Вісник Одеськ. держ. ун-ту.– 2003.– Т. 8, вип. 2. Фіз.-мат. науки.– С. 35–44

УДК 517.925.54

А. Е. Кондратьева, А. В. Костин
Одесский национальный университет им. И. И. Мечникова

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ВТОРОЙ ПРОБЛЕМЫ РАЗЛИЧЕНИЯ

Доповідь зроблено на засіданні наукового семінару
"Теорія стійкості, теорія коливань у диференціальних рівняннях,
крайові задачі рівнянь математичної фізики" ОНУ 24.10.2002 р.

Запропоновано метод роз'вязку другої проблеми відрізнення для деякого класу дійсних диференціальних рівнянь типу (1).

Предложен метод решения второй проблемы различения для некоторого класса вещественных дифференциальных уравнений типа (1).

The method of solving of the second problem of distinguish for some class of real differential equations type (1) is offered.

Введение. Целью работы является нахождение асимптотик и исследование вопроса существования о-решений вещественного нелинейного дифференциального уравнения (д.у.)

$$\alpha(x)y' = q(x) + p(x)y + y^2 + \varphi(x,y), \tag{1}$$

где: $(x,y)\in P$, $P = I\times[-b,b]$, $I=(0,a]$, $a>0, b>0$; $\alpha(+0)=p(+0)=q(+0)=0$, $\alpha, p, q \in C_I^1$, p,q не меняют знак в I, $\alpha(x)>0$ в I; $\int\limits_0^a \alpha^{-1}dx=\infty$; $\varphi(x,y)\in C(P)$, $\exists\varphi'_y(x,y)$ в P; $\varphi(x,y)=\mathrm{o}(y^2)$, $\varphi'_y(x,y)=\mathrm{o}(y)$ при $y\to 0$ равномерно по $x\in I$.

Для решения задачи используется обобщенный метод Харди $[1-2]$, позволяющий при достаточно широких условиях находить формальные асимптотики о-решений уравнения (1). При этом, в отличие от $[1-2]$, рассматривается вопрос об их фактическом существовании. Отдельные частные случаи задачи рассматривались в работах Лона $(\alpha(x)\equiv x)$ $[3]$, И. С. Куклеса, А. Ф. Андреева и др. $([4-5], [6-7])$. Рассмотрение ОДУ типа (1) является предпосылкой для рассмотрения аналогичных проблем в случае систем ОДУ и ОДУ высших порядков.

1. Предварительные результаты и обозначения. Используются следующие обозначения и термины:

$1_{\circ}$. $K(i)$ – множество всех о-решений уравнения (i) $(i=1,\ldots)$.

$2_{\circ}$. $f(x)\in A$ означает, что $f(x)\in C_{(0,\delta]}$ (δ зависит от $f(x)$) и $\operatorname{sgn} f(x)\equiv\mu$ в $(0,\delta]$, $\mu\in\{0,-1,1\}$; $f(x)\in A_1$, если $f(x)\in A$ и $\mu\neq 0$.

3. $\exists \lim\limits_{x\to+0} F(x) = F(+0)$ – $\exists$ предел $F(+0)$ конечный или бесконечный.

© А. Е. Кондратьева, А. В. Костин, 2003

4. $l_1 = \lim\limits_{x\to+0} \frac{py}{q}$, $l_2 = \lim\limits_{x\to+0} \frac{y^2}{q}$, $l_3 = \lim\limits_{x\to+0} \frac{py}{y^2}$, где $y(x)\in K(1)$, $y(x)\in A_1$.

5. В доказательствах теорем Н. означает вывод необходимых (н.) условий существования решений и их формальных асимптотик, Д. – вывод достаточных (д.) условий.

6. $m(K)=1,\infty$ – количество элементов множества K.

7. $f \dot{\sim} \varphi$ означает, что $\exists \lim\limits_{x\to+0} f/\varphi = \nu \ne 0,\infty$.

8. Функцию $f_r(x)\ne 0$, $r\in\{1,2,3\}$ будем называть главной среди функций $f_i(x)$ $(i=1,2,3,\ x\in I)$, если $f_r(x)\in A_1$ и $\exists \lim\limits_{x\to+0} f_i(x)/f_r(x) = l_{ir} \ne \infty$ $(i=1,2,3)$.

9. В обозначениях: $\varphi(x)=\mathrm{o}(f(x))$, $\varphi(x)\sim f(x)$, $\varphi(x)\dot{\sim} f(x)$ подразумевается что $x\to+0$.

Лемма 1 $[3]$. *Пусть уравнение*

$$z' = f(x,z),$$

где $(x,z)\in P$, $P = I\times[-b(x),b(x)]$, $b(x)>0$, $\exists \lim\limits_{x\to+0} b(x) = b_0$, $0<b_0\le+\infty$, *таково, что* $\forall (x_0,z_0)\in P$ *выполнены условия теоремы существования и единственности решения;* $\exists$ *частное решение* $z(x)\in C^1_{I_{a_1}}$, $I_{a_1} = (0,a_1]\subset I$, $|z(x)|\le b(x)$.

Тогда, если выполняется свойство A_c*: для почти всех* $c\in(-b_0;b_0)$ $f(x,c)\in A$ *при* $x\in(0,x_c]\subset I$, *где* x_c *зависит от c, то* $\exists z(+0)$.

Лемма 2 $[8]$. *Пусть уравнение*

$$\xi' = \alpha_1(x)F(x,\xi)$$

таково, что $(x,\xi)\in P$, $P = I\times[-h,h]$; $F(x,\xi)\in C(P)$, $\exists \lim\limits_{\substack{\xi\to 0\\ x\to+0}} F(x,\xi) = B\ne\infty$; $\alpha_1(x)\in C_I$, $\alpha_1(x)\ne 0$ *в* I.

