сопоставление его с известным аналитическим решением (26),(29) задачи (25),(28) при одинаковых значениях их физических параметров.

Наличие у решения (26) пределов стационарности указывает на возможное наличие таковых и для задачи (22). Поэтому наибольший интерес с точки зрения сопоставления двух моделей одного и того же исследуемого физического процесса представляют собой как раз их предельные режимы.

Наибольшие скорости напорного течения (максимальный разогрев за счет вязкой диссипации) достигаются в условиях неограниченного теплообмена движущейся жидкости с внешней средой. Поэтому расчеты выполнены для физических характеристик течения (30) и для значения $a = 0.99$ (при $Bi = \infty$), соответствующего режиму, близкому к предельному для (25).

Ниже на рисунках 1–3 приведены профили температуры, скорости и вязкости движущейся жидкости как функции безразмерной радиальной координаты ξ .

В качестве масштаба для профилей скорости выбиралась средняя скорость течения Пуазейля в случае постоянной вязкости, равная $U_{cp}^0 = -b_0/4$.

Цифрами 1, 2, 3 соответственно обозначены профили для случая постоянной вязкости, для кинетики (24) и для кинетики (23).

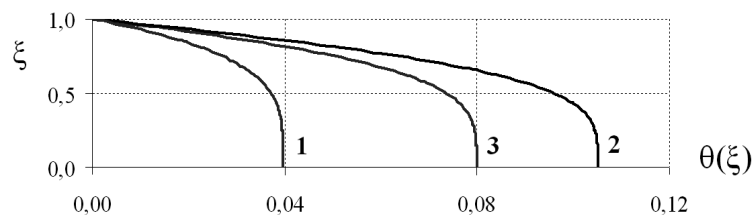
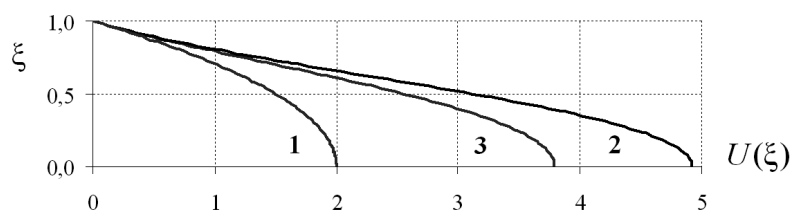
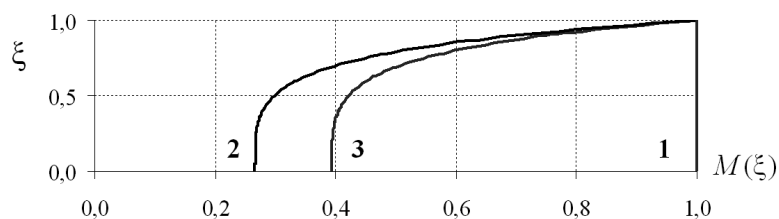


Рис. 1. Профили температуры $\theta(\xi)$

Рис. 2. Профили скорости $U(\xi)$ Рис. 3. Профили вязкости $M(\xi)$

Принципиальное количественное отличие решений для всех трех случаев зависимости вязкости от температуры очевидно.

Для понимания факта меньших значений скорости жидкости и ее температуры на оси трубопровода для случая зависимости (23) по сравнению с таковыми для (24) следует обратить внимание на сами упомянутые кинетики.

Разогрев движущейся жидкости за счет вязкой диссипации, согласно обеим кинетикам, влечет уменьшение ее вязкости. Однако тенденции этого уменьшения у данных кинетик существенно различаются. Рост температуры движущейся жидкости в рамках кинетики (24) сопровождается все большим уменьшением ее вязкости. Для кинетики (23) диссипативный разогрев жидкости сопровождается уменьшением ее вязкости до некоторого "предельного" значения $\mu_0 \exp(-\delta_0)$.

Следовательно, при одинаковом перепаде давления на концах трубопровода в случае кинетики (24) мы будем иметь менее вязкую жидкость и как следствие этого — больший секундный расход, нежели для течения с кинетикой (23). Этим и объясняется, в конечном итоге, наблюдаемая на рисунках 1–3 разница профилей скорости и температуры.

