

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ОДЕСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ І. І. МЕЧНИКОВА

ЖУРАВЛЬОВА ЗІНАЇДА ЮРІЇВНА



УДК 539.3

ПЛОСКІ МІШАНІ ЗАДАЧІ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ
ДЛЯ ПІВНЕСКІНЧЕНОЇ СМУГИ

01.02.04 – механіка деформівного твердого тіла

Автореферат

дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Одеса – 2018

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана в Одеському національному університеті імені І. І. Мечникова
Міністерства освіти і науки України

Науковий керівник: доктор фізико-математичних наук, професор
Вайсфельд Наталя Данилівна,
Одеський національний університет імені І. І. Мечникова,
завідувач кафедри методів математичної фізики.

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук, старший науковий
співробітник
Токовий Юрій Владиславович,
Інститут прикладних проблем механіки і математики
імені Я. С. Підстригача НАН України,
провідний науковий співробітник відділу механіки
деформівного твердого тіла

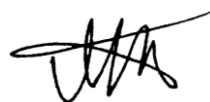
доктор фізико-математичних наук, доцент
Шевельова Алла Євгенівна,
Дніпровський національний університет
імені Олеся Гончара,
професор кафедри обчислювальної математики та
математичної кібернетики

Захист відбудеться «8» червня 2018 р. о 15⁰⁰ годині на засіданні спеціалізованої вченої ради К 41.051.05 у Одеському національному університеті імені І. І. Мечникова за адресою: м. Одеса, вул. Дворянська, 2, аудиторія 73.

З дисертацією можна ознайомитись у Науковій бібліотеці Одеського національного університету імені І. І. Мечникова за адресою: 65082, м. Одеса, вул. Преображенська, 24.

Автореферат розісланий « » травня 2018 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради,
кандидат фіз.-мат. наук, доцент



М. О. Білозерова

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Мішані задачі теорії пружності займають важливе місце в механіці деформівного твердого тіла, що пов'язано з їх роллю при моделюванні різноманітних інженерних задач. Основні підходи до аналітичного розв'язання такого роду задач засновані на зображенні розв'язків рівнянь рівноваги через допоміжні функції (гармонічні, бігармонічні тощо). Головна незручність цих підходів полягає в тому, що для отримання виразів реальних механічних характеристик потрібно виконати додаткові операції, які часто є досить нетривіальними.

Запропонований у роботі підхід використовує безпосередні інтегральні перетворення рівнянь рівноваги. Це надає можливість побудувати у просторі трансформант аналітичний розв'язок відповідної векторної крайової задачі відносно шуканих трансформант переміщень. Для спрощення розрахунків побудовано матрицю-функцію Гріна, яку подано у вигляді білінійного розвинення. Цей підхід продемонстровано на розв'язанні мішаних задач теорії пружності для півсмуги, яка є модельним об'єктом для виявлення закономірностей напружено-деформованого стану пружних тіл.

Як свідчить аналіз літератури, у дослідженні плоских мішаних задач пружності існують невирішені проблеми, що потребують розвитку аналітичних методів їх розв'язання, які б дозволили спростити побудову розв'язку та виявити загальну якісну картину напруженого стану півсмуги.

Цим обґрунтовано актуальність розробки нової методики аналітичного розв'язання плоских мішаних задач теорії пружності для півсмуги.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційна робота виконана в рамках держбюджетних тем Одеського національного університету імені І. І. Мечникова «Розробка метода дослідження напруженого стану тіл з дефектами під час статичного та ударного навантаження» (2013–2017 рр., реєстраційний номер 0113U005186), «Чисельно-аналітичне розв'язання просторових контактних задач для пружних основ з функціонально-градієнтних матеріалів» (2015-2017 рр., реєстраційний номер 0115U003211).

Мета і задачі дослідження. Метою даної роботи є встановлення закономірностей напружено-деформованого стану півсмуги в залежності від крайових умов по торцях та наявності дефекту усередині півсмуги.

Досягнення поставленої мети передбачає виконання наступних завдань:

- 1) розвиток методики розв'язання плоских задач для півсмуги, яка базується на безпосередніх перетвореннях рівнянь рівноваги, що дозволить відразу

отримати розв'язок поставленої задачі для реальних механічних характеристик;

- 2) побудові аналітичного розв'язку задачі для пружної півсмуги під дією зовнішнього навантаження різної конфігурації шляхом зведення вихідної задачі до одновимірної крайової задачі та її розв'язання за допомогою апарату матричної функції Гріна; встановлення кількісних та якісних закономірностей полів переміщень та напружень;
- 3) розв'язання плоскої мішаної задачі для пружної півсмуги, яка послаблена трансверсальною тріщиною.

Об'єктом дослідження є півнескінченна пружна смуга під впливом зовнішнього навантаження різної конфігурації.

Предметом дослідження є напружено-деформований стан півсмуги в залежності від конфігурації навантажень та впливу тріщини усередині півсмуги.

Методи дослідження. У дисертаційній роботі мішані задачі теорії пружності для півсмуги розв'язано за допомогою методу інтегральних перетворень, який застосований безпосередньо до рівнянь рівноваги. Це зводить вихідну задачу до одновимірної крайової задачі у просторі трансформант відносно невідомих трансформант переміщень. Задачу розв'язано за допомогою апарату матричного диференціального числення та використання матриці-функції Гріна. Це зводить задачу до одного сингулярного інтегрального рівняння у випадку відсутності тріщини у півсмузі. Для його розв'язання застосовано спеціальний аналітично-числовий метод, що дозволяє врахувати рухомі та нерухомі особливості у ядрі інтегрального рівняння.

Обґрунтованість та достовірність отриманих результатів забезпечується: коректністю та строгістю математичних постановок задач в рамках лінійної механіки суцільного тіла та механіки руйнування; використанням для побудови розв'язків сформульованих задач апробованих строгих аналітичних методів; фізичною інтерпретацією результатів розрахунків задач. Отримані результати узгоджуються з відомими у літературі результатами теоретичних досліджень.

Наукова новизна отриманих результатів полягає в наступному:

- вперше застосовано методику розв'язання мішаних плоских задач теорії пружності для півсмуги, яка базується на безпосередньому перетворенні рівнянь рівноваги. Ця методика дозволяє отримати відразу аналітичні подання шуканих механічних характеристик;

- за допомогою побудови матриці-функції Гріна у білінійному поданні та застосуванню методу матричного диференціального числення побудовано аналітичні розв'язки мішаних плоских задач, що у випадку відсутності тріщини

зведено до одного сингулярного інтегрального рівняння відносно невідомого стрибка переміщень. Встановлено особливості залежності полів переміщень та напружень від параметрів ділянки навантажень по короткому торцю півсмуги;

- за допомогою запропонованої методики отримано ефективний наближений розв'язок задачі для пружної півсмуги, яка послаблена трансверсальною тріщиною.

Теоретичне і практичне значення одержаних результатів. Запропонована методика побудови розв'язків мішаних задач теорії пружності для півнескінченної смуги має теоретичну цінність для розвитку математичного апарату розв'язання плоских задач теорії пружності. Результати використані як складові частини курсів «Теорія пружності» та «Додаткові глави методів математичної фізики», застосовані при написанні магістерських і дипломних робіт студентами спеціальності «Прикладна математика». Отримані результати також можуть бути використані у геомеханіці, будівництві конструкцій, дослідженні міцності елементів транспортних засобів та визначенні їх безпечності тощо.

Особистий внесок здобувача. Основні результати дисертаційної роботи отримано здобувачем самостійно. У роботах у співавторстві [2, 3, 4, 5, 10, 12, 13, 14, 18, 22] науковому керівнику належить постановка задач, вибір методики їх розв'язання, а у роботах у співавторстві [6, 15, 20] співавторам належить методика розв'язання сингулярного інтегрального рівняння. Дисертантом проведено огляд літератури, виконано усі математичні перетворення при побудові розв'язків, здійснено програмну реалізацію та проведено аналіз отриманих результатів.

Апробація результатів дисертації. Результати досліджень, що увійшли до дисертаційної роботи, доповідались і обговорювались на міжнародних наукових конференціях різного рівня: конференції молодих вчених «Современные проблемы математики и её приложения в естественных науках и информационных технологиях» (Харків, 2013, 2014), конференції студентів та молодих вчених «Theoretical and Applied Aspects of Cybernetics» (Київ, 2013), «Математичні проблеми механіки неоднорідних структур» (Львів, 2014), «17-th international conference on theoretical and computation mechanics» (Стамбул, Турція, 2015), «Сучасні проблеми механіки» (Київ, 2015), «International conference on multiaxial fatigue & fracture» (Севілья, Іспанія, 2016), «Сучасні проблеми термомеханіки» (Львів, 2016), «14th International Conference on Fracture (ICF 14)» (Родос, Греція, 2017), «Проблемы безопасности на транспорте» (Гомель, Білорусь, 2017); Всеукраїнській науково-практичній конференції «Інформатика та системні науки (ІСН-2016)» (Полтава, 2016), Республіканській конференції студентів та аспірантів «Новые математические методы и компьютерные технологии в проектировании, производстве и научных исследованиях» (Гомель, Білорусь, 2016), «Інформатика,

математика, автоматика 2016» (Суми, 2016), конференції молодих математиків присвяченій 100-річчю з дня народження академіка НАН України Ю. О. Митропольського (Київ, 2017). Автор прийняв у конкурсі аспірантів «John E Smith Maths Prize», де йому було присуджене третє місце (Бірінгем, Великобританія, 2016). У повному обсязі робота доповідалась на

- науковому семінарі «Математичні проблеми механіки» кафедри теоретичної і прикладної механіки Дніпровського національного університету імені О. Гончара під керівництвом д.ф.-м.н., проф. В. В. Лободи;
- науковому семінарі «Обчислювальна механіка деформівних систем» відділу термомеханіки Інституту прикладних проблем механіки і математики імені Я. С. Підстригача НАН України під керівництвом член.-кор. НАН України, д.ф.-м.н, проф. Г. С. Кита і д.ф.-м.н, проф. В. В. Міхаськіва;
- науковому семінарі «Математичні проблеми механіки» кафедри методів математичної фізики Одеського національного університету імені І. І. Мечникова під керівництвом д.ф.-м.н., проф. Н. Д. Вайсфельд.

