УДК 517.51

Л. В. Матвиюк
Одесский национальный университет имени И. И. Мечникова

ОБ ОДНОЙ ОЦЕНКЕ РАВНОИЗМЕРИМЫХ ПЕРЕСТАНОВОК ФУНКЦИЙ ИЗ ОБОБЩЕННЫХ M-ПРОСТРАНСТВ ЛОРЕНЦА

Матвiюк Л. В. Про одну оцiнку рiвновимiрних перестановок функцiй з узагальнених M-просторiв Лоренца. У багатовимiрному випадку отримана оцiнка рiвновимiрних перестановок функцiй з узагальнених M-просторiв Лоренца.
Ключовi слова: оцiнка рiвновимiрної перестановки функцiї, узагальненi M-простори Лоренца.

Матвиюк Л. В. Об одной оценке равноизмеримых перестановок функций из обобщенных M-пространств Лоренца. В многомерном случае получена оценка равноизмеримых перестановок функций из обобщённых M-пространств Лоренца.
Ключевые слова: оценка равноизмеримой перестановки функции, обобщенные M-пространства Лоренца.

Matviuk L. V. On an estimate of equimeasurable rearrangements of function from generalized Lorentz M-spaces. In the multidimentional case, it is obtained an estimate of eguimeasureble rearrangements of functions from generalized Lorentz M-spaces.
Key words: equimeasurable rearrangements of functions, generalized Lorentz M-spaces.

Введение. Пусть функция $\psi(x)$ не убывает и неотрицательна на $(0,1)$, а функция $M(x)$ возрастает и неотрицательна на $[0,+\infty)$, кроме того

$$M(+0)=0, \lim_{x\to+\infty} M(x)=+\infty.$$

Далее будем считать, что функции $M(x)$, $\psi(x)$ и число $\gamma\in[0,+\infty)$ таковы, что

$$\int\limits_0^1 M(\psi(x))\frac{dx}{x^\gamma}<+\infty. \tag{1}$$

Через $M_{\psi,\gamma}$ обозначим класс измеримых на единичном кубе $I_N=[0,1]^N$, $N\in$ $\in\mathbb{N}$, 1-периодических по каждой переменной функций $f\in L(I_N)$, для которых

$$||f||^*_{M_{\psi,\gamma}}=\int\limits_0^1 M\left(\frac{\psi(x)}{x}\int\limits_0^x f^*(t)dt\right)\frac{dx}{x^\gamma}<+\infty.$$

Здесь $f^*(t)$ — невозрастающая на $[0,1]$ функция, равноизмеримая с функцией $|f(t)|$ на единичном кубе I_N (см., например, [1], с. 36). Заметим, что $||f||^*_{M_{\psi,\gamma}}$, вообще говоря, нормой не является.

В силу неравенства Харди (см. [1], с. 124) при $M(x)=x^p$ $(1<p<\infty)$, $\psi(x)=1,\gamma=0$ класс функций $M_{\psi,\gamma}$ совпадает с пространством $L_p\left([0,1]^N\right)$. Если $M(x)=x^q,\gamma=1,\psi(x)=x^{\frac{1}{p}}$ $(1<p,q<\infty)$, то класс функций $M_{\psi,\gamma}$ совпадает с пространством Лоренца $L_{p,q}$. Если $M(x)=x^p$ при $0<p<\infty$, $\gamma=1$, то класс функций $M_{\psi,\gamma}$ совпадает с пространством Лоренца $\Lambda(\psi,p)$, а если к тому же $\beta_\psi = \overline{\lim}\,\lim_{x\to+0}\frac{\psi(2x)}{\psi(x)} < 2$, то (см. [2]) — с пространством Лоренца $\Lambda^*(\psi,p)$.

