ISSN 2304-1579.Вiсник Од. нац. ун-ту. Мат. i мех.–2013 .–Т. 18, вип. 1(17).–С. 26–38

Mathematical Subject Classification: 11N25, 11S40
УДК 511

Я. А. Воробьев
Одесский национальный университет имени И. И. Мечникова

ПЛОТНОСТНАЯ ТЕОРЕМА ДЛЯ Z-ФУНКЦИИ ГЕККЕ ПОЛЯ ГАУССОВЫХ ЧИСЕЛ

Воробйов Я. А. Щiльнiсна теорема для Геке Z-функцiї поля гаусових чисел. В данiй роботi нами вивчено розподiлення нулiв дзета-функцiї Геке в критичнiй областi над полем гаусових чисел $\mathbb{Q}(i)$. Ми отримуємо нетривiальну оцiнку для зета-суми рiвномiрно для m i $Im(s)$. Така оцiнка є аналогом оцiнки зета-суми для дзета-функцiї Римана. Така оцiнка грає важливу роль в побудовi асимптотичної оцiнки для числа нулiв дзета-функцiї Геке. Використовуючи модифiковану лему Хала i метод Хиз-Брауна, ми виводимо аналог щiльнiсної теореми для $Z_m(s)$ третього степеня при умовi $m \neq 0$.
Ключовi слова: дзета-функцiя, число нулiв, полiном Дирихле.

Воробьев Я. А. Плотностная теорема для Z-функции Гекке поля гауссовых чисел. В данной работе изучено распределение нулей дзета-функции Гекке в критической области над полем гауссовых чисел $\mathbb{Q}(i)$. Мы получаем нетривиальную оценку для зета-суммы равномерно для m и $Im(s)$. Данная оценка является аналогом оценки зета-суммы для дзета-функции Римана. Такая оценка играет важную роль в построении асимптотической оценки для числа нулей дзета-функции Гекке. Используя модифицированную лемму Хала и метод Хиз-Брауна, мы выводим аналог плотностной теоремы для $Z_m(s)$ в третьей степени при условии $m \neq 0$.
Ключевые слова: дзета-функция, число нулей, полином Дирихле.

Vorobyov Y. A. Dense theorem for Hecke Z-function over the field of Gaussian numbers. In this work the distribution of zeros in critical strip of the Hecke zeta-function over the Gaussian field $\mathbb{Q}(i)$ is studied. We obtain a non-trivial estimation for zeta-sum of $Z_m(s)$ uniformly in m and $Im(s)$, which is analogue of the estimation of zeta-sum for the Riemann zeta-function. Such estimations play a critical role in construction of the asymptotic estimation for the number of zeros of the Hecke zeta-function. Using the modificated Halas lemma and the method of Heath-Brown we deduce an analogue of the density theorem for $Z_m(s)$ with an exponent three if m is not equal to 0.
Key words: zeta-function, number of zeros, Dirichlet polynomial.

Введение. Знаменитая формула Римана-Монгольдта о числе нетривиальных нулей дзета-функции Римана $\zeta(s)$ приводит к плотностной гипотезе

$$N(\sigma, T) \ll T^{2(1-\sigma)+\varepsilon}, \tag{1}$$

где $N(\sigma, T)$ означает число нулей $\zeta(s)$ в прямоугольнике

$$\frac{1}{2} \leq \sigma \leq \Re s \leq 1, \ \ |\Im s| \tag{2}$$

$\varepsilon > 0$ — произвольно малое число, а постоянная в символе "$\ll$" зависит только от ε.

Эта гипотеза ещё не доказана, но наилучшим приближением к ней есть результат M. Huxley[3]:

$$N(\sigma,T) \ll T^{\frac{12}{5}(1-\sigma)} \log^9 T. \tag{3}$$

Аналогичную плотностную гипотезу можно рассматривать и для других дзетаподобных функций в конечных расширениях поля рациональных чисел $\mathbb{Q}$.

Так, из работы D. R. Heath-Brown [2] следует существование абсолютной постоянной C, зависящей от дискриминанта квадратичного поля $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$, d — бесквадратное целое число, такое, что для любого $\varepsilon > 0$ справедлива оценка

$$N_{\mathbb{Q}(\sqrt{d})}(\sigma,T) \ll T^{\left(\frac{8}{3}+\varepsilon\right)(1-\sigma)} \left(\log T\right)^C. \tag{4}$$

В настоящей работе мы получаем асимптотическую формулу для количества нулей $N_m(\sigma,T)$ в прямоугольнике (2) дзета-функции Гекке $Z_m(s)$, определяемой для $\Re s > 1$ равенством

$$Z_m(s) := \sum_{\omega} e^{4mi\arg\omega} N(\omega)^{-s}.$$

Для функции $Z_m(s)$ справедливо функциональное уравнение

$$\pi^{-s}\Gamma\left(2|m|+s\right) Z_m(s) = \pi^{-(1-s)}\Gamma\left(2|m|+1-s\right) Z_m(1-s).$$

В основе наших рассмотрений лежат аналоги результатов H. Montgomery, M. Jutila, D. R. Heath-Brown и др. по изучению функции $N(\sigma,T)$ для дзетафункции Римана.