Публікації. Основні наукові положення дисертаційного дослідження відображено у 22 публікаціях, з яких: три наукові статті [1, 2, 4] опубліковано у провідних фахових виданнях України, що входять до переліку ДАК України, статті [3, 4, 6, 8] прореферовано у міжнародній наукометричній базі Scopus, дві статті опубліковано у зарубіжних виданнях [5, 6], також надруковано матеріали чотирнадцяти міжнародних наукових конференцій різного рівня [9-22].

Структура і обсяг дисертації. Робота складається зі вступу, 5 розділів, висновків, списку використаної літератури, що включає 173 найменування. Загальний обсяг дисертації становить 160 сторінок, із них 119 сторінок основного тексту. Робота містить 68 рисунків та 1 таблицю.

Подяка. Автор висловлює глибоку подяку своєму першому вчителю професору Г. Я. Попову, який сприяв виникненню його інтересу до математичних проблем механіки та визначив напрям наукових досліджень.

Дисертант висловлює щиру вдячність кандидату фізико-математичних наук, доценту В. В. Реуту за цінні наукові поради, що допомогли успішному проведенню досліджень.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У **вступі** обґрунтовано актуальність теми дисертаційної роботи, її зв'язок з науковими програмами; сформульовано мету та завдання дослідження; вказано методи розв'язання поставлених задач; висвітлено новизну і достовірність

одержаних результатів, їх практичне значення; надано відомості про апробацію роботи, публікації та особистий внесок в них здобувача.

У **першому розділі** проведено огляд наукових робіт за темою дослідження.

Проаналізовано загальні підходи до розв'язання мішаних задач теорії пружності, які містяться в основних класичних монографіях В. М. Александрова, В. А. Бабешка, В. М. Вігака, І. І. Воровіча, О. М. Гузя, М. Д. Коваленка, В. Новацького, Г. Я. Попова, А. Ф. Улітка, Я. С. Уфлянда, R. D. Gregory, W. T. Koiter, P. P. Teodorescu. У подальшому ці методи вдосконалено та розвинуто при розв'язанні плоских задач для термopужної півсмуги у працях В. Т. Грінченка, Я. О. Жука, Г. С. Кіта, Ю. М. Коляна, Р. М. Кушніра, В. В. Мелешка, Я. С. Підстригача, Ю. В. Токового, Л. А. Фільштінського, P. Thecaris. Розв'язання задачі для півсмуги значно ускладнюється, якщо вона має дефекти типу тріщини та жорстких включень. Значний внесок у подолання труднощів розв'язання у цьому випадку внесено розробками Ю. О. Антипова, Н. Д. Вайсфельд, О. Ф. Кривого, В. В. Лободи, М. Г. Моїсеєва, В. В. Михаськіва, О. Г. Ніколаєва, В. І. Острика, Д. А. Пожарського, Л. І. Слепяна, Б. І. Сметаніна, В. В. Реута, К. Б. Устинова, А. Є. Шевельової, М. В. Хая, J. D. Karlunov. Сингулярні інтегральні рівняння, що виникають під час розв'язання, потребують дослідження характеру особливостей розв'язку. Нові методи, що дозволяють врахувати нерухомі особливості ядер, розроблено Р. В. Дудучавою, М. Г. Крейном, О. В. Манжиров, О. В. Оніщуком, В. Г. Поповим, М. П. Савруком, Н. F. Bueekner, N. S. Gabbasov.

У цьому розділі проаналізовано місце досліджень автора у розв'язанні визначених у роботі задач.

У **другому розділі** викладено теоретичні засади, на яких базується розв'язання поставлених у роботі задач теорії пружності для півсмуги.

У *підрозділі 2.1* сформульовано загальну постановку плоских мішаних задач теорії пружності для півнескінченної смуги. По короткому торцю півсмуги $0 < x < a, 0 < y < \infty$ додано нормальне навантаження $p(x)$, по півнескінчених бокових гранях задано або умови зчеплення, або зчеплення / ідеального контакту, або зчеплення / першої основної задачі теорії пружності.

Потрібно визначити напружений стан півсмуги за умови виконання наступних рівнянь рівноваги та крайових умов

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} + \frac{2}{\kappa + 1} \frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial x \partial y} + \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} X_1(x, y) = 0, \\ \frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\kappa + 1}{\kappa - 1} \frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial y^2} + \frac{2}{\kappa - 1} \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x \partial y} + X_2(x, y) = 0, \\ \sigma_y|_{y=0} = p(x), \quad \tau_{xy}|_{y=0} = 0, \quad 0 < x < a, \\ U_0[f] = 0, \quad U_1[f] = 0, \quad 0 < y < \infty, \end{array} \right. \quad (1)$$

де $u(x, y) = u_x(x, y)$, $v(x, y) = u_y(x, y)$ - шукані переміщення, $X_1(x, y) = X_x(x, y)$, $X_2(x, y) = X_y(x, y)$ - компоненти об'ємних сил, $\kappa = 3 - 4\mu$ - стала Мусхелішвілі, μ - коефіцієнт Пуассона, $U_i[f(x)], i = 0, 1$ є скорочений запис крайових умов по торцях $x = 0, x = a$, що буде деталізовано у кожному окремому випадку.

Шляхом застосування до задачі (1) інтегрального півнескінченного $\sin$ - $\cos$ перетворення Фур'є за змінною y , її зведено до одновимірної крайової задачі у просторі трансформант. У підрозділі 2.2 цю задачу переформульовано у вигляді векторної одновимірної крайової задачі

$$\left\{ \begin{array}{l} L_2 \vec{y}_\beta(x) = \vec{f}(x), \\ U_i[\vec{y}_\beta] = 0, i = 0, 1, \end{array} \right. \quad (2)$$

де L_2 являє собою диференціальний оператор другого порядку, $L_2 \vec{y}_\beta(x) = I \vec{y}_\beta''(x) + 2\beta Q \vec{y}_\beta'(x) - \beta^2 P \vec{y}_\beta(x)$, β - параметр перетворення Фур'є,

$\vec{y}_\beta(x) = \begin{pmatrix} u_\beta(x) \\ v_\beta(x) \end{pmatrix}$ - невідомий вектор трансформант функцій переміщень,

$\vec{f}(x) = \begin{pmatrix} \frac{3-\kappa}{\kappa+1} \chi'(x) - \frac{\kappa-1}{\kappa+1} X_{1\beta}(x) \\ -\beta \frac{\kappa+1}{\kappa-1} \chi(x) - X_{2\beta}(x) \end{pmatrix}$, $\chi(x) = v(x, y)|_{y=0}$ - невідома функція. Матриці у

диференціальному операторі L_2 позначено $P = \begin{pmatrix} \frac{\kappa-1}{\kappa+1} & 0 \\ 0 & \frac{\kappa+1}{\kappa-1} \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\kappa+1} \\ -\frac{1}{\kappa-1} & 0 \end{pmatrix}$, I -

одинична матриця.

Розв'язок задачі (2) подано за відомою формулою

$$\vec{y}_\beta(x) = Y_1(x) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + Y_2(x) \begin{pmatrix} c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} + \vec{y}_\beta^1(x); \quad (3)$$

тут $Y_i(x), i=1,2$ - система фундаментальних матричних розв'язків відповідного однорідного матричного рівняння (2), що побудовано у *підрозділі 2.3*, сталі $c_i, i=\overline{1,4}$ знайдено з граничних умов на бічних гранях півсмути $U_i[\bar{y}_\beta]=0, i=0,1$, $\bar{y}_\beta^1(x)$ - частковий розв'язок векторного рівняння (2), що знайдено у *підрозділі 2.4* за допомогою матриці-функції Гріна. Останню побудовано методом матричних інтегральних перетворень у вигляді білінійного розвинення

$$G(x, \xi) = \frac{2}{a} \sum_{n=0}^{\infty} H(x, \alpha_n) \Omega_\beta^{-1}(\alpha_n) H(\xi, \alpha_n),$$

де $H(x, \alpha_n) = \begin{pmatrix} \sin \alpha_n x & 0 \\ 0 & \cos \alpha_n x \end{pmatrix}$, $\Omega_\beta^{-1}(\alpha_n)$ - матриця, обернена до матриці

$$\Omega_\beta(\alpha_n) = \begin{pmatrix} -\alpha_n^2 - \beta^2 \frac{\kappa-1}{\kappa+1} & -\frac{2\beta\alpha_n}{\kappa+1} \\ -\frac{2\beta\alpha_n}{\kappa-1} & -\alpha_n^2 - \beta^2 \frac{\kappa+1}{\kappa-1} \end{pmatrix}, \quad \alpha_n = \frac{n\pi}{a}, n=0,1,2,\dots, \text{ тут штрих означає,}$$

що нульовий член помножується на $1/2$.

