УДК 519.635

В. В. Вербицкий, А. В. Вербицкий
Одесский национальный университет имени И. И. Мечникова

ПОВЫШЕНИЕ СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНОЙ АППРОКСИМАЦИИ ЗАДАЧИ О КОЛЕБАНИЯХ ПОЛОГОЙ ОБОЛОЧКИ

Вербiцький В. В., Вербiцький О. В. Пiдвищення швидкостi збiжностi власних значень скiнченно-елементної апроксимацiї задачi коливань пологої оболонки. Задача вiльних усталених гармонiйних коливань пологої оболонки апроксимується за схемою Германа–Джонсона змiшаного методу скiнченних елементiв. Показано, що, використовуючи апостерiорнi обчислення, можна пiдвищити швидкiсть збiжностi дискретних власних значень.
Ключовi слова: змiшаний метод скiнченних елементiв, пологa оболонка, власне значення, апостерiорнi обчислення.

Вербицкий В. В., Вербицкий А. В. Повышение скорости сходимости собственных значений конечно-элементной аппроксимации задачи о колебаниях пологой оболочки. Задача о свободных установившихся гармонических колебаниях пологой оболочки аппроксимируется по схеме Германа–Джонсона смешанного метода конечных элементов. Показано, что, используя апостериорные вычисления, можно повысить порядок скорости сходимости дискретных собственных значений.
Ключевые слова: смешанный метод конечных элементов, пологая оболочка, собственное значение, апостериорные вычисления.

Verbitsky V. V., Verbitsky A. V. Acceleration convergence of eigenvalues of finite element approximation of shallow shell vibrations problem. The free stationary harmonic vibrations problem of shallow shell is approximated by Hermann–Johnson scheme of mixed finite element method. The convergence of the discrete eigenvalues is accelerated by the postprocessing technique procedure.
Key words: mixed finite element method, shallow shell, eigenvalue, postprocessing.

Введение. Впервые исследования по аппроксимации смешанным методом конечных элементов(СМКЭ) эллиптических спектральных задач были проведены Canuto C. [11] и Ishihara K.[13]. В их работах рассматривалась задача на собственные значения для бигармонического оператора. Были получены оценки скорости сходимости дискретных собственных значений и функций. Kikushi F. [14, 15] исследовал аппроксимацию СМКЭ задачи о выпучивании пластины. Mercier B., Osborn J., Rappaz J. и Raviart P. представили в работе [17] общий анализ аппроксимации спектральных эллиптических задач смешанными и гибридными конечными элементами. Различные схемы СМКЭ обосновывались Canuto C. [12] и Rannacher R. [19] для задач на собственные значения колебания пластин. В работах Масловской Л. В. и Вербицкого В. В. [5, 1, 2] рассмотрена аппроксимация СМКЭ некоторых спектральных задач пологих оболочек.

В последние годы были предложены различные процедуры контроля ошибок и повышения точности конечно-элементных аппроксимаций эллиптических спектральных задач. Так, в работе [16] Larson M. G. для оценки дискретного решения комбинировал апостериорный оцениватель ошибки с априорной оценкой ошибки, полученной через невязку. Xu J. и Zhou A. для повышения порядка аппроксимации спектральной задачи предложили использовать двухсеточный метод конечных элементов [20]. Рачева М. Р. и Андреев А. Б. использовали апостериорные вычисления ("postprocessing") для повышения скорости сходимости конечно-элементных аппроксимаций спектральных эллиптических задач [18]. Наконец, в работе [10] Андреев А. Б., Лазаров Р. Д. и Рачева М. Р. рассмотрели СМКЭ применительно к спектральной задаче для бигармонического оператора. Ими получены улучшенные порядки скорости сходимости дискретных собственных значений и функций с использованием апостериорных вычислений.

В настоящей статье рассматривается задача о свободных установившихся гармонических колебаниях пологой оболочки. Дискретная аппроксимация задачи строится по схеме Германа-Джонсона СМКЭ. Скорость сходимости дискретных собственных пар установлена в работах [5, 2]. Показано, что, используя апостериорные вычисления, можно повысить порядок скорости сходимости дискретных собственных значений.

