Mathematical Subject Classification: 49L20, 49K30, 93B12, 93B50
УДК: 517.977.58, 517.977.54

Є. М. Страхов
Одеський національний університет імені І. І. Мечникова

МЕТОД ДИНАМІЧНОГО ПРОГРАМУВАННЯ В ЗАДАЧІ СТРУКТУРНО-ПАРАМЕТРИЧНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ ДИСКРЕТНОЇ СИСТЕМИ КЕРУВАННЯ

Страхов Є. М. Метод динамічного програмування в задачі структурно-параметричної оптимізації дискретної системи керування. У роботі обґрунтована можливість застосування методу динамічного програмування до задачі структурно-параметричної оптимізації дискретної системи керування. Отримані дискретне рівняння Беллмана, а також достатні умови оптимальності керування у випадку нефіксованої структури системи.
Ключові слова: дискретна система, структурна оптимізація, параметрична оптимізація, динамічне програмування.

Страхов Е. М. Метод динамического программирования в задаче структурно-параметрической оптимизации дискретной системы управления. В работе обоснована применимость метода динамического программирования в задаче структурно-параметрической оптимизации дискретной системы управления. Получены дискретное уравнение Беллмана, а также достаточные условия оптимальности управления в случае нефиксированной структуры системы.
Ключевые слова: дискретная система, структурная оптимизация, параметрическая оптимизация, динамическое программирование.

Strakhov E. M. Dynamic programming in a structural and parametric optimization problem of a discrete control system. This paper deals with substantiation of dynamic programming method for a structural and parametric optimization problem of a discrete control system. We obtain discrete Bellman equation and sufficient optimality conditions in the case of floating structure.
Key words: discrete system, structural optimization, parametric optimization, dynamic programming.

Вступ. У прикладних задачах, пов'язаних із конструюванням складних технічних систем, керування системою, як правило, здійснюється за допомогою підсистем, які відомі з точністю до параметрів. З математичної точки зору це означає, що на певних відрізках часу керування задається за допомогою функцій, що залежать від часової змінної та параметрів. Таким чином, виникає задача знаходження оптимальних режимів системи у структурно-параметричних класах. Такі задачі характерні для робототехнічних систем, систем прискорення і фокусування тощо. Одним з підходів до розв'язування задач структурно-параметричної оптимізації систем керування є варіаційний метод, на основі якого будуються ітераційні процедури типу градієнтного спуску за обраними параметрами або точками перемикання. Результати у цьому напряму одержані в праці [3]. Проте при реалізації подібних методів на практиці виникають певні труднощі, пов'язані, зокрема, із нестійкістю спряженої системи. Інший підхід базується на принципі оптимальності Беллмана та методі динамічного програмування. Робота [1] обґрунтовує принцип оптимальності для задачі вибору оптимальної структури, в ній одержані рівняння Беллмана в інтегральній та диференціальній формах. Статті [4, 5, 7] поширюють ці результати на задачі структурно-параметричної оптимізації систем керування. Зокрема, у [4] досліджується випадок дискретної системи з фіксованими моментами перемикання, запропонований чисельний алгоритм знаходження оптимальних параметрів такої системи.

В даній статті проводиться обґрунтування принципу оптимальності для задачі структурно-параметричної оптимізації дискретної системи з нефіксованою структурою, встановлюються достатні умови оптимальності керування у формі Беллмана.

Основні результати.

1. Постановка задачі та принцип оптимальності Беллмана. Розглянемо задачу оптимального керування

$$J(x,\, u) = \sum_{k=0}^{N-1} g_k\left(x(k)\,,\, u(k)\right) + \Phi\left(x(N)\right) \;\to\; \min \tag{1}$$

за умов

$$\begin{gathered} x(k+1) = f_k\left(x(k)\,,\, u(k)\right),\;\; k = 0, 1, \ldots, N-1, \\ x(0) = x_0. \end{gathered} \tag{2}$$

Тут $x(k) \in X_k$ – n-вимірний вектор фазових координат; $X_k \subseteq \mathbb{R}^n$ – замкнена множина фазових обмежень в момент $k = 0, 1, \ldots, N$; $u(k)$ – m-вимірний вектор керування; $g_k : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^1$, $f_k : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ – задані неперервні функції своїх аргументів при кожному $k = 0, 1, \ldots, N-1$; $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ – задана неперервна функція.

