

О НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ КОРОБЧАТОЙ ОБОЛОЧКИ, ОСЛАБЛЕННОЙ ТРЕЩИНОЙ

Мигдальский В. И., Реут В. В.

Настоящая работа посвящена исследованию напряженного состояния коробчатой оболочки, состоящей из двух полубесконечных пластин, ослабленной трещиной (Рис. 1).

Следует отметить, что хотя коробчатые конструкции широко применяются в строительстве и машиностроении, относительно мало конкретных задач до

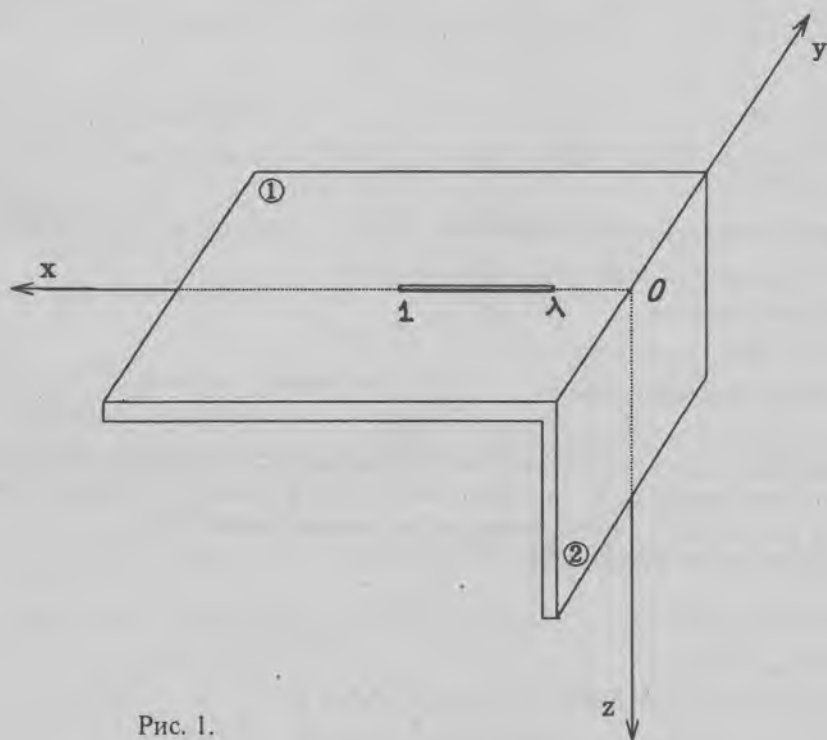


Рис. 1.

настоящего времени исследовано в литературе. Из известных результатов отметим работы В.И. Моссаковского и его учеников, предложивших и разработавших для расчета коробчатых оболочек метод однородных решений. В частности, решена задача о складчатой оболочке [5, 52], приведены результаты сравнения решения задач стесненного кручения тонкостенных стержней открытого профиля с приближенной теорией В.З. Власова [4, 33], метод однородных решений [3, 26] был применен к задачам с динамическим нагружением. Частные случаи расчета коробчатых оболочек, ослабленных трещинами, описаны также в других работах [6, 328; 8, 291].

Новый подход к расчету коробчатых оболочек, основанный на сведениях задачи к совместному плоско-изгибному напряженному состоянию фиктивной пластинки, в которой роль дефекта выполняет ребро оболочки, был предложен Г. Я. Поповым и В. В. Реутом [6, 328]. В настоящей работе исследуется поведение коэффициентов интенсивности напряжений вблизи концов трещины с учетом именно этого подхода.

Рассмотрим коробчатую оболочку, образованную двумя полубесконечными пластинами, состыкованными под прямым углом. Пластины имеют трещины h_1 и h_2 и модули Юнга E_1 и E_2 . В одной из пластин имеется трещина конечной длины $1 - \lambda$ ($\lambda > 0$), перпендикулярная ребру и отстоящая от него на величину λ . К берегам трещин приложена разрывающая нагрузка.

