

Mathematical Subject Classification: 11N60, 11R42

УДК 511

С. С. Сергеев, Чан Тхе Винь

Одесский национальный университет имени И. И. Мечникова

МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫЕ ФУНКЦИИ, ВЗВЕШЕННЫЕ СУММАМИ КЛОСТЕРМАНА

Сергеев С. С., Чан Тхе Винь Мультипликативні функції, зважені сумами Клоостермана. Побудована асимптотична формула суматорної функції для суми Клоостермана $K(s, a; q)$, зваженої мультипликативними функціями $f(n)$ спеціального вигляду, а саме згортокою Діріхле цілком мультипликативних функцій та тотожної 1.

Ключові слова: сума Клоостермана, функції дільників, асимптотичні оцінки.

Sergeev S. S., Tran Vinh Tkhe Мультипликативные функции, взвешенные суммами Клоостермана. Построена асимптотическая формула суматорной функции для суммы Клоостермана $K(s, a; q)$, взвешенной мультипликативными функциями $f(n)$ специального вида, а именно сверткой Дирихле вполне мультипликативных функций и тождественной 1.

Ключевые слова: сумма Клоостермана, функции делителей, асимптотические оценки.

Sergeev S. S., Tran Vinh Tkhe Multiplicative function of the weighted sum Kloosterman. Constructed asymptotic formula summatory functions for Kloosterman sums $K(s, a; q)$, weighted by multiplicative function $f(n)$ of a special kind namely Dirichlet convolution of completely multiplicative functions and constant 1. This problem is significant because of the importance estimates for Kloosterman sums of a special type in progressions over Gaussian integers. Also the method of proof can be applied to obtain estimates of different kinds of the Kloosterman sums.

Key words: sum Kloosterman divisor function, asymptotic estimates.

ВВЕДЕНИЕ. Классические суммы Клоостермана возникли в аналитической теории чисел почти 90 лет тому назад и на протяжении этого периода постоянно используются как инструмент исследования во многих задачах математики и её приложений.

Применениям сумм Клоостермана в математике посвящено много работ, например, [1], [3], [5], [6]. В ряде задач, связанных с построением псевдо-случайных чисел (см. [2]) и специальных линейных кодов (см. [4], [7]), возникает необходимость вычислить суммы, содержащие суммы Клоостермана и их степени.

Целью настоящей работы является построение асимптотических оценок для сумматорных функций, ассоциированных с взвешенными суммами Клоостермана мультипликативными функциями специального вида.

Пусть $a, b, q \in \mathbb{Z}$, $q > 1$.

Рассмотрим сумму Клоостермана

$$K(a, b; q) = \sum_{S(c)} e^{2\pi i \frac{ax+bx'}{q}}$$

здесь $c = \{x \in Z_q^*, xx' \equiv 1 \pmod{q}\}$ Z_q^* как обычно обозначает приведенную систему вычетов по модулю q , а штрих при x , означает, что $xx' \equiv 1 \pmod{q}$.

Для произвольной вполне мультипликативной функции $g(n)$ определим мультипликативную функцию $f(n)$ посредством соотношения

$$f(n) = \sum_{d|n} g(d),$$

где запись $d|n$ означает, что суммирование идёт по всем делителям d числа n .

Обозначим

$$F(x) = \sum_{n \leq x} f(n) K(a, b; n)$$

и будем называть $F(x)$ взвешенной сумматорной функцией для $f(n)$.

В последующем нам понадобятся следующие стандартные обозначения:

$s = \sigma + it$ — комплексное число, $\sigma = \operatorname{Re} s$, $t = \operatorname{Im} s$;

Z_q (соответственно Z_q^*) — полная (приведенная) система вычетов по модулю q ;

$\operatorname{HOD}(a, b) = (a, b)$ — наибольший общий делитель a и b ;

$\mu(n)$ — функция Мебиуса;

$\varphi(n)$ — функция Эйлера;

$\Gamma(z)$ — гамма-функция Эйлера;

для $(x, q) = 1$ обозначаем через x' мультипликативное обратное для x по модулю q ;

$\zeta(s)$ — дзета-функция Римана;

$\zeta(s; \delta_0, \delta_1)$ — дзета-функция Лерха.