1. Постановка задачи. Задача о свободных установившихся гармонических колебаниях пологой оболочки заключается в следующем [6, 7]: найти собственную пару $\{\lambda, u\}$, $u = (u_1, u_2, u_3)^T \neq 0$, являющуюся решением краевой задачи:

$$\partial_1 N_{11} + \partial_2 N_{12} = 0, \tag{1}$$

$$\partial_1 N_{12} + \partial_2 N_{22} = 0, \tag{2}$$

$$-\partial_{11} M_{11} - 2\partial_{12} M_{12} - \partial_{22} M_{22} + \frac{N_{11}}{R_1} + \frac{N_{22}}{R_2} = \lambda u_3 \quad \text{в} \quad \Omega, \tag{3}$$

$$u_1 = u_2 = u_3 = \partial_n u = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega. \tag{4}$$

Здесь Ω — выпуклая многоугольная область из $\mathbb{R}^2$ с границей $\partial\Omega$. Компоненты N_{ij} симметричного тензора усилий N связаны с компонентами ε_{ij} симметричного тензора деформаций ε следующими соотношениями:

$$N_{11} = D_N(\varepsilon_{11} + \nu\varepsilon_{22}),\ N_{22} = D_N(\varepsilon_{22} + \nu\varepsilon_{11}),\ N_{12} = D_N\frac{1-\nu}{2}\varepsilon_{12},$$

где

$$\varepsilon_{11} = \partial_1 u_1 + \frac{u_3}{R_1},\ \varepsilon_{22} = \partial_2 u_2 + \frac{u_3}{R_2},\ \varepsilon_{12} = \partial_2 u_1 + \partial_1 u_2,$$

u_1, u_2, u_3 — перемещения срединной поверхности оболочки. Компоненты M_{ij} симметричного тензора моментов M определяются так:

$$M_{11} = -D_M(\partial_{11} u_3 + \nu\partial_{22} u_3),\ M_{22} = -D_M(\partial_{22} u_3 + \nu\partial_{11} u_3),$$

$$M_{12} = -D_M(1-\nu)\partial_{12} u_3.$$

$D_N = E\delta/(1-\nu^2)$ — жесткость при растяжении, $D_M = E\delta^3/12(1-\nu^2)$ — жесткость при изгибе оболочки. E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона, δ — толщина оболочки, $R_1,\ R_2$ — радиусы главных кривизн срединной поверхности оболочки. $\partial_i,$, ∂_{ij} $(i, j = 1, 2)$ — производные по x и y, индекс 1 соответствует x, индекс 2 соответствует y.

2. Аппроксимация задачи смешанным методом конечных элементов. Пусть $\mathcal{T}_h$ — регулярная триангуляция области Ω треугольниками K ([8], с. 127), h — параметр триангуляции. На каждом треугольнике $K \in \mathcal{T}_h$ введем новые искомые функции

$$\mu_{ij} = \partial_{ij} u_3, \qquad i, j = 1, 2.$$

Тогда на каждом треугольнике $K \in \mathcal{T}_h$ моменты M_{ij} можно выразить через компоненты μ_{ij} симметричного тензора μ. Пусть n и t — единичные векторы нормали и касательной к стороне K' треугольника K. Определим выражения

$$M_{nn}(\mu) = n \cdot M \cdot n, \quad M_{nt}(\mu) = n \cdot M \cdot t.$$

Будем говорить, что нормальный момент $M_{nn}(\mu)$ "непрерывен" на межэлементных границах триангуляции $\mathcal{T}_h$, если для любых двух треугольников K_1 и K_2 с общей стороной K'

$$M_{nn}(\mu)|_{K_1} = M_{nn}(\mu)|_{K_2} \text{ на } K'.$$

Определим пространства

$$\mathcal{M} = \{\mu \in \mathcal{M} : \ \mu_{ij} \in L_2(\Omega), \ \mu_{ij}|_K \in H^1(K) \ \forall K \in \mathcal{T}_h, \ i, j = 1, 2;$$

$$M_{nn}(\mu) \text{ "непрерывен" на межэлементных границах}\},$$

$$\mathcal{V} = \mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2 \times \mathcal{V}_3, \ \mathcal{V}_1 = \mathcal{V}_2 = H_0^1(\Omega), \ \mathcal{V}_3 = W_0^{1,p}(\Omega), \ p > 2.$$