Тогда, если $I_1 = \int\limits_0^a \alpha_1(x)dx = \infty$, *то для* $\exists$ *решения* $\xi(x), \xi(+0)=0$ *необходимо* $B=0$; *если* $I_1\ne\infty$, $\exists \sup\limits_P |F(x,\xi)| < +\infty$, *то* $\exists$ *решение* $\xi(x)$, $\xi(+0)=\xi_0$, $\forall\xi_0\in(-h,h)$.

Лемма 3 $[9]$. *Пусть уравнение*

$$\xi' = \alpha_1(x)\left(q_1(x) + p_1(x)\xi + \varphi_1(x,\xi)\right) \qquad (2)$$

таково, что $(x,\xi)\in P$, $P = I\times[-h,h]$, $h>0$;

$\alpha_1, p_1, q_1 \in C_I$, $\alpha_1(x)\ne 0$ в I, $I_1=\infty$,

$p_1(x)\ne 0$ в I, $\exists q_1(+0)\ne\infty$, $\exists p_1(+0)\ne 0,\infty$,

$\varphi_1(x,\xi)\in C(P)$; $\varphi_1(x,0)\equiv 0$, $\exists \sup\limits_{\substack{|\xi|\le h\\ x\in I}} \left|\frac{\varphi_1(x,\xi)}{\xi}\right| = L_0 < |p_1(+0)|$.

Тогда для того чтобы $K(2)\ne\varnothing$ *н. и д., чтобы* $q_1(+0)=0$.

Если при этом $\alpha_1 p_1 > 0$ *в I, то* $m(K(2))=\infty$.

Если же $\alpha_1 p_1 < 0$ *и* $\varphi_1(x,\xi)$ *такова, что*

$$\exists \frac{\partial\varphi_1}{\partial\xi}(x,\xi) \text{ в } P,\ \exists \sup_{\substack{|\xi|\le h\\ x\in I}} \left|\frac{\partial\varphi_1(x,\xi)}{\partial\xi}\right| = L_1 < \left|p_1(+0)\right|,$$

то $m(K(2)) = 1$.

2. Основные результаты. Метод исследования уравнения (1) основан на идее выделения среди слагаемых правой части уравнения главных слагаемых, которые могут быть различными для различных решений $\in K(1)$. Получим условия на функции $\alpha(x)$, $q(x)$, $p(x)$, гарантирующие существование пределов l_1, l_2, l_3. Тем самым выделим класс уравнений вида (1), для которых применим данный метод.

Теорема А. *Пусть* $y(x)\in K(1)$, $y(x)\in C^1_{I_{a_1}}$, $y(x)\in A_1$.

1. *Пусть* $q \ne 0, p \ne 0$. *Если* $\exists \lim\limits_{x\to+0} p/q$, *а также для каждого фиксированного* $i\in\{1,2,3\}$ *существует хотя бы одна главная среди функций* $q, p\nu_i - \alpha\nu_i', \nu_i^2$ ($\nu_1 = q/p$, $\nu_2 = \pm\sqrt{|q|}$, $\nu_3 = p$), *то* $\exists$ *пределы* l_1, l_2, l_3.

2. *Пусть* $q = 0, p \ne 0$. *Если* $\exists \lim\limits_{x\to+0} \alpha p'/p^2 = \gamma$, *то* $\exists$ *предел* l_3.

3. *Пусть* $q \ne 0, p = 0$. *Если* $\exists \lim\limits_{x\to+0} \alpha\, q'/|q|^{3/2} = \gamma^*$, *то* $\exists$ *предел* l_2.

4. *Если* $q = 0, p = 0$, *то* y^2 *является главным слагаемым правой части д.у.* (1).

Доказательство. 1. Положим в д.у. (1) $y(x) = \nu_i(x)z$, где $z(x)$ – новая неизвестная функция $(i = 1,2,3)$. Относительно z получим уравнение

$$z' = \alpha^{-1}\nu_i^{-1}\left(q + \left(p\nu_i - \alpha\nu_i'\right)z + \nu_i^2 z^2 + \varphi(x,\nu_i z)\right) = \alpha^{-1}\nu_i^{-1} f_i(x,z).$$

Так как $|y(x)| \le b$, то

$$|z(x)| \le \left|\nu_i^{-1}\right| b = b_i(x), \text{ а } (x,z)\in I\times[-b_i(x), b_i(x)];\ \varphi(x,\nu_i z) = o(\nu_i z)^2\ (i = 1,2,3).$$

Здесь $\alpha^{-1}\nu_i^{-1} \in A_1$, $f_i(x,c) = q + \left(p\nu_i - \alpha\nu_i'\right)c + \nu_i^2 c^2 + o(\nu_i c)^2$ $(i = 1,2,3)$.

Если условия п. 1 теоремы выполнены, то выполнены и условия леммы 1, применяя которую к последнему д.у., получаем утверждение п. 1 теоремы.

2. В правой части присутствуют слагаемые py, y^2, предел отношения которых l_3 существует, если $f_3(x,c) = \left(p^2 - \alpha p'\right)c + p^2c^2 + o\left(p^2c^2\right)$ удовлетворяет свойству A_c, что, очевидно, имеет место, если $\exists$ предел $\gamma \Rightarrow$ утверждение п. 2.

3. В правой части присутствуют слагаемые q, y^2, предел отношения которых l_2 существует, если $f_2(x,c) = q \mp \frac{c}{2}\alpha q'/|q|^{1/2}\operatorname{sgn} q + |q|c^2 + o\left(|q|c^2\right)$ удовлетворяет свойству A_c, что имеет место, если $\exists$ предел $\gamma^* \Rightarrow$ утверждение п. 3.

4. В правой части присутствует лишь слагаемое y^2, которое является главным, если $y(x) \ne 0$ в I.