Анализ результатов вычислений показал, что течение жидкости в круглой трубе, для которого принята физическая кинетика (23), также имеет предел стационарности.

Однако при одних и тех же условиях теплообмена с внешней средой (критерий) этот предел достигается при значениях параметра a больших, чем a_* для течения с кинетикой (24), т. е. для которых стационарное решение (26), (29) уже не реализуется.

Достижимые при этом значения скорости течения жидкости и ее температуры на оси трубопровода уже существенно превосходят таковые для

”предельного” режима с кинетикой (24).

Для иллюстрации сказанного ниже на рисунках 4–6 приводятся ”предельные” для обеих рассматриваемых кинетик распределения температуры, скорости и вязкости жидкости вдоль радиуса трубы, вычисленные при $Bi = \infty$. Здесь сохраняется принятая ранее нумерация кривых в соответствии с их кинетиками.

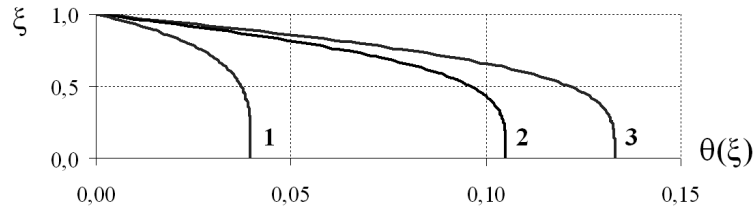


Рис. 4. ”Предельные” распределения температуры $\theta(\xi)$

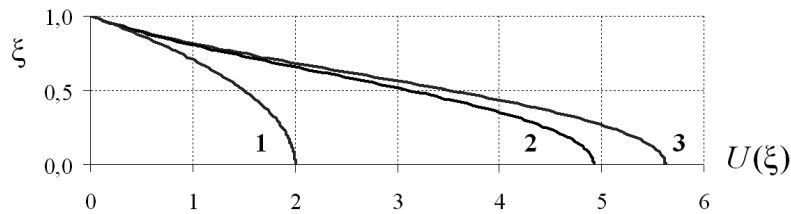


Рис. 5. ”Предельные” распределения скорости $U(\xi)$

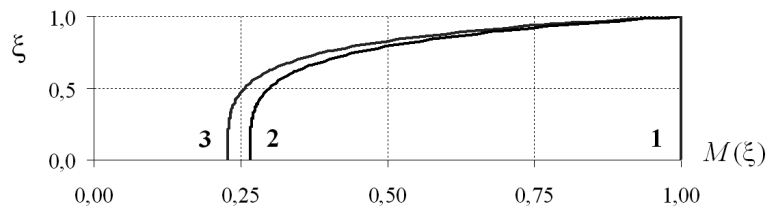


Рис. 6. ”Предельные” распределения вязкости $M(\xi)$

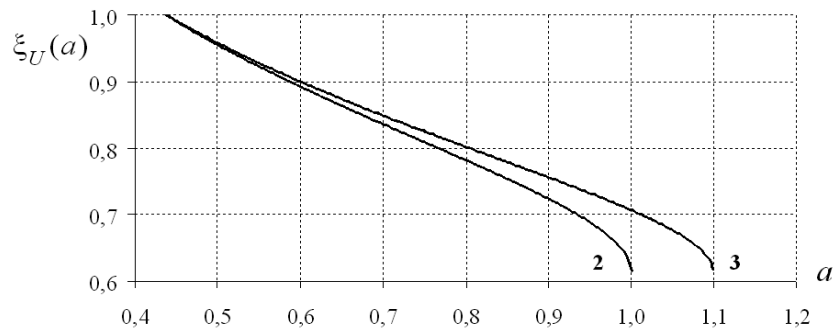
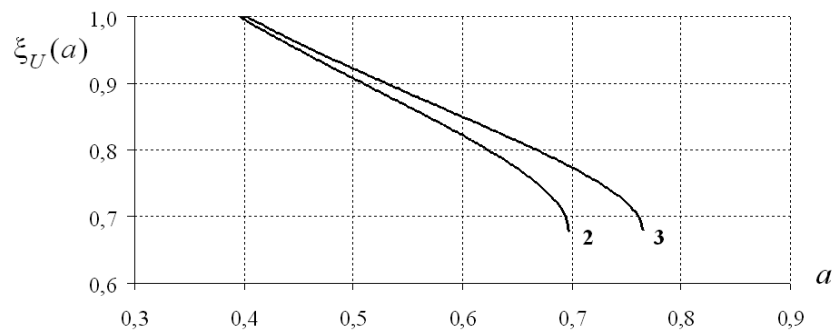
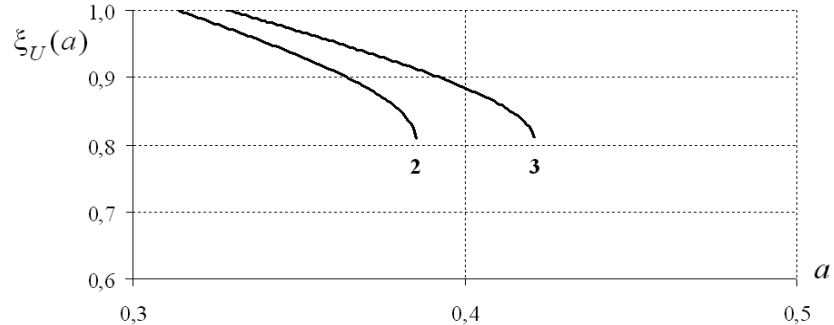
Известно [3], что профиль скорости (29) обладает точкой перегиба ξ_U , которая при определенных условиях течения — $c \geq 1/7$, может располагаться внутри трубопровода, т. е. $\xi_U \leq 1$.

Этот факт, установленный аналитическим путем для кинетики (24), говорит о необходимости выяснения наличия подобной точки для профиля скорости в случае кинетики (23).

Такое исследование можно выполнить только численным путем на базе уже полученного численного решения задачи (22).

Для определения координаты точки перегиба на профиле скорости была использована методика численного дифференцирования, представленная в первых параграфах настоящей работы.

Результаты вычислений для различных случаев теплообмена с внешней средой представлены в виде зависимости $\xi_U(a)$, см. рис. 7–9.