Математически такая задача в случае нагрузки, симметричной относительно трещины, сводится к отысканию решения системы уравнений плоской теории упругости.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} &= 0, \\ \Delta(\sigma_x + \sigma_y) &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

удовлетворяющих условиям стыковки

$$\langle V \rangle = 0, \langle h\tau \rangle = 0, \sigma_x^1 = \sigma_x^2 = 0, x = 0, -\infty < y < \infty \quad (2)$$

условиям на трещине

$$\sigma_y = f(x), \tau = 0, y = 0, \lambda < x < 1 \quad (3)$$

и условиям симметрии задачи

$$V = 0, \tau = 0, y = 0, x \in (0, \lambda) \cup (1, \infty). \quad (4)$$

Здесь индексы 1 и 2 соответствуют величинам на горизонтальной и вертикальной пластинках: U, V — соответственно перемещения точек пластин вдоль оси X и Y ; $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ — нормальные и касательные напряжения.

Следуя идее работы [6, 328],

$$\begin{aligned} \langle h\tau \rangle &= h_2 \tau|_{x=0} - h_1 \tau|_{x=+0}; \\ \langle V \rangle &= V|_{x=0} - V|_{x=+0}; \\ (U^{(1)}, V^{(1)}, \sigma_x^{(1)}, \sigma_y^{(1)}, \tau_{xy}^{(1)}; h_1, E_1) &= (U, V, \sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}; h, E)|_{x>0}; \\ (U^{(2)}, V^{(2)}, \sigma_x^{(2)}, \sigma_y^{(2)}, \tau_{xy}^{(2)}; h_2, E_2) &= (U, V, \sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}; h, E)|_{x<0}. \end{aligned}$$

Обозначим

$$V(x, y)|_{y=0} = \chi(x), \quad \chi(x) = 0, \quad x \in (\lambda, 1). \quad (5)$$

Используя обобщенный метод интегральных преобразований

$$\begin{aligned} [\sigma_{x\alpha}, \sigma_{y\alpha}, U_\alpha] &= \int_0^\infty [\sigma_x(x, y), \sigma_y(x, y), U(x, y)] \cos \alpha y dy \\ [V_\alpha, \tau_\alpha] &= \int_0^\infty [V(x, y), \tau_{xy}(x, y)] \sin \alpha y dy, \end{aligned} \quad (6)$$

задача (1.1) — (1.4) с учетом (5) сводится к одномерной разрывной краевой задаче в трансформантах

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^2}{dx^2} - \alpha^2 \right)^2 \sigma_{x\alpha} &= \alpha^2 E_1 \cdot \chi''(x), \quad \lambda < x < 1, \\ \sigma_{x\alpha}|_{x=0} &= 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Введя в рассмотрение скачки производных трансформанты

$$\eta_k = \left\langle \frac{d^k \sigma_{x\alpha}}{dx^k} \right\rangle \quad k = 0, 3 \quad (8)$$

из (2) и соотношений между перемещениями и напряжениями:

$$\frac{\partial V}{\partial y} = E^{-1}(\sigma_y - \nu \sigma_x); \quad \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} = G^{-1} \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y},$$

(где G — модуль сдвига, ν — коэффициент Пуассона),

$$\begin{aligned} \eta_0 &= 0; \\ \eta_1 &= L \sigma_{x\alpha}(-0); \quad \eta_2 = k \sigma_{x\alpha}''(+0). \end{aligned} \quad (9)$$

В этом случае разрывная краевая задача (7) — (9) [7] имеет решение:

$$\begin{aligned} \sigma_{x\alpha}(x) &= \alpha^2 E_1 \int_\lambda^1 G^{0,2}(x, \xi) \chi(\xi) d\xi - \eta_3 G(x, 0) + \eta_2 G^{0,1}(x, 0) - \\ &- \eta_1 [G^{0,2}(x, 0) - 2\alpha^2 G(x, 0)], \end{aligned} \quad (10)$$

где

$$G(x, \xi) = (4\alpha^3)^{-1} (1 + \alpha |x - \xi|) \exp(-\alpha |x - \xi|)$$

— фундаментальная функция уравнения (7).

Подставляя выражение (10) в (9) и решая полученную систему относительно η_1 , η_2 и η_3 , имеем

$$\begin{aligned} \sigma_{x\alpha}(x) &= \alpha^2 E_1 \int_\lambda^1 \{ G^{0,2}(x, \xi) - \alpha^2 G(x, 0) W_3(\alpha, \xi) + k G^{0,1}(x, 0) W_2(\alpha, \xi) - \\ &- (L/M) [G^{0,2}(x, 0) - 2\alpha^2 G(x, 0)] W_1(\alpha, \xi) \} \chi(\xi) d\xi, \end{aligned} \quad (11)$$