Пусть $f \in M_{\psi,\gamma}$. Модулем непрерывности функции f назовем

$$\omega^*_{M_{\psi,\gamma}}(f,\delta) = \sup_{\substack{0\le|hi|\le\delta,\\ (i=1,\dots,N)}} ||\Delta_{\overline{h}}f||^*_{M_{\psi,\gamma}},$$

где $\Delta_{\overline{h}}f(\overline{x}) = f(\overline{x}+\overline{h}) - f(\overline{x}), \delta \in (0,1)$.

Будем говорить, что функция $M(x)$ удовлетворяет Δ_2-условию, если существует постоянная $C_M \ge 0$ такая, что для всех $x \in (0,+\infty)$ выполняется неравенство

$$M(2x) \le C_M M(x).$$

Здесь, и далее в тексте, через C_M, $C_{a,b}$ будем обозначать константу, зависящую только от M или от a и b, соответственно, не всегда одну и ту же даже в одном неравенстве.

Оценки равноизмеримых перестановок играют важную роль во многих задачах вложения и приближения классов функций, в частности, вложения классов функций из пространств Лебега (см., например, [3]) и пространств Лоренца (см., например, [4]) с заданными мажорантами модулей непрерывности. В работах [5]–[11] получены оценки равноизмеримых перестановок, позволившие доказать ряд теорем вложения.

Так, из результатов, полученных М. Мильманом в [5] следует, что для функции f из пространств Лоренца $\Lambda^*(\psi,p)$ при $\beta_\psi < 2$ в одномерном случае справедливы оценки

$$f^*(\frac{1}{2n}) - f^*(\frac{1}{n}) \le \psi^{-1}(\frac{1}{2n})\omega^*_{\Lambda^*(\psi,p)}(f,\frac{1}{n}),$$

$$f^*(x) - f^*(\frac{1}{2}) \le 8\int_x^1 \psi^{-1}(t)\omega^*_{\Lambda^*(\psi,p)}(f,t)\frac{dt}{t},\ 0 \le x \le \frac{1}{2}.$$

Эти оценки аналогичны тем, которые имеются для функций из L_p в одномерном случае при $1 \le p < \infty$, и были доказаны соответственно П. Л. Ульяновым [6] и Э. А. Стороженко [7].

Для функции $f \in L_p(I_N)$ при $1 \le p < \infty$ В. И. Колядой [8] доказана более точная оценка

$$\int_0^x [f^*(t) - f^*(x)]^p\,dt \le C\omega_p^p(f, \sqrt[N]{x}). \tag{2}$$

Автором в [11] доказана для функции $f \in \Lambda(\psi,p)$ при $0 < p < \infty$, $\beta_\psi < \infty$ в многомерном случае оценка

$$\sum_{n=s}^{\infty}\psi^p(2^{-nN})\left[f^*(2^{-nN}) - f^*(2^{-(s-1)N})\right]^p \le C_{N,\psi,p}(\omega^*_{\Lambda(\psi,p)})^p(f,2^{-s}), s \in \mathbb{N}.$$

В данной статье получена оценка такого типа для функций из более общих M-пространств Лоренца. Отметим, что в этом случае доказательство существенно усложняется и требует других методов.

Основные результаты. Сформулируем основной результат.

Теорема. *Пусть число $\gamma \in [0, +\infty)$, функция $\psi(x)$ не убывает и неотрицательна на $(0, 1)$, а функция $M(x)$ возрастет, неотрицательна на $[0, +\infty)$, $M(+0) = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} M(x) = +\infty$ и выполнено условие* (1). *Если функция $M(x)$ удовлетворяет Δ_2-условию, то для любой функции $f \in M_{\psi,\gamma}$ и для любого $s \in \mathbb{N}$ выполнено неравенство*

$$\sum_{n=s}^{\infty} M\left(\psi(2^{-nN})\left(f^*(2^{-nN}) - f^*(2^{-(s-1)N})\right)\right) 2^{nN(\gamma-1)} \leq \\ \leq C_{M,N,\gamma}\,\omega^*_{M_{\psi,\gamma}}(f, 2^{-s}). \tag{3}$$

