Вісник Одеськ. нац. ун-ту. Матем. і мех. – 2011. – Т. 16, вип. 16. – С. 112–118

УДК 511.3

О. В. Савастру
Одесский национальный университет имени И. И. Мечникова

ЦЕЛЫЕ ГАУССОВЫЕ ЧИСЛА С ДЕЛИТЕЛЯМИ В УЗКИХ СЕКТОРАХ

Савастру О. В. Цілі гаусові числа з дільниками у вузьких секторах. Нехай A_1 та A_2 — це задані множини цілих гаусових чисел. Через $\tau_{A_1,A_2}(\omega)$ позначимо кількість уявлень ω у вигляді $\omega = \alpha\beta$, де $\alpha \in A_1, \beta \in A_2$. Побудована асимптотична формула для суматорної функції, яка відповідає функції $\tau_{A_1,A_2}(\omega)$, у випадку, коли $A_2 = \mathbb{Z}[i]$, A_1 — сектор роствору φ у комплексній площині.
Ключові слова: гаусові числа, проблема дільників, асимптотична формула, функціональне рівняння.

Савастру О. В. Целые гауссовые числа с делителями в узких секторах. Пусть A_1 и A_2 — заданные множества целых гауссовых чисел. Обозначим через $\tau_{A_1,A_2}(\omega)$ — количество представлений ω в форме $\omega = \alpha\beta$, где $\alpha \in A_1, \beta \in A_2$. Построена асимптотическая формула для сумматорной функции, соответствующей $\tau_{A_1,A_2}(\omega)$ в случае, когда $A_2 = \mathbb{Z}[i]$, A_1 — сектор раствора φ в комплексной плоскости.
Ключевые слова: гауссовые числа, проблема делителей, асимптотическая формула, функциональное уравнение.

Savastru O. V. Gaussian integers with divisors in narrow sectors. Let A_1 and A_2 be fixed sets of gaussian integers. $\tau_{A_1,A_2}(\omega)$ is the number of representations of ω in form $\omega = \alpha\beta$, where $\alpha \in A_1, \beta \in A_2$. We construct the asymptotic formula for summatory function for function $\tau_{A_1,A_2}(\omega)$ in case, when $A_2 = \mathbb{Z}[i]$, A_1 — fixed sector of complex plane.
Key words: gaussian numbers, divisor problem, asymptotic formula, functional equation.

Введение. Пусть A_1 и A_2 — два множества натуральных чисел. Обозначим через $\tau_{A_1,A_2}(n)$ — количество представлений натурального n в форме $n = m_1m_2$, где $m_1 \in A_1, m_2 \in A_2$. Для исследования среднего порядка $\tau_{A_1,A_2}(n)$ обычно рассматривают сумматорную функцию

$$\sum_{n\leqslant x} \tau_{A_1,A_2}(n).$$

Для $A_1 = A_2 = \mathbb{N}$ мы получаем классическую задачу Дирихле о числе целых точек (u, v) под гиперболой $uv \leqslant x,\ u, v \geqslant 1$. Исторический обзор результатов по проблеме делителей Дирихле можно найти в монографии E. Krätzel [5]. Наилучший результат к настоящему времени получен в работе [4]

$$\sum_{n\leqslant x} \tau_{\mathbb{N},\mathbb{N}}(n) = x\log x + (2\gamma - 1) + O(x^{\frac{131}{416}} (\log x)^{\frac{26947}{8320}}).$$

В работах [8], [6], [10], [9], [7] множества A_1, A_2 заменялись подмножествами из $\mathbb{N}$.

Вполне естественно изучать функцию $\tau_{A_1,A_2}(\omega)$ над кольцом целых гауссовых чисел $\mathbb{Z}[i]$, где

$$A_1 = \mathbb{Z}[i], \quad A_2 = \{\alpha \in \mathbb{Z}[i] : \alpha \equiv \alpha_0 \pmod{\gamma}\}, \quad (\alpha_0, \gamma \in \mathbb{Z}[i]).$$

В работе [10] найдена асимптотическая формула для сумматорной функции

$$\sum_{\substack{\omega=\alpha\beta \\ \alpha\equiv\alpha_0 \pmod{\gamma} \\ N(\alpha\beta)\leqslant x}} 1 = \frac{\pi^2 x \log x}{N(\gamma)} + c(\alpha_0,\gamma)\frac{x}{N(\gamma)} + O\left(\left(\frac{x}{N(\gamma)}\right)^{\frac{1}{2}+\epsilon}\right) +$$

$$+O\left(\left(\frac{x}{N(\alpha_1)}\right)^{\theta}\right) + O(x^{\epsilon}),$$

где $\theta < \frac{1}{3}, \alpha_1$ — число вида $\alpha_0 + \beta\gamma, \beta \in \{0, \pm 1, \pm i\}$ с наименьшей нормой, $c(\alpha_0, \gamma)$ — функция, ограниченная абсолютной константой.