где

$$\begin{aligned} W_1(\alpha, \zeta) &= G^{1,2}(0, \zeta) + K(4\alpha)^{-1}(G^{2,2}(0, \zeta) + \alpha^2 G^{0,2}(0, \zeta)); \\ W_2(\alpha, \zeta) &= \alpha(L/M)G^{1,2}(0, \zeta) + (1 + LK/M)(G^{2,2}(0, \zeta) + \alpha^2 G^{0,2}(0, \zeta)); \\ W_3(\alpha, \zeta) &= 3KL(4\alpha M)^{-1}G^{2,2}(0, \zeta) + (3L/M)G^{1,2}(0, \zeta) + \alpha G^{0,2}(0, \zeta)(4 + 3LK/4M). \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь $M = 1 - LK$.

Тогда получаем

$$\sigma_{x\alpha}(x) = \frac{\alpha^2 E_1}{4} \int_{\lambda}^1 K_{\alpha}(x, \zeta) \chi(\zeta) d\zeta, \quad (13)$$

где

$$\begin{aligned} K_{\alpha}(x, \zeta) &= |x - \zeta| e^{-\alpha|x - \zeta|} + \alpha^{-1} (e^{-\alpha(x + \zeta)} - e^{-\alpha(x - \zeta)}) + \\ &+ \sum_{i=0}^2 \alpha^i d_i(x, \zeta) e^{-\alpha(x + \zeta)}. \end{aligned} \quad (14)$$

При этом

$$\begin{aligned} d_0(x, \zeta) &= x(1 - K - LK^2 - LK/2) - \zeta; \\ d_1(x, \zeta) &= x(K + 2)(2L/M) + x\zeta(K/2 - 1 + (K + 1)LK/(4M)); \\ d_2(x, \zeta) &= -x\zeta \frac{2L}{M} (K/4 + 1). \end{aligned}$$

Из уравнения (1) следует связь трансформант $\sigma_{x\alpha}$ и $\sigma_{y\alpha}$

$$\sigma_{y\alpha}(x) = -\alpha^{-2} \sigma_{x\alpha}''(x)$$

и, с учетом представления (13), получаем

$$\sigma_{y\alpha}(x) = -\frac{E_1}{4} \frac{d^2}{dx^2} \int_{\lambda}^1 K_{\alpha}(x, \zeta) \chi(\zeta) d\zeta. \quad (15)$$

Применяя к (15) обратное преобразование Фурье, получим

$$\sigma_y(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \sigma_{y\alpha}(x) \cos \alpha y d\alpha \quad (16)$$

и приходим к сингулярному интегральному уравнению на конечном промежутке относительно функции $\chi(\zeta)$ — раскрытия трещины

$$\frac{d^2}{dx^2} \int_{\lambda}^1 W(x, \zeta) \chi(\zeta) d\zeta = -\frac{2\pi}{E_1} f(x), \quad \lambda < x < 1, \quad (17)$$

причем

$$W(x, \zeta) = \ln \left| \frac{x - \zeta}{x + \zeta} \right| + \sum_{i=0}^2 a_i \frac{d_i(x, \zeta)}{(x + \zeta)^{i+1}} \quad (18)$$

$$a_0 = a_1 = 1; \quad a_2 = 2.$$

Дальнейшее решение этого интегрального уравнения будет строиться методом ортогональных многочленов [7, 155]. Осуществляем замену переменных, позволяющую свести интервал $(\lambda, 1)$ к $(-1, 1)$

$$\chi \equiv \Psi(z) = \frac{1-\lambda}{2}z + \frac{1+\lambda}{2}, \quad x \in (\lambda, 1), \quad z \in (-1, 1). \quad (19)$$

Переобозначив

$$\hat{\chi}(t) := \chi(\psi(t)), \quad t \in (-1, 1)$$

и представив W в виде

$$W(\psi(z), \psi(t)) = -\ln \frac{1}{|z-t|} - C(z, t), \quad (20)$$

$$C(z, t) = \ln \left| z + t + 2 \frac{\lambda+1}{1-\lambda} \right| - \sum_{i=0}^2 a_i \frac{d_i(\psi(z), \psi(t))}{(\psi(z) + \psi(t))^{i+1}},$$

мы можем (17) переписать в виде

$$\frac{d^2}{dz^2} \int_{-1}^1 \ln \frac{1}{|z-t|} + C(z, t) \hat{\chi}(t) dt = \frac{(1-\lambda)}{E_1} \pi f(\psi(z)), \quad z \in (-1, 1). \quad (21)$$

Следуя общей схеме метода ортогональных многочленов [7, 155], решение (21) будем искать в виде:

$$\hat{\chi}(t) = \sqrt{1-t^2} \sum_{j=0}^{\infty} \chi_j U_j(t). \quad (22)$$

Здесь

$$U_j(t) = \sin((j+1) \arccos t) / \sin(\arccos t)$$

— многочлены Чебышева второго рода.