Нехай керування в задачі (1)–(2) задано в структурній формі

$$u(k) = \Psi_r\left(b_r, x(k)\right),\, k = 0, 1, \ldots, N-1,\, r \in \{1, \ldots, p\}, \tag{3}$$

де $\Psi_r\left(b_r, x(k)\right)$ $(r = 1, \ldots, p)$ – заданий набір структур, але порядок їх розташування є невідомим; $b_r \in R_r$ – невідомі числові параметри; $R_r \subset \mathbb{R}^{i_r}$ $(i_r \in \mathbb{N})$ – множини обмежень на параметри.

Задача (1)–(2) є задачею структурно-параметричної оптимізації з керуванням, заданим в структурному класі (3). Вибір оптимального керування зводиться до вибору такого розміщення структур $\{\Psi_r^*\}$ та визначення оптимальних параметрів b_r^* цих структур для кожного дискретного моменту $k = 0, 1, \ldots, N-1$, що мінімізує критерій якості (1).

Нехай $\{\Psi_r^*\}$ – оптимальний набір структур, $\{b_r^*\}$ – набір оптимальних параметрів у задачі (1)–(3). Позначимо через $x^*(k)$ відповідну оптимальну траєкторію. Зафіксуємо $s \in \{1, 2, \ldots, N-1\}$ і розглянемо допоміжну задачу

$$J_s(x,\, u) = \sum_{k=s}^{N-1} g_k\left(x(k)\,,\, u(k)\right) + \Phi\left(x(N)\right) \;\to\; \min \tag{4}$$

за умов

$$x(k+1) = f_k\left(x(k)\,,\, u(k)\right),\;\; k = s, s+1, \ldots, N-1, \tag{5}$$

$$x\left(s\right)=x^{*}\left(s\right), \tag{6}$$

$$u\left(k\right)=\Psi_{r}\left(b_{r},x(k)\right), k=s,s+1,\ldots,N-1, r\in\{1,2,\ldots,p\}, \tag{7}$$

при цьому виконуються включення $x\left(k\right)\in X_{k},\ k=s,s+1,\ldots,N$.

Справедлива наступна теорема.

Теорема 1 (принцип оптимальності Беллмана)**.** *Якщо набір структур $\{\tilde{\Psi}_{r}\}$ та параметрів $\{\tilde{b}_{r}\}$ є оптимальним у задачі (4)–(7), то для $k=s,s+1,\ldots,N$ цей набір співпадає з оптимальним набором структур $\{\Psi_{r}^{*}\}$ та параметрів $\{b_{r}^{*}\}$ задачі (1)–(3).*

Доведення. Припустимо, що твердження теореми не виконується, тобто керування, що є розв'язком задачі (4)–(7), не є оптимальним при $k=s,s+1,\ldots,N$ у задачі (1)–(3). Це означає, що має місце нерівність

$$J_{s}\left(x^{*},\, u^{*}\right)>J_{s}\left(\tilde{x},\, \tilde{u}\right),$$

де $x^{*}(t)$, $u^{*}(t)$ – оптимальна траєкторія та оптимальне керування задачі (1)–(3) відповідно, $\tilde{x}(t)$, $\tilde{u}(t)$ – оптимальна траєкторія та оптимальне керування задачі (4)–(7) відповідно. Побудуємо керування

$$v(k)=\begin{cases}\Psi_{r}^{*}\left(b_{r}^{*},x^{*}(k)\right), & k=0,1,\ldots,s-1,\\ \tilde{\Psi}_{r}\left(\tilde{b}_{r},\tilde{x}(k)\right), & k=s,s+1,\ldots,N-1.\end{cases}$$

Відповідна траєкторія матиме вигляд

$$y(k)=\begin{cases}x^{*}\left(k\right), & k=0,1,\ldots,s-1,\\ \tilde{x}\left(k\right), & k=s,s+1,\ldots,N.\end{cases}$$

Таким способом,

$$J(y,v)=\sum_{k=0}^{N-1}g_{k}\left(y\left(k\right),\, v\left(k\right)\right)+\Phi\left(y\left(N\right)\right)=$$

$$=\sum_{k=0}^{s-1}g_{k}\left(x^{*}\left(k\right),\, \Psi_{k}^{*}\left(b_{k}^{*},x^{*}(k)\right)\right)+\sum_{k=s}^{N-1}g_{k}\left(\tilde{x}\left(k\right),\, \tilde{\Psi}_{k}\left(\tilde{b}_{k},\tilde{x}(k)\right)\right)+\Phi\left(\tilde{x}\left(N\right)\right)=$$

$$=\sum_{k=0}^{s-1}g_{k}\left(x^{*}\left(k\right),\, \Psi_{k}^{*}\left(b_{k}^{*},x^{*}(k)\right)\right)+J_{s}\left(\tilde{x},\, \tilde{u}\right)<$$

$$<\sum_{k=0}^{s-1}g_{k}\left(x^{*}\left(k\right),\, \Psi_{k}^{*}\left(b_{k}^{*},x^{*}(k)\right)\right)+J_{s}\left(x^{*},\, u^{*}\right)=J\left(x^{*},\, u^{*}\right),$$

а це означає, що керування $u^{*}\left(t\right)$ не є оптимальним. Отримане протиріччя доводить теорему.

