Mathematical Subject Classification: 65C10, 11K45, 11L99
УДК 511.338

О. А. Гунявий
Одеський національний університет імені І. І. Мечникова

НАБЛИЖЕННЯ ДРОБОВИХ ЧАСТИН ТРИГОНОМЕТРИЧНИМИ ПОЛІНОМАМИ

Гунявий О. А. Наближення дробових частин тригонометричними поліномами. У роботі будується наближення дробових частин при допомозі тригонометричного полінома мінімального степеня.
Ключові слова: дробові частини, ряд Фур'є, тригонометричний ряд, тригонометрична сума.

Гунявый О. А. Приближение дробных долей тригонометрическими многочленами. В работе строится приближение дробных долей при помощи тригонометрического многочлена минимальной степени.
Ключевые слова: дробные доли, ряд Фурье, тригонометрический ряд, тригонометрическая сумма.

Gunyavy O. A. Approximation of the fractional part with help of trigonometric polynomials. In the article approximation is built to the fractional part through the trigonometric polynomial of minimum degree.
Key words: fractional part, Fourier series, trigonometric series, trigonometric sum.

Вступ. При підрахунку кількості цілих точок в різноманітних областях доводиться оцінювати суми у вигляді $\sum\limits_{a<n\le b}\psi(f(n))$, де

$$\psi(x) = \{x\} - 1/2,$$

а $\{x\}$– дробова частина дійсного числа x.

Один з методів розгляду таких сум — це заміна функції $\psi(x)$ тригонометричним рядом

$$\psi(x) = \sum_{\substack{m=-M \\ m\neq 0}}^{M} \frac{e^{-2\pi imx}}{2\pi im} + E_M(x),$$

де M обирається настільки великим, щоб похибка $E_M(x)$ була достатньо малою. Подробиці можна знайти, наприклад, в [1] або в [2]. Таким чином задача зводиться до отримання оцінок тригонометричних сум у вигляді

$$\sum_{a<n\le b} e^{2\pi imf(n)}.$$

Але для похибки $E_M(x)$ виконується оцінка $E_M(x) \ll \min\left\{1, \frac{1}{M\|x\|}\right\}$, де $\|x\|$– відстань до найближчого до x цілого числа. Таким чином, якщо ми хочемо отримати похибку $E_M(x) \ll 1/E$ для $1 \ll E$, то ми змушені обрати $M \gg\ E/\|x\|$.

Тобто, функція $\psi(x)$ замінюється тригонометричним поліномом, ступінь якого оцінюється як $E/\|x\|$. В цій роботі показано, що функцію $\psi(x)$ можна замінити з похибкою, не більшою за $1/E$, тригонометричним поліномом, ступінь якого оцінюється як $\ln E/\|x\|$.

Основні результати. Отже, отримаємо наступний результат.

Теорема. *Нехай X — така множина дійсних чисел, що*

$$\forall x \in X \quad \|x\| \geq 1/D \ ,$$

де $D \geq 2$. Тоді $\forall E > 2$ існує тригонометричний поліном

$$T_d(x) = \sum_{0<|k|\leq d} a_m e^{-2\pi ikx}$$

степуня $d \ll D \ln E$, такий, що

$$\forall x \in X \quad \psi(x) - T_d(x) \ll 1/E \ .$$

Перед доведенням теореми отримаємо допоміжні результати.

Лема 1. *Нехай $K(t)$– така функція, що*

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad K(t+1) = K(t) = K(-t) \ , \int_0^1 K(t)dt = 1.$$

Нехай $\psi(t) = \{t\} - 1/2$, де $\{t\}$– дробова частина дійсного числа t та

$$S(x) = \int_0^1 \psi(x+t)K(t)dt.$$

Тоді, функція $S(x)$ є наближенням до функції $\psi(x)$. До того ж

$$\psi(x) - S(x) = \int_{1/2}^x K(t)dt.$$

Доведення. Для $t \notin \mathbb{Z}$ $\psi(1-t) = \psi(-t) = -\psi(t)$. Тоді, з визначення функції $S(x)$ та властивостей функції $K(t)$

$$S(1-x) = S(-x) = \int_0^1 \psi(-x+t)K(t)dt =$$
$$= -\int_0^1 \psi(x-t)K(t)dt = -\int_{-1}^0 \psi(x+t)K(-t)dt =$$
$$= -\int_0^1 \psi(x+t)K(-t)dt = -\int_0^1 \psi(x+t)K(t)dt = -S(x),$$