Мы будем использовать следующие стандартные обозначения:

$s=\sigma+it$	комплексное число, $\Re s=\sigma$, $\Im s = t$;
$\mathbb{Z}[i]$	кольцо целых гауссовых чисел $a+bi$, $a,b\in\mathbb{Z}$, $i^2=-1$;
$\mathbb{Q}(i)$	поле гауссовых чисел $a+bi$, $a,b\in\mathbb{Q}$;
$N(\omega)$	норма гауссового числа ω, $N(\omega)=a^2+b^2$;
$\arg\omega$	аргумент гауссового числа ω;
$\exp(z)$	$=e^z$;
"$\ll$", "O"	символ Виноградова "$\ll$" и символ Ландау "O" эквивалентны;
$\sum\limits_{\omega}$	означает, что суммирование идет по целым гауссовым ω, отличным от нуля;
$\Gamma(z)$	обозначает Γ-функцию Эйлера.

Вспомогательные леммы и предварительные результаты. Сначала приведём некоторые леммы, используемые в дальнейшем.

Лемма 1. *Пусть $s=\sigma+it$, $-1\le\sigma\le 2$; $m\in\mathbb{Z}$, $m\ne 0$. Тогда для $X=\frac{1}{2\pi}\left(t^2+(4m+\sigma)^2\right)$ имеем*

$$Z_m(s) \ll \sum_{\substack{\omega \\ N(\omega)\le X}} e^{4mi\arg\omega}N(\omega)^{-s} + O\left(\log\left(t^2+m^2\right)\right).$$

Это утверждения следует из приближённого функционального уравнения для $Z_m(s)$ (например, в форме Лаврика [9]).

Рассмотрим полином Дирихле над $\mathbb{Z}[i]$

$$S_m(s) = \sum_{\substack{\omega \\ N<N(\omega)\leq 2N}} a(\omega) e^{4mi \arg \omega}.$$

Пусть $\mathfrak{J}$ — конечное множество комплексных чисел $s = \sigma + it$, для которых $\sigma \geq \sigma_0$, $T_0 \leq t \leq T + T_0$, причём, если s, s' — различные элементы из $\mathfrak{J}$, то для соответствующих значений их мнимых частей имеем $|t - t'| \geq 1$. Тогда из [10] (теорема 7.5) находим

$$\min_{s\in\mathfrak{J}} |S(s)|^2 \ll \mathfrak{J}^{-1} (T+N) \left(\sum_{N<N(\omega)\leq 2N} |a(\omega)|^2 N(\omega)^{-2\sigma_0} \right) (\log N + 1) \,.$$

Нам необходима также следующая лемма.

Лемма 2. *Пусть μ и ν — положительные постоянные, такие, что*

$$|Z_m(\sigma+it)| \ll \left(t^2+m^2\right)^{\mu} \left(\log\left(t^2+m^2\right)\right)^{\nu}$$

равномерно по $\sigma \geq \theta \geq 0$. Тогда в принятых выше обозначениях имеем

$$|\mathfrak{J}| \ll N \left(\sum_{\substack{\omega \\ N<N(\omega\leq 2N)}} |a(\omega)|^2 N(\omega)^{-2\sigma_0} \right) \cdot \left(\min_{s\in\mathfrak{J}} |S(s)|^2 \right)^{-1} +$$

$$+ N^{\frac{\theta}{\mu}} T \left(\sum_{N<N(\omega)\leq 2N} |a(\omega)|^2 N(\omega)^{-2\sigma_0} \right)^{1+\frac{1}{\mu}} \times$$

$$\times \left(\min_{s\in\mathfrak{J}} |S(s)|^2 \right)^{-1-\frac{1}{\mu}} \left(\log\left(T^2+m^2\right)\right)^{\frac{\nu}{\mu}} .$$

Эта лемма есть аналог модифицированной леммы Halász-Montgomery, доказанной Heath—Brown [2]. Её доказательство проходит по схеме доказательства Heath—Brown.

Из функционального уравнения для $Z_m(s)$ и принципа Фрагмена—Линделёфа следует оценка

$$Z_m(s) \ll (t^2+m^2)^{\frac{1}{2}-\sigma} \log(t^2+m^2),\ 0 \leq \sigma \leq 1,\ |\Im s| = |t| \geq 2. \tag{5}$$

Кроме того, для $\sigma \geq \frac{1}{2}$, $|\Im s| \geq 2$, имеем (см. Р. Кауфман [6])

$$Z_m(s) \ll (t^2+m^2)^{\frac{1}{6}} (\log(t^2+m^2))^4. \tag{6}$$

Поэтому в лемме 2 при $\theta = 0$ можно считать $\mu = \frac{1}{2}$, $\nu = 1$, а при $\theta = \frac{1}{2}$ имеем $\mu = \frac{1}{6}$, $\nu = 4$.