Тоді загальний розв'язок задачі (3) переписано у наступному поданні

$$\bar{y}_\beta(x) = Y_1(x) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + Y_2(x) \begin{pmatrix} c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} + \int_0^a G(x, \xi) \bar{f}(\xi) d\xi.$$

У *підрозділі 2.5* проведено обернення отриманих трансформант функцій переміщень та підсумовування слабко-збіжних інтегралів, що входять до їх подання.

В залежності від умов по короткому торцю розв'язання задачі (1) зводиться до розв'язання сингулярного інтегро-диференціального рівняння (СІДР) або сингулярного інтегрального рівняння (СІР) з однією чи двома нерухомими особливостями, що наведено у *підрозділі 2.6*.

СІДР має наступний вигляд

$$\frac{d^2}{dx^2} \int_{-1}^1 \chi(\xi) \ln \frac{1}{|\xi-x|} d\xi + \int_{-1}^1 \chi(\xi) K_1(\xi, x) d\xi = r_1(x), \quad -1 < x < 1. \quad (4)$$

Воно розв'язано методом ортогональних поліномів (тут $\chi(\xi)$ - невідома функція переміщень по короткому торцю, $K_1(\xi, x), r_1(x)$ - відомі неперервні функції).

За схемою ортогональних поліномів невідому функцію побудовано у вигляді розвинення за поліномами Чебишова другого роду

$$\chi(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} s_n \sqrt{1-\xi^2} U_n(\xi), \quad \xi \in [-1; 1].$$

Таким чином, задачу зведено до розв'язання нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь.

СІР з однією нерухомою особливістю має подання

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\mathcal{G}(\xi)}{\xi - x} d\xi + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \mathcal{G}(\xi) \left[\frac{h_1}{\xi + x + 2} + \frac{h_2 (x+1)}{(\xi + x + 2)^2} + \frac{h_3 (\xi+1)(x+1)}{(\xi + x + 2)^3} \right] d\xi + \\ & + \int_{-1}^1 \mathcal{G}(\xi) K_2(x, \xi) d\xi = r_2(x), \quad -1 < x < 1, \end{aligned} \quad (5)$$

де $h_1 = -\frac{\kappa^2 - 3}{2\kappa}$, $h_2 = -\frac{2}{\kappa}$, $h_3 = \frac{4}{\kappa}$, $K_2(x, \xi), r_2(x)$ – відомі регулярні функції, $\mathcal{G}(\xi)$ є невідома функція похідної переміщень, яка для існування єдиного розв'язку рівняння (5) в класі функцій з інтегрованою особливістю на кінцях повинна задовольняти додаткову умову

$$\int_{-1}^1 \tilde{\chi}(\xi) d\xi = 0 \quad (6)$$

У даному випадку використано наступне зображення невідомої функції

$$\mathcal{G}(\xi) = \sum_{k=0}^{N-1} \left[s_k \rho_k^-(\xi) + s_{k+N} \frac{T_k(\xi)}{\sqrt{1-\xi}} \right], \quad \xi \in [-1; 1]$$

тут $T_k(x)$ – поліноми Чебишова першого роду, $\rho_{2k}^\mp(\xi) = (1 \pm \xi)^{\operatorname{Re} \lambda_k} \cdot \cos(\operatorname{Im} \lambda_k \ln(1 \pm \xi))$, $\rho_{2k+1}^\mp(\xi) = (1 \pm \xi)^{\operatorname{Re} \lambda_k} \cdot \sin(\operatorname{Im} \lambda_k \ln(1 \pm \xi))$, $k = \overline{0, N-1}$, де λ_k – корені побудованого трансцендентного рівняння для (5)

$$\cos(\lambda\pi) + \frac{2}{3-4\mu} \lambda^2 - \frac{4}{3-4\mu} \lambda - \frac{8\mu^2 - 12\mu + 3}{3-4\mu} = 0 \quad (7)$$

Рівняння (7) співпадає з відомим трансцендентним рівнянням, що отримано, наприклад, у монографії Я. С. Уфлянда.

СІР з двома нерухомими особливостями має наступне зображення

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\mathcal{G}(\xi)}{\xi - x} d\xi + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \mathcal{G}(\xi) \left[h_1 \left(\frac{1}{\xi + x - 2} + \frac{1}{\xi + x + 2} \right) + \right. \\ & + h_2 \left(\frac{x-1}{(\xi + x - 2)^2} + \frac{x+1}{(\xi + x + 2)^2} \right) + h_3 \left(\frac{(\xi-1)(x-1)}{(\xi + x - 2)^3} + \frac{(\xi+1)(x+1)}{(\xi + x + 2)^3} \right) \left. \right] d\xi + \\ & + \int_{-1}^1 \mathcal{G}(\xi) K_3(x, \xi) d\xi = r_3(x), \quad -1 < x < 1, \end{aligned} \quad (8)$$

де $K_3(x, \xi), r_3(x)$ – відомі регулярні функції. Для зведення СІР (8) до системи лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих сталих $s_k, k = \overline{0, 2N-1}$ використано зображення

$$\mathcal{G}(\xi) = \sum_{k=0}^{N-1} [s_k \rho_k^-(\xi) + s_{k+N} \rho_k^+(\xi)], \quad \xi \in [-1; 1]$$

Знаходження сталих $s_k, k = \overline{0, 2N-1}$ завершує побудову розв'язку задачі (1).

У **третьому розділі** методику, що викладено у розділі 2, деталізовано для півнескінченної смуги у різних випадках конфігурації навантаження по короткому торцю:

випадок А: механічне навантаження задано на середині торця (рис. 1а)

$$\begin{aligned} \sigma_y|_{y=0} &= p(x), & \tau_{xy}|_{y=0} &= 0, & a_0 < x < a_1 \\ v|_{y=0} &= 0, & \tau_{xy}|_{y=0} &= 0, & 0 < x < a_0, a_1 < x < a; \end{aligned}$$

випадок В: механічне навантаження діє з краю (рис. 1б)

$$\begin{aligned} \sigma_y|_{y=0} &= p(x), & \tau_{xy}|_{y=0} &= 0, & 0 < x < a_1 \\ v|_{y=0} &= 0, & \tau_{xy}|_{y=0} &= 0, & a_1 < x < a; \end{aligned}$$

випадок С: механічне навантаження задано по всьому торцю (рис. 1с)

$$\sigma_y|_{y=0} = p(x), \quad \tau_{xy}|_{y=0} = 0, \quad 0 < x < a.$$

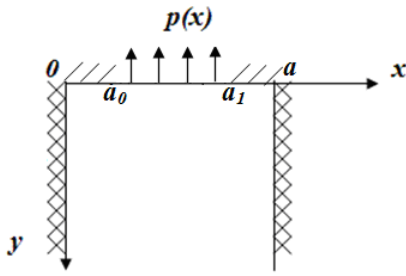


Рис. 1а

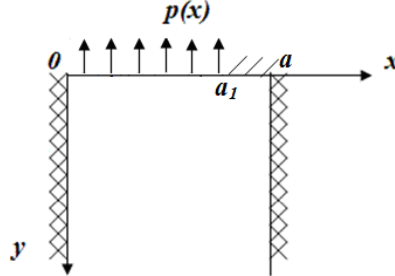


Рис. 1б

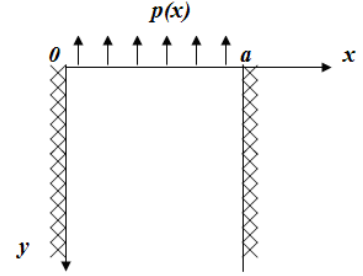


Рис. 1с

Розв'язок крайової задачі у випадку А після заміни змінних зведено до розв'язання СІДР (4). У випадку В задачу зведено до розв'язання СІР з однією нерухомою особливістю (5). На відміну від попередніх, у випадку С задачу зведено до розв'язання СІР з двома нерухомими особливостями (8).

Для півсмуги з параметрами $G = 61.2781955 \cdot 10^9$ Па, $\mu = 0.33$, $p(x) = 1$ Па, $a = 10$ м проаналізовано значення нормальних напружень на бічних гранях півсмуги при $0 \leq y \leq 10$ в залежності від розміру та розташування області прикладення механічного навантаження по короткому торцю. Позначимо через ϖ довжину зон ідеального контакту по короткому торцю.

На рис. 2, 3 і далі суцільна, штрих-пунктирна та пунктирна лінії описують відповідно значення $\varpi = 40\%a$, $\varpi = 10\%a$ та $\varpi = 0.5\%a$.