Подставляя (22) в (21), затем умножив обе части уравнения на $\sqrt{1-z^2} U_m(z)$, проинтегрировав по z на интервале $(-1, 1)$ и учитывая спектральное соотношение [7, 155]

$$\frac{d^2}{dx^2} \int_{-1}^1 \ln \frac{1}{|x-y|} \sqrt{1-y^2} U_n(y) dy = -\pi(n+1) U_n(x), \quad x \in (-1, 1), \quad (23)$$

мы приходим к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов разложения χ_j

$$-\frac{\pi^2}{2} (m+1) \chi_m + \sum_{j=0}^{\infty} \chi_j C_{jm} = f_m, \quad (24)$$

где

$$f_m = \frac{(1-\lambda)\pi}{E_1} \int_{-1}^1 f(\psi(z)) \sqrt{1-z^2} U_m(z) dz; \quad (25)$$

$$C_{jm} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 C^{2,0}(z, t) \sqrt{1-z^2} \sqrt{1-t^2} U_m(z) U_j(t) dt dz.$$

В силу экспоненциального убывания коэффициентов (25) решение системы (24) может быть получено методом редукции.

Учитывая (10), из представления (16) можно записать

$$\sigma_y(\psi(z), 0) = \frac{E_1}{(1-\lambda)\pi} \cdot \frac{d^2}{dz^2} \int_{-1}^1 \ln \frac{1}{|z-t|} + C(z, t) \hat{\chi}(t) dt. \quad (26)$$

Пользуясь спектральным соотношением [7, 155].

$$\frac{1}{\pi} \frac{d^2}{dx^2} \int_{-1}^1 \ln \frac{1}{|x-\zeta|} U_n(\zeta) \sqrt{1-\zeta^2} d\zeta = \frac{|x| U_n(x)}{\sqrt{x^2-1}} +$$

$$+ \sqrt{1-x^2} U'_n(x) \operatorname{sgn} x - \frac{n+1}{2} U_n(x), \quad |x| > 1$$

при $|z| > 1$

$$\sigma_y(\psi(z), 0) = \frac{E_1}{1-\lambda} \sum_{j=0}^{\infty} \chi_j \left[\frac{|z| U_j(z)}{\sqrt{z^2-1}} + \sqrt{1-z^2} U'_j(z) \operatorname{sgn} z - (j+1) U_j(z)/2 \right]. \quad (27)$$

Коэффициенты интенсивности напряжений у обеих вершин трещины определяются следующим образом:

$$K_{I(x \rightarrow 1+0)} = \lim_{x \rightarrow 1+0} \sqrt{2\pi(x-1)} \sigma_y(x, 0) \quad (28)$$

$$K_{I(x \rightarrow \lambda-0)} = \lim_{x \rightarrow \lambda-0} \sqrt{2\pi(\lambda-x)} \sigma_y(x, 0).$$

Тогда, с учетом (27) и (28),

$$K_{I(x \rightarrow 1+0)} = \sqrt{\frac{\pi}{2(1-\lambda)}} E_1 \sum_{j=0}^{\infty} \chi_j U_j(1) \quad (29)$$

$$K_{I(x \rightarrow \lambda-0)} = \sqrt{\frac{\pi}{2(1-\lambda)}} E_1 \sum_{j=0}^{\infty} \chi_j U_j(-1).$$

По этим формулам были проведены вычисления коэффициентов интенсивности напряжений при различных соединениях материалов и стремлении параметра λ к 0.

На основании этих вычислений построены графики зависимости коэффициента интенсивности напряжений у обеих вершин трещины от расстояния до ребра (Рис. 2) для случая постоянной нагрузки. Значения при $\lambda \gg 0$ совпадают с результатами [1, 74] задачи о бесконечной пластине, ослабленной трещиной. Для $\lambda = 0,01$ значения коэффициента интенсивности при $x \rightarrow 1$ совпадают с результатами, полученными авторами ранее к задаче о трещине, выходящей на ребро коробчатой оболочки.