Следствие. *Если уравнение* (1) *удовлетворяет условиям теоремы А, то имеет место разбиение множества* $K(1)$ *на классы:*

$$K(1)=\bigcup_{i=1}^{7}K_i$$

$y(x)\in K_1$, *если* $py=\mathrm{o}\left(y^2\right),\ q=\mathrm{o}\left(y^2\right)$;

$y(x)\in K_2$, *если* $py=\mathrm{o}(q),\ y^2=\mathrm{o}(q)$;

$y(x)\in K_3$, *если* $q=\mathrm{o}(py),\ y^2=\mathrm{o}(py)$;

$y(x)\in K_4$, *если* $q \,\dot{\sim}\, py \,\dot{\sim}\, y^2$;

$y(x)\in K_5$, *если* $q \,\dot{\sim}\, py,\ y^2=\mathrm{o}(q)$;

$y(x)\in K_6$, *если* $q \,\dot{\sim}\, y^2,\ py=\mathrm{o}(q)$;

$y(x)\in K_7$, *если* $py \,\dot{\sim}\, y^2,\ q=\mathrm{o}(py)$.

При этом $K_i\cap K_j=\varnothing$ $\left(i\neq j;\ i,j=\overline{1,7}\right)$.

Исследуем вопрос о непустоте классов K_i $\left(i=\overline{1,7}\right)$. Будем искать решения этих классов в виде $y(x)=v(x)\,(l+\xi(x))$, $l\in\mathbf{R}-\{0\}$, $\xi(+0)=0$, где l и $v(x)$ определяются классом K_i. Относительно ξ получаем д. у.:

$$\alpha v\xi'=q+pvl+v^2l^2-\alpha v'l+\varphi(x,lv)+\left(pv+2v^2l-\alpha v'\right)\xi+v^2\xi^2+\varphi(x,v(l+\xi))-\varphi(x,lv) \quad (3)$$

Теорема 1. *Для выполнения свойства* $K_1\neq\varnothing$ *н. и д., чтобы*

$$p=\mathrm{o}(v_1),\ q=\mathrm{o}\left(v_1{}^2\right), \quad (4)$$

где $v_1(x)=-\left(\int\limits_a^x\frac{1}{\alpha}dx\right)^{-1}$.

При этом, если $y(x)\in K_1\neq\varnothing$, *то* $y(x)\sim v_1(x)$, $m(K_1)=\infty$.

Доказательство. Н. Если $y(x)\in K_1$, то для этого решения д.у. (1) можно записать в виде: $\alpha y'=y^2(1+\mathrm{o}(1))$. Интегрируя его, получим $y(x)\sim v_1(x)$ и свойства (4).

Д. Полагая $y=v_1(x)(1+\xi)$, получим уравнение (3), которое можно записать в форме

$$\xi'=\frac{v}{\alpha}\left(\frac{q}{v^2}+\frac{p}{v}l+l^2-\frac{\alpha v'l}{v^2}+\frac{\varphi(x,lv)}{v^2}+\left(\frac{p}{v}+2l-\frac{\alpha v'}{v^2}\right)\xi+\xi^2+\frac{\varphi(x,v(l+\xi))-\varphi(x,lv)}{v^2}\right). \quad (5)$$

Здесь l=1, $v=v_1$, $\alpha_1=\frac{v_1'}{v_1}$, $I_1=\infty$, $\frac{\alpha v_1'}{v_1{}^2}\equiv 1$, $\frac{\varphi(x,v_1)}{v_1{}^2}=\mathrm{o}(1)$ $(x\to+0)$, $\left|\frac{1}{\xi}\varphi_1(x,\xi)\right|=$

$$=\left|\frac{1}{\xi}\left(\xi^2+\frac{\varphi(x,v_1(1+\xi))-\varphi(x,v_1)}{v_1{}^2}\right)\right|=\left|\xi+\frac{\varphi_y'\left(x,v_1\left(1+\tilde{\xi}\right)\right)}{v_1}\right|=\left|\xi+\mathrm{o}\left(1+\tilde{\xi}\right)\right|\leq L_0<1,\ \tilde{\xi}\in(-h,h)$$

(h, a малы). С учетом условий (4) $q_1(+0)=0$, $p_1(+0)=1$. Так как при малых x $\operatorname{sgn}v_1=\operatorname{sgn}\alpha$, то $\operatorname{sgn}\alpha_1p_1=\operatorname{sgn}\alpha v_1p_1=1$.

По лемме 3 $m(K_1)=\infty$.

Теорема 2. *Для выполнения свойства* $K_2 \neq \varnothing$ *н. и д., чтобы* $\int\limits_0^{\delta} \frac{q}{\alpha} dx \neq \infty$,

$$pv_2 = \mathrm{o}(q), \ \ v_2{}^2 = \mathrm{o}(q), \tag{6}$$

где $v_2 = \int\limits_0^x \frac{q}{\alpha} dt$. *При этом, если* $y(x) \in K_2 \neq \varnothing$, *то* $y(x) \sim v_2(x)$, $m(K_2) = 1$.

Доказательство. Н. Если $y(x) \in K_2$, то для этого решения д.у. (1) можно записать в виде: $\alpha y' = q(1 + \mathrm{o}(1))$. Интегрируя его, получим $y(x) \sim v_2(x)$ и условия (6).

Д. Полагая $y = v_2(x)(1 + \xi)$, получим уравнение типа (3), которое можно записать в форме

$$\xi' = \frac{q}{\alpha v}\left(1 + \frac{pv}{q} l - \frac{\alpha v'}{q} l + \frac{v^2}{q} l^2 + \frac{\varphi(x, lv)}{q} + \left(\frac{pv}{q} + 2\frac{v^2}{q} l - \frac{\alpha v'}{q}\right)\xi + \frac{v^2}{q}\xi^2 + \frac{\varphi(x, v(l+\xi)) - \varphi(x, lv)}{q}\right) \tag{7}$$