Целью настоящей работы является построение асимптотической формулы для среднего значения $\tau_{A_1,A_2}(\omega)$ для случая $A_2 = \mathbb{Z}[i]$, $A_1 = S$ – сектор раствора φ:

$$S(\varphi) = S := \{\alpha \in \mathbb{Z}[i] : \varphi_1 < \arg\alpha \leqslant \varphi_2,\ \varphi = \varphi_2 - \varphi_1\}.$$

Для удобства мы в этом случае пишем $\tau_s(\omega)$ вместо $\tau_{A_1,A_2}(\omega)$.

В дальнейшем мы будем использовать следующие обозначения:
$\mathbb{Z}[i] = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ – кольцо целых гауссовых чисел;
$N(\alpha) = |\alpha|^2$ – норма $\alpha \in \mathbb{Z}[i]$;
$\zeta(s)$ – дзета-функция Римана;
$L(s, \chi_4)$ – L-функция Дирихле с неглавным характером модуля 4;
$s = \sigma + it \in \mathbb{C},\ \sigma = \Re s,\ t = \Im s$;
$e_q(z) := e^{2\pi i \frac{z}{q}}, \quad \exp(x) := e^x$;
символ Виноградова $''\ll''$ означает то же, что и символ Ландау $''O''$.

Приведем ряд вспомогательных утверждений.

Каждое ненулевое гауссовое число имеет ассоциированное с ним в каждой четверти комплексной плоскости. Поэтому, не ограничивая общности, будем считать, что $0 \leqslant \varphi_1 < \varphi_2 \leqslant \frac{\pi}{2}$.

Пусть $\chi(\varphi)$ — характеристическая функция сектора S. Воспользуемся следующей леммой о "стаканчиках" Виноградова.

Лемма 1. *[1] Пусть r — неотрицательное целое число, $\Omega > 0, 0 < \Delta < \frac{1}{2}\Omega$, φ_1, φ_2 — вещественные числа, $\Delta \leqslant \varphi_2 - \varphi_1 \leqslant \Omega - 2\Delta$. Существует периодическая функция $f(\varphi) = f(\varphi; \varphi_1, \varphi_2)$ с периодом Ω, такая, что*

(i) *$f(\varphi) = 1$ в промежутке $[\varphi_1, \varphi_2]$;*
$0 \leqslant f(\varphi) \leqslant 1$ в промежутках $[\varphi_1 - \Delta, \varphi_1]$, $[\varphi_2, \varphi_2 + \Delta]$;
$f(\varphi) = 0$ в промежутке $[\varphi_2 + \Delta, \varphi_2 + \Omega - \Delta]$;

(ii) *$f(\varphi)$ разлагается в ряд Фурье вида*

$$f(\varphi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m \exp\left(2\pi i \frac{m\varphi}{\Omega}\right),$$

где $a_0 = \frac{1}{\Omega}(\varphi_2 - \varphi_1 + \Delta)$,

$$|a_m| \leqslant \begin{cases} \Omega^{-1}(\varphi_2 - \varphi_1 + \Delta), \\ 2(\pi|m|)^{-1}, \\ 2(\pi|m|)^{-1}(r\Omega(\pi|m|\Delta)^{-1})^r. \end{cases}$$

Следствие. *Существуют числа* θ_i, $|\theta_i| \leqslant 1$, $i = 1, 2$, *такие что*

$$\chi(\varphi) = f(\varphi; \varphi_1, \varphi_2) + \theta_1 f(\varphi; \varphi_1 - \Delta, \varphi_1) + \theta_2 f(\varphi; \varphi_2, \varphi_2 + \Delta). \tag{1}$$

Пусть δ, $\delta_0 \in \mathbb{Q}[i], m \in \mathbb{Z}$. В области $\Re s > 1$ определим функцию

$$Z_m(s; \delta, \delta_0) = \sum_{\substack{\omega \in \mathbb{Z}[i] \\ \omega \neq -\delta}} \frac{\exp(4mi \arg(\omega + \delta))}{N(\omega + \delta)} \exp(2\pi i \Re(\delta_0 \omega)). \tag{2}$$

Эту функцию мы называем Z-функцией Гекке со сдвигом [3]. $Z_m(s; \delta, \delta_0)$ допускает аналитическое продолжение во всю комплексную s-плоскость.