Ради удобства в формулах типа $a \equiv b \pmod{q}$ мы пишем $a \equiv b(q)$.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ. Мы приведём некоторые вспомогательные утверждения, которые нам понадобятся для получения основных результатов.

Лемма 1. Пусть $a, q \in \mathbb{Z}$, $q > 1$.

$$\sum_{x=0}^{q-1} e^{2\pi i \frac{ax}{q}} = \begin{cases} q, & \text{если } a \equiv 0 \pmod{q} \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Лемма 2 ([8], стр. 48). Пусть $\zeta(s, \delta)$, $0 < \delta \leq 1$ — дзета-функции Гурвица, определяемая для $\operatorname{Re} s > 1$ абсолютно сходящимся рядом

$$\zeta(s, \delta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n + \delta)^s}.$$

Тогда $\zeta(s, \delta)$ аналитически продолжаема на всю комплексную s -плоскость, кроме точки $s = 1$, где она имеет полюс 1-го порядка с вычетом 1. Кроме того, справедливо соотношение Гурвица для $\operatorname{Re} s < 0$

$$\zeta(s, a) = \frac{2\Gamma(1-s)}{(2\pi)^{1-s}} \left\{ \sin \frac{\pi s}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2\pi n\delta}{n^{1-s}} + \cos \frac{\pi s}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2\pi n\delta}{n^{1-s}} \right\}.$$

Пусть $\delta_0, \delta_1 \in \mathbb{R}$, $\delta_0 < \delta_1 \leq 1$. Функция Лерха в области $Re\ s > 1$ определена абсолютно сходящимся рядом

$$\xi(s; \delta_0, \delta_1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{2\pi i n \delta_1}}{(n + \delta_0)^s}.$$

Лемма 3. ([3], стр. 42). Функция Лерха аналитически продолжаема на всю комплексную s -плоскость, кроме быть может точки $s = 1$, если $\delta_1 \in \mathbb{Z}$, и в этом случае она имеет в точке $s = 1$ полюс 1-го порядка с вычетом 1. Кроме того, справедливо функциональное уравнение

$$\xi(s; \delta_0, \delta_1) = (2\pi)^{s-1} \Gamma(1-s) \left\{ e^{\frac{\pi i}{2}(1-s)} \xi(1-s, \{\delta_1\}, \delta_0) + e^{-\frac{\pi i}{2}(1-s)} \xi(1-s, \{1-\delta_1\}, \delta_0) \right\}.$$

(Здесь $\{\delta_1\}, \{1-\delta_1\}$ — дробные доли то δ_1 и $1-\delta_1$).

Следствие. В полосе $-\epsilon \leq Re\ s = \sigma \leq 1 + \epsilon$, $|Im\ s| \geq 3$ справедливы следующие оценки

$$\xi(s; 0, \delta) \ll \begin{cases} |t|^{\frac{1-\sigma}{2}} \log|t|, & \text{если } -\epsilon \leq \sigma \leq \frac{1}{2} \\ |t|^{\frac{1-\sigma}{3}} \log|t|, & \text{если } \frac{1}{2} \leq \sigma \leq 1 + \epsilon. \end{cases}$$

Напомним некоторые свойства сумм Клостермана.

Пусть $q = q_1 q_2$, $(q_1, q_2) = 1$ и пусть $q_1 \bar{q}_1 \equiv 1 \pmod{q_2}$, $q_2 \bar{q}_2 \equiv 1 \pmod{q_1}$. Тогда имеет место "квази-мультипликативность" суммы Клостермана.

$$K(a, b; q) = K(a \bar{q}_2, b \bar{q}_2; q_1) \cdot K(a \bar{q}_1, b \bar{q}_1; q_2).$$

Далее, если $(a, q) = 1$, то

$$K(a, b; q) = K(1, ab; q).$$

Лемма 4 ([6]). Пусть p — простое число. Тогда

$$|K(a, b; p^m)| \leq 2(a, b)^{\frac{1}{2}} p^{\frac{m}{2}}.$$

(Эта оценка принадлежит А. Вейлю [9]).

