УДК 551.577

С. К. Асланов

Одесский национальный университет им. И. И. Мечникова

О поверхностном разбрызгивании тяжелой жидкости при обдувании газом

Построена теоретическая модель расчета разбрызгивания капель с поверхности тяжелой жидкости, обтекаемой потоком газа. С позиций гидродинамической неустойчивости производится математический анализ линейной стадии развития возмущений и процесса непосредственного отрыва капель на существенно нелинейной стадии.

При достаточной интенсивности газового потока, обдувающего поверхность тяжёлой жидкости, на ней развивается нелинейное волнообразование большой амплитуды, когда последняя становится соизмеримой с длиной волны. В результате этого местная скорость обтекания гребней волн может в 1,5 — 2,0 раза превосходить основную скорость ветрового потока над жидкой поверхностью (в соответствии с известными случаями обтекания цилиндра и шара). В таких условиях в окрестности верхушек гребней возникает гидродинамическая неустойчивость обдуваемого поверхностного слоя жидкости, вследствие чего он подвергается механическому разрушению, разбрызгиваясь в виде мелких капель. Этому способствует, что, поднимаясь к вершинам волнообразования, жидкость будет тормозиться силой тяжести. Порождаемые этим соответствующие силы инерции действуют вертикально вверх и тем самым частично компенсируют вес поднимающейся жидкости. При последующем падении вниз под действием тяжести жидкость будет ускоряться и испытывать действие сил инерции, направленных опять-таки вверх. В результате величина фактического ускорения поверхностного слоя жидкости W, которое играет стабилизирующую роль в механизме гидродинамической неустойчивости, в том и другом случае оказывается меньше ускорения силы тяжести g. Аналогична роль поверхностного натяжения жидкости σ и вязкой диссипации μ . Единственным дестабилизирующим эффектом обладает местная тангенциальная скорость V обтекающего газового потока, которая достигает наибольших значений на вершинах гребней ветровых волн по сравнению с её величиной V_0.

Поэтому гидродинамическая неустойчивость сопряжённого течения жидкость-газ будет развиваться прежде всего в окрестности верхушек ветровых волн. С целью её локального математического анализа граница раздела представляется местной касательной плоскостью к жидкой поверхности, с которой связывается система отсчёта. В качестве основного стационарного течения указанных вязких сред принимается совокупность потоков жидкости (y<0) и обтекающего газа (y>0) параллельно плоскости их сопряжения (x, z). Градиент скорости течения жидкости, увлекаемой газовым потоком под действием вязких сил, будет относительно небольшим из-за относительно малой величины вязкости газа и большой плотности жидкости. Поэтому можно пренебречь вязкостью газа и указанным градиентом в жидкости, а, значит, и её основным движением всюду в области ($y \leq 0$). В то же время диссипативное влияние её вязкости на развитие возмущений следует учесть, т.е. рассматривать вязкую неустойчивость для жидкости и невязкую — для газа, что оказывается возможным сделать аналитически благодаря предложенному упрощённому подходу.

С другой стороны, в основном течении газа формируется тонкий пограничный слой ($0 \leq y \leq \delta$), в котором под действием вязких сил создастся значительный градиент скорости, быстро убывающий за его пределами ($y > \delta$), где вязкий эффект прилипания газа к жидкой поверхности становится несущественным, а его поток можно считать однородным. В интересах осуществления аналитического подхода целесообразно прибегнуть к двустороннему предельному моделированию, которое отражает асимптотическое представление истинного непрерывного профиля скорости сопряжённых сред (жидкость-газ) внутри и вне погранслоя применительно к масштабам соответственно меньшим и большим толщины δ. В первом случае это будет модель постоянного градиента (ПГ) с линейным профилем нарастания скорости газа с удалением от жидкой поверхности. Во втором случае это — модель тангенциального разрыва скорости (ТР) на границе раздела сред, которая применима, когда длина волны $л$ мелкого волнообразования на верхушках гребней крупного (первичного) ветрового волнообразования заметно превосходит толщину δ газового погранслоя ($y > \delta$).