Лемма 3. *Существует абсолютная постоянная $C > 0$ такая, что для* $2 \le N \le t^2 + m^2$

$$\left| \sum_{N(\omega) \le N} e^{4mi \arg \omega} N(\omega)^{-it} \right| \ll N \exp \left(-C \frac{\log^3 N}{(\log (t^2+m^2))^2} \right).$$

Доказательство. Рассматриваемая сумма есть аналог дзетовой суммы, которая играет ключевую роль в построении оценок дзета-функции Римана в критической полосе. (см. А. А. Карацуба [6], A. Ivič [4]). Мы будем следовать схеме доказательства из книги [5]. Из равенства

$$\log \omega = \log |\omega| + i \arg \omega$$

выводим

$$e^{4mi \arg \omega} N(\omega)^{-it} = \exp (i(4m \Im \log \omega - 2t \Re \log \omega)).$$

Займемся оценкой суммы

$$S(N_1) = \sum_{\substack{N_1 < N(\omega) \le 2N_1 \le N \\ 0 \le \arg \omega \le \frac{\pi}{2}}} \exp (i(4m \Im \log \omega - 2t \Re \log \omega)). \tag{7}$$

Ясно, что

$$\left| \sum_{N(\omega) \le N} e^{4mi \arg \omega} N(\omega)^{-it} \right| \ll \max_{2 \le N_1 \le \frac{1}{2} N} |S(N_1)| \cdot \log N. \tag{8}$$

В комплексной плоскости рассмотрим решётку L с длиной фундаментальной области ℓ ($\ell > 1$, более точно, значение ℓ определим позднее) так, что центры её ячеек расположены в точках с целыми координатами, а оси параллельны координатным осям. Пусть $L(N_1)$ обозначает наименьшую часть решётки L, содержащую область

$$G(N_1) : \left\{ N_1 < N(\omega) \le 2N_1,\ 0 \le \arg \omega \le \frac{\pi}{2} \right\},$$

и пусть $C(N_1)$ — множество центров решётки, лежащих в $G(N_1)$. Обозначим через Δ — фундаментальную область с центром в $(0,0)$.

Мы имеем

$$\begin{aligned} S(N_1) = \sum_{z \in C(N_1)} \sum_{\omega \in \Delta} & \exp (i(4m \Im \log (z+\omega) - 2t \Re \log (z+\omega))) + \\ & + O\left(e N_1^{\frac{1}{2}} \right). \end{aligned} \tag{9}$$

Равенство (9) не зависит от выбора расположения центров решётки L. Различных расположений центров решётки может быть не более $([\ell])^2$. Проведём усреднения по всем положениям решётки L. Имеем

$$S(N_1) \ll \frac{1}{\ell^2} \sum_{0\neq z\in C(N_1)} \left| \sum_{\omega\in\Delta} \exp\left(i\left(4m\Im\log\left(1+\frac{\omega}{z}\right) - 2t\Re\left(1+\frac{\omega}{z}\right)\right)\right)\right| + \\ + O\left(\ell N_1^{\frac{1}{2}}\right). \tag{10}$$

Положим

$$\ell = 2\left[N_1^{\frac{5}{11}}\right] + \frac{1}{2},\ \ r = \left[\frac{11\log(t^2+m^2)}{\log N_1}\right] + 1,$$

$$F_r(x+iy) = \sum_{q=1}^{r} \frac{(-1)^{r-1}}{q}\left(\frac{x+iy}{z}\right)^q,\ \ x,y\in\mathbb{R},\ \ z\in\mathbb{Q}(i).$$

Тогда для $\omega = x+iy$, $|x|\le\ell$, $|y|\le\ell$ мы имеем

$$\exp\left(i\left(4m\Im\log\left(1+\tfrac{\omega}{z}\right) - 2t\Re\log\left(1+\tfrac{\omega}{z}\right)\right)\right) =$$

$$= \exp\left(i\left(4m\Im F_r(x+iy) - 2t\Re F_r(x+iy)\right)\right) + O\left((t^2+m^2)^{\frac{1}{2}}\left(\tfrac{\ell}{|z|}\right)^{r+1}\right).$$