Лемма 5. Пусть $q = q_1 q_2$, $(q_1, q_2) = 1$, q_1 — бесквадратная часть q , q_2 — квадратно-полная часть q , и пусть $(b, q) = d = d_1 d_2$, $d_1 | q_1$, $d_2 | q_2$. Тогда для $d_1 d_2 > 1$ имеем

$$K(1, b; q) = \begin{cases} 0, & \text{если } d_2 > 1, \\ \mu(d_1) K\left(1, b \bar{d}^2; \frac{q}{d_1}\right), & \text{если } d_2 = 1, \end{cases}$$

где $d_1 \bar{d}_1 \equiv 1 \pmod{\frac{q}{d_1}}$.

Доказательство. В силу квази-мультипликативности суммы Клостермана относительно q нам достаточно рассмотреть только случай $q = p^m$, p — простое.

Если $m = 1$, то обязательно $d_2 = 1$, и тогда $(b, q) = (b, p) = p$. Так что мы имеем в этом случае

$$K(1, b; p^m) = K(1, 0; p) = \sum_{x \in Z_p^*} e^{2\pi i \frac{x}{p}} = -1 = \mu(d_1) K(1, 0; 1).$$

Пусть теперь $m \geq 2$ и пусть $(b, p^m) = p^k$, $k > 0$. Тогда $d_1 = 0$, $d_2 = p^k$. Обозначим $m_1 = \left[\frac{m}{2} \right] \geq 1$, и положим $x = x_0(1 + p^{m-m_1}y)$, где $x_0 \in Z_{p^{m-m_1}}^*$, $y \in Z_{p^{m_1}}$.

Тогда $x' = x'_0(1 - p^{m-m_1}y + p^{2(m-m_1)}y^2)$, где мультипликативное обратное x'_0 берётся по модулю p^m .

Поэтому мы можем записать (полагая $b = p^k b_0$, $(b_0, p) = 1$):

$$K(1, b_0 p^k; p^m) = \sum_{x_0 \in Z_{p^{m-m_1}}^*} \sum_{y \in Z_{p^{m_1}}} e^{2\pi i \frac{f(x_0, y)}{p^m}},$$

где $f(x_0, y) = x_0 + b_0 p^k x'_0 + p^{m-m_1} (y - b_0 p^k x'_0 p^{m-m_1} y + b_0 p^k x'_0 p^{m-m_1} y^2)$.

Поэтому, в силу леммы 1,

$$K(1, b_0 p^k; p^m) = \sum_{x_0 \in Z_{p^{m-m_1}}^*} e^{2\pi i \frac{x_0 + b_0 p^k x'_0}{p^m}} \sum_{y \in Z_{p^{m_1}}} e^{2\pi i \frac{y}{p^{m_1}}} = 0.$$

Следствие. Для любой мультипликативной функции $f(n)$ под условием $f(n) \ll n^\varepsilon$, ε — произвольное малое положительное число, имеем для $Re s > 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n) K(1, n; q)}{n^s} = \sum_{d|q_1} \mu(d) \sum_{\substack{n=1 \\ (n, q) = d}}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s} K\left(1, n\bar{d}^2; \frac{q}{d}\right),$$

где q_1 — бесквадратная часть q , а $\bar{d} \equiv 1 \pmod{\frac{q}{d}}$.

Лемма 6. Пусть $q(n)$ — вполне мультипликативная функция под условием $q(n) \ll n^\varepsilon$, $\varepsilon > 0$ — произвольно малое, и пусть $f(n) = \sum_{d|n} g(d)$.