тобто $S(1-x)=S(-x)=-S(x)$. Нехай $x\in[0,1)$, тоді

$$\psi(x+t)-\psi(x)=\{\ t:t\in[0,1-x);\quad t-1:t\in[1-x,1]\ \},$$

крім того $\psi(x)=\int\limits_0^1\psi(x)K(t)dt$. Отже, для $x\in[0,1)$

$$S(x)-\psi(x)=\int\limits_0^1\psi(x+t)K(t)dt-\int\limits_0^1\psi(x)K(t)dt=$$

$$=\int\limits_0^1(\psi(x+t)-\psi(x))K(t)dt=$$

$$=\int\limits_0^{1-x}tK(t)dt+\int\limits_{1-x}^1(t-1)K(t)dt=\int\limits_0^1tK(t)dt-\int\limits_{1-x}^1K(t)dt.$$

Аналогічно для $x\in(0,1)$

$$S(1-x)-\psi(1-x)=-(S(x)-\psi(x))=\int\limits_0^1tK(t)dt-\int\limits_x^1K(t)dt.$$

Віднімаючи від однієї рівності іншу, отримуємо

$$2(S(x)-\psi(x))=\int\limits_x^1K(t)dt-\int\limits_{1-x}^1K(t)dt=\int\limits_x^{1-x}K(t)dt=2\int\limits_x^{1/2}K(t)dt,$$

звідки $\psi(x)-S(x)=\int\limits_{1/2}^xK(t)dt$, що і потрібно було довести.

Зауваження 1. *Нехай*

$$D_n(t)=\sum_{k=-n}^n e^{2\pi ikt}=1+2\sum_{k=1}^n\cos 2\pi kt=\frac{\sin\pi t(2n+1)}{\sin\pi t}-$$

ядро Діріхле для $n\in\mathbb{N}$.

Очевидно, $\forall t\in\mathbb{R}\quad D_n(t+1)=D_n(t)=D_n(-t)$, $\int\limits_0^1D_n(t)dt=1$. *Тоді якщо взяти* $S_n(x)=\int\limits_0^1\psi(x+t)D_n(t)dt$, *то*

$$\psi(x)-S_n(x)=\int\limits_{1/2}^xD_n(t)dt.$$

А для інтеграла можна отримати наступну оцінку

$$\int\limits_{1/2}^{x} D_n(t)dt \ll \min\left\{1, \frac{1}{n\|x\|}\right\},$$

де $\|x\|$ *— відстань до найближчого від* x *цілого числа.*

Зауваження 2. *Зафіксуємо* $m, n \in \mathbb{N}$ *та розглянемо функцію*

$$D_n^{2m}(t) = \left(\frac{\sin \pi t(2n+1)}{\sin \pi t}\right)^{2m} -$$

тригонометричний поліном степуня $2mn$*. Позначимо* $K_{n,m}(t) = \frac{D_n^{2m}(t)}{a(n,m)}$*, де* $a(n,m) = \int\limits_0^1 D_n^{2m}(t)dt$*. Тоді* $\forall t \in \mathbb{R} \quad K_{n,m}(t+1) = K_{n,m}(t) = K_{n,m}(-t)$ *,* $\int\limits_0^1 K_{n,m}(t)dt = 1$*, і якщо*

$$S_{n,m}(x) = \int\limits_0^1 \psi(x+t)K_{n,m}(t)dt,$$

то $\psi(x) - S_{n,m}(x) = \int\limits_{1/2}^{x} K_{n,m}(t)dt = \frac{1}{a(n,m)} \int\limits_{1/2}^{x} D_n^{2m}(t)dt$*. Таким чином, щоб оцінити похибку* $\psi(x) - S_{n,m}(x)$*, потрібно оцінити зверху інтеграл* $\int\limits_{1/2}^{x} D_n^{2m}(t)dt$ *та оцінити знизу число* $a(n,m)$*.*

Лема 2 (про оцінку суми $\sum\limits_{k=1}^{m} \frac{q^k}{\sqrt{k}}$)**.** *Нехай* $q > 0$*, тоді*

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{q^k}{\sqrt{k}} \ll \begin{cases} q: & \ln q \le -1; \\ 1/\sqrt{|\ln q|}: & -1 \le \ln q \le -1/m; \\ \sqrt{m}: & 0 \le |\ln q| \ll 1/m; \\ q^m/(\sqrt{m}\ln q): & 1/m \ll \ln q \ll 1; \\ q^m/\sqrt{m}: & 1 \ll \ln q. \end{cases}$$