Теперь для чётного r простые вычисления дают

$$4m\Im F_r(x+iy) - 2t\Re F_r(x+iy) =$$

$$= \tfrac{(-1)^r t}{r|z|^r}x^r + \left(\tfrac{(-1)^{r-1}2t}{(r-1)|z|^{z-1}} + \tfrac{(-1)^{r-1}4m}{|z|^r}y\right)x^{r-1} +$$

$$+\left(\tfrac{(-1)^{r-1}2t}{3!(r-2)|z|^{r-2}} + \tfrac{(-1)^{r-2}4m}{|z|^{r-1}}y + \tfrac{(-1)^{r-1}2t(r-1)}{2!|z|^r}y^2\right)x^{r-2} + \cdots$$

$$\cdots + \left(\tfrac{-2t}{|z|} - \tfrac{4m}{|z|^2}y + \cdots + \tfrac{(-1)^{r-1}4m}{|z|^r}y^{r-1}\right)x.$$

Для нечётного r следует заменить x на y, t на $2m$.
Обозначим

$$W = \sum_{|x|\le\ell}\sum_{|y|\le\ell} \exp\left(i(4m\Im F_r(x+iy) - 2t\Re F_r(x+iy))\right).$$

И теперь, повторяя рассуждения из книги А. А. Карацубы ([5], 58–59 и 66–69), мы получим утверждение леммы. □

Лемма 4. *В области* $\frac{1}{2} \le \Re s \le 1$, $|t| \ge 2$ *справедлива оценка*

$$Z_m(s) \ll (t^2+m^2)^{a(1-\sigma)^{3/2}}\log^4(t^2+m^2), \tag{11}$$

где $a > 1$ *— абсолютная постоянная.*

Доказательство. Пусть $m = 0$. В силу равенства

$$Z_0(s) = 4\zeta(s)L(s,\chi_4),$$

где $L(s,\chi_4)$ — L-функция Дирихле с неглавным характером по модулю 4, утверждение леммы следует из аналогичных оценок для $\zeta(s)$ и $L(s,\chi_4)$ (см. [4], 160–161).

Пусть $m \neq 0$. Для $N < X = \frac{1}{2\pi}(t^2 + (4m+\sigma)^2)\log(t^2+m^2)$, в силу леммы 1, можем записать

$$\begin{aligned} Z_m(s) = &\sum_{N(\omega)\le N} e^{4mi\arg\omega} N^{-\sigma-it}(\omega) + \\ &+ \sum_{N<N(\omega)\le X} e^{4mi\arg\omega} N^{-\sigma-it}(\omega) + O(1) \ll N^{1-\sigma} \sum_{N(\omega)\le N} \frac{1}{N(\omega)} + \\ &+ \sum_{N<N(\omega)\le X} e^{4mi\arg\omega} (N(\omega))^{-\sigma-it} + O(1) = \\ &= \sum_{N<N(\omega)\le X} e^{4mi\arg\omega} (N(\omega))^{-\sigma-it} + O\left(N^{1-\sigma}\log N\right). \end{aligned} \tag{12}$$

Положим $N = \left[\exp\left((\log(t^2+m^2))^{2/3}\right)\right]$.

Тогда

$$N^{1-\sigma} \le e^{(1-\sigma)\log N} \le e^{2(q-\sigma)(\log(t^2+m^2))^{2/3}},$$

если $(1-\sigma)(\log(t^2+m^2))^{2/3} \le 1$.

Если же $(1-\sigma)(\log(t^2+m^2))^{2/3} > 1$, то

$$\begin{aligned} (1-\sigma)(\log(t^2+m^2))^2 \le \left((1-\sigma)(log(t^2+m^2))^{2/3}\right)^{3/2} = \\ = (1-\sigma)^{3/2}\log(t^2+m^2), \end{aligned}$$

а потому

$$N^{1-\sigma} \le (t^2+m^2)^{a(1-\sigma)^{3/2}}, \text{ с некоторой постоянной } a \ge 2. \tag{13}$$

Далее, для выбранного значения N применение частичного суммирования даёт для некоторого $\delta_0 > 0$

$$\begin{aligned} \sum_{N<N(\omega)\le X} e^{4mi\arg\omega}(N(\omega))^{-\sigma-it} \ll X^{-\sigma}\left|\sum_{N<N(\omega)\le X} e^{4mi\arg\omega}(N(\omega))^{-it}\right| + \\ + \int_N^X u^{-\sigma-1}\left|\sum_{N<N(\omega)\le u} e^{4mi\arg\omega} N(\omega)^{-it}\right| du. \end{aligned}$$

В силу леммы 4 получаем

$$\sum_{N<N(\omega)\le X} e^{4mi\arg\omega} N(\omega)^{-it} \ll$$

$$\ll N\exp\Big(-C\tfrac{\log^3 N}{(\log(t^2+m^2))^2} + X\exp\Big(-C\tfrac{\log^3 X}{(\log(t^2+m^2))^2}\Big)\Big).$$

А потому найдётся $\sigma_0>0$ такое, что

$$\sum_{N<N(\omega)\le X} e^{4mi\arg\omega} N(\omega)^{-it} \ll (t^2+m^2)^{1-\sigma_0} \ll X^{1-\sigma_0}.$$