Здесь $l = 1$, $v = v_2$, $\alpha_1 = \frac{v_2{}'}{v_2}$, $I_1 = \infty$, $\frac{\alpha v_2{}'}{q} \equiv 1$, $\frac{\varphi(x, v_2)}{q} = \mathrm{o}(1)$ $(x \to +0)$, $\left|\frac{1}{\xi}\varphi_1(x, \xi)\right| =$

$$= \left|\frac{1}{\xi}\left(\frac{v_2{}^2}{q}\xi^2 + \frac{\varphi(x, v_2(1+\xi)) - \varphi(x, v_2)}{q}\right)\right| = \left|\frac{v_2{}^2}{q}\left(\xi + \frac{\varphi_y'\left(x, v_2\left(1 + \tilde{\xi}\right)\right)}{v_2}\right)\right| = \left|\mathrm{o}(1)\left(\xi + \mathrm{o}\left(v_2\left(1 + \tilde{\xi}\right)\right)\right)\right| \leq L_0 < 1,$$

$$\left|\frac{\partial}{\partial \xi}\varphi_1(x, \xi)\right| = \left|2\frac{v_2{}^2}{q}\xi + \frac{\varphi_y'(x, v_2(1+\xi))v_2{}^2}{qv_2}\right| = \left|\mathrm{o}(1)(2\xi + \mathrm{o}(1+\xi))\right| \leq L_1 < 1; \ \tilde{\xi} \in [0, a] \ \ (h,\ a \text{ малы}).$$

С учетом (6) $p_1(+0) = -1$, $q_1(+0) = 0$. Так как при малых x $\operatorname{sgn} v_2 = \operatorname{sgn} q\alpha^{-1}$, то $\operatorname{sgn}\alpha_1 p_1 = \operatorname{sgn} q\alpha^{-1}v_2{}^{-1}p_1 = -1$. По лемме 3 $m(K_2) = 1$.

Теорема 3. *Пусть уравнение* (1) *таково, что* $\exists \lim\limits_{x \to +0} \frac{\alpha p'}{p^2} = \gamma$, $\exists \lim\limits_{x \to +0} \frac{q}{p^2} = c$. *Тогда для выполнения свойства* $K_4 \neq \varnothing$ *н.:* $\gamma \neq \infty$, $c \neq 0, \infty$. *При этом, если* $I_2 = \int\limits_0^a \frac{p}{\alpha} dx \neq \infty$, *то* $K_4 \subset K_{41} = \{y(x) \mid y(x) \sim lp(x), l \neq 0\}$. *Если* $I_2 = \infty$, *то при* $d = (1 - \gamma)^2 - 4c > 0$ $K_4 \subset K_{42} = \left\{y(x) \middle| y(x) \sim lp(x), l = l_{1,2}, l_{1,2} = \left(\gamma - 1 \pm \sqrt{d}\right)/2\right\}$, *причем при* $p > 0$ $(p < 0)$ $m(K_4) = 1$ *для* $l = l_2$ $(l = l_1)$ *и* $m(K_4) = \infty$ *для* $l = l_1$ $(l = l_2)$*; при* $d < 0$ $K_4 = \varnothing$.

Доказательство. Н. Если $y(x) \in K_4 \neq \varnothing$, то $y^2 \dot{\sim} py$, $q \dot{\sim} y^2$, то есть $y(x) \dot{\sim} v_4(x) = p(x)$ $\Rightarrow q \dot{\sim} p^2$, $y(x) = p(x)(l + \xi)$, $\xi(+0) = 0$; $l \neq 0, \infty$ – необходимо найти. Функция ξ удовлетворяет д.у. (5), где $v = v_4$, $p/v_4 \equiv 1$, $\varphi(x, v_4 l)/v_4{}^2 = \mathrm{o}(1)$.

Пусть сначала $\gamma = \infty$. Вынося $\frac{\alpha v'}{v^2}$ за скобки, получаем д.у. (8) вида (2)

$$\xi' = v'/v\left(-l + \mathrm{o}(1) + (-1 + \mathrm{o}(1))\xi + \mathrm{o}(1)\xi^2 + \mathrm{o}\left(\left(l + \xi^*\right)\xi\right)\right), \tag{8}$$

где $v = v_4$, $p_1(+0) = -1$, $q_1(+0) = -l$, $I_1 = \infty$. Применяя лемму 2 к д.у. (8), получаем, что так как $l \neq 0$, то $K(8) = \varnothing$, а значит и $K_4 = \varnothing \Rightarrow$ для $K_4 \neq \varnothing$ н. $\gamma \neq \infty$.

Д. Пусть $\gamma \neq \infty$. Тогда д.у. (5) является д.у. вида (2), где $\alpha_1 = p/\alpha$, $I_1 = I_2$,

$$L_0 = \sup_{\substack{x\in I\\ |\xi|\le h}} \left|\xi + o\left(1+\tilde{\xi}\right)\right| < 1, \left|\frac{\partial}{\partial\xi}\varphi_1(x,\xi)\right| = \left|2\xi + \frac{\varphi'_y\left(x, v_4(l+\xi)\right)}{v_4}\right| = \left|2\xi + o(l+\xi)\right| \le L_1 < 1,$$

$\tilde{\xi} \in (-h,h)$ (*h, a* малы), $q_1(+0) = l^2 + (1-\gamma)l + c$, $p_1(+0) = 1-\gamma+2l$. Если $I_2 \neq \infty$, то по лемме 3 $\exists$ решение д.у. (5) $\xi(x)$, $\xi(+0) \in \mathbf{R} \Rightarrow K_4 \subset K_{41}$. Если $I_2 = \infty$, то для того, чтобы $K(5) \neq \varnothing$ н. $q_1(+0) = 0 \Rightarrow : l_{1,2} = \left(\gamma - 1 \pm \sqrt{d}\right)/2$, $d = (1-\gamma)^2 - 4c \ge 0$, $p_1(+0) = \pm\sqrt{d}$. Поэтому если $d > 0$, то $p_1(+0) \neq 0$ и при достаточно малом x $\operatorname{sgn}\alpha_1 p_1 = \operatorname{sgn} p(-1)^{i-1}$ $(i = 1,2)$. Применяя лемму 3 к д.у. (5), получаем вторую часть утверждения теоремы.

Замечание 1. Если $d = 0$, то $l_1 = l_2 = (\gamma-1)/2$, $p_1(+0) = 0$, и уравнение (5) является д.у. типа (1), т.е. исследование требует повторного применения метода.

