

УДК 551.577

С. К. Асланов, М. Б. Косой, А. П. Царенко

Одесский национальный университет имени И. И. Мечникова

## РАСПАДЕНИЕ ГАЗОВОЙ СТРУИ ВНУТРИ ЖИДКОЙ СРЕДЫ НА ПУЗЫРЬКИ

На основе уравнений баланса массы и энергии построена теория для приближённого описания распада на пузырьки тонкой струи идеального газа, истекающей в окружающую идеальную жидкость. Под действием силы поверхностного натяжения, распределённой по поверхности раздела сред, и внутренних сил давления внутри струи, обусловленных сжимаемостью газа, поверхность струи деформируется и, при росте конечных возмущений, распадается на пузырьки. Произведённый математический анализ позволил однозначно оценить относительную величину среднего диаметра образующихся пузырьков газа и расстояний между ними. Полученные результаты хорошо согласуются с результатами Рэлея из линейной теории неустойчивости струи.

MSC: 76B10.

*Ключевые слова:* струя газа, распад струи, поверхностное натяжение, работа расширения пузырька, неустойчивость возмущений.

**ВВЕДЕНИЕ.** Настоящая работа является продолжением построения аналитической теории распада тонких струй на капли, начатой в работе [1], в которой исследован процесс распада тонкой жидкой струи в окружающей атмосфере на основе законов сохранения массы и энергии, применённых к окончному участку волнообразно возмущённой струи. В [1] были получены аналитические соотношения между геометрическими характеристиками невозмущённой струи и характеристиками образованной после дробления струи капельной структуры. В этой работе исследуется процесс образования пузырьков при регулярном распаде тонкой газовой струи, которая истекает внутрь окружающей жидкости. Анализу это явления посвящены исследования Рэлея [2]. Он подошел к решению задачи с позиции линейной теории гидродинамической неустойчивости поверхности раздела газовой струйки и окружающей жидкости, и получил оценку длины волны максимальной неустойчивости этой поверхности:  $\lambda_* = 6,48 \times 2a$ .

Однако линейный анализ, проведённый Рэлеем, не может дать решения задачи на стадии разрыва струйки газа, вызванного ростом возмущений на поверхности струи, поскольку эти возмущения уже нельзя считать малыми, а, следовательно, и оценить размеры пузырьков газа и расстояние между ними. Применение же законов сохранения массы и энергии в интегральной форме позволяет сделать оценку значений указанных параметров.

**ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ.** Механизм истечения тонкой струи газа в жидкость аналогичен механизму истечения тонкой струи жидкости в газ, поэтому в исследовании можно использовать методы и приёмы, аналогичные тем, что использовались в работе [1], конечно учитывая принципиальные различия физических свойств сред (жидкости и газа). По сравнению со струёй жидкости, выпускаемой в газ, при исследовании распада газовой струи следует учесть эффект сжимаемости в законах сохранения массы и энергии. А именно, в разных



частях уравнения баланса массы (статья, формула) будут фигурировать различные плотности:

$$\pi \rho_{cl} a^2 (2l + \Delta l) = \frac{4}{3} \pi \rho_{sf} R^3, \quad (1)$$

справа — плотность газа  $\rho_{cl}$  в невозмущённой струе радиуса  $a$ , а слева — плотность  $\rho_{sf} = \tilde{\rho} \rho_{cl}$  окончательно сформированного пузырька радиуса  $R$  после отрыва. Процесс отрыва пузырька с конца струи, в силу его быстроты, считать адиабатическим, т. е. подчинённым адиабате Пуассона:  $\tilde{\rho} = \tilde{p}^{1/\gamma}$ , где  $\gamma = A_p/c_v$ . Таким образом, закон сохранения массы имеет вид