Доведення. Для $\ln q \le -1$

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{q^k}{\sqrt{k}} < \sum_{k=1}^{m} q^k < \frac{q}{1-q} \ll q.$$

Для $0 \le |\ln q| \ll 1/m$

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{q^k}{\sqrt{k}} \ll \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{\sqrt{k}} \ll \sqrt{m}.$$

Для $1/m \ll |\ln q| \ll 1$

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{q^k}{\sqrt{k}} = \sum_{k\le 1/|\ln q|} \frac{q^k}{\sqrt{k}} + \sum_{1/|\ln q|<k\le m} \frac{q^k}{\sqrt{k}}.$$

Але

$$\sum_{k\le 1/|\ln q|} \frac{q^k}{\sqrt{k}} \ll \sum_{k\le 1/|\ln q|} \frac{1}{\sqrt{k}} \ll \frac{1}{\sqrt{|\ln q|}}.$$

Якщо $\ln q < 0$, то функція $\frac{q^t}{\sqrt{t}}$ спадає, і тоді

$$\sum_{a<k\le m} \frac{q^k}{\sqrt{k}} \ll \frac{q^a}{\sqrt{a}} + \int_a^m \frac{q^t}{\sqrt{t}} dt.$$

А

$$\int_a^m \frac{q^t}{\sqrt{t}} dt = \left.\frac{q^t}{\sqrt{t}\ln q}\right|_{t=a}^{m} + \frac{1}{2\ln q}\int_a^m \frac{q^t}{t^{3/2}} dt < \frac{q^a}{\sqrt{a}|\ln q|},$$

звідки

$$\sum_{a<k\le m} \frac{q^k}{\sqrt{k}} \ll \frac{q^a}{\sqrt{a}|\ln q|}.$$

Обравши $a = 1/|\ln q|$, отримуємо оцінку

$$\sum_{1/|\ln q|<k\le m} \frac{q^k}{\sqrt{k}} \ll \frac{1}{\sqrt{|\ln q|}},$$

звідки для $-1 \ll \ln q \ll -1/m$

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{q^k}{\sqrt{k}} \ll \frac{1}{\sqrt{|\ln q|}}.$$

Якщо $1/m \ll \ln q \ll 1$ та $\frac{1}{2\ln q} \le t$, то функція $\frac{q^t}{\sqrt{t}}$ зростає. Також для $\frac{1}{2\ln q} < a$

$$\sum_{a<k\le m} \frac{q^k}{\sqrt{k}} \ll \frac{q^m}{\sqrt{m}} + \int_a^m \frac{q^t}{\sqrt{t}} dt.$$

Але

$$S(a) = \int_a^m \frac{q^t}{\sqrt{t}} dt = \left.\frac{q^t}{\sqrt{t}\ln q}\right|_{t=a}^{m} + \frac{1}{2\ln q}\int_a^m \frac{q^t}{t^{3/2}} dt < \frac{q^m}{\sqrt{m}\ln q} + \frac{1}{2a\ln q} S(a),$$

звідки

$$S(a) \ll \frac{q^m}{\sqrt{m}\ln q\left(1 - \frac{1}{2a\ln q}\right)}.$$

Таким чином,

$$S\left(\frac{1}{\ln q}\right) = \int\limits_{1/\ln q}^{m} \frac{q^t}{\sqrt{t}}dt \ll \frac{q^m}{\sqrt{m}\ln q\left(1-\frac{1}{2}\right)} \ll \frac{q^m}{\sqrt{m}\ln q},$$

і тоді

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{q^k}{\sqrt{k}} \ll \frac{1}{\sqrt{\ln q}} + \frac{q^m}{\sqrt{m}\ln q} \ll \frac{q^m}{\sqrt{m}\ln q}.$$

Аналогічно, для $1 \ll \ln q$

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{q^k}{\sqrt{k}} \ll \frac{q^m}{\sqrt{m}} + \int\limits_{1}^{m} \frac{q^t}{\sqrt{t}}dt = \frac{q^m}{\sqrt{m}} + S(1).$$

Але

$$S(1) = \int\limits_{1}^{m} \frac{q^t}{\sqrt{t}}dt \ll \frac{q^m}{\sqrt{m}\ln q\left(1-\frac{1}{2\ln q}\right)} \ll \frac{q^m}{\sqrt{m}\ln q},$$

звідки

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{q^k}{\sqrt{k}} \ll \frac{q^m}{\sqrt{m}}.$$

Збираючи разом всі оцінки, отримуємо остаточний результат.