Задаче (1)-(4) соответствует следующая вариационная задача [2]. Найти такие $\{\lambda, (\mu, u)^T\} \in R \times \mathcal{M} \times \mathcal{V}$, $(\mu, u)^T \neq 0$, что

$$a(\mu, \widehat{\mu}) - b(\widehat{\mu}, u_3) = 0 \qquad \forall \widehat{\mu} \in \mathcal{M}, \tag{5}$$

$$b(\mu, v_3) + c(u, v) = \lambda(u_3, v_3) \qquad \forall v \in \mathcal{V}. \tag{6}$$

Здесь

$$a(\mu, \widehat{\mu}) = D_M \int\limits_\Omega \mu_{11}\widehat{\mu}_{11} + \mu_{22}\widehat{\mu}_{22} + \nu\mu_{11}\widehat{\mu}_{22} + \nu\mu_{22}\widehat{\mu}_{11} + 2(1-\nu)\mu_{12}\widehat{\mu}_{12} \, dxdy,$$

$$b(\mu, u_3) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \{-D_M \int\limits_K \partial_1\mu_{11}\partial_1 u_3 + \partial_2\mu_{22}\partial_2 u_3 + \nu\partial_1\mu_{22}\partial_1 u_3 + \nu\partial_2\mu_{11}\partial_2 u_3 +$$

$$+(1-\nu)(\partial_1\mu_{12}\partial_2 u_3 + \partial_2\mu_{12}\partial_1 u_3) \, dxdy + \int\limits_{\partial K} M(\mu)_{nt}\partial_t u_3 \, ds\},$$

$$c(u, v) = D_N \int\limits_\Omega \varepsilon_{11}(u)\varepsilon_{11}(v) + \varepsilon_{22}(u)\varepsilon_{22}(v) + \nu\varepsilon_{11}(u)\varepsilon_{22}(v) + \nu\varepsilon_{22}(u)\varepsilon_{11}(v) +$$

$$+\frac{1-\nu}{2}\varepsilon_{12}(u)\varepsilon_{12}(v) \, dxdy,$$

$$(u_3, v_3) = \int\limits_\Omega u_3 v_3 \, dxdy.$$

Определим теперь конечномерные подпространства $\mathcal{M}_h \subset \mathcal{M}$ и $\mathcal{V}_h \subset \mathcal{V}$ следующим образом.

$$\mathcal{M}_h = \{\mu_h \in \mathcal{M} : \ \mu_{ijh} \in P_0(K), \ i,j = 1,2, \ \forall K \in \mathcal{T}_h\},$$

$$\mathcal{V}_h = [X_{h,0}^{(1)}(\Omega)]^3,$$

где $P_0(K)$ — пространство многочленов нулевой степени, $X_{h,0}^{(1)}(\Omega)$ — пространство сплайнов первой степени, обращающихся в нуль на границе $\partial\Omega$.

Вариационной задаче (5)-(6) поставим в соответствие следующую дискретную задачу. Найти такие $\{\lambda_h, (\mu_h, u_h)^T\} \in R \times \mathcal{M}_h \times \mathcal{V}_h$, $(\mu_h, u_h)^T \neq 0$, что

$$a(\mu_h, \widehat{\mu}_h) - b(\widehat{\mu}_h, u_{3h}) = 0 \qquad \forall \widehat{\mu}_h \in \mathcal{M}_h, \tag{7}$$

$$b(\mu_h, v_{3h}) + c(u_h, v_h) = \lambda_h (u_{3h}, v_{3h}) \qquad \forall v_h \in \mathcal{V}_h. \tag{8}$$

Скорости сходимости дискретных собственных значений и функций задачи (7)-(8) установлены в следующей теореме.