Тогда для любого натурального $q > 1$ и целого a , $(a, q) = 1$, в области $Re s > 1$ справедливо равенство

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n) K(1, an; q)}{n^s} = \\ & = \sum_{d|q_1} \mu(d) \sum_{t_1 t_2 | \frac{q}{d}} \frac{\mu(t_1) \mu(t_2)}{t_1^s t_2^s} \sum_{S(c)} g(d) Z_g\left(s; \frac{a_1 d_1 \bar{d}}{d}\right) Z_g\left(s; \frac{a_2 d_2 \bar{d}}{d}\right), \end{aligned}$$

где $c = \left\{ a_1, a_2 \in Z_{\frac{q}{d}}^*, a_1 a_2 \equiv 1 \pmod{\frac{q}{d}} \right\}$, а функция $Z_g\left(s; \frac{c}{q}\right)$ определена рядом

$$Z_g\left(s; \frac{c}{q}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g(n) e^{2\pi i \frac{cn}{q}}}{n^s}, \quad Re s > 1, (c, q) = 1.$$

Доказательство. Пусть $q = q_1 q_2$, $(q_1, q_2) = 1$, q_1 — бесквадратная часть q , и пусть $d \setminus q_1$. Тогда $(d, \frac{q}{d}) = 1$, а потому существует \bar{d} такое, что $d\bar{d} \equiv 1 \pmod{\frac{q}{d}}$. Принимая во внимание вполне-мультипликативность функции $q(n)$ и следствие из леммы 5, получаем для $d \setminus q_1$

$$\begin{aligned}
& \sum_{S(c_1)} \sum_{d_1 d_2 = d} g(d_1) g(d_2) \sum_{S(c_2)} \frac{g(n_1) g(n_2)}{(n_1 d_1)^s (n_2 d_2)^s} e^{2\pi i \frac{a_1 n_1 d_1 \bar{d} + a_2 n_2 d_2 \bar{d}}{d}} = \\
& = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} \sum_{d_1 d_2 = d} g(d) \sum_{S(c_3)} g(n_1) g(n_2) \sum_{S(c_1)} e^{2\pi i \frac{a_1 d_1 n_1 \bar{d} + a_2 n_2 d_2 \bar{d}}{d}} = \\
& \quad (n, q) = d \\
& = \sum_{n=1}^{\infty} f(n) \cdot n^{-s} K\left(1, a \cdot n \cdot \bar{d}^2; \frac{q}{d}\right). \\
& \quad (n, q) = d
\end{aligned} \tag{1}$$

С другой стороны, левая часть равенства (1) равна

$$\begin{aligned}
& \sum_{S(c_1)} \sum_{d_1 d_2 = d} g(d_1) g(d_2) \sum_{S(c_2)} \frac{g(n_1) g(n_2)}{(n_1 n_2)^s} e^{2\pi i \frac{a_1 n_1 d_1 \bar{d} + a_2 n_2 d_2 \bar{d}}{d}} = \\
& = \sum_{S(c_1)} \sum_{d_1 d_2 = d} \sum_{t_1, t_2 \setminus \frac{q}{d}} \frac{\mu(t_1) \mu(t_2)}{t_1^s t_2^s} g(t_1 t_2) \sum_{n_1, n_2 = 1} g(n_1) \frac{e^{2\pi i \frac{a_1 n_1 t_1 d_1 \bar{d}}{d}}}{n_1^s} \cdot \\
& \quad \frac{e^{2\pi i \frac{a_2 n_2 t_2 d_2 \bar{d}}{d}}}{n_2^s} = \\
& = \sum_{S(c_1)} \sum_{t_1, t_2 \setminus \frac{q}{d}} \frac{\mu(t_1)}{t_1^s} \cdot \frac{\mu(t_2)}{t_2^s} \sum_{d_1 d_2 = d} Z_g\left(s; \frac{a_1 t_1 d_1 \bar{d}}{d}\right) Z_g\left(s; \frac{a_2 t_2 d_2 \bar{d}}{d}\right),
\end{aligned} \tag{2}$$

где

$$\begin{aligned}
c_1 &= \left\{ a_1, a_2 \in Z_{\frac{q}{d}}^*, a_1 a_2 \equiv 1 \pmod{\frac{q}{d}} \right\}, \\
c_2 &= \left\{ (n_1, n_2) = 1, (n_1, \frac{q}{d}) = (n_2, \frac{q}{d}) = 1 \right\}, \\
c_3 &= \{ n_1, n_2, n_1 d_1 \cdot n_2 d_2 = n \}.
\end{aligned}$$