Предлагаемый подход к математическому анализу местной гидродинамической неустойчивости сопряженного течения жидкость-газ был реализован нами ранее [1,2,3] с целью теоретического объяснения процессов дробления капель, ускоряющихся в потоке газа за ударной волной, при детонации аэрозолей и разбрызгивания расплавленного вещества с поверхности метеорных тел, тормозящихся в атмосфере. При этом главным дестабилизирующим фактором служили силы инерции, порождаемые ускорением жидкости по нормали к ее поверхности и направленные в сторону обтекающего газа. Как сказано выше, в настоящем исследовании такая роль отводится местной тангенциальной скорости газа в качестве единственного источника возможной неустойчивости.

Тогда на линейной стадии развития возмущений вида $\exp(iqx + qfy - i\omega t)$ обезразмеривание собственного значения ω и параметра вязкости естественно осуществлять на основе величины V :

$$\Omega = -i\omega / qV, \quad \beta = q\nu / V, \nu = \mu / \rho, \quad q = 2\pi / \lambda \tag{1}$$

где ρ — плотность жидкости.

В спектре указанных плоских волн экспоненциального типа целесообразно сосредоточить внимание, главным образом, на наиболее нестабильной, каковой является волна с нормалью к ее фронту, направленной параллельно местной скорости обтекающего газа [1,2,4]. Соответствующие решения уравнений Навье-Стокса для вязкой жидкости и идеального газа, убывающие с удалением от их границы раздела, сопрягаются на ней при помощи условий совпадения нормальных составляющих скоростей сред и самой границы, а также совпадения обеих составляющих напряжений в них. В результате совершенно аналогично [1, 2] получается уравнение для определения собственных значений Ω которое, в частности, для ТР– модели принимает вид

$$\begin{gathered}(1+\gamma)Q^2 + (3\beta + 2i\gamma)Q + 2\beta^2[1 - \sqrt{1 + (Q/\beta)}] = \alpha \\ \alpha = (\gamma - 1)W/(qV^2) + \gamma - \sigma q/(\rho V^2); \gamma = \rho_1/\rho \sim 10^{-3}\end{gathered} \tag{2}$$

где ρ_1 — плотность газового потока и $W=g$. Использование этой модели оказывается достаточным для объяснения отрыва капель с диаметром $d\sim 1$ мм. Действительно, толщина погранслоя в обтекающем газе [4] $\delta \simeq 3\sqrt{\nu_1 h/V}$, $\nu_1 = \mu_1/\rho_1$, μ_1 — вязкость газа, h — амплитуда крупного волнообразования жидкой поверхности. Для $\nu_1 \approx 0{,}15$ см²/с (воздух), $h \sim (0{,}1 \div 1{,}0)$ м, $V \sim 10$ м/с будем иметь $\delta \approx 2{,}5$ мм. Для размера капель, разбрызгиваемых посредством мелкого волнообразования $d \sim 1/q \approx 1$ мм с длиной $\lambda = 2\pi/q \simeq 2\pi$ мм удовлетворяется условие $\delta < \lambda$.

В то же время для жидкости(например, воды) $\nu \approx 10^{-2}$ см²/с, $\sigma \simeq 70$ дин/см, так что $\beta \approx 10^{-4}$, и асимптотика по такому малому параметру позволяет найти решение (2):

$$\Omega = \sqrt{\alpha} - \frac{3}{2}\beta - i\gamma(1 - \frac{3}{2}\frac{\beta}{\sqrt{\alpha}}) + O(\beta^{3/2}) \tag{3}$$

При $\alpha > 0$, т.е. $\mathrm{Re}(-i\omega) > 0$, оно обладает неустойчивостью колебательного характера в области

$$q_- < q < q_+, \quad q_\pm = \frac{\rho\gamma V^2}{2\sigma}(1 \pm \sqrt{1 - 4\frac{\sigma W}{\rho\gamma^2 V^4}}) \tag{4}$$

Первостепенную роль в переходе к нелинейной стадии развития неустойчивости будут играть возмущения с наибольшим инкрементом $\mathrm{Re}(-i\omega)$ нарастания их амплитуды. Последний с точностью до главного члена асимптотики (3) имеет два экстремальных состояния: максимум при $q = q_m^{(+)}$ и минимум при $q = q_m^{(-)}$, где

$$q_m^{(\pm)} = \frac{\rho\gamma V^2}{3\sigma}(1 \pm \sqrt{1 - \frac{3\sigma W}{\rho\gamma^2 V^4}}) \tag{5}$$

Таким образом, за преимущественный масштаб (5) линеаризованного мелкого (вторичного) волнообразования на вершинах основного (крупного) можно принять окрестность значения

$$\lambda \approx \lambda_m = 2\pi / q_m^+ \simeq 0,6977 \text{ см} \tag{6}$$

для принятых выше физических параметров, $W = g$.