Лема 3 (про оцінку інтеграла $\int\limits_{1/2}^{x} D_n^{2m}(t)dt$)**.** *Для $x \in (0,1)$ справедливі наступні оцінки:*

для $\psi(x) \ll 1/(n\sqrt{m})$

$$\int\limits_{1/2}^{x} D_n^{2m}(t)dt \ll \psi(x);$$

для $1/(n\sqrt{m}) \ll \psi(x) \ll 1/\sqrt{m}$

$$\int\limits_{1/2}^{x} D_n^{2m}(t)dt \ll \frac{\psi(x)}{\sqrt{m}} + \frac{1}{n\sqrt{m}};$$

для $1/\sqrt{m} \ll \psi(x)$

$$\int\limits_{1/2}^{x} D_n^{2m}(t)dt \ll \frac{1}{m\sqrt{m}\psi(x)\sin^{2m-1}\pi x} + \frac{1}{n\sqrt{m}\sin^{2m}\pi x}.$$

Доведення. Нехай для визначеності, $1/2 < x < 1$. Далі оцінимо

$$\int\limits_{1/2}^{x} D_n^{2m}(t)dt = \int\limits_{1/2}^{x} \left(\frac{\sin \pi t(2n+1)}{\sin \pi t}\right)^{2m} dt.$$

Отже, маємо

$$\frac{1}{2}+\frac{k}{2n+1}\le x\Leftrightarrow 2n+1+2k\le 2x(2n+1)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2k\le(2x-1)(2n+1)\Leftrightarrow k\le\psi(x)(2n+1).$$

Позначимо $x_k=\frac{1}{2}+\frac{k}{2n+1}$, $K=[\psi(x)(2n+1)]$ — ціла частина, тоді

$$\int\limits_{1/2}^{x}D_n^{2m}(t)dt=\sum_{k=1}^{K}\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k}D_n^{2m}(t)dt+\int\limits_{x_K}^{x}D_n^{2m}(t)dt.$$

Далі

$$\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k}D_n^{2m}(t)dt>\frac{1}{\sin^{2m}\pi x_{k-1}}\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k}\sin^{2m}\pi t(2n+1)dt;$$

$$\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k}D_n^{2m}(t)dt<\frac{1}{\sin^{2m}\pi x_k}\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k}\sin^{2m}\pi t(2n+1)dt.$$

Але $x_k-x_{k-1}=\frac{1}{2n+1}$ та

$$\sin^{2m}\pi t(2n+1)=\frac{C_{2m}^m}{4^m}+\frac{2}{4^m}\sum_{r=1}^{m}(-1)^rC_{2m}^{m-r}\cos 2\pi tr(2n+1),$$

звідки $\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k}\cos 2\pi tr(2n+1)dt=0$. Таким чином,

$$\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k}\sin^{2m}\pi t(2n+1)dt=\frac{C_{2m}^m}{4^m(2n+1)}.$$

Отже

$$\int\limits_{1/2}^{x}D_n^{2m}(t)dt<\frac{C_{2m}^m}{4^m(2n+1)}\sum_{k=1}^{K}\frac{1}{\sin^{2m}\pi x_k}+\int\limits_{x_K}^{x}D_n^{2m}(t)dt.$$

Для C_{2m}^m користуємось оцінкою

$$C_{2m}^m=\frac{4^m}{\sqrt{\pi m}}(1+O(1/m)),$$

яку можна отримати з формули Стірлінга для $\ln\Gamma(s)$.

Аналогічно

$$\int\limits_{x_K}^{x}D_n^{2m}(t)dt<\frac{1}{\sin^{2m}\pi x}\int\limits_{x_K}^{x_{K+1}}\sin^{2m}\pi t(2n+1)dt=$$

$$=\frac{C_{2m}^m}{4^m(2n+1)\sin^{2m}\pi x}\ll\frac{1}{n\sqrt{m}\sin^{2m}\pi x}.$$

Таким чином,

$$\int\limits_{1/2}^{x} D_n^{2m}(t)dt < \frac{C_{2m}^m}{4^m(2n+1)} \sum_{k=1}^{K} \frac{1}{\sin^{2m}\pi x_k} + O\left(\frac{1}{n\sqrt{m}\sin^{2m}\pi x}\right).$$