Теорема 1. [2] *Для любого собственного значения λ задачи (1)-(4) с собственным подпространством E ($\dim E = m < \infty$) можно указать такое $h_0 > 0$, что для любого $h < h_0$ существует ровно m собственных значений $\lambda_h^{(i)}$ ($i = \overline{1,m}$) задачи (7)-(8), для которых справедлива оценка*

$$|\lambda - \lambda_h^{(i)}| \le c_1 h^2 \sum_{j=1}^{m} R(\widetilde{\varphi}^{(j)}), \qquad i = \overline{1,m}. \tag{9}$$

При этом собственное подпространство E_h, соответствующее собственным значениям $\lambda_h^{(i)}$ ($i = \overline{1,m}$), стремится к собственному подпространству E в следующем смысле. Пусть $\{\varphi_h^{(i)}\}_{i=1}^m$ — ортонормированный относительно дискретного энергетического скалярного произведения $A_h(\cdot,\cdot)$ [5] базис E_h:

$$A_h(\varphi_h^{(i)}, \varphi_h^{(j)}) = \delta_{ij}. \tag{10}$$

Тогда в E существует ортонормированный относительно энергетического скалярного произведения $A(\cdot,\cdot)$ [5] базис $\{\varphi^{(i)}\}_{i=1}^m$:

$$A(\varphi^{(i)}, \varphi^{(j)}) = \delta_{ij}, \tag{11}$$

и справедливы следующие оценки

$$||\varphi^{(i)} - \varphi_h^{(i)}||_{0,\Omega} + h||\varphi^{(i)} - \varphi_h^{(i)}||_{1,\Omega} \le c_2 h^2 \sum_{j=1}^{m} R(\widetilde{\varphi}^{(j)}), \qquad i = \overline{1,m}. \tag{12}$$

Здесь $c_1 > 0$, $c_2 > 0$ — константы, не зависящие от h, $R(\widetilde{\varphi}^{(j)}) = |\widetilde{\varphi}^{(j)}|_{2,\Omega} + |\widetilde{\varphi}_3^{(j)}|_{3,\Omega}$ и $\{\widetilde{\varphi}^{(j)}\}_{j=1}^m$ — некоторый ортонормированный в смысле (11) базис E.

Рассмотрим теперь следующую смешанную вариационную формулировку задачи о напряженно-деформированном состоянии пологой оболочки[9]. Для $f \in L_2(\Omega)$ найти $(\mu, u)^T \in \mathcal{M} \times \mathcal{V}$ так, что

$$a(\mu, \widehat{\mu}) - b(\widehat{\mu}, u_3) = 0 \qquad \forall \widehat{\mu} \in \mathcal{M}, \tag{13}$$

$$b(\mu, v_3) + c(u, v) = (f, v_3) \qquad \forall v \in \mathcal{V}. \tag{14}$$

Соответствующая дискретная задача имеет вид. Найти такие $(\mu_h, u_h)^T \in \mathcal{M}_h \times \mathcal{V}_h$, что

$$a(\mu_h, \widehat{\mu}_h) - b(\widehat{\mu}_h, u_{3h}) = 0 \qquad \forall \widehat{\mu}_h \in \mathcal{M}_h, \tag{15}$$

$$b(\mu_h, v_{3h}) + c(u_h, v_h) = (f, v_{3h}) \qquad \forall v_h \in \mathcal{V}_h. \tag{16}$$

В работе [9] получены оценки скорости сходимости дискретного решения задачи (15)-(16):

$$h||\mu - \mu_h||_{0,\Omega} + h||u - u_h||_{1,\Omega} + ||u - u_h||_{0,\Omega} \leq c_3 h^2(|u|_{2,\Omega} + |u_3|_{3,\Omega}), \tag{17}$$

где $c_3 > 0$ – константа, не зависящая от h.