Отметим, что при изучении вопроса о вложении классов функций с заданными мажорантами модулей непрерывности, в многомерном случае оказалось, что оценки типа (2) и (3) точны лишь в том случае, когда модуль непрерывности функции $\omega(\delta)$ при $\delta \to 0$ убывает не слишком быстро; не быстрее, например, чем δ^α $(0 < \alpha < 1)$. Если же скорость убывания модуля непрерывности близка к предельной $\omega(\delta) = \underline{O}(\delta)$, то этой оценки не достаточно для доказательства точных теорем вложения. Оценки, дополняющие в предельном случае оценку типа (2), были получены в ряде работ различных авторов [9, 10]. Наиболее полные оценки равноизмеримых перестановок обоих типов для функций $f \in L_p$ $(1 \leq p < \infty)$, позволившие установить ряд точных теорем вложения, содержатся в работе [10]. Автором в [11] были получены оценки равноизмеримых перестановок для функций из пространств Лоренца $\Lambda(\psi, p)$ и $\Lambda^*(\psi, p)$, аналогичные тем, которые имеются в работе [10]. С помощью этих оценок получен ряд точных теорем вложения. Оценка типа (3) тоже может быть использована для доказательства теорем вложения классов функций $f \in M_{\psi,\gamma}$ с заданными мажорантами модулей непрерывности. Оценка, дополняющая оценку (3) в предельном случае, доказана автором при более сильных ограничениях на функцию $M(x)$, и будет опубликована позднее в другой работе.

Автор выражает глубокую благодарность профессору В. И. Коляде за полезные обсуждения результатов, полученных в данной работе.

Некоторые вспомогательные утверждения. Прежде чем перейти к доказательству оценки (3), отметим, что в работе [12] были доказаны следующие утверждения.

Лемма 1. *Пусть число $\gamma \in [0, +\infty)$, функция $\psi(x)$ не убывает и неотрицательна на $(0, 1)$, а функция $M(x)$ возрастает, неотрицательна на $[0, +\infty)$, $M(+0) = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} M(x) = +\infty$ и выполнено условие* (1). *Если функция $M(x)$ удовлетворяет Δ_2-условию, то для любой функции $f \in M_{\psi,\gamma}$ имеем*

$$\omega^*_{M_{\psi,\gamma}}(f, +0) = 0.$$

Это означает, что оценка (3) является содержательной.

Лемма 2. *Пусть число $\gamma \in [0, +\infty)$, функция $\psi(x)$ не убывает и неотрицательна на $(0, 1)$, а функция $M(x)$ возрастает, неотрицательна на $[0, +\infty)$, $M(+0) = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} M(x) = +\infty$ и выполнено условие* (1). *Если функция $M(x)$*

удовлетворяет Δ_2-условию, то для любой функции $f \in M_{\psi,\gamma}$ существует константа $C_M > 0$ такая, что для всех $h \in (0,1]$ выполняется неравенство

$$\omega^*_{M_{\psi,\gamma}}(f, 2h) \le C_M \omega^*_{M_{\psi,\gamma}}(f, h). \tag{4}$$

Доказательство теоремы. Пусть функция $f \in M_{\psi,\gamma}$. Легко видеть, что в условиях теоремы для любой функции $f \in M_{\psi,\gamma}$ существует $C_M > 0$ такая, что

$$\omega^*_{M_{\psi,\gamma}}(|f|, h) \le C_M \omega^*_{M_{\psi,\gamma}}(f, h)$$

при всех $h \in (0,1]$. Поэтому, не ограничивая общности, можно предполагать, что функция f, принадлежащая классу $M_{\psi,\gamma}$, неотрицательна на I_N.