2. Дискретне рівняння Беллмана. Введемо

Означення. *Функція*

$$B_s\left(z\right)=\min_{\{\Psi_r\},\{b_r\}}\left\{\sum_{k=s}^{N-1}g_k\left(x\left(k\right),\,\Psi_{r_k}\left(b_{r_k},x(k)\right)\right)+\Phi\left(x\left(N\right)\right)\right\},\tag{8}$$

що визначена на розв'язках системи

$$\begin{gathered}x\left(k+1\right)=f_k\left(x\left(k\right),\,\Psi_r\left(b_r,x(k)\right)\right),\\ k=s,s+1,\ldots,N-1,r\in\{1,\ldots,p\},\\ x\left(s\right)=z,\end{gathered}\tag{9}$$

називається функцією Беллмана задачі (1)–(3). При цьому виконуються включення $x\left(k\right)\in X_k,\ k=s,s+1,\ldots,N$.

З означення функції Беллмана випливає, що

$$B_s\left(z\right)=\min_{\{\Psi_r\},\{b_r\}}J_s\left(x,\,u\right).$$

Нехай пара $(\{\Psi_r^*\},\{b_r^*\})$ доставляє мінімум правій частині рівності (8), $x^*\left(k\right)$ – оптимальна траєкторія. Тоді

$$B_s\left(z\right)=\min_{\{\Psi_r\},\{b_r\}}\left\{\sum_{k=s}^{N-1}g_k\left(x\left(k\right),\,\Psi_{r_k}\left(b_{r_k},x(k)\right)\right)+\Phi\left(x\left(N\right)\right)\right\}=$$

$$=\sum_{k=s}^{N-1}g_k\left(x^*\left(k\right),\,\Psi_{r_k}^*\left(b_{r_k}^*,x^*(k)\right)\right)+\Phi\left(x^*\left(N\right)\right)=$$

$$=g_s\left(x^*\left(s\right),\,\Psi_{r_s}^*\left(b_{r_s}^*,x^*(s)\right)\right)+$$

$$+\sum_{k=s+1}^{N-1}g_k\left(x^*\left(k\right),\,\Psi_{r_k}^*\left(b_{r_k}^*,x^*(k)\right)\right)+\Phi\left(x^*\left(N\right)\right)=$$

$$=g_s\left(z,\,\Psi_{r_s}^*\left(b_{r_s}^*,x^*(s)\right)\right)+$$

$$+\sum_{k=s+1}^{N-1}g_k\left(x^*\left(k\right),\,\Psi_{r_k}^*\left(b_{r_k}^*,x^*(k)\right)\right)+\Phi\left(x^*\left(N\right)\right).\tag{10}$$

За принципом оптимальності Беллмана

$$\sum_{k=s+1}^{N-1}g_k\left(x^*\left(k\right),\,\Psi_{r_k}^*\left(b_{r_k}^*,x^*(k)\right)\right)+\Phi\left(x^*\left(N\right)\right)=$$

$$=\min_{\{\Psi_r\},\{b_r\}}\left\{\sum_{k=s+1}^{N-1}g_k\left(x\left(k\right),\,\Psi_{r_k}\left(b_{r_k},x(k)\right)\right)+\Phi\left(x\left(N\right)\right)\right\},$$

а за означенням функції Беллмана

$$\min_{\{\Psi_r\},\{b_r\}}\left\{\sum_{k=s+1}^{N-1}g_k\left(x\left(k\right),\,\Psi_{r_k}\left(b_{r_k},x(k)\right)\right)+\Phi\left(x\left(N\right)\right)\right\}=B_{s+1}\left(x\left(s+1,\,z\right)\right).$$

Тут $x\left(k,\,z\right)$ – розв'язок задачі Коші (9) за умови

$$\left\{\Psi_r\left(b_r,x(k)\right)\right\}=\;=\left\{\Psi_r^*\left(b_r^*,x^*(k)\right)\right\}.$$