Теорема 4. *Пусть уравнение* (1) *таково, что* $\exists \lim\limits_{x\to+0} \frac{\alpha p'}{p^2} = \gamma$, $\exists \lim\limits_{x\to+0} \frac{q}{p^2} = c$.

Тогда для выполнения свойства $K_5 \neq \varnothing$ *н.:* $\gamma \neq \infty$, $c = 0$.

При этом если $I_2 \neq \infty$, *то* $K_5 \subset K_{51} = \left\{y(x) \middle| \, y(x) \sim lp(x),\ l \neq 0\right\}$.

Если $I_2 = \infty$, *то при* $\gamma \neq 1$ $K_5 \subset K_{52} = \left\{y(x) \middle| y(x) \sim (\gamma-1)p(x)\right\}$, *причем при* $p(\gamma-1) > 0$ $m(K_5) = \infty$, *а при* $p(\gamma-1) < 0$ $m(K_5) = 1$; *при* $\gamma = 1$ $K_5 = \varnothing$.

Доказательство. Если $y(x) \in K_5$, то $y^2 \dot{\sim} py$, $q = o\left(y^2\right)$, то есть $y(x) \dot{\sim} v_5(x) = p(x) \Rightarrow q = o\left(p^2\right)$, а условие $c = 0$ является необходимым для $K_5 \neq \varnothing$. Далее доказательство данной теоремы повторяет доказательство теоремы 3 для $c = 0$.

Теорема 5. *Пусть уравнение* (1) *таково, что* $\exists \lim\limits_{x\to+0} \frac{\alpha q'}{|q|^{3/2}} = \gamma^*$, $\exists \lim\limits_{x\to+0} \frac{p}{\sqrt{|q|}} = c^*$.

Тогда для выполнения свойства $K_6 \neq \varnothing$ *н.:* $\gamma^* \neq \infty$, $c^* = 0$.

При этом если $I_3 = \int_0^a \sqrt{|q|}/\alpha dx \neq \infty$, *то* $K_6 \subset K_{61} = \left\{y(x) \middle| \, y(x) \sim l\sqrt{q}, l \neq 0\right\}$.

Если $I_3 = \infty$, *то при* $d^* = {\gamma^*}^2 - 16 \operatorname{sgn} q > 0$

$$K_6 \subset K_{62} = \left\{ y(x) \middle| y(x) \sim l\sqrt{|q|}, l = l_{1,2}, l_{1,2} = \left(\gamma^* \pm \sqrt{d^*}\right)\Big/4\operatorname{sgn} q \right\},$$

причем при $q > 0$ $(q < 0)$ $m(K_6) = 1$ *для* $l = l_2$ $(l = l_1)$ *и* $m(K_6) = \infty$ *для* $l = l_1$ $(l = l_2)$; *при* $d^* < 0$ $K_6 = \varnothing$.

Доказательство. Н. Если $y(x) \in K_6 \neq \varnothing$, то $y^2 \dot{\sim} q$, $p = o(y) \Rightarrow y(x) \dot{\sim} v_6(x) = \sqrt{|q|}$, $p = o\left(\sqrt{|q|}\right)$. Поэтому $c^* = 0$ является н. условием для $K_6 \neq \varnothing$, а $y(x) = \sqrt{|q|}(l+\xi)$, $\xi(+0) = 0$; $l \neq 0$ – необходимо найти. Функция ξ удовлетворяет д. у. (7), где $v = v_6$, $\alpha_1 = \sqrt{|q|}/\alpha$, $I_1 = I_3$, ${v_6}^2/q = \operatorname{sgn} q$, $pv_6/q = o(1)$, $\varphi(x, v_6 l)/q = o(1)$,

$$\frac{\alpha v_6{}'}{q} = \frac{\alpha q'}{2|q|^{3/2}}, \quad \left|\frac{1}{\xi}\varphi_1(x,\xi)\right| = \left|\operatorname{sgn} q\xi + \frac{\varphi'_y\left(x, v_6\left(1+\tilde{\xi}\right)\right)}{v_6}\operatorname{sgn} q\right| = \left|\xi + \mathrm{o}\left(l+\tilde{\xi}\right)\right| \le L_0 < 1,$$

$$\left|\frac{\partial}{\partial\xi}\varphi_1(x,\xi)\right| = \left|2\frac{v_6{}^2}{q}\xi + \frac{\varphi'_y\left(x, v_6(l+\xi)\right)v_6{}^2}{v_6 q}\right| = \left|2\operatorname{sgn} q\xi + \mathrm{o}\left(v_6(l+\xi)\operatorname{sgn} q\right)\right| = \left|2\xi + \mathrm{o}(l+\xi)\right| \le L_1,$$

$L_1 < 1$, $\tilde{\xi} \in (-h,h)$ (*h*, *a* малы). Пусть, сначала, $\gamma^* = \infty$. Вынося $\alpha v'/q$ за скобки, получим д.у. вида (8), где $v = v_6$. По аналогии с доказательством теоремы 3 получаем, что $\gamma^* \ne \infty$ является н. условием для $K_6 \ne \varnothing$.

Д. Пусть $\gamma^* \ne \infty$. Тогда $q_1(+0) = 1 + l^2\operatorname{sgn} q - \dfrac{\gamma^*}{2}l$, $p_1(+0) = 2l\operatorname{sgn} q - \dfrac{\gamma^*}{2}$. Если $I_3 \ne \infty$, то $K_6 \subset K_{61}$. Если $I_3 = \infty$, то по лемме 3 для того, чтобы $K(7) \ne \varnothing$ н. $q_1(+0) = 0 \Rightarrow : l_{1,2} = \left(\gamma^* \pm \sqrt{d^*}\right)\Big/4\operatorname{sgn} q$, $d^* = \gamma^{*2} - 16\operatorname{sgn} q \ge 0$, $p_1(+0) = \pm\sqrt{d^*}$. Поэтому если $d^* > 0$, то $p_1(+0) \ne 0$ и при достаточно малом x $\operatorname{sgn}\alpha_1 p_1 = \operatorname{sgn} q(-1)^{i-1}$ $(i = 1,2)$. Применяя лемму 3 к д.у. (7), получаем вторую часть утверждения теоремы.