Заметим следующее. Поскольку Ω — выпуклый многоугольник, то для $f \in L_2(\Omega)$ слабое решение u задачи о напряженно-деформированном состоянии пологой оболочки принадлежит пространству

$$[H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)]^2 \times [H_0^2(\Omega) \cap H^3(\Omega)],$$

и имеет место следующая оценка

$$(||u_1||^2_{2,\Omega} + ||u_2||^2_{2,\Omega} + ||u_3||^2_{3,\Omega})^{\frac{1}{2}} \leq c_4||f||_{0,\Omega}, \tag{18}$$

где $c_4 > 0$ — некоторая константа [4].

Задача (13)-(14) определяет линейный оператор $T : L_2(\Omega) \to \mathcal{V}_3$, если положить $Tf = u_3$. Аналогично, задача (15)-(16) определяет линейный оператор $T_h : L_2(\Omega) \to \mathcal{V}_{3h}$, если положить $T_h f = u_{3h}$. Рассмотрим теперь оператор T и множество операторов $\{T_h\}$ в пространстве $L_2(\Omega)$. Из (17) и (18) получаем

$$||Tf - T_h f||_{0,\Omega} = ||u_3 - u_{3h}||_{0,\Omega} \leq c_5 h^2 ||f||_{0,\Omega},$$

где $c_5 > 0$ — константа, не зависящая от h. Значит:

$$||T - T_h|| = \sup_{f \in L_2(\Omega), ||f||_{0,\Omega} \neq 0} \frac{||Tf - T_h f||_{0,\Omega}}{||f||_{0,\Omega}} \leq c_5 h^2.$$

Следовательно,

$$\lim_{h \to 0} ||T - T_h|| = 0.$$

Операторы T_h вполне непрерывны, поскольку их области значений конечномерны. Значит, оператор T тоже вполне непрерывен, как предел вполне непрерывных операторов([3], с. 384). Можно показать, что операторы T и T_h симметричны относительно скалярного произведения $(\cdot, \cdot)$ в $L_2(\Omega)$. Легко проверить, что λ (λ_h) — собственное значение задачи (5)-(6) (задачи (7)-(8)) тогда и только тогда, когда $\frac{1}{\lambda}$ $(\frac{1}{\lambda_h})$ — собственное значение оператора T (T_h).

3. Повышение скорости сходимости дискретных собственных значений. Пусть $\{\lambda_h, (\mu_h, u_h)^T\}$ — решение дискретной задачи (7)-(8) для достаточно малого h. Согласно лемме 3.2 [5], λ_h аппроксимирует некоторое собственное значение λ задачи (5)-(6). Положим,

$$\widetilde{u}_h = \frac{u_h}{||u_{3h}||_{0,\Omega}}, \tag{19}$$

и рассмотрим следующую задачу. Найти $(\tau, w)^T \in \mathcal{M} \times \mathcal{V}$ так, что

$$a(\tau, \widehat{\mu}) - b(\widehat{\mu}, w_3) = 0 \qquad \forall \widehat{\mu} \in \mathcal{M}, \tag{20}$$

$$b(\tau, v_3) + c(w, v) = (\widetilde{u}_{3h}, v_3) \qquad \forall v \in \mathcal{V}. \tag{21}$$

Из определения оператора T получаем $w_3 = T\widetilde{u}_{3h}$. Положим,

$$\widetilde{\lambda} = \frac{1}{(\widetilde{u}_{3h}, w_3)} = \frac{1}{(\widetilde{u}_{3h}, T\widetilde{u}_{3h})}.$$

Следующая теорема утверждает, что $\widetilde{\lambda}$ является лучшей по сравнению с λ_h аппроксимацией собственного значения λ.

Теорема 2. *Пусть $\{\lambda, u\}$ — собственная пара задачи (1)-(4), $\mu_{ij} = \partial_{ij} u_3$, $i, j = 1, 2$. $\{\lambda_h, (\mu_h, u_h)^T\}$ — такая ее конечно-элементная аппроксимация, полученная из задачи (7)-(8), для которой выполняются оценки (9),(12). Тогда*

$$|\lambda - \widetilde{\lambda}| \le c_6 h^4, \tag{22}$$

где $c_6 > 0$ — константа, не зависящая от h.