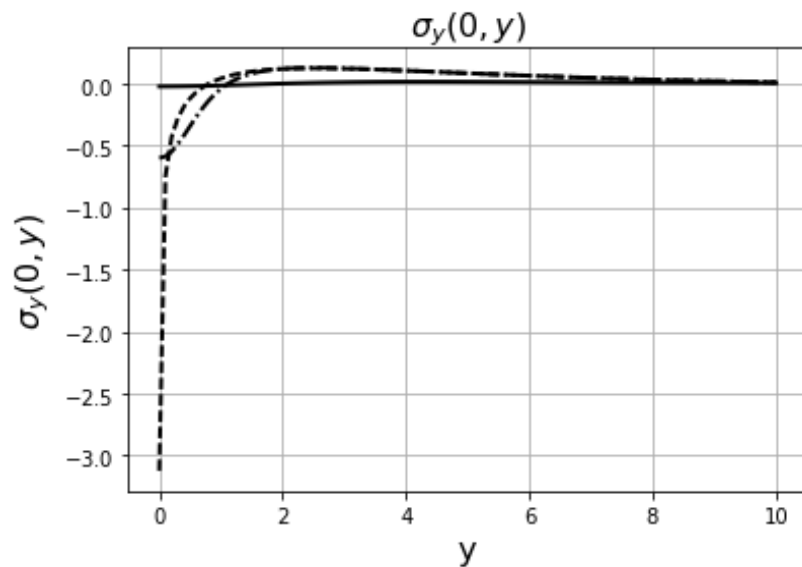


Рис. 2

Обидві бічні грані знаходяться в умовах зчеплення. Для випадку А (рис. 2) абсолютні значення нормальних напружень збільшуються зі збільшенням розміру зони прикладеного навантаження. При значенні параметру $\varpi < 0.5\%a$ розрахунки перестають бути стабільними у зв'язку з тим, що починається вплив нерухомих особливостей ядра рівняння. Щоб наблизити розрахунки до бічних граней виникає необхідність враховувати нерухомі особливості.

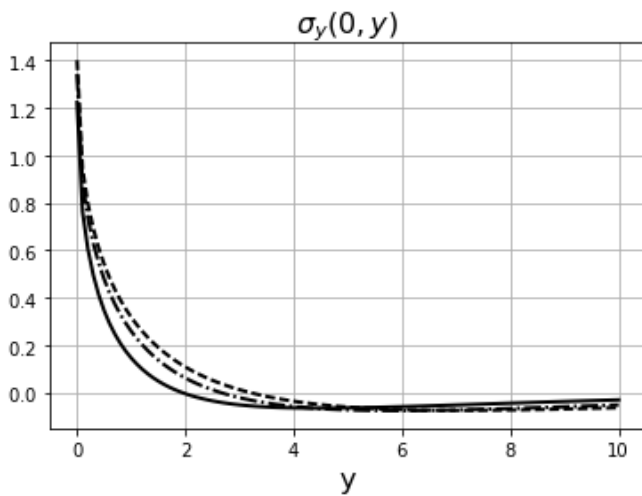


Рис. 3а

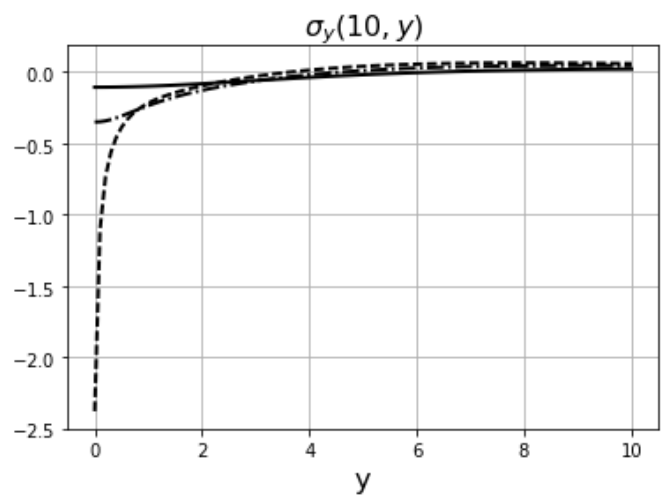


Рис. 3б

У випадку В враховано нерухому особливість у точці $x = 0, y = 0$. Це дозволило отримати стабільні розрахунки безпосередньо біля даної точки. Збільшення зони прикладеного навантаження за рахунок наближення до точки $x = a, y = 0$ привело до збільшення абсолютних значень нормальних напружень на бічній грані $x = a$ (рис. 3б) та слабо вплинуло на зміну нормальних напружень на бічній грані $x = 0$ (рис. 3а). При значенні параметру $\varpi < 0.5\%a$ починається вплив нерухомої особливості ядра рівняння у точці $x = a, y = 0$, і розрахунки в околі даної точки

перестають бути стабільними. Як видно, нормальні напруження на правій бічній грані більші за абсолютними значеннями ніж нормальні напруження на лівій бічній грані.

Врахування обох нерухомих особливостей у випадку С (рис. 4) дозволило отримати стабільні розрахунки по всьому короткому торцю півсмуги.

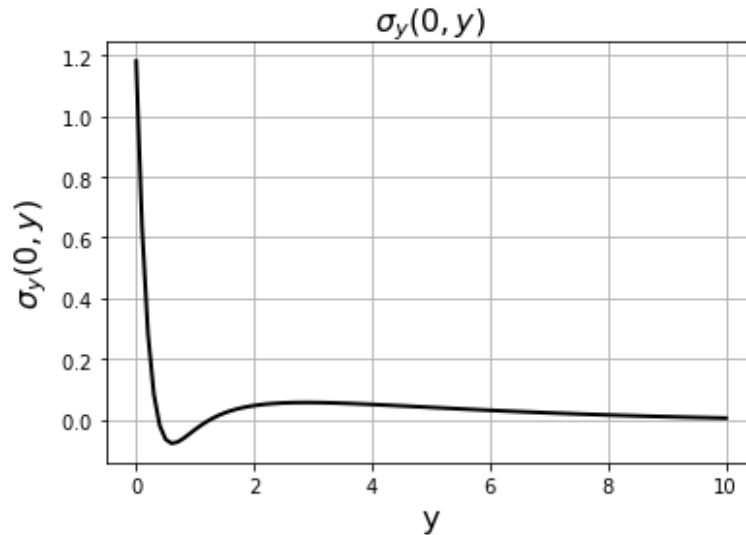


Рис. 4

Аналіз розглянутих випадків дозволив зробити висновок, що вже при значенні параметру $\varpi < 0.5\%a$ потрібно враховувати нерухомі особливості в кутових точках. Також відмічено, що найбільші нормальні напруження виникають на бічних гранях у випадку А, тобто коли навантаження прикладене на середині короткого торця півсмуги.

У підрозділі 4.1 четвертого розділу побудовано точний розв'язок задачі стаціонарної теплопровідності для півсмуги, коли по торцях задано умови

$$T(x, 0) = f_T(x), \quad 0 < x < a,$$

$$\frac{\partial T}{\partial x}(0, y) = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial x}(a, y) = 0, \quad 0 < y < \infty;$$

тут $T(x, y)$ – невідома функція температури, що задовольняє рівняння теплопровідності. Цей розв'язок використано у підрозділі 4.2 для розв'язання задачі незв'язної термопружності для півнескінченної смуги

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} + \frac{2}{\kappa + 1} \frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial x \partial y} = \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} \rho \frac{\partial T(x, y)}{\partial x}, \\ \frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\kappa + 1}{\kappa - 1} \frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial y^2} + \frac{2}{\kappa - 1} \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x \partial y} = \rho \frac{\partial T(x, y)}{\partial y}; \end{cases}$$

тут $\rho = 2 \frac{\mu + 1}{1 - 2\mu} \alpha_t$, α_t – коефіцієнт лінійного розширення.

Розв'язок побудовано за викладеною у розділі 2 схемою. Встановлено залежність нормальних та дотичних напружень усередині півсмуги від величини температурного та механічного навантажень для різних конфігурацій навантажень, описаних у попередньому розділі (випадки А, В, С).

Динаміку зміни нормальних напружень $\sigma_y(x, y)$ для різних температур та величин механічного навантаження представлено на рис. 5-7. На рис. 5а, 6а, 7а при сталому механічному навантаженні $p(x)=1$ суцільна, штрих-пунктирна та пунктирна лінії відповідають значенням температурного навантаження $T(x,0)=0.1$, $T(x,0)=1$ та $T(x,0)=10$, відповідно. На рис. 5b, 6b, 7b при сталому температурному навантаженні $T(x,0)=1$ суцільна та пунктирна лінії відповідають значенням механічного навантаження $p(x)=1$ та $p(x)=10$, відповідно.

Обидві півнескінченні бічні грані знаходяться в умовах зчеплення. Як видно з графіків (рис. 5), нормальні напруження для випадку А при фіксованому механічному навантаженні та збільшенні температур (рис. 5а) суттєво збільшуються за абсолютними значеннями. При фіксованій прикладеній температурі та збільшенні механічного навантаження (рис. 5b) нормальні напруження змінюються набагато менше. Отже, вплив теплового навантаження на напружений стан півсмуги є суттєвим.