Тенденция нарастания высоты этих мелких гребешков сохранится и на нелинейной стадии развития возмущений за счет понижения давления обтекающего газа над выпуклыми и повышения — над вогнутыми участками жидкой поверхности. Последнее приводит к выталкиванию жидкости из впадин в выпуклости, которые вытягиваются и утоньшаются, а расширяющиеся ямки уплощаются, нарушая симметричный характер линейного волнообразования. С учетом всего спектра плоских волновых возмущений локальный рельеф жидкой поверхности (на плоскости *x, z*) на вершинах основных гребней примет форму чередующихся бугорков, которые вытягиваются вверх в виде струек, и окружающих их впадин, питающих рост струек вытесненной жидкостью. В результате высота струек становится гораздо больше образующихся между ними углублений. Это позволяет для теоретического объяснения явления отрыва капелек с концов струек воспользоваться геометрически простейшей моделью гиперболоида вращения с параметром А

$$Y = A[(1/X) - (1/X_1)], \quad Y = y/x, \; X = r/\lambda, \quad r^2 = x^2 + z^2 \tag{7}$$

при $y \geq 0$ в применении к описанию струйки, а ямку описать с помощью вращения нижней части $y \leq 0$ той же гиперболы около оси $X = 1/2$, смещенной на $\lambda/2$.

В предположении локально равномерного характера распределения вытяжений и углублений на плоскости (*x, z*) из баланса массы жидкости, перетекающей из вторых в первые, находится величина $X_1 = 0{,}182$, устанавливающая соотношение среднего размера лунок и оснований струек.

Выталкивание жидкости из окружающих каждую струйку углублений создаст кумулятивный эффект, порождая интенсивный разгон жидкости ΔW в струйке и её вытяжение вопреки действию силы тяжести. Уменьшаясь вдоль струйки вместе с ослаблением кумулятивного эффекта, такой разгон в применении к её модели (7) должен принимать некоторое ограниченное значение W_∞ при $Y \to \infty$, а также отсутствовать вначале (Y=0). В качестве его простейшего представления можно использовать следующее дробно-линейное выражение с неопределёнными параметрами a и W_∞:

$$\Delta W = \frac{W_\infty Y}{a+Y} \tag{8}$$

Математический расчёт процесса отрыва капелек с концов струек производится ниже, следуя методике, развитой нами в [1, 2, 3]. Гидродинамический напор в сечении струйки Y оценивается суммарным изменением импульса всего предшествующего участка, начиная от Y=0. Этот напор служит источником выталкивающей силы для осевого разгона последующей концевой части струйки вплоть до $Y = \infty$, оставаясь ограниченным по величине при любом Y. Порождаемому им давлению внутри жидкости будет противодействовать поверхностное натяжение σ / r, которое неограниченно возрастает вместе с уменьшением радиуса струйки. После достижения равновесия в сечении $Y_* = Y(X_*)$ при $Y > Y_*$ под действием избытка поверхностного натяжения произойдёт пережатие струйки и отрыв концевого участка $Y_* < Y < \infty$, из которого формируется капля. Указанный баланс напряжений на поверхности струйки служит одним из условий, определяющих верхнюю границу размера отрывного сечения $r = r_*$ $(X = X_*)$. Другим условием является баланс осреднённых по сечению интегральных изменений импульса для масс струйки по обе стороны от равновесного сечения $Y = Y_*$. Третье условие получается из совпадения масс отрывающегося участка модельной струйки (Y_*, ∞) и формирующейся из него сферической капли с диаметром d. В результате приходим к следующей системе трех уравнений:

$$\begin{gathered}\varphi(\zeta) + \frac{2\zeta}{1-\zeta}[a\eta\zeta\varphi(\zeta) - \ln(1+a\eta\varphi)] = 0 \\ \Theta = a\eta\frac{\zeta\varphi}{1-\zeta}, \quad \frac{3}{4}b^3\zeta a = X_1\Theta^2, \quad b = \frac{2r_*}{d}\end{gathered} \tag{9}$$

где $\varphi(\zeta) = -\zeta(1 + \frac{\ln\zeta}{1-\zeta}),\ \ \eta = \frac{\rho X_1 \lambda^2}{2\sigma} W_\infty,\ \ \Theta = \frac{X_*}{X_1},\ \ \zeta = \frac{A}{aX_1}$

для определения введенных модельных характеристик Θ, ζ, W_∞, a.