Поэтому, снова используя лемму 4, получаем с некоторым $0<C_1\le C$

$$\sum_{N<N(\omega)\le X} e^{4mi\arg\omega} N(\omega)^{-\sigma-it} \ll$$

$$\ll X^{1-\sigma-\sigma_0} + \int\limits_N^X u^{-\sigma}\exp\Big(-C_1\tfrac{\log^3 u}{(\log(t^2+m^2))^2}\Big)du \ll$$

$$\ll (t^2+m^2)^{(1-\sigma)^{3/2}} + \int\limits_{\log N}^{\log X}\exp\Big(v(1-\sigma)-C_1\tfrac{v^3}{(\log(t^2+m^2))^2}\Big)dv,$$

если $1-\sigma_1\le\sigma\le 1$ для некоторого малого фиксированного $\sigma_1>0$.

Из выражения подынтегральной функции последнего интеграла видно, что найдётся $0<\varepsilon<C_1$ такое, что

$$\int\limits_{\log N}^{\log X}\exp\Big(v(1-\sigma)-C_1\tfrac{v^3}{(\log(t^2+m^2))^2}\Big)dv \le$$

$$\le \max_{\log N<v\le\log X}\Big\{\exp\Big(v(1-\sigma)-(C_1-\varepsilon)\tfrac{v^3}{(\log(t^2+m^2))^2}\Big)\times$$

$$\times\int\limits_{\log N}^{\log X}\exp\Big(-\tfrac{\varepsilon v^3}{(\log(t^2+m^2))^2}\Big)dv\Big\}.$$

В интеграле сделаем замену $v^3=u(\log(t^2+m^2))^2$, что даёт

$$\int\limits_{\log N}^{\log X} \ll \int\limits_{\frac{\log^3 N}{(\log(t^2+m^2))^2}}^{\frac{\log^3 X}{(\log(t^2+m^2))^2}} e^{-u}u^{-2/3}(\log(t^2+m^2))^{2/3}du \ll$$

$$\ll (\log(t^2+m^2))^{2/3}\int\limits_0^\infty e^{-u}u^{-2/3}du \ll (\log(t^2+m^2))^{2/3}.$$

Кроме того, функция $f(v)=v(1-\sigma)-(C_1-\varepsilon)\frac{v^3}{(\log(t^2+m^2))^2}$ не возрастает при $v\ge\left(\frac{1-\sigma}{C_1-\varepsilon}\right)^{\frac12}\log(t^2+m^2)$. Поэтому мы получаем для $\log N\ge(\log(t^2+m^2))^{2/3}$

следующую оценку

$$\sum_{N<N(\omega)\le X} e^{4mi\arg\omega} N(\omega)^{-\sigma-it} \ll (t^2+m^2)^{a_1(1-\sigma)^{3/2}} (\log(t^2+m^2))^{b_1}, \qquad (14)$$

где $a_1 > 0$, $0 < b_1 \le 4$.

Теперь из (12)-(14) следует утверждение леммы. □

Основные результаты. В этой секции мы приводим наши основные результаты, связанные с оценкой функции

$$N_m(\sigma, T) := \left\{ \rho \in \mathbb{C} : \ Z_m(\rho) = 0, \ \Re\rho \ge \sigma \ge \frac{1}{2}, \ |\Im\rho| \le T \right\}.$$

Мы будем существенно использовать неравенства (5) и (6) предыдущей секции.

Рассмотрим пару Меллина e^{-x} и $\Gamma(z)$:

$$e^{-x} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{2-i\infty}^{2+i\infty} \Gamma(z) x^{-z} dz, \ (x > 0).$$

Тогда, полагая $x = \frac{N(\omega)}{Y}$, $Y > 1$, получим

$$e^{-\frac{N(\omega)}{Y}} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{2-i\infty}^{2+i\infty} \Gamma(z) Y^z N(\omega)^{-z} dz. \qquad (15)$$

Рассмотрим полином Дирихле

$$M_X(s) = \sum_{N(\omega)\le X} a(\omega) N(\omega)^{-s},$$

где $s = \sigma + it$, $\log^2 T \le |t| \le T$, $1 \ll X \le Y \ll T^C$ ($C > 4$ — константа), а коэффициенты $a_m(\omega)$ являются коэффициентами разложения $Z_m^{-1}(s)$ в ряд Дирихле:

$$Z_m(s) = \sum_{\omega} \frac{a_m(\omega)}{N(\omega)^s}, \ \ \Re s > 1.$$

Очевидно, что

$$a_m(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad N(\omega) = 1; \\ (-1)^k e^{4mi\arg\omega}, & \text{если} \quad \omega = \mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_k, \ \mathfrak{p}_i \text{ — различные неассоции-} \\ & \qquad\quad \text{рованные простые гауссовы числа;} \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

В дальнейшем X и Y рассматриваются как параметры, зависящие от T, и каждый раз выбираются отдельно.