Теперь, умножая (1), (2) на $\mu(d)$ и суммируя по всем $d, d|q_1$, мы, в силу леммы 5 и хорошо известного тождества Сельберга–Кузнецова [5] получаем требуемое утверждение.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ. Из доказанной выше леммы 6 видно, что для получения хорошей асимптотической оценки сумматорной функции, ассоциированной с функцией

$f(n) K\left(1, an; \frac{q}{d}\right)$, важно иметь определённую информацию о дзета-подобной функции $Z_g\left(s; \frac{q}{d}\right)$. Нетрудно заметить что, если в качестве $g(n)$ взять вполне мультипликативную функцию вида $g(n) = \chi(n) d^\alpha$, где $\chi(n)$ — характер Дирихле по некоторому модулю D , а α — фиксированное комплексное число, то функцию

$Z_g\left(s; \frac{c}{q}\right)$ удаётся выразить через дзета-функцию Римана $\zeta(s)$ и L — функцию Дирихле $L(s, \chi_1)$ с некоторым характером Дирихле. В этой статье мы рассмотрим два случая $g(n) = 1, n \in \mathbb{N}$, и $g(n) = \chi_4(n)$, где $\chi_4(n)$ есть неглавный характер Дирихле по модулю 4.

Тогда учитывая, что $\sum_{d|n} g(d) = \sum_{d|n} X_4(d) = \frac{r(n)}{4}$, где $r(n)$ — количество представлений n суммой двух квадратов целых чисел, мы построим асимптотическую формулу для суммы

$$\sum_{n \leq x} r(n)K(1, an; q), \quad a \in \mathbb{Z}.$$

$\sum_{d|n} d^\alpha = \sigma_\alpha(n)$ — сумма всех делителей n в степени α , $\sigma_0(n) = \tau(n)$,

$$\sum d^\alpha \chi_4(n) = \frac{r(n)}{4}, \alpha = 0.$$

И тогда приходим, соответственно, к сумме вида

$$\sum_{n \leq x} \tau(n)K(1, an; q),$$

где $\tau(n)$ — число делителей n .

Оба этих случая рассматриваются одинаково, но случай $\tau(n)$ технически проще. Мы этот случай в дальнейшем и рассматриваем.

Таким образом, в области $Re s > 0$ лемма 3 даёт

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau(n)K(1, an; q)}{n^s} = \sum_{d|q_1} \frac{\mu(d)F(s; d, q)}{d^s}, \quad (3)$$

где

$$F(s; d, q) = \sum_{t_1 t_2 | \frac{q}{d}} \frac{\mu(t_1)\mu(t_2)}{(n_1 n_2)^s} \sum_{a_1 a_2 \equiv 1 \left(\frac{q}{d}\right)} \sum_{d_1 d_2 = d} \zeta\left(s; 0, \frac{a_1 d_1 t_1 \bar{d}}{d}\right) \zeta\left(s; 0, \frac{a_2 d_2 t_2 \bar{d}}{d}\right).$$

В силу леммы 3, заключаем, что $F(s)$ аналитически продолжаема на всю s — плоскость, кроме быть может точки $s = 1$, где $F(s)$ может иметь полюс 2-го порядка. Поэтому из (3) по формуле Перрона находим

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq x} \tau(n)K(1, an; q) &= res_{s=1}(F(s)x^s s^{-1}) + res_{s=0}(F(s)x^s s^{-1}) + \\ &+ \frac{1}{2\pi i} \int_{-\varepsilon - iT}^{-\varepsilon + iT} F(s) \frac{x^s}{s} ds + O\left(\int_{-\varepsilon}^c |F(\sigma \pm iT)| \frac{x^\sigma}{T} d\sigma\right) + O\left(\frac{x^c}{T(c-1)^2} q^{\frac{1}{2}} \tau(q)\right), \quad (4) \end{aligned}$$

где $c > 1, T > 1, \varepsilon > 0$ будут определены позднее.