$$\pi a^2 (2l + \Delta l) = \frac{4}{3} \pi \tilde{\rho} R^3. \quad (2)$$

По той же причине в уравнении баланса энергии должна присутствовать работа расширения газа (в отличие от случая жидкой струи). При квазистатическом подходе давление в тонкой струйке и пузырьке соответственно можно считать преимущественно формирующимися за счёт сил поверхностного натяжения окружающей жидкости, т. е. соответственно  $p_{sf} \approx 2\sigma/R$  и  $p_{cl} \approx \sigma/a$ , или  $\tilde{p} = 2\eta$  и  $\tilde{\rho} = (2\eta)^{1/\gamma}$ , где  $\eta = a/R$  и для воздуха  $\gamma = 1,4$ . Работа разрастания сферического пузырька от радиуса  $a$  до радиуса  $R$  равна  $W_5 = \int_{V_a}^{V_R} p dV$ , где  $dV = \frac{4}{3} \pi (R^3 - a^3) d\tilde{\rho}$  — элементарное изменение объёма пузырька за счёт изменения плотности газа,  $V_a$  и  $V_R$  — объёмы пузырьков радиуса  $a$  и  $R$  соответственно. Заменим интеграл среднеинтегральным значением:  $W_5 = \langle p \rangle \Delta V$ , где  $\Delta V$  — приращение объёма пузырька, а  $\langle p \rangle$  среднее по объёму пузырька давление. Так как  $\Delta \tilde{\rho} = \tilde{\rho} - 1$  есть относительное изменение плотности газа в сферическом слое  $(a, R)$ , то  $\Delta V = \frac{4}{3} \pi R^3 (1 - \eta^3) ((2\eta)^{1/\gamma} - 1)$ .

Модель отрыва и формирования пузырька включает два этапа. Вначале образуется цилиндрическое тело вращения вместе с двумя сферическими закруглениями радиуса  $r$ , где  $r$  меняется от значения  $a$  до  $R$ .

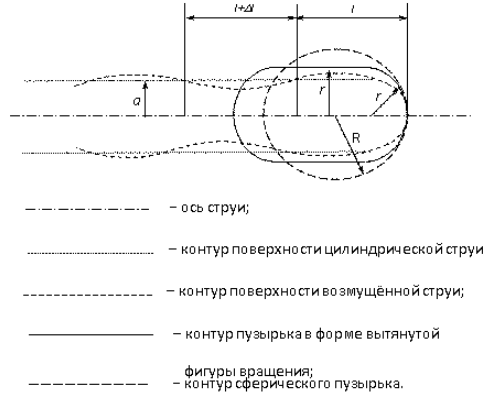


Рис. 1. Отрыв и формирование пузырька

В дальнейшем эта фигура деформируется в сферу за счёт того, что на сферических частях напряжение равно  $2\sigma/R$ , а на цилиндрической части —  $\sigma/R$ .



Поэтому для оценки среднего давления в газе  $\langle p \rangle$  принято давление равновесного состояния газа выше описанной фигуры среднего радиуса  $r = \frac{(a+R)}{2}$ , то есть  $\langle p \rangle \approx \frac{2\sigma}{R(1+\eta)}$ . В итоге  $W_5 = \frac{8}{3}\pi\sigma R^2 \frac{(1-\eta^3)((2\eta)^{1/\gamma}-1)}{(1+\eta)}$ . Таким образом, уравнение баланса энергии имеет вид  $W = W_1 + W_2 + W_3 + W_4 + W_5$ , где  $W_1, W_2, W_3, W_4$  получены в [1] и имеют вид:

$$\begin{aligned} W_1 &= 2\pi\sigma a(l + \Delta l); \quad W_2 = 2\pi\sigma a^2(1 - 0.25\pi); \\ W_3 &= 2\pi\sigma \left\{ aR \left( 1 - \sqrt{1 - (a/R)^2} \right) + 0.5 \left[ aR \sqrt{1 - (a/R)^2} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - R^2 \left( 0.5\pi - \arcsin \sqrt{1 - (a/R)^2} \right) \right] \right\}. \\ W_4 &= 4\pi\sigma R^2 \left( 1 - (a/R)^2 \right). \end{aligned}$$