В силу монотонности функции f^* имеем:

$$I(s) = \sum_{n=s}^{\infty} M\left(\psi(2^{-nN})\left(f^*(2^{-nN}) - f^*(2^{-(s-1)N})\right)\right) 2^{nN(\gamma-1)} \le$$

$$\le \sum_{n=s}^{\infty} M\left(\psi(2^{-nN}) 2^{nN} \int\limits_0^{2^{-nN}} \left(f^*(x) - f^*(2^{-(s-1)N})\right) dx\right) 2^{nN(\gamma-1)}.$$

Для любого $n \in \mathbb{N}$ существует множество $E_n \subset I_N$ (см. [1], с. 46) с мерой $|E_n| = 2^{-nN}$ такое, что

$$\int\limits_0^{2^{-nN}} \left(f^*(x) - f^*(2^{-(s-1)N})\right) dx = \int\limits_{E_n} \left(f(\overline{x}) - f^*(2^{-(s-1)N})\right) d\overline{x}.$$

Значит,

$$I(s) \le \sum_{n=s}^{\infty} M\left(\psi(2^{-nN}) 2^{nN} \int\limits_{E_n} \left(f(\overline{x}) - f^*(2^{-(s-1)N})\right) d\overline{x}\right) 2^{nN(\gamma-1)}.$$

Пусть $I(\overline{x}, 2^{1-s})$ – N-мерный куб с центром в точке $\overline{x} \in E_N$ и длиной ребра 2^{2-s}. Тогда существует множество $B_{\overline{x}} \subset I((\overline{x}, 2^{1-s})$ такое, что для любого $\overline{u} \in B_{\overline{x}}$ выполняется неравенство $f(\overline{u}) \le f^*(2^{-(s-1)N})$, причем мера $|B_{\overline{x}}| \ge \frac{1}{2}|I(\overline{x}, 2^{1-s})|$.

Тогда для всех $\overline{x} \in E_n (n = s, s+1, ...)$ выполняется неравенство

$$f(\overline{x}) - f^*(2^{-(s-1)N}) \le |B_{\overline{x}}|^{-1} \int\limits_{B_{\overline{x}}} |f(\overline{x}) - f(\overline{u})| d\overline{u} \le$$

$$\le 2|I(\overline{0}, 2^{1-s}|^{-1} \int\limits_{I(\overline{0}, 2^{1-s})} |f(\overline{x}) - f(\overline{x} + \overline{u})| d\overline{u}.$$

Учитывая последнее неравенство и меняя порядок интегрирования, получим:

$$I(s) \le \sum_{n=s}^{\infty} M\left(\psi(2^{-nN}) \frac{2^{nN+1}}{|I(\overline{0}, 2^{1-s})|} \int\limits_{I(\overline{0}, 2^{1-s})} \left(\int\limits_{E_n} |\Delta_{\overline{u}} f(\overline{x})| d\overline{x}\right) d\overline{u}\right) 2^{nN(\gamma-1)}.$$

Далее, переходя к верхней грани по $\overline{u} \in I(0, 2^{1-s})$ и учитывая монотонность функции $M(x)$, имеем

$$I(s) \le \sum_{n=s}^{\infty} M\Big(\psi(2^{-nN}) 2^{nN+1} \sup_{\overline{u} \in I(\overline{0}, 2^{1-s})} \int_{E_n} |\Delta_{\overline{u}} f(\overline{x})| d\overline{x}\Big) 2^{nN(\gamma-1)}.$$

Так как при фиксированном $n \in \{s, s+1, ...\}$ для любого $t \in [2^{-nN}, 2^{-(n-1)N}]$ выполняются неравенства

$$\psi(2^{-nN}) \le \psi(t), \quad 2^{nN} \le \frac{2^N}{t}, \quad 2^{nN(\gamma-1)} \le C_{N,\gamma} \int_{2^{-nN}}^{2^{-(n-1)N}} \frac{dt}{t^{\gamma}}$$

и (см. [1], с. 46)

$$\int_{E_n} |\Delta_{\overline{u}} f(\overline{x})| d\overline{x} \le \int_0^t (\Delta_{\overline{u}} f)^*(x) dx,$$