З іншого боку,

$$\int\limits_{1/2}^{x} D_n^{2m}(t)dt > \frac{C_{2m}^m}{4^m(2n+1)} \sum_{k=1}^{K} \frac{1}{\sin^{2m}\pi x_{k-1}} =$$

$$= \frac{C_{2m}^m}{4^m(2n+1)} \left(\sum_{k=1}^{K} \frac{1}{\sin^{2m}\pi x_k} + 1 - \frac{1}{\sin^{2m}\pi x_K}\right) =$$

$$= \frac{C_{2m}^m}{4^m(2n+1)} \sum_{k=1}^{K} \frac{1}{\sin^{2m}\pi x_k} + O\left(\frac{1}{n\sqrt{m}\sin^{2m}\pi x}\right).$$

Отже,

$$\int\limits_{1/2}^{x} D_n^{2m}(t)dt = \frac{C_{2m}^m}{4^m(2n+1)} \sum_{k=1}^{K} \frac{1}{\sin^{2m}\pi x_k} + O\left(\frac{1}{n\sqrt{m}\sin^{2m}\pi x}\right).$$

Крім того,

$$\sum_{k=1}^{K} \frac{1}{\sin^{2m}\pi x_k} = (2n+1)\int\limits_{1/2}^{x} \frac{dt}{\sin^{2m}\pi t} + O\left(\frac{1}{\sin^{2m}\pi x}\right).$$

Тоді остаточно

$$\int\limits_{1/2}^{x} D_n^{2m}(t)dt = \frac{C_{2m}^m}{4^m} \int\limits_{1/2}^{x} \frac{dt}{\sin^{2m}\pi t} + O\left(\frac{1}{n\sqrt{m}\sin^{2m}\pi x}\right).$$

Позначимо далі

$$I_m(x) = \int\limits_{1/2}^{x} \frac{dt}{\sin^{2m}\pi t}.$$

Тоді

$$I_m(x) = \int\limits_{1/2}^{x} \frac{\sin^2\pi t + \cos^2\pi t}{\sin^{2m}\pi t}dt = I_{m-1}(x) + \int\limits_{1/2}^{x} \frac{\cos^2\pi t}{\sin^{2m}\pi t}dt.$$

Але

$$\int\limits_{1/2}^{x} \frac{\cos^2 \pi t}{\sin^{2m} \pi t} dt =$$

$$= -\left(\frac{\cos \pi t}{\pi(2m-1)\sin^{2m-1} \pi t}\right)\Bigg|_{t=1/2}^{x} - \frac{1}{2m-1}\int\limits_{1/2}^{x} \frac{\sin \pi t}{\sin^{2m-1} \pi t} dt =$$

$$= -\frac{\cos \pi x}{\pi(2m-1)\sin^{2m-1} \pi x} - \frac{1}{2m-1} I_{m-1}(x).$$

Таким чином,

$$I_m(x) = \frac{m-1}{m-1/2} I_{m-1}(x) - \frac{\cos \pi x}{2\pi(m-1/2)\sin^{2m-1} \pi x}.$$

Крім того,

$$I_1(x) = \int\limits_{1/2}^{x} \frac{dt}{\sin^2 \pi t} = -\left(\frac{\cos \pi t}{\pi \sin \pi t}\right)\Bigg|_{t=1/2}^{x} = -\frac{\cos \pi x}{\pi \sin \pi x}.$$

Отже,

$$I_m(x) = -\frac{\cos \pi x}{2\pi(m-\frac{1}{2})\sin^{2m-1} \pi x} \times \left(1 + \frac{m-1}{m-\frac{3}{2}} \sin^2 \pi x + \right.$$

$$\left. + \frac{(m-1)(m-2)}{(m-\frac{3}{2})(m-\frac{5}{2})} \sin^4 \pi x + \ldots + \frac{(m-1)(m-2)\ldots 1}{(m-\frac{3}{2})(m-\frac{5}{2})\ldots\frac{1}{2}} \sin^{2m-2} \pi x\right).$$

Тобто

$$I_m(x) =$$

$$= -\frac{\cos \pi x}{2\pi(m-\frac{1}{2})\sin^{2m-1} \pi x} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(m-1)(m-2)\ldots(m-k)}{(m-\frac{3}{2})(m-\frac{5}{2})\ldots(m-k-\frac{1}{2})} \sin^{2k} \pi x.$$