Лемма 2. *[3] $Z_m(s; \delta, \delta_0)$ является целой функцией , если $m \neq 0$ и $\delta_0 \notin \mathbb{Z}[i]$. В случае $m = 0$ и $\delta_0 \in \mathbb{Z}[i]$ Z-функция Гекке $Z_0(s; \delta, \delta_0)$ аналитична во всей s-плоскости, кроме точки $s = 1$, где она имеет простой полюс с вычетом 1. Кроме того, для всех m, δ, δ_0 справедливо функциональное уравнение*

$$\begin{gathered} \pi^{-s}\Gamma(2|m| + s) Z_m(s; \delta, \delta_0) = \\ = \pi^{-(1-s)}\Gamma(2|m| + 1 - s) Z_m(1 - s; -\overline{\delta_0}, \delta) \exp(-2\pi i \Re(\delta_0 \delta)). \end{gathered} \tag{3}$$

Из формулы Стирлинга для гамма-функции $\Gamma(s)$ до членов второго порядка $O(t^{-2})$ имеем для $|t| > 1$, $\sigma > 0$

$$\begin{gathered} \Gamma(\sigma + it) = \sqrt{2\pi} t^{\sigma - \frac{1}{2}} \times \\ \times \exp\left(i\left(t \log t - t + \tfrac{\pi}{2}(\sigma - \tfrac{1}{2}) + (\sigma - \sigma^2 - \tfrac{1}{6})(2t)^{-1} + O(t^{-2})\right)\right) \exp\left(-\tfrac{\pi|t|}{2}\right). \end{gathered}$$

Следовательно,

$$\begin{gathered} \frac{\Gamma(2|m|+1-s)}{\Gamma(2|m|+s)} = \exp\left(it\left(2 - \log(4m^2 + t^2) + \frac{|2m|+1}{4m^2+t^2} + \frac{(2|m|+1)^2}{(4m^2+t^2)^2}\right)\right) \times \\ \times \tfrac{1}{2}(4m^2 + t^2)^{1-2\sigma} \exp\left(\sigma - \tfrac{1}{2} + \tfrac{t^2}{16}(4m^2 + 2|m| + t^2)^{-1}\right) \times \\ \times \left(1 + O(m^2 + t^2)^{-\frac{1}{2}}\right). \end{gathered} \tag{4}$$

Из определения (2) ясно, что можно считать, что $0 < N(\delta)$, $N(\delta_0) \leqslant 1$.

Пусть $\mathfrak{B} := \{0, \pm 1, \pm i\}$. Применение оценки для $|t| \geqslant 2$, $\sigma = 1$

$$Z_m^*(s; \delta, \delta_0) := Z_m(s; \delta, \delta_0) - \sum_{\omega \in \mathfrak{B}} \frac{e^{4mi \arg(\omega + \delta)}}{N(\omega + \delta)^s} e^{2\pi i \Re(\delta_0 \omega)} \ll \log^4(t^2 + m^2), \tag{5}$$

а также функционального уравнения (3), соотношения (4) и принципа Фрагмена-Линделефа в полосе $-1 \leqslant \Re(s) \leqslant 1$ дает

$$Z_m^*(s; \delta, \delta_0) \ll (m^2 + t^2)^{\frac{1-\sigma}{2}} \left(\log(m^2 + t^2)\right)^{\frac{1-\sigma}{2}}. \quad (|m| \geqslant 1) \tag{6}$$

Лемма 3. *При $x \to \infty$ имеем*

$$T(x) = \sum_{N(\omega)\leqslant x} \tau(\omega) = \pi^2 x \log x + \pi x(8L'(1,\chi_4) + 2\gamma\pi - \pi) + O(x^{\frac{1}{2}} \log^4 x).$$

Доказательство. Поскольку для $\Re s > 1$

$$\sum_{\omega} \frac{\tau(\omega)}{N(\omega)^s} = Z_0^2(s;0,0) = (4\zeta(s)L(s,\chi_4))^2,$$

то применение формулы Перрона для рядов Дирихле с последующим переносом контура интегрирования на половинную прямую сразу дает утверждение леммы.