Ясно, что $Z_m(s)M_X(s) \to 1$, когда $X \to \infty$ при $\sigma > 1$.

Мы имеем, в силу (15),

$$Z_m(s)M_X(s) = \sum_{\omega} C_m(\omega)e^{-\frac{N(\omega)}{T}}N(\omega)^{-s} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{2-i\infty}^{2+i\infty} f(s,z)dz, \tag{16}$$

где $f(s,z) = Z_m(s+z)M_X(s+z)Y^z\Gamma(z)$.

Учитывая выбор $M_X(s)$, мы можем записать правую часть (16) в виде

$$4e^{-\frac{1}{Y}} + \sum_{\substack{\omega \\ N(\omega)>X}} C_m(\omega)e^{-\frac{N(\omega)}{T}}N(\omega)^{-s}.$$

Для вычисления интеграла в (16) перенесем контур интегрирования на прямую $\Re z = \frac{1}{2} - \sigma < 0$, при этом мы пройдем через два полюса подынтегральной функции в точках $z = 1 - s$ и $z = 0$, если $m = 0$, и единственный простой полюс в точке $z = 0$, если $m \neq 0$.

Мы можем считать, что $m \neq 0$, так как случай $m = 0$ можно рассматривать отдельно, используя известные результаты о распределении нулей $\zeta(s)$ и $L(s,\chi_4)$.

Поэтому из (16) находим

$$\begin{aligned} 4e^{-\frac{1}{Y}} + \sum_{\substack{\omega \\ N(\omega)>X}} C_m(\omega)e^{-\frac{N(\omega)}{T}}N(\omega)^{-s} = \\ = Z_m(s)M_X(s) + \tfrac{1}{2\pi i}\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} f(s,z)dz, \end{aligned} \tag{17}$$

где $a := a(s) = \frac{1}{2} - \Re s = \frac{1}{2} - \sigma$.

Пусть ρ — нуль $Z_m(s)$ в полосе $\frac{1}{2} \leq \Re\rho \leq 1$. Тогда первое слагаемое в правой части (17) исчезает.

Поскольку $|e^{-\frac{1}{Y}} - 1| \leq \frac{1}{4}$ для $Y > 5$, то (17) показывает, что хотя бы одно из выражений

$$\sum_{\substack{\omega \\ N(\omega)>X}} C_m(\omega)e^{-\frac{N(\omega)}{T}}, \;\; \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} f(s,z)dz \tag{18}$$

по абсолютному значению ≥ 1.

Обозначим через N_1, N_2 количества различных корней $\rho = \beta + i\gamma$, $\beta \geq \sigma$, $|\gamma| \leq T$, Z-функции Гекке $Z_m(s)$, для которых I-е или II-е выражение в (18) не меньше 1 по абсолютному значению. Из леммы 12 работы J. P. Kubilius [8] видно, что кратность таких корней не превосходит $O(\log(T|m|))$, поэтому заключаем

$$N_m(\sigma,T) \ll (N_1 + N_2)\log(T|m|). \tag{19}$$

Возьмём некоторое η, $0 < \eta < 1$ (позднее его уточним) и положим $X = T^\eta \leq$ $\leq Y \leq T^4$.

Из оценок $Z_m(s)$ (см. формулы (5) и (6)), тривиальной оценки $M_X(s) \ll X$ и формулы Стирлинга для $\Gamma(z)$, видно, что $f(\rho, z)$ допускает оценку

$$|f(\rho, z)| \le e^{-\frac{1}{2}|\gamma|},$$

если $\Re z = a(\rho)$, $|\Im z| > A \log T$, где A — достаточно большое.

Поэтому существует $B = B(\eta)$ такое, что

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{a \pm iB \log T}^{a \pm i\infty} f(\rho, z) dz \right| \le \frac{1}{16}. \tag{20}$$

Далее, поскольку при $|z| > \frac{1}{\log T}$, $\Re z = a(\rho)$, выполняется неравенство $|\Gamma(z)| \ll \ll \log T$ (это следует их формулы Стирлинга для $\Gamma(z)$), то мы имеем

$$|M_X(\rho + z) Y^z \Gamma(z)| \ll XY^{a(\rho)} \log T. \tag{21}$$

Поэтому, если первое выражение в (18) не меньше 1, то

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{\gamma - B \log T}^{\gamma + B \log T} \left| Z_m \left(\frac{1}{2} + iu \right) \right| du \gg \left(XY^{a(\rho)} \log T \right)^{-1}, \tag{22}$$

если только $a(\sigma) < -\frac{1}{\log T}$. В противном случае мы имеем тривиально $N(\sigma, T) \ll \ll T^{2(1-\sigma)} \log T$ (см. лемму 6).