Доказательство. Потребуем, чтобы $A_h(u_h, u_h) = 1$. Это всегда можно сделать, поскольку собственный вектор определяется с точностью до множителя. Разложим u_h по ортонормированному базису (10):

$$u_h = \sum_{i=1}^{m} \alpha_h^{(i)} \varphi_h^{(i)}, \qquad \sum_{i=1}^{m} (\alpha_h^{(i)})^2 = 1.$$

Положим,

$$u = \sum_{i=1}^{m} \alpha_h^{(i)} \varphi^{(i)}.$$

Из (12) следует, что

$$||u_3 - u_{3h}||_{0,\Omega} \le \sum_{i=1}^{m} |\alpha_h^{(i)}| \, ||\varphi_3^{(i)} - \varphi_{3h}^{(i)}||_{0,\Omega} \le m c_2 h^2 \sum_{j=1}^{m} R(\widetilde{\varphi}^{(j)}) = c_8 h^2. \tag{23}$$

Далее,

$$|\, ||u_3||_{0,\Omega} - ||u_{3h}||_{0,\Omega}| \le ||u_3 - u_{3h}||_{0,\Omega} \le c_8 h^2. \tag{24}$$

Положим,

$$\widetilde{u} = \frac{u}{||u_3||_{0,\Omega}}.$$

Используя (23) и (24), можно показать, что

$$||\widetilde{u}_3 - \widetilde{u}_{3h}||_{0,\Omega} \le c_9 h^2, \tag{25}$$

где c_9 — константа, не зависящая от h. Поскольку $\widetilde{u}_3 = \lambda T \widetilde{u}_3$, то

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{\lambda} - \tfrac{1}{\widetilde{\lambda}} &= (\widetilde{u}_3, T\widetilde{u}_3) - (\widetilde{u}_{3h}, T\widetilde{u}_{3h}) = (\widetilde{u}_3, T\widetilde{u}_3) - (\widetilde{u}_{3h}, T\widetilde{u}_{3h}) + \\ &+ (\widetilde{u}_3 - \widetilde{u}_{3h}, T(\widetilde{u}_3 - \widetilde{u}_{3h})) - (\widetilde{u}_3 - \widetilde{u}_{3h}, T(\widetilde{u}_3 - \widetilde{u}_{3h})) = \\ &= 2[(\widetilde{u}_3, T\widetilde{u}_3) - (\widetilde{u}_{3h}, T\widetilde{u}_3)] - (\widetilde{u}_3 - \widetilde{u}_{3h}, T(\widetilde{u}_3 - \widetilde{u}_{3h})) = \\ &= \tfrac{1}{\lambda}[2 - 2(\widetilde{u}_{3h}, \widetilde{u}_3)] - (\widetilde{u}_3 - \widetilde{u}_{3h}, T(\widetilde{u}_3 - \widetilde{u}_{3h})) = \\ &= \tfrac{1}{\lambda}[(\widetilde{u}_3 - \widetilde{u}_{3h}, \widetilde{u}_3 - \widetilde{u}_{3h})] - (\widetilde{u}_3 - \widetilde{u}_{3h}, T(\widetilde{u}_3 - \widetilde{u}_{3h})).\end{aligned}$$

Отсюда, используя неравенство Коши–Буняковского и ограниченность оператора T, получаем

$$|\lambda - \widetilde{\lambda}| \le |\lambda\widetilde{\lambda}|(\frac{1}{\lambda}||\widetilde{u}_3 - \widetilde{u}_{3h}||^2_{0,\Omega} + ||T||\;||\widetilde{u}_3 - \widetilde{u}_{3h}||^2_{0,\Omega}).$$

Наконец, оценка (22) следует из последнего неравенства и (25). Теорема доказана.