Лемма 4. *Для функции $Z_m^*(s;\delta,\delta_0)$, определенной в (5) справедливы соотношения*

$$\sum_{|m|\leqslant M} |Z_m^*(\frac{1}{2}+it;\delta,\delta_0)|^2 \ll (M+|t|)\log^5(M+|t|),$$

$$\int_{-T}^{T} |Z_m^*(\frac{1}{2}+it;\delta,\delta_0)|^2 dt \ll (T+|m|)\log^5(T+|m|),$$

если $M + |t| \geqslant 4$.

Это утверждение доказывается аналогично лемме 10 из [2].
Теперь мы в состоянии доказать основные результаты.

Основные результаты. Пусть $S(\varphi)$ — сектор раствора φ

$$S(\varphi) = \{\omega \in \mathbb{Z}[i] : \varphi_1 < \arg\omega \leqslant \varphi_2,\ \varphi = \varphi_2 - \varphi_1\}.$$

Мы имеем, в силу (1),

$$\begin{gathered} T(x,S) = \sum_{N(\omega)\leqslant x} \tau_s(\omega) = \\ = \sum_{N(w)\leqslant x} \sum_{\alpha|\omega} \chi_s(\arg\alpha) = \sum_{\substack{\omega=\alpha\beta \\ N(\alpha\beta)\leqslant x}} (f(\arg\alpha;\varphi_1,\varphi_2) + \theta_1 f(\arg\alpha;\varphi_1-\Delta,\varphi_1) + \\ +\theta_2 f(\arg\alpha;\varphi_2,\varphi_2+\Delta)) := \sum\nolimits_0 + \theta_1 \sum\nolimits_1 + \theta_2 \sum\nolimits_2, \end{gathered} \tag{7}$$

где f – функция из леммы 1, ассоциированная, соответственно, с отрезками $[\varphi_1, \varphi_2]$, $[\varphi_1 - \Delta, \varphi_1]$, $[\varphi_2, \varphi_2 + \Delta]$.
Суммы $\sum_0$, $\sum_1$, $\sum_2$ исследуются одинаково, поэтому рассмотрим сумму $\sum_0$. Мы имеем (по лемме 1):

$$\sum\nolimits_0 = a_0 \sum_{N(\alpha\beta)\leqslant x} 1 + \sum_{|m|\geqslant 1} a_m \sum_{N(\alpha\beta)\leqslant x} e^{4mi\arg\alpha}, \tag{8}$$

где $a_0 = \frac{1}{\Omega}(\varphi_2 - \varphi_1 + \Delta)$, $\Omega = 2\pi$, значение Δ выберем позже.
Ясно, что

$$\sum_{N(\alpha\beta)\leqslant x} 1 = \sum_{N(\omega)\leqslant x} \tau(\omega) = T(x). \tag{9}$$

Далее, мы имеем при $\Re s > 1$

$$Z_m(s;0,0)Z_0(s;0,0) := Z_m(s)Z_0(s) = \sum_{\omega} \frac{c_m(\omega)}{N(\omega)^s},$$

где $c_m(\omega) = \sum\limits_{\alpha\beta=\omega} e^{4mi\arg\alpha}$.

Следовательно, для $c > 1$, $T > 1$ по формуле Перрона получаем

$$\sum_{N(\alpha\beta)\leqslant x} e^{4mi\arg\alpha} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c-iT}^{c+iT} Z_m(s)Z_0(s)\frac{x^s}{s}ds + O\left(\frac{x^c}{T(c-1)}\right), \quad |m| \geqslant 1. \tag{10}$$

Заметим, что лемма 1 с $r = 1$ дает

$$\begin{gathered}\left|\sum\limits_{|m|\geqslant 1} a_m \cdot O\left(\tfrac{x^c}{T(c-1)}\right)\right| = \\ \left(\sum\limits_{1\leqslant|m|\leqslant\Delta^{-1}} |a_m| + \sum\limits_{|m|>\Delta^{-1}} |a_m|\right)\cdot O\left(\tfrac{x^c}{T(c-1)}\right) \ll \tfrac{x^c}{T(c-1)}\log(\Delta^{-1}).\end{gathered} \tag{11}$$