Далі,

$$\ln\left(\frac{(m-1)(m-2)\ldots(m-k)}{(m-3/2)(m-5/2)\ldots(m-k-1/2)}\right) =$$

$$= \sum_{r=1}^{k} \ln\left(1 + \frac{1}{2m-2r-1}\right) = \sum_{r=m-k}^{m-1} \ln\left(1 + \frac{1}{2r-1}\right) =$$

$$= \sum_{r=m-k}^{m-1} \frac{1}{2r-1} + O\left(\sum_{r=m-k}^{m-1} \frac{1}{(2r-1)^2}\right).$$

Але

$$\sum_{r=m-k}^{m-1} \frac{1}{(2r-1)^2} <$$

$$< \frac{1}{(2m-2k-1)^2} - \frac{1}{(2m-1)^2} + \frac{1}{4}\int\limits_{m-k}^{m} \frac{dt}{(t-1/2)^2} \ll \frac{k}{m(m-k)}.$$

Також

$$\sum_{r=m-k}^{m-1} \frac{1}{2r-1} = \sum_{m-k+1/2<r\le m+1/2} \frac{1}{2r-1} + \frac{1}{2m-2k-1} - \frac{1}{2m-1} =$$

$$= \frac{2k}{(2m-2k-1)(2m-1)} + \int\limits_{m-k+1/2}^{m+1/2} \frac{dt}{2t-1} - 2\int\limits_{m-k+1/2}^{m+1/2} \psi(t)\frac{dt}{(2t-1)^2} =$$

$$= \ln\sqrt{\frac{m}{m-k}} + O\left(\frac{k}{m(m-k)}\right).$$

Таким чином,

$$\ln\left(\frac{(m-1)\ldots(m-k)}{(m-3/2)\ldots(m-k-1/2)}\right) = \ln\sqrt{\frac{m}{m-k}} + O\left(\frac{k}{m(m-k)}\right).$$

Отже,

$$\frac{(m-1)\ldots(m-k)}{(m-3/2)\ldots(m-k-1/2)} = \sqrt{\frac{m}{m-k}} + O\left(\frac{k}{\sqrt{m}(m-k)^{3/2}}\right).$$

Тоді

$$I_m(x) \ll \frac{\cos\pi(1-x)}{m\sin^{2m-1}\pi x} \sum_{k=0}^{m-1} \sqrt{\frac{m}{m-k}} \sin^{2k}\pi x =$$

$$= \frac{\sin\pi x\cdot\cos\pi(1-x)}{\sqrt{m}} \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{\sqrt{k}\sin^{2k}\pi x} = \frac{\sin\pi x\cdot\cos\pi(1-x)}{\sqrt{m}} \sum_{k=1}^{m} \frac{q^k}{\sqrt{k}},$$

де $q = \sin^{-2}\pi x \ge 1$.

Далі використовуємо результати леми 2. Для x, близьких до $1/2$,

$$\ln q = \ln(\sin^{-2}\pi x) = -2\ln\cos\pi(x-1/2) = -2\ln\left(1-2\sin^2\frac{\pi}{2}\psi(x)\right) \ll \psi^2 x),$$

а отже,

$$0 \le |\ln q| \ll 1/m \quad\Leftrightarrow\quad \psi^2(x) \ll 1/m \quad\Leftrightarrow\quad \psi(x) \ll 1/\sqrt{m}\ .$$

Тоді, якщо $\psi(x) \ll 1/\sqrt{m}$, то

$$I_m(x) \ll \frac{\sin\pi x\cdot\cos\pi(1-x)}{\sqrt{m}} \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{\sqrt{k}\sin^{2k}\pi x} \ll$$

$$\ll \cos\pi\psi(x)\sin\pi\psi(x) \ll \psi(x).$$

Для $1/m \ll \ln q \ll 1$, тобто, коли $1/\sqrt{m} \ll \psi(x) \ll 1$,

$$I_m(x) \ll \frac{\sin \pi x \cdot \cos \pi(1-x)}{\sqrt{m}} \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{\sqrt{k} \sin^{2k} \pi x} \ll \frac{\cos \pi(1-x)}{m \sin^{2m-1}(\pi x) \ln(\sin^{-1} \pi x)}.$$

Але

$$\frac{\cos \pi(1-x)}{\ln(\sin^{-1} \pi x)} = \frac{\sin \pi\psi(x)}{-2\ln(1 - 2\sin^2 \frac{\pi}{2}\psi(x))} \ll \frac{1}{\psi(x)},$$