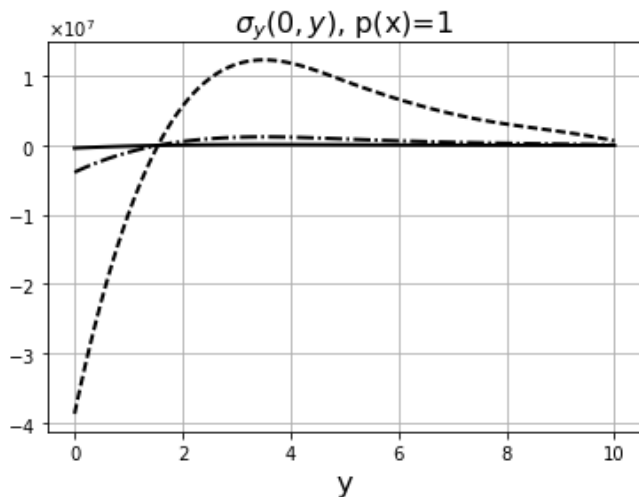


Рис. 5а

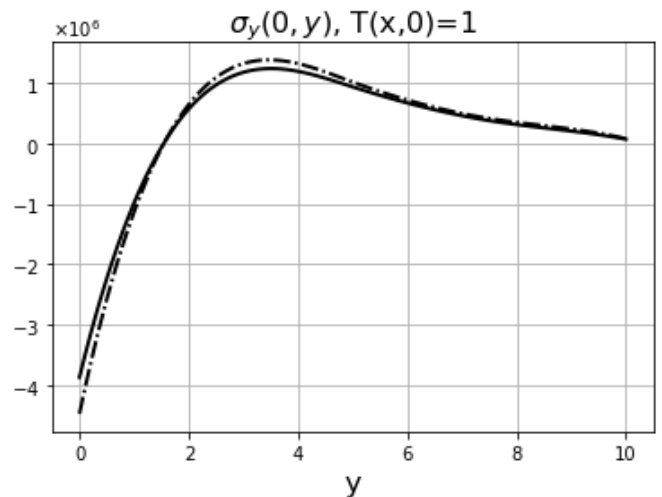


Рис. 5b

Для випадків В (рис. 6) та С (рис. 7) нормальні напруження при тих самих змінах механічного та температурного навантажень зберігають аналогічний характер зміни.

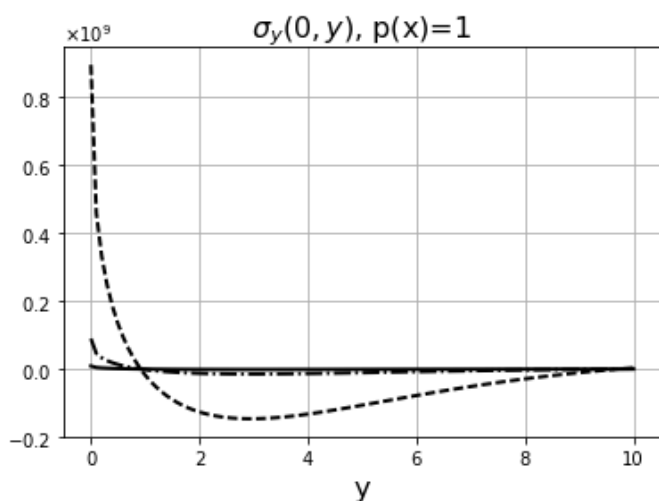


Рис. 6а

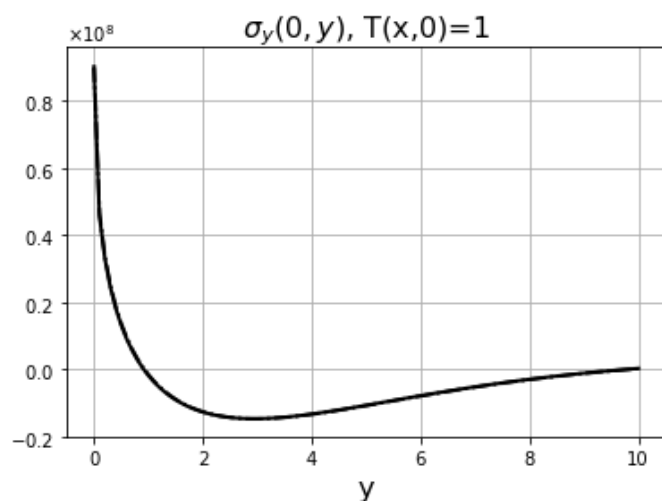


Рис. 6b

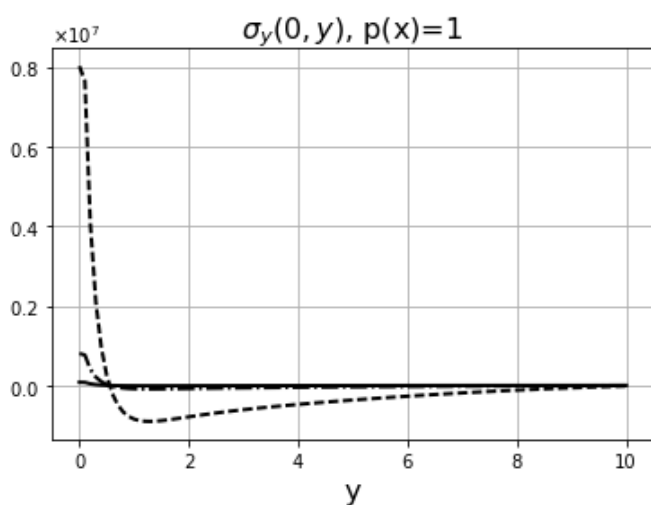


Рис. 7а

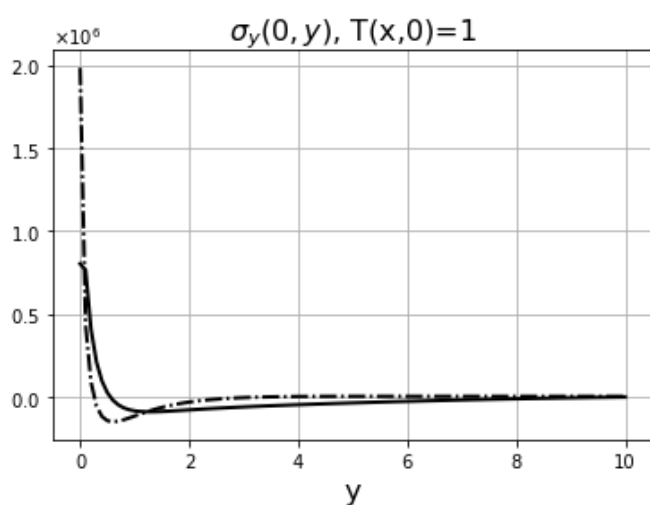


Рис. 7b

З аналізу графіків можна зробити висновок, що на напружений стан півсмуги найбільш суттєвим є вплив теплового навантаження. Найбільші напруження спостерігаються на бічних гранях у випадку В, тобто коли навантаження прикладене з лівої сторони короткого торця півсмуги.

У **п'ятому розділі** розглянуто плоскі мішані задачі теорії пружності для півнескінченної смуги з трансверсальною тріщиною. Півнескінченні бічні грані півсмуги знаходяться в умовах зчеплення, а по короткому торцю механічне навантаження прикладене за конфігураціями А, В, С. При застосуванні півнескінченного sin-cos перетворення Фур'є за узагальненою схемою за змінною у задачу зведено до векторної одновимірної крайової задачі у просторі трансформант, де права частина рівняння має вигляд

$$\vec{f}(x) = \begin{pmatrix} \frac{3-\kappa}{\kappa+1} \chi'(x) - \beta \sin \beta b \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \psi_1(x) + \cos \beta b \frac{\kappa-3}{\kappa+1} \psi_2'(x) \\ -\beta \frac{\kappa+1}{\kappa-1} \chi(x) - \sin \beta b \psi_1'(x) + \beta \frac{\kappa+1}{\kappa-1} \cos \beta b \psi_2(x) \end{pmatrix};$$

тут $\langle y(x, b) \rangle = y(x, b-0) - y(x, b+0)$, $\psi_1(x) = \langle u(x, b) \rangle$, $\psi_2(x) = \langle v(x, b) \rangle$, $\langle \tau_{xy}(x, b) \rangle = 0$, $\langle \sigma_y(x, b) \rangle = 0$, $c_0 < x < c_1$, $\chi(x) = v(x, y)|_{y=0}$ - невідома функція.

Розв'язок відповідної крайової задачі у випадку навантаження по короткому торцю за схемою А зведено до розв'язання системи трьох інтегро-диференціальних рівнянь, що розв'язується методом ортогональних поліномів

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2}{dx^2} \int_{-1}^1 \chi_0(\xi) \ln \frac{1}{|\xi - x|} d\xi + K_{0,0}(x) = q_0(x), \quad -1 < x < 1, \\ \frac{d^2}{dx^2} \int_{-1}^1 \psi_1(\xi) \ln \frac{1}{|\xi - x|} d\xi + K_{0,1}(x) = 0, \quad -1 < x < 1, \\ \frac{d^2}{dx^2} \int_{-1}^1 \psi_2(\xi) \ln \frac{1}{|\xi - x|} d\xi + K_{0,2}(x) = 0, \quad -1 < x < 1, \end{array} \right. \quad (9)$$

де $K_{j,i}(x) = \int_{-1}^1 \chi_j(\xi) f_{j,i}(\xi, x) d\xi + \sum_{k=1}^2 \int_{-1}^1 \psi_k(\xi) R_{j,i,k}(x, \xi) d\xi$, $i, j = 0, 1, 2$, $\chi_0(x) = \chi(x)$,

$f_{j,i}(\xi, x)$, $R_{j,i,1}(x, \xi)$, $R_{j,i,2}(x, \xi)$, $q_0(x)$, $i, j = 0, 1, 2$ - відомі регулярні функції.