Замечание 2. Если $d^* = 0$, то $l_1 = l_2 = \gamma^*/4\operatorname{sgn} q$, $p_1(+0) = 0$, и уравнение (7) является д.у. типа (1), то есть исследование требует повторного применения метода.

Теорема 6. *Пусть уравнение* (1) *таково, что* $\exists \lim\limits_{x\to+0}\dfrac{q}{p^2} = c$, $\exists \lim\limits_{x\to+0}\dfrac{\alpha}{q}\left(\dfrac{q}{p}\right) = k$.

Тогда для выполнения свойства $K_7 \ne \varnothing$ *н.:* $k \ne \infty$, $c = 0$.

При этом, если $I_2 \ne \infty$, *то* $K_7 \subset K_{71} = \{y(x) | \, y(x) \sim l(q/p), l \ne 0\}$.

Если $I_2 = \infty$, *то при* $k \ne 1$ $K_7 \subset K_{72} = \{y(x) | y(x) \sim 1/(k-1)(q/p)\}$, *причем при* $p(k-1) > 0$ $m(K_7) = 1$, *а при* $p(k-1) < 0$ $m(K_7) = \infty$; *при* $k = 1$ $K_7 = \varnothing$.

Доказательство. Н. Если $y(x) \in K_7 \ne \varnothing$, то $py \mathrel{\dot\sim} q$, $y^2 = \mathrm{o}(q) \Rightarrow y(x) \mathrel{\dot\sim} v_7(x) = q/p$, $q = \mathrm{o}(p^2)$. Поэтому $c = 0$ является н. условием для того, чтобы $K_7 \ne \varnothing$, а $y(x) = q/p\,(l+\xi)$, $\xi(+0) = 0$; число $l \ne 0$ – необходимо найти. Функция ξ удовлетворяет д.у. (7), где

$$v = v_7,\ \alpha_1 = p/\alpha,\ I_1 = I_2,\ p v_7/q \equiv 1,\ v_7{}^2/q = \mathrm{o}(1),$$

$$\varphi(x, v_7 l)/q = \mathrm{o}(1),\ \alpha v_7{}'/q = (\alpha/q)(q/p)',$$

$$\left|\frac{1}{\xi}\varphi_1(x,\xi)\right| = \left|\mathrm{o}(1)\left(\xi + \mathrm{o}\left(l+\tilde{\xi}\right)\right)\right| \le L_0 < 1,$$

$$\left|\frac{\partial}{\partial\xi}\varphi_1(x,\xi)\right| = \left|\mathrm{o}(1)\left(2\xi + \mathrm{o}(l+\xi)\right)\right| \le L_1 < 1,\ \tilde{\xi} \in [0,a]\ (h,\ a \text{ малы}).$$

Пусть сначала $k = \infty$. Тогда функция ξ удовлетворяет уравнению вида (8), где $v = v_7$. Так как $K(8) \ne \varnothing$ только при $l = 0$, то при $k = \infty$ $K_7 = \varnothing$, то есть условие $k \ne \infty$ является н. для того, чтобы $K_7 \ne \varnothing$.

Д. Пусть $k \neq \infty$. Тогда $q_1(+0) = 1 + l(1-k)$, $p_1(+0) = 1-k$. Если $I_2 \neq \infty$, то $K_7 \subset K_{71}$. Если $I_2 = \infty$, то по лемме 3 для того чтобы $K(7) \neq \varnothing$ н. $q_1(+0) = 0 \Rightarrow : k \neq 1$, $l = 1/k - 1$, $p_1(+0) \neq 0$, $\operatorname{sgn}\alpha_1 p_1 = \operatorname{sgn}(p/\alpha(1-k)) = \operatorname{sgn}(p(1-k))$ при достаточно малом x. Применяя лемму 3 к д.у. (7), получим: $K_7 \subset K_{72}$, причем $m(K_7) = 1$ если $p(1-k) < 0$ и $m(K_7) = \infty$ если $p(1-k) > 0$. Если $k = 1$, то $K_7 = \varnothing$.

Если $y(x) \in K_3$, то $y(x)$ имеет вид $y(x) = \exp\left(\int\limits_a^x p/\alpha(1 + o(1))dt\right) = \exp\left(\int\limits_a^x p/\alpha dt\right) z(x) =$ $= e(x)z(x)$, где $e(x)z(x) = o(1)$. Условия $p > 0$, $I_2 = \infty$ являются н. для того, чтобы $K_3 \neq \varnothing$. При этом $z(x)$ удовлетворяет уравнению

$$\alpha_2 z' = q_2 + z^2 + \varphi_2(x, z), \qquad (9)$$

где $(x,z) \in \{x \in I, |z(x)| \le b(x), b(x) = e^{-1}(x)b\}$, $\alpha_2 = \alpha e^{-1}(x)$, $q_2(x) = q e^{-2}(x)$, $\varphi_2(x,z) =$ $= e^{-2}(x)\varphi(x, e(x)z) = e^{-2}(x) o(e(x)z)^2 = o(z^2)$.

Лемма 4. *Пусть* $\exists q_2(+0) = \mu$.

Тогда, если $\exists$ *некоторое решение д.у.* (9) $z(x) \in C^1_{I_{a_1}}$, *то*

$$\exists z(+0) = M \in \mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}.$$

Если дополнительно $\exists \lim\limits_{x \to +0} \alpha_2 q_2{}' / |q_2|^{3/2} = \gamma^{**}$, *то* $\exists \lim\limits_{x \to +0} z^2 / |q_2| = l_4$.

Доказательство. Покажем существование предела M. Имеем:

$$f(x,c) = \alpha_2{}^{-1}(q_2 + c^2 + \varphi_2(x,c)) = \alpha_2{}^{-1}(\mu + o(1) + c^2 + o(1)) \in A$$

$\forall c \in \overline{\mathbf{R}}$ за исключением тех c, для которых $\mu + c^2 = 0$ и $\exists \lim\limits_{x \to +0} b(x)$. Применяя лемму 1 к д.у. (9), получаем требуемое.