то, учитывая, что функция $M(x)$ возрастает на $[0, +\infty)$ и удовлетворяет Δ_2-условию, получим:

$$I(s) \le C_{N,\gamma} \sum_{n=s}^{\infty} \int_{2^{-nN}}^{2^{-(n-1)N}} M\Big(\psi(t) \frac{2^N}{t} \sup_{\overline{u} \in I(\overline{0}, 2^{1-s})} \int_0^t (\Delta_{\overline{u}} f)^*(x) dx\Big) \frac{dt}{t^{\gamma}} \le$$

$$\le C_{M,N,\gamma} \int_0^{2^{-sN}} M\Big(\sup_{\overline{u} \in I(\overline{0}, 2^{1-s})} \frac{\psi(t)}{t} \int_0^t (\Delta_{\overline{u}} f)^*(x) dx\Big) \frac{dt}{t^{\gamma}}.$$

Зафиксируем $\overline{u} \in I(\overline{0}, 2^{1-s})$. Тогда для любого $t \in (0, 2^{-sN})$ существует (см. [1], с. 46) множество $E_t \subset I_N$ с мерой $|E_t| = t$ такое, что

$$\int_0^t (\Delta_{\overline{u}} f)^*(x) dx = \int_{E_t} |\Delta_{\overline{u}} f(\overline{x})| d\overline{x}.$$

Так как функция

$$\varphi(\overline{u}) = \int_{E_t} |f(\overline{x}) - f(\overline{x} + \overline{u})| d\overline{x}$$

непрерывна на $I(\overline{0}, 2^{1-s})$, то существует $\overline{u}_0 = \overline{u}_0(t) \in I(\overline{0}, 2^{1-s})$, такое, что $\sup\limits_{\overline{u} \in I(\overline{0}, 2^{1-s})} \varphi(\overline{u}) = \varphi(\overline{u}_0)$. Следовательно,

$$M\Big(\frac{\psi(t)}{t} \sup_{\overline{u} \in I(\overline{0}, 2^{1-s})} \varphi(\overline{u})\Big) = M\Big(\frac{\psi(t)}{t} \varphi(\overline{u}_0)\Big).$$

Тогда имеем для всех $t \in (0,1]$

$$M\Big(\frac{\psi(t)}{t}\sup_{\overline{u}\in I(\overline{0},2^{1-s})}\int\limits_{E_t}|\Delta_{\overline{u}}f(\overline{x})|d\overline{x}\Big)\le \sup_{\overline{u}\in I(\overline{0},2^{1-s})} M\Big(\frac{\psi(t)}{t}\int\limits_{E_t}|\Delta_{\overline{u}}f(\overline{x})|d\overline{x}\Big).$$

Значит,

$$I(s)\le C_{M,N,\gamma}\int\limits_0^{2^{-sN}}\sup_{\overline{u}\in I(\overline{0},2^{1-s})} M\Big(\frac{\psi(t)}{t}\int\limits_{E_t}|\Delta_{\overline{u}}f(\overline{x})|d\overline{x}\Big)\frac{dt}{t^\gamma}. \tag{5}$$

Далее, так как для любых $\overline{u},\overline{v}\in I(\overline{0},2^{1-s})$ имеем

$$|\Delta_{\overline{u}}f(\overline{x})|\le|\Delta_{\overline{u}+\overline{v}}f(\overline{x})|+|\Delta_{\overline{v}}f(\overline{x}+\overline{u})|,$$