Теперь применение неравенства Коши-Шварца даёт

$$\int\limits_{\gamma - A \log T}^{\gamma + A \log T} \left| Z_m \left(\frac{1}{2} + iu \right) \right|^2 du \gg X^{-2} Y^{-2a(\rho)} (\log T)^{-2}.$$

А потому суммирование по всем корням ρ, дающим вклад в N_2, приводит к оценке

$$\int\limits_{T - A \log T}^{T + A \log T} \left| Z_m \left(\frac{1}{2} + iu \right) \right|^2 \cdot n(u) du \gg N_2 X^{-2} Y^{-2a(\sigma)} (\log T)^{-2}, \tag{23}$$

здесь $n(u)$ означает количество тех нулей ρ, для которых $|\gamma - u| \le A \log T$, что в силу леммы 6 даёт $n(u) \ll (\log T)^2$.

Далее, в силу оценки (см. [1], лемма 10)

$$\int\limits_{-T}^{T} \left| Z_m \left(\frac{1}{2} + it \right) \right|^2 dt \ll (T + |m|) \log^b (T + |m|), \ (b\text{-константа}), \tag{24}$$

левая сторона (23) есть $O(T + |m|)(\log(T + |m|))^{b+2}$.

Сравнение оценок (23) и (24) приводит к неравенству

$$N_2 \ll X^2 Y^{2a(\sigma)} (T + |m|)(\log(T + |m|))^{b+5} \ll (T + |m|)^{1+2\eta} Y^{2\left(\frac{1}{2} - \sigma\right)}. \tag{25}$$

Вывод оценки величины N_1 полностью совпадает с рассуждениями из работы [2], что в принятых нами обозначениях даёт

$$N_1 \ll (T+|m|+N_0)N_0^{1-2\sigma}(\log(T^2+m^2))^{C_1} \tag{26}$$

и

$$N_1 \ll \left(N_0^{2-2\sigma}+T|m|N_0^{3-4\sigma}\right)(\log(T^2+m^2))^{C_1}, \tag{27}$$

где параметр N_0 удовлетворяет неравенству

$$Y^{\alpha} \ll N_0 \ll Y^{\alpha}(\log(T^2+m^2)),\ \frac{1}{2} \le \alpha \le 1.$$

Если теперь учесть, что $1-2\sigma<0$, то из (25), (26) получаем

$$N_m(\sigma,T) \ll (T|m|)^{1+3\eta}Y^{1-2\sigma}+\left(Y^{1-2\sigma}+T|m|Y^{\frac{1}{2}-\sigma}\right)\log(TM)^{C_1+1}. \tag{28}$$

Возьмём $Y=(T|m|)^{2(3-2\sigma)^{-1}}$.
Тогда после простых упрощений получим для $\eta=\frac{1}{15}$, $\sigma \ge \frac{2}{3}$

$$N_m(\sigma,T) \ll (T|m|)^{\frac{4(1-\sigma)}{3-2\sigma}},\ \frac{2}{3} \le \sigma \le \frac{5}{6}.$$

Полагая $Y=(T|m|)^{(\alpha(2\sigma-1))^{-1}}$, $\eta=\frac{\varepsilon}{3}$, находим

$$(TM)^{1+3\eta}Y^{1-2\sigma}=(TM)^{1+3\eta-\frac{1}{\alpha}} \ll T^{\varepsilon}.$$

Поэтому из (25), (27) получаем для $\frac{5}{6} \le \sigma \le 1+\varepsilon$

$$N_m(\sigma,T) \ll (T|m|)^{\frac{2(1-\sigma)}{2\sigma-1}}(\log T|m|)^{C}.$$

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 1. *В прямоугольнике $\frac{2}{3} \le \sigma \le 1-\varepsilon$ для $m \ne 0$ справедливы оценки*

$$N_m(\sigma,T) \ll (T|m|)^{\frac{4(1-\sigma)}{3-2\sigma}}(\log(T|m|))^{C} \quad \frac{2}{3} \le \sigma \le \frac{5}{6}.$$
$$N_m(\sigma,T) \ll (T|m|)^{\frac{2(1-\sigma)}{2\sigma-1}}(\log(T|m|))^{C} \quad \frac{5}{6} < \sigma \le 1-\varepsilon,$$

с постоянной в символе $'' \ll''$, зависящей только от ε.

В случае $m=0$ оценки для $N_0(\sigma,T)$ совпадают с оценками функции $N(\sigma,T)$ для дзета-функции Римана (см., например, [4]).

Теперь займемся оценкой $N_m(\sigma,T)$ вблизи прямой $\sigma=1$.

Теорема 2. *Для $1-\varepsilon \le \sigma < 1$ имеет место оценка*

$$N_m(\sigma,T) \ll_{\varepsilon} (T^2+m^2)^{b(1-\sigma)^{3/2}}\log^{C} T^2+m^2,$$

где b и C — абсолютные положительные постоянные.