Резюме

После применения обобщенного метода интегральных преобразований, задача о напряженном состоянии коробчатой оболочки, ослабленной трещиной, сводится к сингулярному интегральному уравнению на конечном промежутке относительно раскрытия трещины. Решение уравнения строится методом ортогональных многочленов в виде ряда по многочленам Чебышева 1-го рода, коэффициенты разложения которого, — есть решение бесконечной системы линейных алгебраических уравнений. Построены графики зависимости коэффициента интенсивности напряжений в вершинах трещины в зависимости от ее размеров и расстояния до ребра оболочки.

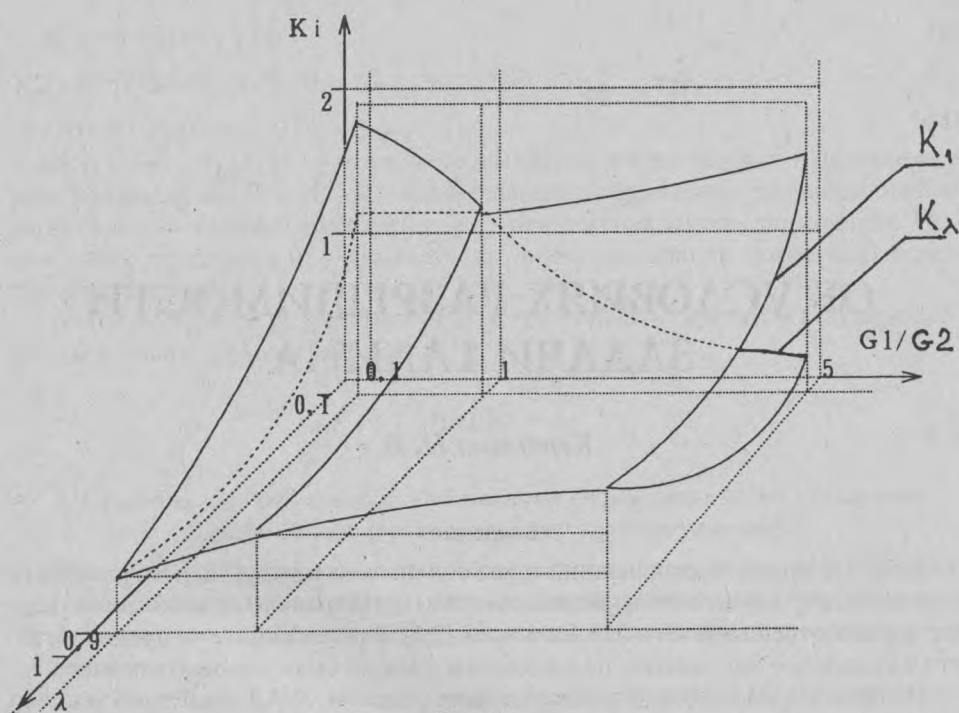


Рис. 2.

Литература

1. Броек Д. Основы механики разрушения // М., 1980. — 368с.
2. Гришин В. А., Попов Г. Я., Реут В. В. Расчет коробчатых оболочек прямоугольного профиля // 1980. ПММ, Т. 54, № 8. — С. 605-612.
3. Моссаковский В. И., Куликов Д. В. Метод однородных решений для коробчатых оболочек при динамическом нагружении // Докл. АН УССР. Сер. А — 1987. — № 1 — С. 24-27.
4. Моссаковский В. И., Пошивалова Е. В. Уточненный метод расчета тонкостенных стержней открытого профиля, находящихся в условиях стесненного кручения // XIII Всес. конф. по теории пластин и оболочек — Таллинн, 1983. — С. 31-35.
5. Мусияка В. Г., Пошивалова Е. В. Применение однородных решений к исследованию напряженного состояния пластинчатых конструкций // Докл. АН УССР. Сер. А — 1980. — № 8. — С. 50-53.
6. Попов Г. Я., Реут В. В. Расчет коробчатых оболочек // Труды XIV Вс. конф. по теории пластин и оболочек. — Кутаиси. — 1987. — Т. 2. — С. 327-333.
7. Попов Г. Я. Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений // М., 1982. — 344 с.
8. Попов Г. Я., Реут В. В. Асимптотический подход к задачам о напряженном состоянии коробчатых упругих тел // Аннот. докл. VII Вс. съезда по теор. и прикл. механике. — М., 1981. — С. 291-292.