Невідомі розв'язки системи (9) відшукуються у вигляді розвинень

$$\chi_0(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} s_n^0 \sqrt{1-\xi^2} U_n(\xi), \quad \psi_i(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} s_n^i \sqrt{1-\xi^2} U_n(\xi), \quad i = 1, 2, \quad \xi \in [-1; 1].$$

У даному випадку коефіцієнти інтенсивності напружень (КІН) обчислено за формулами

$$K_{I-} = \sum_{k=0}^{\infty} s_k^2 \frac{\sqrt{\pi(c_1 - c_0)}(n+1)(-1)^k}{\sqrt{2}}, \quad K_{I+} = \sum_{k=0}^{\infty} s_k^2 \frac{\sqrt{\pi(c_1 - c_0)}(n+1)}{\sqrt{2}},$$

$$K_{II-} = \sum_{k=0}^{\infty} s_k^1 \frac{\sqrt{\pi(c_1 - c_0)}(n+1)(-1)^k}{\sqrt{2}}, \quad K_{II+} = \sum_{k=0}^{\infty} s_k^1 \frac{\sqrt{\pi(c_1 - c_0)}(n+1)}{\sqrt{2}}.$$

Для випадку навантаження по короткому торцю за схемою В розв'язання відповідної задачі зведено до розв'язання системи інтегральних рівнянь

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{-1}^1 \chi_1(\xi) \left[\frac{1}{\xi - x} + Z_1(x, \xi) \right] d\xi + K_{1,0}(x) = q_1(x), \quad -1 < x < 1, \\ \frac{d^2}{dx^2} \int_{-1}^1 \psi_1(\xi) \ln \frac{1}{|\xi - x|} d\xi + K_{1,1}(x) = 0, \quad -1 < x < 1, \\ \frac{d^2}{dx^2} \int_{-1}^1 \psi_2(\xi) \ln \frac{1}{|\xi - x|} d\xi + K_{1,2}(x) = 0, \quad -1 < x < 1, \end{array} \right.$$

У цій системі перше рівняння має одну нерухому особливість,

$$Z_1(x, \xi) = \frac{h_1}{\xi + x + 2} + h_2 \frac{x+1}{(\xi + x + 1)^2} + h_3 \frac{(x+1)(\xi+1)}{(\xi + x + 2)^3}, \quad \chi_1(\xi) - \text{невідома функція похідної}$$

переміщень, яка повинна задовольняти додаткову умову (6). Відповідно до розділу 2 невідомі розв'язки розшуковуються у вигляді

$$\chi_1(\xi) = \sum_{k=0}^{N-1} \left[s_k^0 \rho_k^-(\xi) + s_{k+N}^0 \frac{T_k(\xi)}{\sqrt{1-\xi}} \right], \quad \psi_i(\xi) = \sum_{k=0}^{2N-1} s_k^i \sqrt{1-\xi^2} U_k(\xi), \quad i=1,2, \quad \xi \in [-1;1].$$

У випадку урахування двох нерухомих особливостей по короткому торцю, що відповідає випадку С, коли навантаження прикладене по всьому короткому торцю півсмути, отримана система трьох інтегральних рівнянь

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{-1}^1 \chi_1(\xi) \left[\frac{1}{\xi-x} + Z_2(x, \xi) \right] d\xi + K_{2,0}(x) = q_2(x), \quad -1 < x < 1, \\ \frac{d^2}{dx^2} \int_{-1}^1 \psi_1(\xi) \ln \frac{1}{|\xi-x|} d\xi + K_{2,1}(x) = 0, \quad -1 < x < 1, \\ \frac{d^2}{dx^2} \int_{-1}^1 \psi_2(\xi) \ln \frac{1}{|\xi-x|} d\xi + K_{2,2}(x) = 0, \quad -1 < x < 1, \end{array} \right.$$

$$\text{де } Z_2(x, \xi) = h_1 \left(\frac{1}{\xi+x+2} + \frac{1}{\xi+x-2} \right) + h_2 \left(\frac{x+1}{(\xi+x+1)^2} + \frac{x-1}{(\xi+x-2)^2} \right) + h_3 \left(\frac{(x+1)(\xi+1)}{(\xi+x+2)^3} + \frac{(x-1)(\xi-1)}{(\xi+x-2)^3} \right).$$

Невідомі розв'язки відшуковуються у вигляді

$$\chi_1(\xi) = \sum_{k=0}^{N-1} [s_k^0 \rho_k^-(\xi) + s_{k+N}^0 \rho_k^+(\xi)], \quad \psi_i(\xi) = \sum_{k=0}^{2N-1} s_k^i \sqrt{1-\xi^2} U_k(\xi), \quad i=1,2, \quad \xi \in [-1;1]$$

Числовий аналіз КІН було проведено при сталому механічному навантаженні $p(x)=1$ Па та симетричному розташуванні тріщини усередині півсмути. Через γ_0, γ_1 позначено довжини відстаней між лівою і правою бічними гранями та лівим і правим кінцями тріщини, відповідно. Бічні грані півсмути знаходяться в умовах зчеплення.

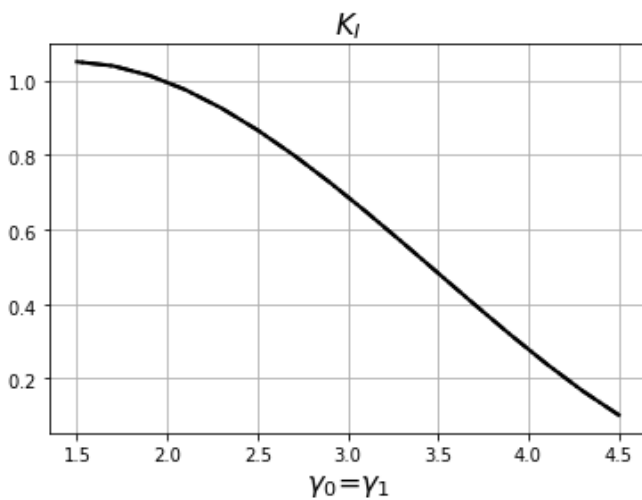


Рис. 8а

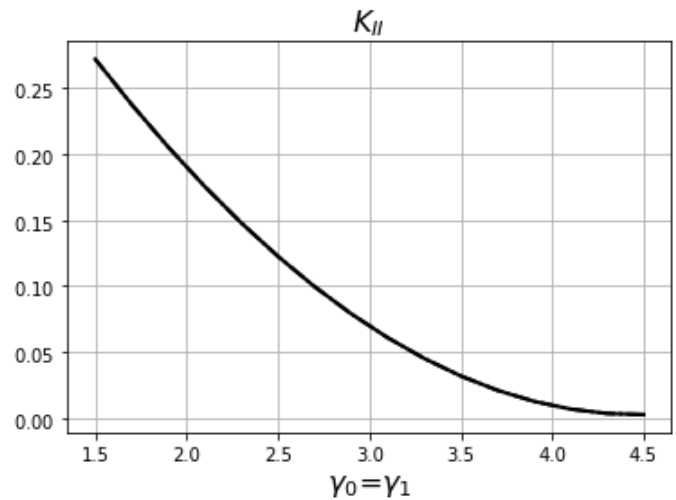


Рис. 8б

Коли по короткому торцю навантаження задано за схемою А (рис. 8) значення КІН K_I, K_{II} спадають до нуля при зменшенні довжини тріщини. При значеннях

параметрів $\gamma_0 = \gamma_1 < 15\%a$ розрахунки перестають бути стабільними у зв'язку з тим, що починається вплив нерухомих особливостей на кінцях тріщини. Щоб виконати розрахунки при наближенні тріщини до бічних граней потрібно враховувати нерухомі особливості.

Для випадку В (рис. 9) суцільна лінія описує КІН на лівому кінці тріщини, а штрих-пунктирна – на правому кінці тріщини. Як бачимо, при $\gamma_0 < 5\%a$ потрібно враховувати нерухому особливість на лівому кінці тріщини, а при $\gamma_1 < 11\%a$ - на правому.