Теперь приведем алгоритм приближенного вычисления $\widetilde{\lambda}$ и получим оценку для этого приближения. Построим такую триангуляцию $\mathcal{T}_{h_1}$ области $\overline{\Omega}$, что $h_1 = h^\beta$ $(\beta > 1)$ и

$$\mathcal{M}_h \times \mathcal{V}_h \subset \mathcal{M}_{h_1} \times \mathcal{V}_{h_1} \subset \mathcal{M} \times \mathcal{V}.$$

Для задачи (20)-(21) построим следующую дискретную задачу. Для $\widetilde{u}_h$, определенного в (19), найти $(\tau_{h_1}, w_{h_1})^T \in \mathcal{M}_{h_1} \times \mathcal{V}_{h_1}$ так, что

$$a(\tau_{h_1}, \widehat{\mu}_{h_1}) - b(\widehat{\mu}_{h_1}, w_{3h_1}) = 0 \qquad \forall \widehat{\mu}_{h_1} \in \mathcal{M}_{h_1},$$

$$b(\tau_{h_1}, v_{3h_1}) + c(w_{h_1}, v_{h_1}) = (\widetilde{u}_{3h}, v_{3h_1}) \qquad \forall v \in \mathcal{V}_{h_1}.$$

Положим,

$$\widetilde{\lambda}_h = \frac{1}{(\widetilde{u}_{3h}, w_{3h_1})}.$$

Теорема 3. *Пусть $\{\lambda, u\}$ — собственная пара задачи (1)-(4), $\mu_{ij} = \partial_{ij} u_3$, $i, j = 1, 2$. $\{\lambda_h, (\mu_h, u_h)^T\}$ — такая ее конечно-элементная аппроксимация, полученная из задачи (7)-(8), для которой выполняются оценки (9),(12). Тогда имеет место оценка*

$$|\lambda - \widetilde{\lambda}_h| \le c_{10} h^\gamma, \tag{26}$$

где $\gamma = \min(4, 2\beta)$, $c_{10} > 0$ — константа, не зависящая от h.

Доказательство. По неравенству треугольника

$$|\lambda - \widetilde{\lambda}_h| \le |\lambda - \widetilde{\lambda}| + |\widetilde{\lambda} - \widetilde{\lambda}_h|. \tag{27}$$

Далее,

$$\frac{1}{\widetilde{\lambda}} - \frac{1}{\widetilde{\lambda}_h} = (\widetilde{u}_{3h}, w_3) - (\widetilde{u}_{3h}, w_{3h_1}) = (\widetilde{u}_{3h}, w_3 - w_{3h_1}).$$

Отсюда, используя (17) и (18), получаем

$$\begin{aligned}|\widetilde{\lambda} - \widetilde{\lambda}_h| \le |\widetilde{\lambda}\widetilde{\lambda}_h| \, ||w_3 - w_{3h_1}||_{0,\Omega} \le c_3|\widetilde{\lambda}\widetilde{\lambda}_h| \, h_1^2(|w|_{2,\Omega} + |w_3|_{3,\Omega}) \le \\ \le c_3c_4|\widetilde{\lambda}\widetilde{\lambda}_h| \, h_1^2||\widetilde{u}_{3h}||_{0,\Omega} = c_{11}h_1^2 = c_{11}h^{2\beta}.\end{aligned} \tag{28}$$

Наконец, оценка (26) следует из теоремы 2, (27) и (28). Теорема доказана.

Заключение. Нами предложено использовать апостериорные вычисления для повышения скорости сходимости дискретных собственных значений аппроксимации СМКЭ задачи о свободных установившихся гармонических колебаниях пологой оболочки. Получена оценка для уточненного собственного значения. Теоретические результаты можно использовать для построения эффективных алгоритмов решения задач гармонических колебаний пологих оболочек.