Отже,

$$B_s\left(z\right)=g_s\left(z,\,\Psi_{r_s}^*\left(b_{r_s}^*,x^*(s)\right)\right)+B_{s+1}\left(x\left(s+1,\,z\right)\right).$$

Враховуючи, що $x\left(s+1,\,z\right)=f_s\left(z,\,\Psi_{r_s}^*\left(b_{r_s}^*,x^*(s)\right)\right)$, отримаємо

$$B_s\left(z\right)=g_s\left(z,\,\Psi_{r_s}^*\left(b_{r_s}^*,x^*(s)\right)\right)+B_{s+1}\left(f_s\left(z,\,\Psi_{r_s}^*\left(b_{r_s}^*,x^*(s)\right)\right)\right). \tag{11}$$

Якщо замість $\left(\left\{\Psi_r^*\right\},\left\{b_r^*\right\}\right)$ в (10) підставити довільну допустиму пару $\left(\left\{\Psi_r\right\},\left\{b_r\right\}\right)$, то права частина рівності може тільки збільшитись. Тобто,

$$\begin{aligned}B_s\left(z\right)=\min_{\{\Psi_r\},\{b_r\}}\left\{\sum_{k=s}^{N-1}g_k\left(x\left(k\right),\,\Psi_{r_k}\left(b_{r_k},x(k)\right)\right)+\Phi\left(x\left(N\right)\right)\right\}\le\\ \le\sum_{k=s}^{N-1}g_k\left(x\left(k\right),\,\Psi_{r_k}\left(b_{r_k},x(k)\right)\right)+\Phi\left(x\left(N\right)\right).\end{aligned} \tag{12}$$

Тому в (11) ми маємо

$$B_s\left(z\right)\le g_s\left(z,\,\Psi_{r_s}\left(b_{r_s},x(s)\right)\right)+B_{s+1}\left(f_s\left(z,\,\Psi_{r_s}\left(b_{r_s},x(s)\right)\right)\right).$$

Враховуючи (9), для оптимальної пари $\left(\left\{\Psi_r^*\right\},\left\{b_r^*\right\}\right)$ та траєкторії $x^*\left(k\right)$ у (12) ми отримуємо рівність, тобто

$$B_s\left(z\right)=\min_{\{\Psi_r\},\{b_r\}}\left\{g_s\left(z,\,\Psi_{r_s}\left(b_{r_s},x(s)\right)\right)+B_{s+1}\left(f_s\left(z,\,\Psi_{r_s}\left(b_{r_s},x(s)\right)\right)\right)\right\}. \tag{13}$$

Співвідношення (13) називається дискретним рівнянням Беллмана.

2. Достатні умови оптимальності.

Теорема 2 (достатні умови оптимальності)**.** *Нехай функції $B_s(z)$ є розв'язками рівнянь (13) при $s=0,1,\ldots,N-1$, при цьому оптимальні набори структур $\left\{\Psi_{r_s}^*\right\}$ та параметрів $\left\{b_{r_s}^*\right\}$, знайдені з умов*

$$\begin{aligned}g_s\left(z,\,\Psi_{r_s}^*\left(b_{r_s}^*,x^*(s)\right)\right)+B_{s+1}\left(f_s\left(z,\,\Psi_{r_s}^*\left(b_{r_s}^*,x^*(s)\right)\right)\right)=\\ =\min_{\{\Psi_{r_s}\},\{b_{r_s}\}}\left\{g_s\left(z,\,\Psi_{r_s}\left(b_{r_s},x(s)\right)\right)+B_{s+1}\left(f_s\left(z,\,\Psi_{r_s}\left(b_{r_s},x(s)\right)\right)\right)\right\},\end{aligned} \tag{14}$$

при підстановці у функції керування

$$u^*\left(s\right)=\Psi_{r_s}^*\left(b_{r_s}^*,x^*(s)\right),s=0,\ldots,N-1$$

породжують при $z=x$ єдиний розв'язок $x^*(\cdot)$ системи (2).

Тоді набори структур $\left\{\Psi_{r_s}^*\right\}$ та параметрів $\left\{b_{r_s}^*\right\}$ є оптимальними у задачі (1)–(3).