Поскольку концевая часть струйки к моменту отрыва капли приобретает квазицилиндрическую форму, величину b можно оценить с позиций построенной нами [5] теории распада тонких цилиндрических струй в результате их неустойчивости: $b \simeq 0,53$. При этом оторвавшаяся капля оказывается на расстоянии $\Delta y \approx 9r_*$ от образующегося конца струйки $y = y_*$ и уносится обтекающим потоком газа.

Математически замкнуть задачу (9) целесообразно условием минимального значения для введенной модельной характеристики W_∞ (или η), обуславливающей интенсивность кумулятивного механизма, в частности, приняв в качестве четвертого уравнения требование $\min\eta(a)$. Исключение Θ, η из первого уравнения (9) дает

$$F(\zeta) = \sqrt{Ba\zeta} - \frac{\ln[\sqrt{\zeta} + \sqrt{Ba}(1-\zeta)]}{1-\zeta} - \frac{1}{2} = 0,\ \ B = \frac{3b^3}{4X_1} \tag{10}$$

с параметром a.

Имея тривиальный корень $\zeta = 1$, это уравнение обладает вторым корнем только при выполнении $F(0) = -(0,5 + \ln\sqrt{Ba}) > 0$, или $a < 0,6$, поскольку $F'(1) > 0$. Математический анализ параметрического уравнения (10) совместно с требованием $\min\eta(a)$ показал действительное его наличие при $a \simeq 0,1467$ с величиной $\eta_m \approx 4,43$ для принятых выше физических характеристик жидкости и потока газа. Соответствующие этому модельные параметры выражаются: $A = 0,0243,\ X_* = 0,0521,\ Y_* = 0,333$, так что $\lambda_m / d \simeq 5,1$. Отсюда согласно (6) получаем в качестве верхней границы значение $d \simeq 1,37$ мм, согласующееся с исходной оценкой размера $d \sim 1$ мм; $W_\infty = 70$ м/с^2. Таким образом, в отрывном сечении Y_* по (8) развивается кумулятивный разгон жидкости $W_* = 48,6$ м/с^2, или с учетом преодоления действия тяжести 38,8 м/с^2, что четырехкратно превосходит g. При этом струйка поднимается над поверхностью жидкости на высоту $y_* \simeq 2,3$ мм, а оторвавшаяся капля — на высоту $y_* + 9r_* \simeq 5,6$ мм.

Литература

1. Асланов С.К. Гидродинамическая неустойчивость и математическое моделирование процесса механического разрушения жидкой поверхности // Вестник ОДУ. — Одесса. — 2001. — Т.5, вып.3. — С. 94-102.
2. Асланов С.К. О гидродинамическом моделировании процесса абляции поверхностного слоя метеороида // Астрономический вестник (РАН). — Москва. — 2000. — Т.34, №4. — С. 348-356.
3. Асланов С.К. Модель разбрызгивания капель с расплавленной поверхности метеороида при его абляции // Астрономический вестник (РАН). — Москва. — 2003. — Т.37, №3. — С. 245-248.
4. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. — М.: Наука. — 1986. — 736 с.
5. Асланов С.К. Решение задачи Релея о неустойчивости тонких струй для стадии их распадения // Физика аэродисперсных систем. — Одесса. — 2001. — Вып. 38. — С. 220-227.

С. К. Асланов

Про поверхневе розбризкування важкої рідини при обдуванні газом

АНОТАЦІЯ

Побудовано теоретичну модель розрахунку розбризкування крапель з поверхні важкої рідини, що обтікається газом. З позицій термодинамічної нестійкості проводиться математичний аналіз лінійної стадії розвитку збурень та процесу безпосереднього відриву крапель на суттєво нелінійній стадії.

Aslanov S. K.

On the surface spraying of a heavy liquid by means of a gas streamline flow

SUMMARY

The theoretical model for the calculation of the spraying of drops from heavy liquid surface by means of gas streamline flow is constructed. On the basis of the hydrodynamic instability the mathematical analysis of the linear stage disturbances and of spontaneous separation drops process during essentially non-linear stage is carried out.