(Здесь мы учли, что коэффициенты производящего ряда Дирихле для $\tau(n)K(1, an; q)$ оцениваются величиной $\tau(n)q^{\frac{1}{2}}\tau(q)$.)

Для вычисления интегралов в (4) нам необходима оценка функции $F(s)$ в полосе $-\epsilon \leq \operatorname{Re} s \leq 1 + \epsilon$, $|\operatorname{Im} s| > 3$.

Из (3) мы сразу имеем

$$F(1 + \epsilon + it) \ll \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau(n)|K(1, an; q)|}{n^{1+\epsilon}} \ll \tau(q)q^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\epsilon}. \quad (5)$$

Кроме того, следствие леммы 3 дает для $\operatorname{Re} s = -\epsilon$

$$F(s, d, q) \ll |t|^{1+\epsilon} \frac{q}{d} \tau(d) \tau^2\left(\frac{q}{d}\right) \log^2 |t|.$$

А потому

$$F(-\epsilon + it) \ll |t|^{1+\epsilon} q \tau^3(q) \log^2 |t|. \quad (6)$$

Теперь, в силу принципа Фрагмена–Линделёфа, находим

$$F(s) \ll t^{\frac{1-\sigma}{1+2\epsilon}} q^{\frac{1+\sigma+3\epsilon}{2(1+2\epsilon)}} \tau^3(q) \log^2 |t|. \quad (7)$$

Поэтому для $c = 1 + \epsilon$ имеем

$$\int_{-\epsilon}^{1+\epsilon} F(s) \frac{x^s}{s} ds \ll \max\left(\frac{1}{\epsilon} \tau(q) q^{\frac{1}{2}} \frac{x}{T}, q \tau^3(q) (\log^2 T) T^\epsilon\right). \quad (8)$$

Далее, из функционального уравнения для функции Лерха (см. лемма 2) на прямой $\operatorname{Re} s = -\epsilon$ получаем:

$$\begin{aligned} F(s) &= \sum_{d|q} \frac{\mu(d)F(s; d, q)}{d^s} = \\ &= \sum_{d|q_1} \frac{\mu(d)}{d^s} \sum_{t_1 t_2 | \frac{q}{d}} \frac{\mu(t_1)\mu(t_2)}{(t_1 t_2)^s} \sum_{a_1 a_2 \equiv 1 \pmod{\frac{q}{d}}} \sum_{d_1 d_2 = d} \frac{\Gamma^2(1-s)}{(2\pi)^{2-2s}} \times \\ &\times \prod_{j=1}^2 \left[e^{\frac{\pi i(1-s)}{2}} \zeta\left(1-s, \left\{\frac{a_j d_j t_j \bar{d}}{d}\right\}, 0\right) + e^{-\frac{\pi i(1-s)}{2}} \zeta\left(1-s; 1 - \left\{\frac{a_j d_j t_j \bar{d}}{d}\right\}, 0\right) \right]. \end{aligned} \quad (9)$$

(здесь $\{u\}$ означает дробную долю u).

Поскольку $\operatorname{Re}(1-s) = 1 + \epsilon > 0$, то подставляя вместо $\zeta(1-s, x, 0)$ представление в виде абсолютно сходящегося ряда Дирихле и проводя стандартные преобразования, мы придем к равенству

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-\epsilon-iT}^{-\epsilon+iT} F(s) \frac{x^s}{s} ds = \sum_{d|q_1} \mu(d) \sum_{t_1 t_2 | \frac{q}{d}} \mu(t_1)\mu(t_2) \sum_{S(c_1)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} I(n, a, t, d), \quad (10)$$

где

$$I(n, a, t, d) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\epsilon-iT}^{-\epsilon+iT} \Gamma^2(1-s) \sum_{S(c_2)} e^{\frac{\pi i(1-s)}{2}(\pm 1 \pm 1)} \left(\frac{xn_1 n_2 \pi^2}{q^2 t_1 t_2} \right) \frac{ds}{s}.$$

$$c_1 = \left\{ a_1 a_2 \equiv 1 \left(\frac{q}{d} \right); d_1, d_2 \in \mathbb{N}, d_1 d_2 = d \right\}.$$

$$c_2 = \left\{ n = n_1 n_2, n_j = \pm a_j d_j t_j \bar{d} \pmod{\frac{q}{d}}, j = 1, 2 \right\}.$$

Очевидно, что интеграл $I(n, a, t, d)$ есть сумма четырех интегралов (как результат вычисления произведения в (9)), из них два, которым соответствует выбор знаков $+1, +1$ или $-1, -1$, дают наибольший вклад в оцениваемый интеграл $\int F(s) \frac{x^s}{s} ds$.