Безразмерное уравнение баланса энергии имеет вид:

$$\begin{aligned} f(\eta, \varepsilon) &= \left( 3 - \frac{\pi}{4} \right) \eta^{(3-1/\gamma)} + 0,5 \left( \arcsin \sqrt{1 - \eta^2} - \eta \sqrt{1 - \eta^2} - 4 - 0,5\pi \right) \eta^{(1-1/\gamma)} + \\ &+ \eta^{(2-1/\gamma)} + \frac{4}{3} \frac{(1-\eta^3)}{(1+\eta)} \left( \eta^{-1/\gamma} - 2^{1/\gamma} \right) \eta + \frac{2^{(1+1/\gamma)}}{3} q = 0, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $\eta$  — неизвестная величина,  $q = \frac{1+2\varepsilon}{1+\varepsilon}$ ,  $\varepsilon = \frac{\Delta l}{2l}$  — параметр уравнения.

Для определения корней уравнения [3] проведём исследование функции  $f(\eta, \varepsilon)$ . После дифференцирования  $f(\eta, \varepsilon)$  по  $\eta$  при фиксированном параметре  $\varepsilon$  и умножения  $f'_\eta$  на  $\frac{\eta^{1/\gamma}}{(3-1/\gamma)}$  получаем

$$\begin{aligned} f'_\eta &= (3 - 0,25\pi) \eta^2 + A_2 \eta + 0,5A_1 \left( \arcsin \sqrt{1 - \eta^2} - 2 - 0,5\pi \right) - \\ &- 0,5\eta \sqrt{1 - \eta^2} - \frac{(2\eta)^{1/\gamma}}{3-1/\gamma} + \frac{4}{3(3-1/\gamma)} \frac{1}{(1+\eta)^2} \times \\ &\times \left\{ \frac{1}{\gamma} (\eta^3 - 1) (\eta + 1) + \left[ 1 - (2\eta)^{1/\gamma} \right] (1 - 4\eta^3 - 3\eta^4) \right\} = 0, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $A_k = \frac{k-1/\gamma}{3-1/\gamma}$  (для  $\gamma = 1.4$ :  $A_1 \approx 0.125$ ;  $A_2 \approx 0.563$ ;  $\frac{4}{3(3-1/\gamma)} \approx 0.583$ ). При фиксированном  $\varepsilon$  при  $\eta_* \simeq 0,46$   $f'_\eta \approx 0,006$  с точностью, меньшей 1%. Причём, при переходе через  $\eta = \eta_*$  значение  $f'_\eta$  меняет знак с "−" на "+", т. е.  $\eta_* \simeq 0.46$  есть точка минимума функции  $f(\eta, \varepsilon)$ . Из уравнения  $f(\eta_*, \varepsilon) = 0$  находится критическое значение  $\varepsilon_* = 0.076$  и  $q_* = 1.07$ . Таким образом, при  $\eta = \eta_*$ ,  $\varepsilon = \varepsilon_*$  минимум функции  $f(\eta, \varepsilon)$  выходит на ось абсцисс  $\eta$ . Поскольку в нелинейной стадии симметрия волнообразования утрачивается, и участок перешейка растягивается по отношению к разбухающему участку, то  $\varepsilon$  — величина неотрицательная и  $\varepsilon = 0$  есть предельное значение. При подстановке  $\eta_* = 0.46$  и  $\varepsilon = 0$  в функцию  $f(\eta, \varepsilon)$  имеем  $f(0.46, 0) = -0.044$ . Сравнение этого значения функции со значениями  $f(0, 0) = 1.043$  и  $f(1, 0) = 1.523$  свидетельствует о том, что минимум функции  $f(\eta, 0)$  мало отличается от нуля. Значит при  $\varepsilon = 0$  существуют два близких между собой корня и близких к  $\eta_* = 0.46$ , поэтому это значение можно принять в качестве оценки корня. Действительно, при фиксированном  $\varepsilon$  кривая  $f(\eta, \varepsilon)$  не может опуститься ниже своего минимума. При  $\varepsilon = \varepsilon_*$  и  $\eta = \eta_*$   $f(\eta, \varepsilon) = 0$ , а значит, при  $\varepsilon > \varepsilon_*$  решение уравнения отсутствует, т. е. отрыва пузырька не будет.