Далее, в силу оценки (6), имеем

$$\begin{gathered}\tfrac{1}{2\pi i}\int\limits_{c-iT}^{c+iT} Z_m(s)Z_0(s)\tfrac{x^s}{s}ds = \underset{s=1}{res}\left(Z_m(s)Z_0(s)\tfrac{x^s}{s}\right) + \\ +\tfrac{1}{2\pi i}\int\limits_{\frac{1}{2}-iT}^{\frac{1}{2}+iT} Z_m(s)Z_0(s)\tfrac{x^s}{s}ds + O\left(\tfrac{x^c}{T}\right) + O\left((|m|+T)^{\frac{1}{2}}T^{-\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}\right) = \\ = \pi x Z_m(1) + \tfrac{1}{2\pi i}\int\limits_{\frac{1}{2}-iT}^{\frac{1}{2}+it} Z_m(s)Z_0(s)\tfrac{x^s}{s}ds + O\left((|m|+T)^{\frac{1}{2}}T^{-\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}\right) + O\left(\tfrac{x^c}{T}\right).\end{gathered} \tag{12}$$

Из (6) видно, что $Z_m(1) \ll \log(|m|+3)$. Поэтому абсолютно сходится ряд

$$\sum_{|m|\geqslant 1} a_m Z_m(1). \tag{13}$$

Осталось рассмотреть ряд

$$S := \sum_{|m|\geqslant 1} a_m \cdot \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\frac{1}{2}-iT}^{\frac{1}{2}+iT} Z_m(s)Z_0(s)\frac{x^s}{s}ds. \tag{14}$$

Пусть $M \geqslant T$. По неравенству Коши и лемме 4 имеем

$$\begin{gathered}\sum_{|m|\leqslant M} |a_m| \cdot \int\limits_1^T |Z_m(s)|\cdot|Z_0(s)|\tfrac{x^{\frac{1}{2}}}{t}dt \ll \sum_{|m|\leqslant T} + \sum_{T<|m|\leqslant M} \ll \\ \ll x^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{|m|\leqslant T}|a_m| \cdot \sum_{|m|\leqslant T}\left(|a_m|^{\frac{1}{2}}\cdot\int\limits_1^T |Z_m(s)|\cdot|Z_0(s)|\tfrac{dt}{t}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} + \\ +x^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{T<|m|\leqslant M}|a_m| \cdot \sum_{T<|m|\leqslant M}\left(|a_m|^{\frac{1}{2}}\cdot\int\limits_1^T |Z_m(s)|\cdot|Z_0(s)|\tfrac{dt}{t}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}.\end{gathered} \tag{15}$$

Теперь для $|m| \leqslant T$ мы применяем оценку $|a_m|$ из леммы 1 с $r = 0$, а при $T < |m| \leqslant M$ с $r = 1$. Получаем

$$\begin{gathered}|S| \ll x^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{|m|\leqslant T} \frac{1}{|m|} \cdot \sum_{|m|\leqslant T} \frac{1}{|m|} \cdot \int_1^T |Z_m(\tfrac{1}{2}+it)|^2 \frac{dt}{t} \cdot \int_1^T |Z_0(\tfrac{1}{2}+it)|^2 \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{2}} + \\ + x^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{T<|m|\leqslant M} \frac{\Delta^{-1}}{m^2} \cdot \sum_{T<|m|\leqslant M} \frac{\Delta^{-1}}{m^2} \cdot \int_1^T |Z_m(\tfrac{1}{2}+it)|^2 \frac{dt}{t} \cdot \int_1^T |Z_0(\tfrac{1}{2}+it)|^2 \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{2}} \ll \\ \ll x^{\frac{1}{2}} \log^7 T + x^{\frac{1}{2}} (\Delta^{-1})^2 \cdot \frac{1}{T^2} \log M \log^7 M \ll x^{\frac{1}{2}} (\log^7 T + \frac{\log^8 M}{T\Delta}).\end{gathered} \tag{16}$$

Для $m \geqslant M$ применяем лемму 1 (с $r = 1$) и лемму 4:

$$\begin{gathered}\left| \sum_{|m|\geqslant M} a_m \cdot \int_1^T Z_m(\tfrac{1}{2}+it) \cdot Z_0(\tfrac{1}{2}+it) \frac{x^{\frac{1}{2}+it}}{\frac{1}{2}+it} dt \right| \ll \\ \ll \sum_{|m|\geqslant M} |a_m| \left(\int_1^T |Z_m(\tfrac{1}{2}+it)|^2 \frac{dt}{t} \cdot \int_1^T |Z_0(\tfrac{1}{2}+it)|^2 \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{2}} \ll \\ \ll \sum_{|m|\geqslant M} \frac{\Delta^{-1}}{m^2} \left(\frac{|m|}{T} \cdot \log^{12} M \right)^{\frac{1}{2}} \ll \Delta^{-1} M^{-\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} T^{-\frac{1}{2}} \log^6 M.\end{gathered} \tag{17}$$