звідки

$$I_m(x) \ll \frac{1}{m\psi(x) \sin^{2m-1} \pi x}.$$

Для $1 \ll \ln q$

$$I_m(x) \ll \frac{\sin \pi x \cdot \cos \pi(1-x)}{\sqrt{m}} \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{\sqrt{k} \sin^{2k} \pi x} \ll$$

$$\ll \frac{\cos \pi(1-x)}{m \sin^{2m-1} \pi x} \ll \frac{1}{m\psi(x) \sin^{2m-1} \pi x}.$$

Збираючи разом отримані оцінки, маємо для

$$\int\limits_{1/2}^{x} D_n^{2m}(t)dt = \frac{C_{2m}^m}{4^m} I_m(x) + O\left(\frac{1}{n\sqrt{m} \sin^{2m} \pi x}\right):$$

для $\psi(x) \ll 1/\sqrt{m}$

$$\int\limits_{1/2}^{x} D_n^{2m}(t)dt \ll \frac{\psi(x)}{\sqrt{m}} + \frac{1}{n\sqrt{m}};$$

для $1/\sqrt{m} \ll \psi(x)$

$$\int\limits_{1/2}^{x} D_n^{2m}(t)dt \ll \frac{1}{m\sqrt{m}\psi(x) \sin^{2m-1} \pi x} + \frac{1}{n\sqrt{m} \sin^{2m} \pi x}.$$

Крім того, коли $\psi(x) \ll (n\sqrt{m})^{-1}$,

$$\int\limits_{1/2}^{x} D_n^{2m}(t)dt = \int\limits_{1/2}^{x} \left(\frac{\sin \pi t(2n+1)}{\sin \pi t}\right)^{2m} dt \ll \int\limits_{1/2}^{x} dt \ll \psi(x).$$

Таким чином, лему доведено.

Лема 4 (про оцінку $a(n,m)$ знизу)**.** *Справедлива наступна оцінка*

$$a(n,m) = \int\limits_{0}^{1} D_n^{2m}(t)dt \gg \frac{(2n+1)^{2m-1}}{\sqrt{m}}.$$

Доведення. Маємо для достатньо малого $\delta > 0$

$$a(n,m) = \int\limits_0^1 D_n^{2m}(t)dt \gg \int\limits_0^\delta \left(\frac{\sin \pi t(2n+1)}{\sin \pi t}\right)^{2m} dt \gg$$

$$\gg \int\limits_0^\delta \frac{\left(\pi t(2n+1) + O\left((\pi n t)^3\right)\right)^{2m}}{(\pi t)^{2m}} dt \gg (2n+1)^{2m} \int\limits_0^\delta \left(1 + O\left((\pi n t)^2\right)\right)^{2m} dt \gg$$

$$\gg (2n+1)^{2m} \int\limits_0^\delta \left(1 + O\left(m(nt)^2\right)\right) dt.$$

Взявши $\delta = \frac{1}{\sqrt{m}(2n+1)}$, отримуємо

$$a(n,m) \gg \frac{(2n+1)^{2m-1}}{\sqrt{m}}.$$

Лема 5 (про оцінку для $\psi(x) - S_{n,m}(x)$)**.** *Нехай* $K_{n,m}(t) = \frac{D_n^{2m}(t)}{a(n,m)}$, *де* $a(n,m) = \int\limits_0^1 D_n^{2m}(t)dt$, $S_{n,m}(x) = \int\limits_0^1 \psi(x+t)K_{n,m}(t)dt$. *Тоді для* $\psi(x) - S_{n,m}(x)$ *справедливі наступні оцінки:*

для $\psi(x) \ll 1/(n\sqrt{m})$

$$\psi(x) - S_{n,m}(x) \ll \frac{\sqrt{m}}{(2n+1)^{2m-1}} \psi(x);$$

для $1/(n\sqrt{m}) \ll \psi(x) \ll 1/\sqrt{m}$

$$\psi(x) - S_{n,m}(x) \ll \frac{|\psi(x)|}{(2n+1)^{2m-1}} + \frac{1}{(2n+1)^{2m}};$$

для $1/\sqrt{m} \ll \psi(x)$

$$\psi(x) - S_{n,m}(x) \ll$$

$$\ll \frac{1}{m|\psi(x)|[(2n+1)\sin(\pi\|x\|)]^{2m-1}} + \frac{1}{[(2n+1)\sin(\pi\|x\|)]^{2m}}.$$

Доведення. Так як

$$\psi(x) - S_{n,m}(x) = \int\limits_{1/2}^x K_{n,m}(t)dt = \frac{1}{a(n,m)} \int\limits_{1/2}^x D_n^{2m}(t)dt,$$

то лема 5 є наслідком леми 3 та леми 4.