Рис. 7. Координата точки ξ_U на профиле скорости при $Bi = \infty$ Рис. 8. Координата точки ξ_U на профиле скорости при $Bi = 10$ Рис. 9. Координата точки ξ_U на профиле скорости при $Bi = 3$

На рисунках 7–9 четко видно, что исследуемые течения жидкости переменной вязкости в круглой трубе достигают своих "предельных" режимов, когда координата точки перегиба на профиле скорости достигает своего "критического" (наименьшего) значения ξ_U^* . При этом разными для рассматриваемых течений оказываются критические значения параметра a . Ближе всего к оси трубопровода точка перегиба ξ_U^* будет располагаться на пределе решения при $Bi = \infty$ (см. рис. 7).

Расчеты показали, что "критическое" значение ξ_U^* одинаково для обеих исследуемых кинетик (23) и (24) и зависит только от значения критерия Bi , т. е. от условий теплообмена движущейся вязкой жидкости с внешней средой. Анализ графиков, представленных на рисунках 7–9, показывает,

что уменьшение количества отводимого во внешнюю среду тепла (уменьшение критерия Bi) влечет уменьшение соответствующего критического значения параметра a , а с ним и допустимого перепада давления вдоль оси трубопровода, определяющего расход жидкости.

Все сказанное выше свидетельствует о том, что рассматриваемая в настоящей работе модель течения жидкости, учитывающая переменность вязкости, перспективна для исследования на линейную гидродинамическую устойчивость. Именно последние обнаруженные факты указывают, что гидродинамика (точка перегиба на профиле скорости) и термодинамическое состояние движущейся жидкости (ее диссипативный разогрев, регулируемый условиями теплообмена с внешней средой) вместе определяют границы стационарности рассматриваемого течения и возможные механизмы его перехода от ламинарного режима к турбулентному.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ. На основе разработанной методики численного интегрирования решена задача о течении вязкой несжимаемой жидкости в круглой трубе с учетом теплообмена с внешней средой. Высокая точность разностной схемы и собственное программное обеспечение позволили выполнить качественный и количественный анализ полученных стационарных профилей, а также выявить ряд новых свойств для течения жидкости, когда учитывается переменность ее вязкости.