Положим $\Delta^{-1} = T = M$.
Поэтому из соотношений (14)–(17) следует

$$S \ll x^{\frac{1}{2}} \log^8 T. \tag{18}$$

Таким образом, полагая $T = x^{\frac{1}{2}}, \quad c = 1 + \frac{1}{\log x}$

$$\begin{gathered}\sum\nolimits_0 = \frac{\varphi_2-\varphi_1}{2\pi} T(x) + \pi x \sum_{|m|\geqslant 1} a_m Z_m(1) + O(x^{\frac{1}{2}} \log^8 x) = \\ = \frac{\varphi_2-\varphi_1}{2\pi} (\pi^2 x \log x + \pi x (8L'(1,\chi_4) + 2\pi\gamma - \pi) + O(x^{\frac{1}{2}} \log^4 x)) + \\ + (\varphi_2 - \varphi_1) x A_0(\varphi_2 - \varphi_1, \Delta) + O(x^{\frac{1}{2}} \log^8 x),\end{gathered} \tag{19}$$

где $A_0(\varphi_2 - \varphi_1, \Delta) = A_0(\varphi) + O(\Delta)$ ограничена при $\varphi_2 - \varphi_1 \to 0$ и $\Delta \to 0$. Аналогичные представления имеют и суммы $\sum_1, \sum_2$, но вместо $\varphi_2 - \varphi_1$ надо писать Δ. Выражение для $A_0(\varphi)$ можно получить, используя доказательство И. М. Виноградова приведенной выше леммы 1 для случая $r = 1$. Собирая вместе соотношения (7), (8), (19), мы приходим к теореме

Теорема. *Пусть $S(\varphi)$ — сектор раствора $\varphi_2 - \varphi_1 = \varphi$. Тогда*

$$\begin{gathered}T(x, S(\varphi)) = \sum_{N(\omega)\leqslant x} \tau_s(\omega) = \frac{\varphi_2-\varphi_1}{2} (\pi x \log x + x(8L'(1,\chi_4) + 2\pi\gamma - \pi + \\ + A_0(\varphi)) + O(x^{\frac{1}{2}} \log^8 x)).\end{gathered}$$

Заключение. Схема доказательства теоремы позволяет получить асимптотическую формулу для сумматорной функции для $\tau_s(\omega)$, когда ω пробегает арифметическую прогрессию $\omega \equiv \omega_0 \pmod{\gamma}$.

1. **Виноградов И. М.** Избранные труды [текст] / Виноградов И. М. – М.: Изд. АН СССР, 1952. – 436 с.
2. **Colleman M. D.** The Rosser-Iwaniec sieve in numbr fields [text] / Colleman M. D. // Acta Arith. – V. 65. – 1993. – P. 53–83.
3. **Hecke E.** Eine neue Art von Zetafunctionen und ihre Beziehungen zur Verteilung der Primzahlen, I, II [text] / Hecke E. // Math. Zeitsehr. – V. 1, 1918. – P. 357–376. – V. 6, 1920. – P. 11–51.
4. **Huxley M. N.** Exponential sums and lattice points III [text] / Huxley M. N. // Proc. London Math. Soc. – V. 87, 2003. – P. 591–609.
5. **Krätzel E.** Lattice points [text] / Krätzel E. – Kluwer Acad. Publ., Dordrecht-Boston-London, 1988.
6. **Nowak W. G.** On a result of Smith and Subbarao concerning a divisor problem [text] / W. G. Nowak // Can. Math. Bull. – V. 27, 1984. – P. 501–504.
7. **Nowak W. G.** Divisor problems in special sets of positive integers [text] / W. G. Nowak // Acta Arith. Univ. Comenianae. – V. 61,1992). – P. 101–115.
8. **Smith R. A.** The average number of divisors in an arithmetic progression [text] / R. A. Smith, M. V. Subbarao // Can. Math. Bull. – V. 24, 1981. – P. 37–41.
9. **Varbanec P. D.** On the distribution of natural numbers in arithmetic progressions [text] / Varbanec P. D. // Acta Arith. – V. 57, 1991. – P. 245–256.
10. **Varbanec P. D.** Divisors of the Gaussian Integers in an Arithmetic Progression [text] / Varbanec P. D., Zarzycki P. // J. Number Theory. – V. 33, 1990. – P. 152–169.