то, в силу того, что функция $M(x)$ возрастает на $[0,+\infty)$ и удовлетворяет Δ_2-условию, получаем, что для любого $\overline{v}\in I(\overline{0},2^{1-s})$ выполняется неравенство:

$$M\Big(\frac{\psi(t)}{t}\int\limits_{E_t}|\Delta_{\overline{u}}f(\overline{x})|d\overline{x}\Big)\le M\bigg(\frac{\psi(t)}{t}\Big(\int\limits_{E_t}|\Delta_{\overline{u}+\overline{v}}f(\overline{x})|d\overline{x}+\int\limits_{E_t}|\Delta_{\overline{v}}f(\overline{x}+\overline{u})|d\overline{x}\Big)\bigg)\le$$

$$\le C_M\bigg(M\Big(\frac{\psi(t)}{t}\int\limits_{E_t}|\Delta_{\overline{u}+\overline{v}}f(\overline{x})|d\overline{x}\Big)+M\Big(\frac{\psi(t)}{t}\int\limits_{E_t}|\Delta_{\overline{v}}f(\overline{x}+\overline{u})|d\overline{x}\Big)\bigg).$$

Затем интегрируем последнее неравенство относительно $\overline{v}$ по кубу $I(\overline{0},2^{1-s})$. В первом интеграле в правой части полученного неравенства сделаем замену переменной $\overline{z}=\overline{u}+\overline{v}$, а во втором учитываем то, что мера инвариантна относительно сдвига и функция $f(\overline{t})$ 1-периодическая по каждой переменной. Получим

$$2^{(2-s)N}M\Big(\frac{\psi(t)}{t}\int\limits_{E_t}|\Delta_{\overline{u}}f(\overline{x})|d\overline{x}\Big)\le$$

$$\le C_M\int\limits_{I(\overline{0},2^{1-s})}M\Big(\frac{\psi(t)}{t}\int\limits_{E_t}|\Delta_{\overline{u}+\overline{v}}f(\overline{x})|d\overline{x}\Big)d\overline{v}+$$

$$+C_M\int\limits_{I(\overline{0},2^{1-s})}M\Big(\frac{\psi(t)}{t}\int\limits_{E_t}|\Delta_{\overline{v}}f(\overline{x}+\overline{u})|d\overline{x}\Big)d\overline{v}=$$

$$=C_M\int\limits_{I(\overline{u},2^{1-s})}M\Big(\frac{\psi(t)}{t}\int\limits_{E_t}|\Delta_{\overline{z}}f(\overline{x})|d\overline{x}\Big)d\overline{z}+$$

$$+C_M\int\limits_{I(\overline{0},2^{1-s})}M\Big(\frac{\psi(t)}{t}\int\limits_{E_t^{\overline{u}}}|\Delta_{\overline{v}}f(\overline{x})|d\overline{x}\Big)d\overline{v}.$$

Здесь через $E_t^{\overline{u}}$ обозначено множество, полученное из множества E_t сдвигом на вектор $\overline{u}$. Учитывая, что $I(\overline{u}, 2^{1-s}) \subset I(\overline{0}, 2^{2-s})$, имеем

$$2^{(2-s)N} M\Big(\frac{\psi(t)}{t}\int\limits_{E_t}|\Delta_{\overline{u}} f(\overline{x})|d\overline{x}\Big) \le$$

$$\le C_M \int\limits_{I(\overline{0},2^{2-s})} M\Big(\frac{\psi(t)}{t}\int\limits_{E_t}|\Delta_{\overline{z}} f(\overline{x})|d\overline{x}\Big)d\overline{z}+$$

$$+C_M \int\limits_{I(\overline{0},2^{2-s})} M\Big(\frac{\psi(t)}{t}\int\limits_{E_t^{\overline{u}}}|\Delta_{\overline{v}} f(\overline{x})|d\overline{x}\Big)d\overline{v} \le$$

$$\le C_M \int\limits_{I(\overline{0},2^{2-s})} M\Big(\frac{\psi(t)}{t}\int\limits_0^t(\Delta_{\overline{z}} f)^*(x)dx\Big)d\overline{z}. \qquad (6)$$