Обозначим $y = \frac{\pi^2 x n_1 n_2}{q^2 t_1 t_2}$. Тогда интеграл в (10) принимает вид

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-\epsilon-iT}^{-\epsilon+iT} \Gamma^2(1-s) e^{\frac{\pi s}{2}} \frac{y^s}{s} ds.$$

Последний интеграл возникает в классической задаче делителей Дирихле. Его оценка получена в ([8], с. 314-317).

Поэтому проводя стандартные вычисления, получаем

$$I(n, a, t, d) \ll \begin{cases} y^{-\epsilon}, & \text{если } n > N = \frac{T^2}{4\pi^2 x}, \\ y^{\frac{1}{4}}, & \text{если } n \leq N. \end{cases} \quad (11)$$

Следовательно из (10), (11)

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-\epsilon-iT}^{-\epsilon+iT} F(s) \frac{x^s}{s} ds \ll q^{\frac{1}{2}} T^{\frac{1}{2}} \tau^2(q) \log^2 T. \quad (12)$$

Осталось вычислить вычеты функции $F(s) \frac{x^s}{s}$ в точках $s = 0$ и $s = 1$. Мы имеем

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_{s=0} \left(F(s) \frac{x^s}{s} \right) &= \sum_{S(c)} \frac{\mu(t_1) \mu(t_2)}{t_1 t_2} \sum_{a_1 a_2 \equiv 1 \left(\frac{q}{d} \right)} \zeta \left(0; 0, \frac{a_1 d_1 t_1 \bar{d}}{q} \right) \times \\ &\times \zeta \left(0; 0, \frac{a_2 d_2 t_2 \bar{d}}{q} \right) = O(q\tau^2(q)). \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_{\lim_{s \rightarrow 1}} \left(F(s) \frac{x^s}{s} \right) &= \\ &= \sum_{S(c)} \frac{\mu(t_1) \mu(t_2)}{t_1 t_2} \sum_{a_1 a_2 \equiv 1 \left(\frac{q}{d} \right)} \operatorname{res}_{\lim_{s \rightarrow 1}} \left(\zeta \left(s; 0, \frac{a_1 d_1 t_1 \bar{d}}{q} \right) \zeta \left(s; 0, \frac{a_2 d_2 t_2 \bar{d}}{q} \right) \frac{x^s}{s} \right), \end{aligned} \quad (14)$$

где в (13) и (14) $c = \{d|q_1; d_1 d_2 = d; t_1 t_2 | \frac{q}{d}\}$.

Заметим, что $\zeta(s; 0; \delta)$ имеет особую точку в т. $s = 1$ только в случае $\delta \in \mathbb{Z}$. Но так как $\text{НОД}(a_j d_j \bar{d}, \frac{q}{d}) = 1$, то вычет может быть не равным нулю при $q_2 > 1$, если только $t_1 = q_2$ или $t = q_2$ (вспомним, что q_2 — квадратно полная часть q , следовательно $\mu(t_1) \mu(t_2) = 0$), а значит соответствующие слагаемые обратятся в нуль. Следовательно, для $q_2 > 1$ вклад в вычеты равен нулю. Если $q_2 = 1$, т.е. $q_1 = q$, то при $t_1 = \frac{q}{d}$ или $t_2 = \frac{q}{d}$ вычет подынтегральной функции отличен от нуля. И мы имеем