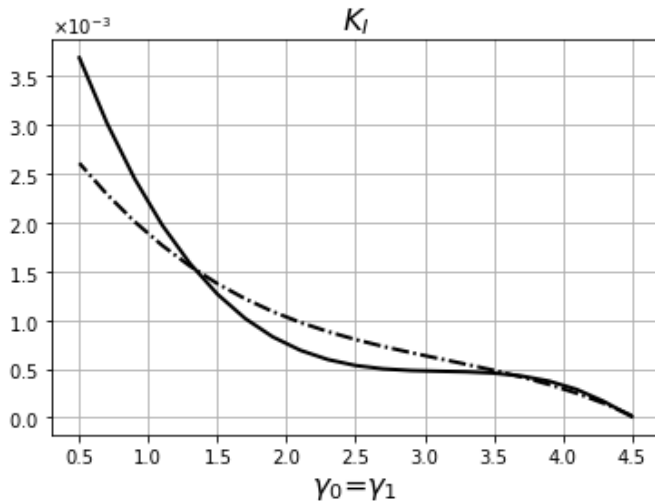


Рис. 9а

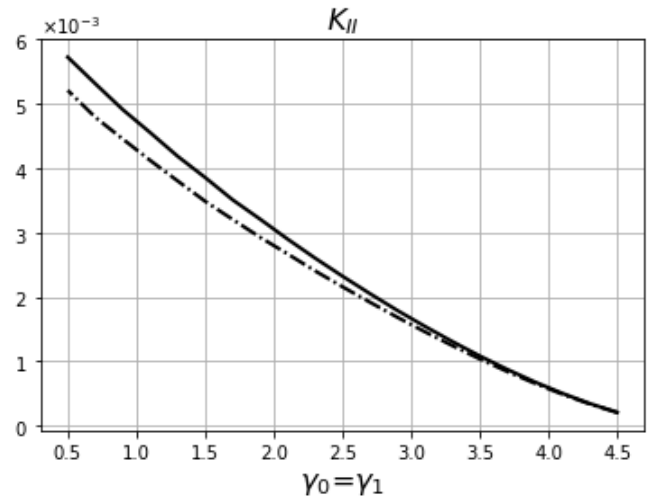


Рис. 9б

Для випадку С (рис. 10) стабільні розрахунки отримано при значеннях параметрів $\gamma_0 = \gamma_1 \geq 5\%a$, а при $\gamma_0 = \gamma_1 < 5\%a$ потрібно враховувати нерухомі особливості на кінцях тріщини.

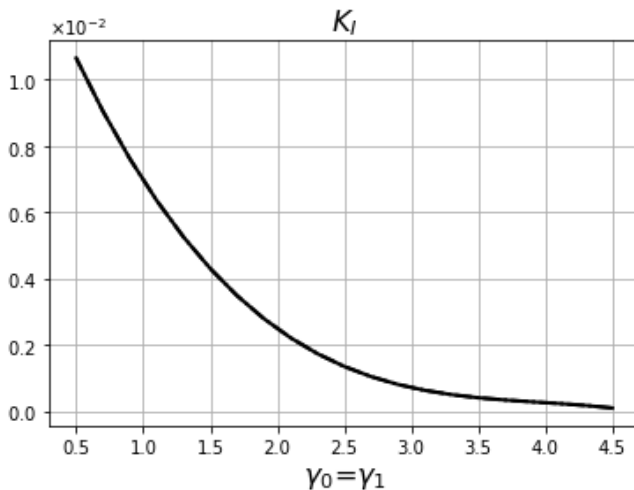


Рис. 10а

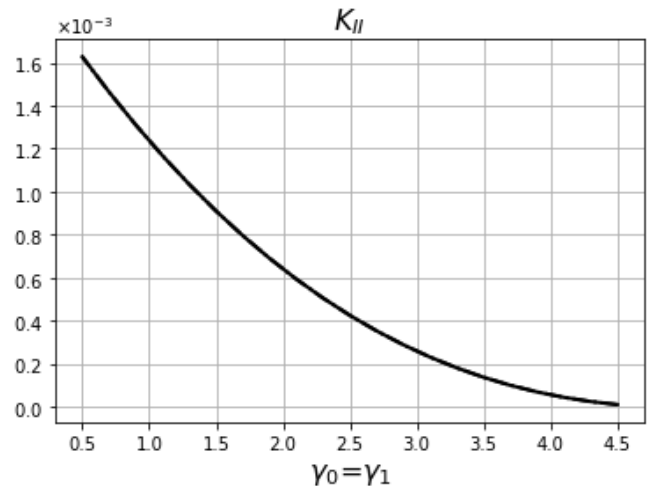


Рис. 10б

Аналіз графіків показує, що найменша відстань між кінцем тріщини та найближчою бічною гранню, при якій можна використовувати запропоновану методику, становить $5\%a$ для випадку, коли механічне навантаження виходить на

кутову точку між коротким торцем та відповідною бічною гранню. Коли по короткому торцю є зони ідеального контакту, найменша відстань між кінцем тріщини та найближчою бічною гранню дорівнює $11\%a$ у випадку однієї зони ідеального контакту по короткому торцю та $15\%a$ у випадку двох таких зон. Найбільші КІН спостерігаються для випадку А прикладення механічного навантаження по короткому торцю півсмуги.

При симетричному розташуванні тріщини відносно бічних граней та симетричному механічному навантаженні можна розглядати випадок, коли $\langle u(x, b) \rangle = 0$, $\langle v(x, b) \rangle = \psi_2(x) \neq 0$, $c_0 < x < c_1$. Тоді розв'язання такої задачі зводиться до системи двох сингулярних інтегральних рівнянь відносно $\chi(x) = v(x, y)|_{y=0}$ та $\psi_2(x)$. У результаті отримано КІН K_I , що співпадають з відповідними КІН, представленими на рис. 8а, 10а для випадків А та С, відповідно.

ВИСНОВКИ

В дисертаційній роботі досліджено мішані плоскі задачі для півнескінченної смуги під впливом навантаження різної природи, що задано по короткому торцю. Розглянуто задачу для випадку, коли смугу послаблено трансверсальною тріщиною.

Отримано такі основні результати:

1. Застосовано методику, яка, на відміну від традиційних підходів розв'язання плоскої мішаної задачі для півсмуги, дозволяє уникнути допоміжних гармонічних, бігармонічних функцій та оперувати безпосередньо з рівняннями рівноваги. Розв'язки, що отримано за методикою, є безпосереднім поданням шуканих механічних характеристик півсмуги.

2. Побудовано функцію Гріна для задач про напружений стан пружної півсмуги у білінійному поданні, що дозволяє суттєво спростити числові розрахунки. Розв'язання зведено до одного сингулярного інтегрального рівняння, що містить нерухомі особливості. З метою врахувати вплив нерухомих особливостей побудовано трансцендентне рівняння, встановлено його корені та застосовано ефективну числово-аналітичну методику для розв'язання сингулярного інтегрального рівняння.

3. Побудовано ефективний наближений розв'язок задачі про напружений стан півсмуги, що послаблена трансверсальною тріщиною. Отримано та встановлено залежність коефіцієнту інтенсивності напружень від довжини тріщини та конфігурації навантаження по короткому торцю.

Ці результати дозволили встановити такі механічні особливості розподілу переміщень та напружень у півсмугі:

- Найбільші нормальні напруження у випадку механічного навантаження спостерігаються на бічних гранях, коли навантаження прикладене на середині короткого торця.

- Встановлено вплив температурного навантаження на поле напружень півсмуги та залежність величини напружень від співвідношення температурного та механічного навантажень.

- Встановлено межі застосування запропонованої методики в залежності від довжини трансверсальної тріщини для трьох конфігурацій механічного навантаження по короткому торцю. А саме, розмір тріщини має становити не більше, ніж $90\%a$. При перевищенні цих розмірів потрібно враховувати нерухомі особливості, що виникають у відповідних сингулярних рівняннях. Найбільші значення КІН спостерігаються при сконцентрованому по центру короткого торця півсмуги навантаженні.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Журавлёва З. Ю. Плоская смешанная задача теории упругости для полубесконечной полосы // Вісник Одеського національного університету. 2014. Т. 19, № 3 (23). С. 66-75.
2. Вайсфельд Н. Д., Журавльова З. Ю. Задача незв'язної термопружності для півсмуги // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія: фізико-математичні науки. Спецвипуск. 2015. С. 43-46.
3. Vaysfel'd N., Zhuravlova Z. On one new approach to the solving of an elasticity mixed plane problem for the semi-strip // Acta Mechanica. 2015. Vol. 226, № 12. P. 4159-4172. DOI: 10.1007/s00707-015-1452-x
4. Вайсфельд Н. Д., Журавльова З. Ю. Плоска змішана задача термопружності для півсмуги // Математичні методи та фізико-механічні поля. 2015. 58, № 4. С. 87-98.
[The same: Vaisfel'd N. D., Zhuravlova Z. Yu. Two-dimensional mixed problem of thermoelasticity for a semistrip // Journal of Mathematical Sciences. 2018. Vol. 228, № 2. P. 105-121. DOI: 10.1007/s10958-017-3609-8]
5. Vaysfel'd N. D., Zhuravlova Z. Yu. Two cases of the mixed boundary problem for elastic semi-strip // Journal of Bartın University Engineering and Technological Sciences. 2016. Vol. 4, № 1. P. 22-30.