Доведення. Оскільки набори $\left\{\Psi_{r_s}^*\right\}$ та $\left\{b_{r_s}^*\right\}$ є розв'язком задачі (14) і для $B_s(z)$ має місце (13), то

$$B_s\left(z\right)=g_s\left(z,\,\Psi_{r_s}^*\left(b_{r_s}^*,x^*(s)\right)\right)+B_{s+1}\left(f_s\left(z,\,\Psi_{r_s}^*\left(b_{r_s}^*,x^*(s)\right)\right)\right).$$

Звідси

$$g_s\left(z,\ \Psi^*_{r_s}\left(b^*_{r_s}, x^*(s)\right)\right) = B_s\left(z\right) - B_{s+1}\left(f_s\left(z,\ \Psi^*_{r_s}\left(b^*_{r_s}, x^*(s)\right)\right)\right) =$$
$$= B_s(x^*(s)) - B_{s+1}(x^*(s+1)).$$

Тоді, з урахуванням останньої рівності, оптимальне значення функціоналу дорівнює

$$J\left(x^*, u^*\right) = \sum_{k=0}^{N-1} g_k\left(x^*\left(k\right),\ u^*\left(k\right)\right) + \Phi\left(x^*\left(N\right)\right) =$$
$$= \sum_{k=0}^{N-1}\left[B_k(x^*(k)) - B_{k+1}(x^*(k+1))\right] + \Phi\left(x\left(N\right)\right) =$$
$$= B_0(x^*(0)) - B_1(x^*(1)) + B_1(x^*(1)) - B_2(x^*(2)) + \ldots +$$
$$+ B_{N-1}(x^*(N-1)) - B_N(x^*(N)) + \Phi\left(x\left(N\right)\right).$$

Враховуючи, що $B_N\left(x^*\left(N\right)\right) = \Phi\left(x^*(N)\right)$, отримуємо

$$J\left(x^*, u^*\right) = B_0\left(x_0\right). \tag{15}$$

При довільних наборах $\{\Psi_{r_s}\}$ та $\{b_{r_s}\}$ маємо

$$g_s\left(z,\ \Psi_{r_s}\left(b_{r_s}, x(s)\right)\right) \geq B_s\left(z\right) - B_{s+1}\left(f_s\left(z,\ \Psi_{r_s}\left(b_{r_s}, x(s)\right)\right)\right) =$$
$$= B_s(x(s)) - B_{s+1}(x(s+1)).$$

Тоді, аналогічно до попередніх міркувань, отримаємо нерівність

$$J\left(x, u\right) \geq B_0\left(x_0\right). \tag{16}$$

З (15) та (16) випливає, що $J\left(x, u\right) \geq J\left(x^*, u^*\right)$. Теорему доведено.

Висновки. Отже, ми обґрунтували можливість застосування методу динамічного програмування до задачі вибору оптимальної структури та параметрів дискретної системи керування. Доведена справедливість принципу оптимальності, побудоване дискретне рівняння Беллмана, одержані достатні умови оптимальності керування у формі Беллмана. Ці результати можуть бути використані при побудові чисельних алгоритмів для розв'язування конкретних задач.

1. **Башняков О. М.** Практична стійкість, оцінки та оптимізація / Башняков О. М., Гаращенко Ф. Г., Пічкур В. В. – К. : Київський університет, 2008. – 383 с.
2. **Башняков О. М.** Задача синтезу в теорії керування / О. М. Башняков, В. В. Пічкур. – К.: Сталь, 2012. – 116 с.
3. **Бублик Б. Н.** Структурно-параметрическая оптимизация и устойчивость динамики пучков / Бублик Б. Н., Гаращенко Ф. Г., Кириченко Н. Ф. – К.: Наукова думка, 1985. – 304 с.

4. **Пічкур В. В.** Дискретний варіант методу динамічного програмування в задачі структурно-параметричної оптимізації / В. В. Пічкур, Є. М. Страхов // Журнал обчислювальної та прикладної математики. – 2010. – № 3 (102). – С. 103–109.

5. **Пічкур В. В.** Застосування методу динамічного програмування до задачі структурно-параметричної оптимізації з фіксованими точками перемикання / В. В. Пічкур, Є. М. Страхов // Вісник Одеського національного університету. Математика і механіка. – 2010. – Т. 15. Вип. 19. – С. 94–102.

6. **Страхов Є. М.** Структурно-параметрична оптимізація систем керування на основі методу динамічного програмування : автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. фіз.-мат. наук : спец. 01.01.09 "Варіаційне числення та теорія оптимального керування" / Є. М. Страхов. – Одеса, 2013. – 20 с.

7. **Strakhov E. M.** Dynamic Programming in Structural and Parametric Optimization / E. M. Strakhov // International Journal of Pure and Applied Mathematics. – 2013. – Vol. 82, no. 3. – PP. 503–512.