$$\begin{aligned}
\operatorname{res}_{\lim_{s=1}} \left(F(s) \frac{x^s}{s} \right) &= \sum_{d|q} \sum_{d \in \mathbb{Z}_q^*} \left[\left(\frac{\mu\left(\frac{q}{d}\right)}{\operatorname{frac} q d} \right)^2 (x \log x + (2\gamma - 1)x + \right. \\
&+ x \sum_{\substack{t|\frac{q}{d} \\ t \neq \frac{q}{d}}} \zeta \left(1; 0, \frac{dt\bar{d}}{d} \right) \left. \right) \Bigg] = \prod_{r|q} \left(1 + \frac{p-1}{p^2} \right) (x \log x + (2\gamma - 1)x + \\
&+ x \sum_{d|q} \sum_{l \in \mathbb{Z}_q^*} \sum_{\substack{t|\frac{q}{d} \\ t \neq \frac{q}{d}}} \zeta \left(1; 0, \frac{lt\bar{d}}{d} \right) \Bigg), \tag{15}
\end{aligned}$$

где γ — постоянная Эйлера.

Теперь, собирая оценки (8), (10), (11) и полагая $T = x^{\frac{2}{3}}$, $\epsilon = \frac{1}{\log x}$, $c = 1 + \frac{1}{\log x}$, мы, в силу (13), (15) получаем утверждение следующей теоремы.

Теорема. Пусть q — натуральное число, $q = q_1 q_2$, где $(q_1, q_2) = 1$, q_1 — бесквадратная часть q , а q_2 — квадратно полная часть q . Тогда для $(a, q) = 1$ и $x \rightarrow \infty$ справедлива асимптотическая формула

$$\sum_{n \leq x} \tau(n) K(1, an; q) = A(x, q) + O(x^{\frac{1}{3}} q^{\frac{1}{2}} \tau^3(q) \log^2 x),$$

где $A(x, q) = \begin{cases} 0, & \text{если } q_2 > 1, \\ (15), & \text{если } q_2 = 1. \end{cases}$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ. Изложенное выше доказательство теоремы для $(a, q) = 1$ легко переложить на случай $(a, q) > 1$, при этом порядок роста (относительно x), сохраняется, но изменяются константы в (15).

Заметим, что утверждение, аналогичное доказанной теореме, можно получить в случае $g(n) = \chi_k(n)$, где $\chi_k(n)$ неглавный характер модуля k .

1. **Bruggeman R. W.** Fourier coefficients of curp forms [text] / Bruggeman R. W. // Invent. Math. — 1978. — 47 (1). — P. 29–39.
2. **Eichenamer-Herrmann I.** Kloosterman-type sums and the discrepancy of nonoverlapping pairs of inversive congruential pseudorandom numbers [text] / Eichenamer-Herrmann I., Niederreiter H. // Acta Arith. — 1993. — 65 (2). — P. 185–194.
3. **Ivie A.** The Riemann Zeta-Function [text] / Ivie A. — Mineola; New York, 1985. — P. 565.

4. **Kim D. S.** Codes associated with special linear groups and power moments of multi-dimensional Kloosterman sums [text] / Kim D. S. // *Ann. Mat. Pura Appl.* – 2011. – 190. – P. 61–76.
5. **Кузнецов Н. В.** Гипотеза Петерсона для параболических форм веса нуль и гипотеза Линника, I. Суммы Клоостермана [текст] / Кузнецов Н. В. // *Мат. сб.* – 1980. – Т. III (153). – P. 334–383.
6. **Мальшев А. В.** Обобщенные суммы Клоостермана и их оценки [текст] / Мальшев А. В. // *Вестник Ленингр. унив. Сер. мат., тех. и астрон.* – 1960. – 15 (3). – P. 59–75.
7. **Moisio M.** The moments of a Kloosterman sums and the weight distribution a Zetterberg-type cyclic code [text] / Moisio M. // *IEEE Trans. inform. Theory.* – 2007. – 53. – P. 813–817.
8. **Титчмарш Е.** Теория дзета-функции Римана [текст] / Титчмарш Е. – М. 1953. – С. 406.
9. **Weil A.** On the some exponential sums [text] / Weil A. // *I. London Math Soc.* (2). – 1948. – V. 3. – P. 204–207.