6. Vaysfel'd N., Kryvyi O., Zhuravlova Z. On the stress investigation at the edge of the fixed elastic semi-strip // *Frattura ed Integrità Strutturale*. 2016. Vol. 38. P. 1-11. DOI: 10.3221/IGF-ESIS.38.01
7. Zhuravlyova Z. On a stress-state of an elastic semi-strip under mechanical and thermal stresses // *Researches in mathematics and mechanics*. 2016. Vol. 1, № 1(1). P. 124-133.
8. Zhuravlova Z. Stress analysis near the tips of a transverse crack in an elastic semi-strip // *Appl. Math. Mech. – Engl. Ed.* 2017. Vol. 38, № 7. P. 935-956. DOI: 10.1007/s10483-017-2217-6
9. Журавлёва З. Ю. Смешанная задача теории упругости для полуполосы // *Современные проблемы математики и её приложения в естественных науках и информационных технологиях: Тезисы докладов VIII международной научной конференции для молодых учёных*. Харьков, 2013. С. 80-81.
10. Vaysfel'd N. D., Zhuravlova Z. Yu. The Plain Problem of Elasticity for the Fixed Semistrip // *Theoretical and Applied Aspects of Cybernetics. Proceedings of the 3rd International Scientific Conference of Students and Young Scientists*. Kyiv: Bukrek, 2013. P. 207-214.
11. Журавлёва З. Ю. Смешанная задача теории упругости для полуполосы // *Современные проблемы математики и её приложения в естественных науках и информационных технологиях: Тезисы докладов IX международной научной конференции для молодых учёных*. Харьков, 2014. С. 29-30.
12. Вайсфельд Н. Д., Журавльова З. Ю. Плоска змішана задача теорії пружності для напівнескінченної смуги // *Математичні проблеми механіки неоднорідних структур: зб. наук. праць. Під загальною редакцією І. О. Луковського, Г. С. Кіта, Р. М. Кушніра*. Львів, 2014. С. 24-26.
13. Vaysfel'd N. D., Zhuravlova Z. Yu. On one new solving approach of the plain mixed problem for an elastic semistrip // *17-th international conference on theoretical and computation mechanics*. Turkey, 2015. P. 125-129.
14. Вайсфельд Н. Д., Журавльова З. Ю. Про напружений стан півсмуги, що піддається впливу механічного та теплового навантажень // *Матеріали III міжнародної наукової конференції «Сучасні проблеми механіки»*. Київ, 2015. С. 11.

15. Вайсфельд Н. Д., Кривий О. Ф., Журавльова З. Ю. Плоска задача теорії пружності для півсмуги з поперечною тріщиною // VII Всеукраїнська науково-практична конференція «Інформатика та системні науки» (ІСН-2016). Полтава, 2016. С. 3.
16. Журавлєва З. Ю. Исследование напряжений возле края поперечной трещины, расположенной вблизи боковой грани упругой полуполосы // XIX Республиканская научная конференция студентов и аспирантов «Новые математические методы и компьютерные технологии в проектировании, производстве и научных исследованиях». Гомель, Беларусь, 2016. С. 82-84.
17. Журавльова З. Ю. Урахування нерухомої особливості у плоскій задачі теорії пружності для півсмуги з поперечною тріщиною // Науково-технічна конференція «Інформатика, математика, автоматика 2016». Суми, 2016. С. 240.
18. Vaysfel'd N. D., Zhuravlova Z. Yu. The stress concentration near a transversal crack in the elastic semi-strip // International conference on multiaxial fatigue & fracture. Sevilla, Spaine, 2016. P. 68-75.
19. Журавльова З. Ю. Плоска задача теорії пружності для півсмуги з трансверсальною тріщиною з врахуванням нерухомої особливості по торцю півсмуги // Сучасні проблеми термомеханіки. Львів, 2016. С. 87-88.
20. Orthogonal polynomials method and its generalization at some new problems of fracture mechanics / V. V. Reut, A. V. Fesenko, Z. Yu. Zhuravleva, N. D. Vaysfeld // 14th International Conference on Fracture (ICF 14). Rhodes, Greece, 2017. P. 2.
21. Zhuravlova Z. The plane problem for a loaded elastic semi-strip with a transversal crack // International conference of young mathematicians. Kyiv, Ukraine, 2017. P. 54.
22. Вайсфельд Н. Д., Реут В. В., Журавлєва З. Ю. Концентрация напряжений в окрестности концов поперечной трещины в полуполосе // Проблемы безопасности на транспорте. Материалы VIII международной научно-практической конференции, посвящённой году науки. Гомель, 2017. С. 171-173.

АНОТАЦІЯ

Журавльова З. Ю. Плоскі мішані задачі теорії пружності для півнескінченної смуги. – Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук (доктора філософії) за спеціальністю 01.02.04 «Механіка деформівного твердого тіла» (11 – Математика та статистика). – Одеський національний університет імені І. І. Мечникова, Одеса, 2018.

Розглядається плоска мішана задача теорії пружності для півнескінченної смуги, що знаходиться під впливом навантаження різної природи. За допомогою застосування інтегрального півнескінченного $\sin$ - $\cos$ перетворення Фур'є задачу зведено до одновимірної векторної крайової задачі, розв'язок якої побудовано за допомогою апарату матричного диференціального числення та матричної функції Гріна. Розв'язок вихідної задачі зведено до сингулярного інтегрального рівняння, яке розв'язується в залежності від конфігурації прикладеного навантаження методом ортогональних поліномів або методом, що дозволяє враховувати нерухомі особливості невідомої функції на кінцях інтервалу інтегрування. Отримано точний розв'язок задачі стаціонарної теплопровідності та розв'язано задачі незв'язної термопружності для півсмуги. Розглянуто випадок, коли усередині півсмуги розташована трансверсальна тріщина. У цьому випадку до вихідної задачі застосовується інтегральне перетворення Фур'є за узагальненою схемою, та розв'язок задачі зводиться до системи сингулярних інтегральних рівнянь.

Ключові слова: півсмуга, перетворення Фур'є, матриця-функція Гріна, сингулярне інтегральне рівняння, метод ортогональних поліномів, нерухомі особливості, незв'язна термопружність, трансверсальна тріщина.

АННОТАЦИЯ

Журавлёва З. Ю. Плоские смешанные задачи теории упругости для полубесконечной полосы. – Рукопись.

Диссертация на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук (доктора философии) по специальности 01.02.04 «Механика деформируемого твердого тела» (11 – Математика и статистика). – Одесский национальный университет имени И. И. Мечникова, Одесса, 2018.

Рассматривается плоская смешанная задача теории упругости для полубесконечной полосы, находящейся под действием нагрузки различной природы. С помощью применения интегрального полубесконечного $\sin$ - $\cos$ преобразования Фурье задача сведена к одномерной векторной краевой задаче, решение которой построено с помощью аппарата матричного дифференциального

исчисления и матричной функции Грина. Решение исходной задачи записано в виде сингулярного интегрального уравнения, которое решается в зависимости от конфигурации приложенной нагрузки методом ортогональных многочленов или методом, позволяющим учитывать неподвижные особенности неизвестной функции на концах интервала интегрирования. Получено точное решение задачи стационарной теплопроводности и решена задача несвязной термоупругости для полуполосы. Рассмотрен случай, когда внутри полуполосы расположена поперечная трещина. В этом случае к исходной задаче применяется интегральное преобразование Фурье по обобщённой схеме, и решение задачи сводится к системе сингулярных интегральных уравнений.

Ключевые слова: полуполоса, преобразование Фурье, матрица-функция Грина, сингулярное интегральное уравнение, метод ортогональных многочленов, неподвижные особенности, несвязная термоупругость, поперечная трещина.

ABSTRACT

Zhuravlova Z. Yu. Plane mixed problems of elasticity for a semi-infinite strip. – Manuscript.

Thesis for the Candidate's Degree (PhD) in Physics and Mathematics by speciality: 01.02.04 – Mechanics of deformable bodies (11 – Mathematics and Statistics). – Odesa I. I. Mechnikov National University, Odesa, 2018.

The plane mixed problem of elasticity for the semi-infinite strip was considered under the load of a different nature at the short semi-strip's edge. The initial problem was reduced to the one-dimensional problem with the help of the integral semi-infinite sin-cos Fourier transformation. The problem in transformation domain was reformulated as vector boundary-value problem. Its solution was constructed as a superposition of the general solution for the homogeneous vector equation and the partial solution for the inhomogeneous one. The solution for the homogeneous vector equation was constructed with the help of the matrix differential calculation and it was given through the fundamental matrix system. To obtain the partial solution for the inhomogeneous vector equation the Green's matrix-function was derived by the use of the matrix integral transformation. The Green's matrix-function was constructed in the form of the bilinear expansion, which simplified further calculations. After applying of the inverse transformation to the exact solutions of the one-dimensional problem in transformations domain, and summation of the weakly convergent integrals the formulae for the displacements contained only one unknown function. The singular integral equation was obtained for its finding. The singular integral equation was solved with regard of the normal load's configuration. The orthogonal polynomials method was applied when there

were no fixed singularities in the kernel of the singular integral equation. The special generalized method was used for the solving of the singular integral equation with one or two fixed singularities.

The exact solution of the stationary thermal conductivity problem was derived. It was used in the solving of the uncoupled thermoelasticity problem for the semi-strip. The same configurations of the normal stress at the short edge of the semi-strip were considered for the thermoelasticity problem. The investigation of the semi-strip's stress state was provided for all these cases.

The problem when a transverse crack was located inside the semi-strip was considered. In this case the initial problem was reduced to the one-dimensional problem with the help of the semi-infinite Fourier transformation, which was applied by the generalized scheme. The solving of the problem was reduced to the solving of the system of three singular integral equations with respect to one unknown displacement function at the semi-strip's edge and two displacement jumps at the crack. With regard to the configuration of the mechanical load the first equation in this system could contain fixed singularities. So, the orthogonal polynomials method or the special generalized method was applied for the solving of the singular integral equations. In the case of symmetric location of the crack and symmetric mechanical load the simplified case was considered when one of the displacements' jumps equaled zero. In this case the solving of the problem was reduced to the solving of the system of two singular integral equations. Stress intensity factors were calculated for all these cases in regard of the transverse crack's length.

Key words: semi-strip, Fourier transformation, Green's matrix-function, singular integral equation, orthogonal polynomials method, fixed singularities, uncoupled thermoelasticity, transverse crack.