1. **Вербицкий В. В.** Смешанный метод конечных элементов в задаче на собственные значения нелинейной устойчивости пологих оболочек [текст] / В. В. Вербицкий // Известия вузов. Математика. – 1998. – № 11. – С. 22–31.
2. **Вербицкий В. В.** Сходимость смешанного метода конечных элементов в задаче на собственные значения колебаний пологих оболочек [текст] / В. В. Вербицкий // Вісник Одеського університету. – 2000. – Т. 5, вип. 3. – С. 57–61.
3. **Иосида К.** Функциональный анализ [текст] / К. Иосида. – М.: Мир, 1967. – 624 с.
4. **Кондратьев В. А.** Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками [текст] / В. А. Кондратьев // Тр. Моск. матем. о-ва. – 1967. – Т.16. – С. 209–292.
5. **Масловская Л. В.** Сходимость смешанного метода конечных элементов в задачах устойчивости пологих оболочек [текст] / Л. В. Масловская, В. В. Вербицкий // Известия вузов. Математика. – 1993. – № 10. – С. 21–31.
6. **Огибалов П. М.** Вопросы динамики и устойчивости оболочек [текст] / П. М. Огибалов. – М.: Изд-во МГУ, 1963. – 419 с.
7. **Огибалов П. М.**Оболочки и пластины [текст] / П. М. Огибалов, М. А. Колтунов. – М.: Изд-во МГУ, 1969. – 659 с.
8. **Сьярле Ф.** Метод конечных элементов для эллиптических задач [текст] / Ф. Сьярле. – М.: Мир, 1980. – 512 с.
9. **Филиппович А. П.** Анализ смешанных схем метода конечных элементов в задачах о деформации пологих оболочек [текст] / А. П. Филиппович // Журн. вычисл. матем. и матем. физ.– 1988.– Т. 28, № 5. – С. 741–754.
10. **Andreev A. B.** Postprocessing and higher order converdence of mixed finite element approximations of bigarmonic eigenvalue problems [text] / A. B. Andreev, R. D. Lazarov, M. R. Racheva // J. Comp. and Appl. Math. – 2005. – Vol. 182, № 2. – P. 333–349.
11. **Canuto C.** Eigenvalue approximations by mixed methods [text] / C. Canuto // RAIRO. Numer. Anal. – 1978. – Vol. 12, № 1. – P. 27–50.
12. **Canuto C.** A hybrid finite element method to compute the free vibration frequencies of a clamped plate [text] / C. Canuto // RAIRO Anal. Numer. – 1981. – Vol. 15, № 2. – P. 101–118.

13. **Ishihara K.** A mixed finite element method for the biharmonic eigenvalue problems of plate bending [text] / K. Ishihara // Publ. RIMS. Kyoto Univ. – 1978. – Vol. 14. – P. 399–414.
14. **Kikuchi F.** On a mixed finite element scheme for linear buckling analysis of plates [text] / F. Kikuchi // Comput. Mech. Proc. TICOM 2-nd Int. Conf., Austin, Texas, 1979, Amsterdam e.a., 1980. – P. 289–302.
15. **Kikuchi F.** Numerical analysis of a mixed finite element method for plate buckling problems [text] / F. Kikuchi // ISAS Rept. – 1980. – Vol. 45, № 9. – P. 165–190.
16. **Larson M. G.** A-posteriori and a-priori error analysis for fitite element approximations of self-adjoint eigenvalue problems [text] / M. G. Larson // SIAM J. Numer. Anal. – 2000. – № 38. – P. 562–580.
17. **Mercier B.** Eigenvalue approximation by mixed and hybrid methods [text] / B. Mercier, J. Osborn, J. Rappaz, P. Raviart // Mathematics of computation. – 1981. – Vol. 36, № 154. – P. 427–453.
18. **Racheva M. R.** Superconvergence postprocessing for Eigenvalues [text] / M. R. Racheva, A. B. Andreev // Comp. Methods in Appl. Math. – 2002. – Vol. 2, № 2. – P. 171–185.
19. **Rannacher R.** Noncomforming finite element method for eigenvalue problems in linear plate theory [text] / R. Rannacher // Numer. Math. – 1979. – Vol. 33. – P. 23–42.
20. **Xu J.** A two-grid discretization scheme for eigenvalue problems [text] / J. Xu, A. Zhou // Math. of Comput. – 2001. – Vol. 70, № 233. – P. 17–25.