Затем, последовательно применяя неравенства $(5), (6)$, меняя порядок интегрирования, переходя к верхней грани по $\overline{z} \in I(\overline{0}, 2^{1-s})$ и, наконец, используя неравенство (4), окончательно получаем

$$I(s) \le C_{M,N,\gamma} 2^{(s-2)N} \int\limits_{I(\overline{0},2^{2-s})} \Big(\int\limits_0^1 M\Big(\frac{\psi(t)}{t}\int\limits_0^t(\Delta_{\overline{z}} f)^*(x)dx\Big)\frac{dt}{t^\gamma}\Big)d\overline{z} \le$$

$$\le C_{M,N,\gamma} \sup_{\overline{z}\in I(\overline{0},2^{2-s})} ||\Delta_{\overline{z}} f||^*_{M_{\psi,\gamma}} \le C_{M,N,\gamma}\omega^*_{M\psi,\gamma}(f, 2^{2-s}) \le$$

$$\le C_{M,N,\gamma}\omega^*_{M\psi,\gamma}(f, 2^{-s}).$$

Теорема доказана полностью.

Заключение. В настоящей работе в многомерном случае получена оценка равноизмеримых перестановок функций из обобщенных M-пространств Лоренца, аналогичная той, которая имеется в [10] для функции из L_p при $1 \le p < \infty$, в [11] для функции из пространств Лоренца $\Lambda(\psi, p)$ при $0 < p < \infty$, $\beta_\psi < \infty$.

1. **Bennett C.** Interpolation of Operators [text] / Bennett C., Sharpley R. Acadimic Press, 1988. – 475 p.
2. **Simonov B. V.** On embedding of certain function classes in symmetric spaces [text] / B. V. Simonov // Analysis Mathematica. – 1986. – V. 12. – P. 3–22.
3. **Kolyada V. I.** Rearrangements of functions and embedding of anisotropic spaces of Sobolev type [text] / V. I. Kolyada // East journal on approximations. – 1998. – V. 4. – № 2. – P. 111–199.
4. **Simonov B. V.** On relations amony moduli of continuity in Lorents spaces [text] / B. V. Simonov // Analysis Mathematica. - 2003. – V. 29. – P. 147–164.

5. **Milman M.** Inequalities for moduli of continuity and rearrangements [text] / M. Milman // Notas de matematica. – 1977. – № 12. – P. 1–5.

6. **Ульянов П. Л.** Вложение некоторых классов функций H_p^ω [текст] / П. Л. Ульянов // Известия АН СССР. – Серия математика. – 1968. – Т. 32. – С. 649–686.

7. **Стороженко Э. А.** Необходимые и достаточные условия для вложения некоторых классов функций [текст] / Э. А. Стороженко // Известия АН СССР. – Серия математика. – 1973. – Т. 39. – № 2. – С. 386–398.

8. **Коляда В. И.** О вложении в классы $\varphi(L)$ [текст] / Коляда В. И. // Известия АН СССР. – Серия математика. – 1975. – Т. 39. – № 2. – С. 418–437.

9. **Освальд П.** Модули непрерывности равноизмеримых функций и приближение функций алгебраическими многочленами в L^p : Дисс. канд. физ.-мат. наук: спец. 01.01.01 [текст] / П. Освальд. – Одесса, 1978. – 144 с.

10. **Коляда В. И.** Оценки перестановок и теоремы вложения [текст] / В. И. Коляда // Матем. сборник. – 1988. – Т. 136. – № 1. – С. 3–23.

11. **Матвиюк Л. В.** Теоремы вложения классов функций с заданными мажорантами модулей непрерывности (наилучших приближений): Дисс. канд. физ.-мат. наук: спец. 01.01.01. [текст] / Л. В. Матвиюк. – Одесса, 1990. – 115 с.

12. **Matviuk L. V.** Approximation of functions from generalized Lorentz M-spaces by Steklov means [text] / L. V. Matviuk // East journal on approximations. – 2010. – V. 16. – № 2. – P. 109–122.