Зауваження 3. *Останньою оцінкою варто користуватися тільки у випадку* $(2n+1)\sin \pi x > 1$, *тобто, коли* x *знаходиться достатньо далеко від цілих чисел, а саме для* $1/n \ll \|x\|$. *В іншому випадку користуємось оцінкою*

$$\psi(x) - S_{n,m}(x) = \frac{1}{a(n,m)} \int\limits_{1/2}^x D_n^{2m}(t)dt \le \frac{1}{a(n,m)} \int\limits_{1/2}^1 D_n^{2m}(t)dt = \frac{1}{2}.$$

Доведення. Доведемо далі теорему.

Нехай $n = \left[\frac{eD}{4} + \frac{1}{2}\right]$, тоді $\frac{eD}{4} - \frac{1}{2} < n \le \frac{eD}{4} + \frac{1}{2}$, звідки

$$\frac{eD}{2} < 2n+1 \le \frac{eD}{2} + 2.$$

До того ж, $\forall x \in \mathbb{R} \quad \sin\pi\|x\| \ge 2\|x\|$. Таким чином, $\forall x \in X$

$$(2n+1)\sin(\pi\|x\|) \ge (2n+1)2\|x\| \ge \frac{2(2n+1)}{D} > e.$$

Нехай $m = \left[\frac{1}{2}\ln E\right] + 1$, тоді $\frac{1}{2}\ln E < m \le \frac{1}{2}\ln E + 1$, звідки $E < e^{2m}$.

$K_{n,m}(x) = \frac{D_n^{2m}(x)}{a(n,m)}$, де $a(n,m) = \int\limits_0^1 D_n^{2m}(t)dt$. Беремо $d = 2nm$ та

$$T_d(x) = S_{n,m}(x) = \int\limits_0^1 \psi(x+t)K_{n,m}(t)dt = \sum_{0<|k|\le d} a_k e^{-2\pi ikx},$$

де $d = 2nm = 2\left[\frac{eD}{4} + \frac{1}{2}\right]\left(\left[\frac{1}{2}\ln E\right] + 1\right) \le \left(\frac{eD}{2} + 1\right)\left(\frac{1}{2}\ln E + 1\right) \ll D\ln E$.

Для оцінки $\psi(x) - T_d(x) = \psi(x) - S_{n,m}(x)$ використовуємо лему 5.

Якщо $\psi(x) \ll 1/\sqrt{m}$, то

$$\psi(x) - S_{n,m}(x) \ll \frac{|\psi(x)|}{(2n+1)^{2m-1}} + \frac{1}{(2n+1)^{2m}} \ll$$
$$\ll \frac{1}{\sqrt{m}(2n+1)^{2m-1}} + \frac{1}{(2n+1)^{2m}} \ll \frac{1}{\sqrt{m}}\left(\frac{2}{eD}\right)^{2m-1} + \left(\frac{2}{eD}\right)^{2m} =$$
$$= \frac{e}{\sqrt{m}}\frac{1}{e^{2m}(D/2)^{2m-1}} + \frac{1}{e^{2m}(D/2)^{2m}} \ll \frac{1}{e^{2m}} < \frac{1}{E}.$$

Якщо $1/\sqrt{m} \ll \psi(x)$, то

$$\psi(x) - S_{n,m}(x) \ll$$
$$\ll \frac{1}{m|\psi(x)|[(2n+1)\sin(\pi\|x\|)]^{2m-1}} + \frac{1}{[(2n+1)\sin(\pi\|x\|)]^{2m}} \ll$$
$$\ll \frac{1}{[(2n+1)\sin(\pi\|x\|)]^{2m}} < \frac{1}{e^{2m}} < \frac{1}{E}.$$

Отже, теорему доведено.

Висновки. Таким чином, показано, що функцію $\psi(x)$ можна замінювати тригонометричними поліномами невеликого ступеня. Це дозволяє краще оцінювати суми $\sum\limits_{a<n\le b} \psi(f(n))$.

1. **Бари Н. К.** Тригонометрические ряды [текст] / Бари Н. К. – М. : Физматгиз, 1961. – 936 с.
2. **Эдвардс Р.** Ряды Фурье в современном изложении [текст] / Эдвардс Р. – М. : Мир, 1985. – Т. 1. – 264 с.