Поэтому  $\varepsilon \leq \varepsilon_*$ . С другой стороны,  $\varepsilon \geq 0$ . Таким образом, в интервале  $[0, \varepsilon_*]$  должен быть заключен показатель  $\varepsilon$  асимметрии волнообразования на поверхности струи газа.

**ЗАКЛЮЧЕНИЕ.** Для полученных значений  $\varepsilon = \varepsilon_*$  и  $\eta = \eta_*$  сделаны средние оценки характерных величин изучаемого процесса. Для диаметра регулярно образующихся пузырьков газа получено значение  $2R \approx 2.17 \times 2a$ , при этом расстояние между ними имеет значение  $L = \frac{2}{3} \frac{(2\eta_*)^{1/\gamma}}{(\eta_*)^3} \approx 6.45 \times 2a$ . Последнее хорошо согласуется с результатом Рэлея [2] для длины волны  $\lambda_*$  максимальной неустойчивости, полученным с позиции линейной теории возмущений.

1. **Асланов С. К.** К теории распада жидкой струи на капли // Журнал технической физики. – 1999. – Т. 69, № 11. – С. 132–133.
2. **Стрэтт Дж. В.** Теория звука. Т. 2. – М.: ГИТТЛ, 1955. – 455 с.
3. **Lord Rayleigh.** On the instability of jets // Proc. Lond. Math. Soc. – 1879. – V. 10. – P. 4–10.
4. **Lord Rayleigh.** On the instability of cylindrical fluid surfaces // Phil. Mag. – 1892. – V. 34. – P. 177.

*Асланов С. К., Косой М. Б., Царенко О. П.*

РОЗПАДАННЯ ГАЗОВОГО СТРУМЕНЯ ВСЕРЕДИНІ РІДИНИ НА БУЛЬБАШКИ

*Резюме*

На основі рівнянь балансу маси і енергії побудована теорія для наближеного опису розпаду на бульбашки тонкого струменя ідеального газу, що витікає в навколишню ідеальну рідину. Під дією сили поверхневого натягу, розподіленої по поверхні розділу середовищ, і внутрішніх сил тиску всередині струменя, обумовлених стисливістю газу, поверхня струменя деформується і, при рості кінцевих обурень, розпадається на бульбашки. Вироблений математичний аналіз дозволив однозначно оцінити відносну величину середнього діаметра утворюваних бульбашок газу і відстаней між ними. Отримані результати добре узгоджуються з результатами Релея з лінійної теорії нестійкості струменя.

*Ключові слова:* струмінь газу, розпад струменя, поверхневий натяг, робота розширення бульбашки, нестійкість збурення

*Aslanov S. K., Kosoy M. B., Carenko A. P.*

SPLIT OF GAS STREAM ONTO THE BUBBLES INSIDE LIQUID

*Summary*

A theory of the approximate description of the splitting of the thin jet of ideal gas flowing into the incompressible frictionless liquid is constructed on the base of the balance equations of mass and energy. Under the surface tension force influence, distributed over surface of division of environments, and the internal pressure forces inside the stream, caused by the compressibility of the gas, stream surface is deformed, and with the growth of finite indignations, is being broken up into the bubbles. Made mathematical analysis allowed unambiguously to evaluate the relative value of the average diameter of the formed gas bubbles



and the distances between them. The results are in good agreement with the Rayleigh results of the linear theory of stream instability.

*Key words:* gas stream, split of the gas stream, work of bubble's expansion, instability of the perturbations.

## REFERENCES

1. **Aslanov S. K.** (1999), K teorii raspada zhidkoj strui na kapli, *Zhurnal tekhnicheskoy fiziki*, vol. 69, no. 11, pp. 132–133.
2. **Streht Dzh. V.** (1955), *Teoriya zvuka* [Theory of sound], Volume 2, M.: GITTL, 455 p.
3. **Lord Rayleigh** (1879), On the instability of jets *Proc. Lond. Math. Soc.*, vol. 10, pp. 4–10.
4. **Lord Rayleigh** (1892), On the instability of cylindrical fluid surfaces *Phil. Mag.*, vol. 34, p. 177.