Раскрыта важная роль физической кинетики (зависимости вязкости жидкости от ее температуры), реализующей нелинейную взаимную связь между гидродинамическими характеристиками потока жидкости и ее термодинамическим состоянием.

Для двух случаев экспоненциальной зависимости вязкости от температуры рассчитаны пределы стационарных режимов течения в круглой трубе. Показано, что критерием перехода к нестационарному режиму течения может быть выбрано условие достижения точкой перегиба профиля скорости ее "критической координаты", наиболее близко расположенной к оси трубопровода.

Следующим этапом изучения подобных вязких течений может быть исследование их на линейную гидродинамическую устойчивость.

Работа выполнена на кафедре теоретической механики ИМЭМ ОНУ имени И. И. Мечникова.

1. **Лойцянский Л. Г.** Механика жидкости и газа [текст] / Л. Г. Лойцянский. – М.: Наука, 1987. – 840 с.
2. **Френкель Я. И.** Кинетическая теория жидкостей [текст] / Я. И. Френкель. – Л.: Наука, 1975. – 592 с.

3. **Асланов С. К.** Пределы существования и устойчивость течения жидкости переменной вязкости в круглой трубе [текст] / С. К. Асланов, А. П. Царенко // Вестник Одесского ун-та. – 1995. – № 1. – С. 104–111.
4. **Каганов С. А.** О профиле скоростей ламинарного потока вязкой жидкости с учетом теплоты трения и изменения коэффициента вязкости от температуры [текст] / С. А. Каганов, В. С. Яблонский // Изв. высш. уч. зав., - Нефть и газ. – 1960. – № 1. – С. 85–92.
5. **Асланов С. К.** Течение жидкости переменной вязкости в круглом трубопроводе [текст] / С. К. Асланов // Изв. высш. уч. зав., Нефть и газ. – 1961. – № 12. – С. 83–88.
6. **Асланов С. К.** О границах стационарного режима и устойчивости ламинарного течения жидкости в круглой трубе с учетом температурной зависимости вязкости и теплообмена [текст] / С. К. Асланов // Изв. высш. уч. зав., Нефть и газ. – 1963. – № 1. – С. 77–80.
7. **Самарский А. А.** Численные методы [текст] / А. А. Самарский, А. В. Гулин. – М.: Наука, 1989. – 360 с.
8. **Лыков А. В.** Тепломассообмен [текст] / А. В. Лыков. – М.: Энергия, 1971. – 560 с.
9. **Агеев М. И.** Библиотека алгоритмов 16-506 [текст] / М. И. Агеев. – М.: Сов. радио, 1975. – 176 с.
10. **Варгафтик Н. Б.** Справочник по теплофизическим свойствам газов и жидкостей [текст] / Н. Б. Варгафтик. – М.: Наука, 1972. – 720 с.
11. **Шлихтинг Г.** Теория пограничного слоя [текст] / Г. Шлихтинг. – М.: Наука, 1974. – 711 с.
12. **Бостанджиян С. А.** О гидродинамическом тепловом взрыве [текст] / С. А. Бостанджиян, А. Г. Мержанов, С. И. Худяев // Докл. АН СССР. – 1965. – Т. 163, № 1. – С. 133–136.
13. **Линь Цзя-Цзяо** Теория гидродинамической устойчивости [текст] / Линь Цзя-Цзяо. – М.: Изд. иностр. лит., 1958. – 194 с.
14. **Ди Прима Р.** Гидродинамическая устойчивость [текст] / Р. Ди Прима, Дж. Стюарт. – Успехи прикладной механики: Сб. статей 1983–84 гг. – М.: Мир, 1986. – 284 с.