Для доказательства существования l_4 полагаем $z = \sqrt{|q_2|} z_1$, где z_1 – новая неизвестная функция. Применяя лемму 1 к д.у. относительно z_1, где: $b(x) = |q|^{-1/2} e^2(x) b$,

$$f(x,c) = |q_2|^{1/2} \alpha_2{}^{-1}(\operatorname{sgn} q + c^2 - \gamma^{**} c + o(1)) \in A$$

$\forall c \in \overline{\mathbf{R}}$ за исключением тех c, для которых $\operatorname{sgn} q + c^2 - \gamma^{**} c = 0$, получаем существование l_4.

Дальше считаем, что д.у. (9) удовлетворяет условиям леммы 4. Будем писать: $z(x) \in K(9, M)$, если $z(+0) = M$.

Лемма 5. *Пусть* $M \neq 0, \infty$.

Если $\mu = q_2(+0) = \infty$, *то при* $I_4 = \int\limits_0^a \alpha_2{}^{-1} q_2 dt = \infty$ $(I_4 \neq \infty)$ *соответственно* $K(9, M) = \varnothing$ $(m(K(9, M)) = \infty)$. *Если* $\mu \neq \infty$, *то при* $I_5 = \int\limits_0^a \alpha_2{}^{-1} dt \neq \infty$ $m(K(9, M)) = \infty$, *а при* $I_5 = \infty$ *условия* $M^2 = -\mu$, $\mu < 0$ *являются н. и д. для того, чтобы* $K(9, M) \neq \varnothing$, *причем* $m(K(9, M)) = \infty$.

Доказательство. Исследуем д.у. (9) на предмет существования решений $z(x)=M+\xi(x)$, $\xi(+0)=0$, $M\neq 0,\infty$, $\xi(x)$ удовлетворяет уравнению

$$\xi'=\alpha_2^{-1}\left(q_2+M^2+\varphi_2(x,M)+2M\xi+\xi^2+\varphi_2(x,\xi+M)-\varphi_2(x,M)\right) \qquad (10)$$

Здесь $\varphi_2(x,M)=\varphi(x,Me(x))e^{-2}(x)=\mathrm{o}(M^2e^2(x))e^{-2}(x)=\mathrm{o}(1)$, $\varphi_2(x,\xi+M)-\varphi_2(x,M)=$ $=\varphi_2{}'_z(x,M+\tilde{\xi})\xi=\varphi'_y(x,e(x)(M+\tilde{\xi}))\,e^{-1}\xi=\mathrm{o}(e(x)(M+\tilde{\xi}))e^{-1}(x)\xi=\mathrm{o}(1)\xi$. Пусть, сначала, $\mu=\infty$. Вынося в д.у. (10) q_2 за скобки и пользуясь леммой 2, где $\alpha_1=\alpha_2{}^{-1}q_2$, $B=1$, получим, что при $I_4\neq\infty$ $m(K(10))=\infty$, а при $I_4=\infty$ $K(10)=\varnothing$. Если $\mu\neq\infty$, то д.у. (10) является д.у. вида (2), где $\alpha_1=\alpha_2{}^{-1}$, $q_1(+0)=\mu+M^2$, $p_1(+0)=2M$, $|\varphi_1(x,\xi)/\xi|=|\xi+\mathrm{o}(1)|\leq L_0(a,h)<1$ $(h,a$ малы$)$. По лемме 3 если $I_5\neq\infty$, то $m(K(10))=\infty$, если $I_5=\infty$, то для того, чтобы $K(10)\neq\varnothing$ н. и д.: $M^2=-\mu$, $\mu<0$. Так как $\alpha_2>0$, то $m(K(10))=\infty$. В результате получаем утверждение леммы.

Пусть $M=0,\infty$. Имеет место разбиение множества $K(9,M)$ на классы $K(9,M)=\bigcup_{i=1}^{3}K_{iM}$: $z(x)\in K_{1M}$, если $q_2=\mathrm{o}(z^2)$; $z(x)\in K_{2M}$, если $z^2=\mathrm{o}(q_2)$; $z(x)\in K_{3M}$, если $q_2\dot{\sim} z^2$. Введем множества $\tilde{K}_{iM}=\{z(x)|\,z(x)\in K_{iM},\,e(x)z(x)=\mathrm{o}(1)\}$ $(i=1,2,3)$ и положим $a_{10}=a,\ a_{1\infty}=0,\ a_{20}=0,\ a_{2\infty}=a$. Имеет место лемма

Лемма 6. *Пусть* $M=0(M=\infty)$. *Тогда* $\tilde{K}_{iM}=\{z(x)|z(x)\sim l_{iM}v_{iM}(x)\}$ $(i=1,2,3)$. *При этом:*

1) $v_{1M}(x)=-\left(\int\limits_{a_{1M}}^{x}\alpha_2{}^{-1}dt\right)^{-1}$, $l_{1M}=1$ *и для того чтобы* $\tilde{K}_{1M}\neq\varnothing$ *н. и д.:* $q_2=\mathrm{o}((v_{1M})^2)$,

а также $I_5=\infty$ *если* $M=0$ *и* $I_5\neq\infty$, $ev_{1M}=\mathrm{o}(1)$ *если* $M=\infty$; *причем если* $\tilde{K}_{1M}\neq\varnothing$, *то* $m(\tilde{K}_{1M})=\infty(=1)$.

2) $v_{2M}(x)=\int\limits_{a_{2M}}^{x}\alpha_2{}^{-1}q_2dt$, $l_{2M}=1$ *и для того чтобы* $\tilde{K}_{2M}\neq\varnothing$ *н. и д.:* $(v_{2M})^2=\mathrm{o}(q_2)$,

а также $I_4\neq\infty$ *если* $M=0$ *и* $I_4=\infty$, $ev_{2M}=\mathrm{o}(1)$ *если* $M=\infty$; *причем если* $\tilde{K}_{2M}\neq\varnothing$, *то* $m(\tilde{K}_{2M})=1(=\infty)$.