Это утверждение есть следствие аналога оценки Монтгомери ([10], теорема 12.3)

$$N_m(\sigma,T) \ll \left(\max_{\substack{\alpha\le\sigma\le 1\\ |s-1|\ge 1\\ |\Im s|\le T}} |Z_m(s)| \log^{C_1} T \right)^{\frac{2(1-\sigma)(3\sigma-1-a)}{(2\sigma-1-a)(\sigma-a)}} \log^{C_2}(T+|m|),$$

где C_1, C_2 — положительные постоянные, $\frac{1}{2} \le a \le 1$, $\sigma \ge \frac{1+a}{2}$,
и оценки $Z_m(s)$ из леммы 5.

Следствием теоремы 1 и 2 является "плотностная" теорема

Теорема 3. *Существует абсолютная постоянная $C \ge 1$ такая, что при $\sigma \ge \frac{1}{2}$, $T \ge 2$*

$$N_m(\sigma,T) \ll \begin{cases} (T|m|)^{3(1-\sigma)} \log^C (T|m|), & |m| \ge 1, \\ T^{\frac{12}{5}(1-\sigma)} \log^9 T, & m = 0. \end{cases}$$

Доказательство. Для $m = 0$ имеем $Z_0(s) = 4\zeta(s)L(s,\chi_4)$, а потому требуемый результат следует известных оценок $N_0(\sigma,T)$, полученных Huxley [3] и Montgomery [10]. Для $m \ne 0$ мы учитываем, что

$$N_m(\sigma,T) \ll T|m| \log T|m| \ll (T|m|)^{3(1-\sigma)} \log T|m|,$$

если $3(1-\sigma) \ge 1$, то есть $\frac{1}{2} \le \sigma \le \frac{2}{3}$.

Для $\frac{2}{3} \le \sigma \le 1-\varepsilon$ требуемый результат даёт теорема 1, ибо полученные там оценки для $\frac{2}{3} \le \sigma \le \frac{5}{6}$ и $\frac{5}{6} \le \sigma \le 1-\varepsilon$ достигают максимума при $\sigma = \frac{5}{6}$. Наконец, для $1-\varepsilon \le \sigma \le 1$ утверждение следует из теоремы 2, если положить $\varepsilon \le 9b^{-2}$. $\square$

В заключение заметим, что усреднённые по параметру m оценки для $N_m(\sigma,T)$ рассматривались в работах Ф. Б. Ковальчик [7] и M. D. Coleman [1].

По методу работы [1] можно получить оценку

$$N_m(\sigma,T) \ll (T|m|)^{\frac{10}{3}(1-\sigma)} \log^1 9T|m|,$$

которая слабее полученной в настоящей работе.

Заключение. Получена нетривиальная оценка для зета-суммы равномерно для m и $Im(s)$, являющаяся аналогом оценки зета-суммы для дзета-функции Римана. Такая оценка играет важную роль в построении асимптотической оценки для числа нулей дзета-функции Геке. Используя модифицированную лемму Хала и метод Хиз-Брауна доказан аналог плотностной теоремы для $Z_m(s)$ в третьей степени при условии $m \ne 0$.

1. **Coleman M. D.** The Rosser-Iwaniec sieve in number fields [text] / Coleman M. D. // Acta Arith. – 1995. – 65. – P. 53–83.
2. **Heath-Brown D. R.** On the density of the zeros of the Dedekind zeta-function [text] / Heath-Brown D. R. // Acta Arith. – 1977. – V. 37. – P. 169–181.
3. **Huxley M.** On the difference between consecutive primes [text] / Huxley M. // Inv. Math. – 1972. – V. 15. – P. 155–164.
4. **Ivič A.** The Riemann zeta-function. Theory and Applications [text] / Ivič A. – N.-Y.; Wiley, 1985.
5. **Карацуба А.А.** Основы аналитической теории чисел [текст] 90/ Карацуба А. А. – М., 1975.
6. **Кауфман Р. М.** Оценка L-функции Гекке гауссового поля на половинной прямой [текст] / Кауфман Р. М. // Запис. научн. семин. Ленингр. отдел. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова. – 1979. – 91. – С. 40–51.
7. **Ковальчик Ф. Б.** Плотностные теоремы и распределение в простых секторах и прогрессиях [текст] / Ковальчик Ф. Б. // ДАН СССР. – 1974. – 219. – С. 31–34.
8. **Kubilius J. P.** On a problem in the n-dimensional analytic theory of numbers [text] / Kubilius J. P. // Viliniaus Valst. Univ. Mokslo darbai Fiz. Chem. Moksly. Ser. 4. – 1955. – P. 5–43.
9. **Лаврик А. Ф.** Приближенное функциональное уравнение дзета-функции Гекке мнимого квадратичного поля [текст] / Лаврик А. Ф. // Мат. заметки. – 1967. – 2(5). – С. 475–482.
10. **Монтгомери Г.** Мультипликативная теория чисел [текст] / Монтгомери Г. // – М.: Мир, 1974.