3) $v_{3M}(x)=\sqrt{|q_2|}$ *и для того чтобы* $\tilde{K}_{3M}\neq\varnothing$ *н.:* $\mu=M$, $\gamma^{**}\neq\infty$. *При этом если* $\int\limits_0^a\alpha_2{}^{-1}v_{3M}dx=I_3{}^*\neq\infty$, *то* $l_{3M}\in\mathbf{R}-\{0\}$, $m(\tilde{K}_{3M})=\infty$, *если* $I_3{}^*=\infty$, *то при* $d^{**}=\gamma^{**2}-16\operatorname{sgn}q_2>0$ $l_{3M}=\left(\gamma^{**}\pm\sqrt{d^{**}}\right)/4\operatorname{sgn}q_2$, $m(\tilde{K}_{3M})=1$; *при* $d^{**}<0$ $\tilde{K}_{3M}=\varnothing$.

Доказательство. Решение д.у. (9) ищем в виде $z(x)=v(x)(l+\xi(x))$, где $v(+0)=0(=\infty)$, $\xi(+0)=0$, $l\in\mathbf{R}-\{0\}$. Если $z(x)\in K_{1M}$, то по аналогии со случаем K_1 находим: $v(x)=v_{1M}(x)$, $l_{1M}=1$ и необходимо: $I_5=\infty$ для $M=0$, $I_5\neq\infty$ для $M=\infty$. Функция ξ удовлетворяет д.у. (5) где $\alpha=\alpha_2{}^{-1}$, $q=q_2$, $p\equiv 0$, $\varphi=\varphi_2$. Это д.у.

является д.у. вида (2), в котором функции α_1, p_1, q_1, φ_1 сохраняют те же свойства что и для класса K_1, с той лишь разницей, что $\alpha_1 p_1 < 0$ при $M = \infty$. Если $z(x) \in K_{2M}$, то $v(x) = v_{2M}(x)$, $l_{2M} = 1$ и необходимо: $I_4 \neq \infty$ для $M = 0$, $I_4 = \infty$ для $M = \infty$. Функция ξ удовлетворяет д.у. (7) где $\alpha = \alpha_2^{-1}$, $q = q_2$, $p \equiv 0$, $\varphi = \varphi_2$. Это д.у. является д.у. вида (2), в котором функции α_1, p_1, q_1, φ_1 сохраняют те же свойства что и для класса K_2, с той лишь разницей, что $\alpha_1 p_1 > 0$ при $M = \infty$. Если $z(x) \in K_{3M}$, то $v(x) = v_{3M}(x)$ и необходимо $\mu = M$. Дальше используем схему исследования K_6. Заметим: $\widetilde{K}_{i0} = K_{i0}$ $(i = 1,2,3)$, $\widetilde{K}_{3\infty} = K_{3\infty}$, $\widetilde{K}_{i\infty} = K_{i\infty}$ $(i = 1,2)$ лишь при дополнительном условии $e(x) v_{i\infty}(x) = o(1)$. Учитывая это и пользуясь результатами теорем 1,2,5, получаем н. и д. условия для $\widetilde{K}_{iM} \neq \varnothing$ $(i = 1,2,3)$.

Замечание 3. Если $d^{**} = 0$, то для $\widetilde{K}_{3M}$ метод применяется повторно.

Если обозначить $K_{31} = K(9, M)$, $M \neq 0, \infty$, то имеет место разбиение $K_3 = K_{31} \cup \sum\limits_{i=1}^{3} \widetilde{K}_{i0} \cup \sum\limits_{i=1}^{3} \widetilde{K}_{i\infty}$, а значит верна теорема

Теорема 7. $K_3 \neq \varnothing \iff K_{31} \cup \sum\limits_{i=1}^{3} \widetilde{K}_{i0} \cup \sum\limits_{i=1}^{3} \widetilde{K}_{i\infty} \neq \varnothing$.

Выводы. Если уравнение (1) удовлетворяет условиям теоремы А, то предложенный метод сводит вопрос существования о-решений уравнения (1) к вопросу существования решений классов $K_1 - K_7$. Для классов K_1, K_2, K_5, K_7 получены необходимые и достаточные условия непустоты каждого из этих классов. Для классов K_3, K_4, K_6 получены достаточные условия непустоты этих классов, близкие к необходимым. Особые случаи могут быть исследованы повторным применением теорем 1–7.

1. **Костин А. В.** О поведении при $x \to +\infty$ решений обыкновенных дифференциальных и алгебраических уравнений с монотонными коэффициентами // Дифференц. уравнения.– 1967.– Т. 3, № 2.– С. 200–218.
2. **Костин А. В.** Об асимптотических свойствах решений обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка // Дифференц. уравнения.– 1968.– Т. 4, № 7.– С. 1184–1195.
3. **Немыцкий В. В., Степанов В. В.** Качественная теория дифференциальных уравнений.– М.: Гостехиздат, 1949.– 551 с.
4. **Куклес И. С.** О трех проблемах различения // Докл. АН СССР.– 1959.– Т. 128, № 2.– С. 239–242.
5. **Куклес И. С.** О трех проблемах различения // УМН.– 1959.– Т. 14, № 5.– С. 149–152.
6. **Андреев А. Ф.** Теорема единственности для нормальной области Фроммера второго типа // Докл. АН СССР.– 1962.– Т. 142, № 4.– С. 754–757.
7. **Андреев А. Ф.** Усиление теоремы единственности о-кривой в N_2 // Докл. АН СССР.– 1962.– Т. 146, № 1.– С. 9–10.
8. **Хартман Ф.** Обыкновенные дифференциальные уравнения.– М.: Мир, 1970.– 720 с.
9. **Костин А. В.** Устойчивость и асимптотика квазилинейных неавтономных дифференциальных систем: Учебное пособие.– Одесса: Изд-во ОГУ, 1984.– 95 с.

Получено 01.11.2002 г.