

Mathematical Subject Classification: 15A23, 65F08  
УДК 519.635.4

**В. В. Вербицкий, И. Н. Иванищева**

Одесский национальный университет имени И. И. Мечникова  
Одесский национальный политехнический университет

## **ПРЕДОБУСЛАВЛИВАНИЕ СЕДЛОВЫХ МАТРИЦ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ НЕПОЛНОГО ОБОБЩЕННОГО РАЗЛОЖЕНИЯ ХОЛЕССКОГО**

**Вербицкий В. В., Иванищева И. М. Передобумовлювання сідлових матриць з використанням неповного узагальненого розкладання Холеського.** Доведено існування неповного узагальненого розкладання Холеського сідлової матриці. Розкладання використано для побудови передобумовлювача системи з сідловою матрицею. Побудований передобумовлювач дозволяє використовувати метод спряжених градієнтів для роз'язування передобумовленої системи.

**Ключові слова:** неповне узагальнене розкладання Холеського, передобумовлювач, сідлова матриця.

**Вербицкий В. В., Иванищева И. Н. Предобуславливание седловых матриц с использованием неполного обобщенного разложения Холесского.** Доказано существование неполного обобщенного разложения Холесского седловой матрицы. Разложение использовано для построения предобуславливателя системы уравнений с седловой матрицей. Построенный предобуславливатель позволяет использовать метод сопряженных градиентов для решения предобусловленной системы.

**Ключевые слова:** неполное обобщенное разложение Холесского, предобуславливатель, седловая матрица.

**Verbitsky V., Ivanisheva I. An incomplete generalized Cholesky factorization preconditioner for a saddle-point matrix.** The existence of an incomplete generalized Cholesky factorization of a saddle matrix is proved. The factorization is applied to construct saddle point problem preconditioner. The preconditioner allows to use the conjugate gradient method for solving the preconditioned system.

**Key words:** an incomplete generalized Cholesky factorization, preconditioner, saddle point problems.

**ВВЕДЕНИЕ.** Большие разреженные системы с седловыми матрицами вида

$$A = \begin{bmatrix} A & B \\ -B^T & 0 \end{bmatrix}, \quad (1)$$

где  $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$  — симметричная положительно определенная матрица,  $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$  ( $m \geq n$ ) — матрица полного столбцового ранга, возникают во многих научных приложениях, например, при аппроксимации смешанным методом конечных элементов различных задач механики жидкости и механики деформируемого твердого тела [1]. Эффективными методами решения систем с седловыми матрицами являются итерационные методы подпространства Крылова, такие как MINRES (the minimal residual method), GMRES (the generalized minimal residual method),

CG (conjugate gradients) [2,3,4]. Методы подпространства Крылова требуют предобуславливания исходной системы [4]. Один из известных способов построения предобуславливателей для систем с седловыми матрицами состоит в использовании неполного разложения исходной матрицы [3]. В работе [5] показано, что для матрицы (1) существует обобщенное разложение Холецкого.

Статья посвящена построению неполного обобщенного разложения Холецкого для матрицы (1) с целью его использования в качестве предобуславливателя для итерационного метода подпространства Крылова.

## ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ.

### 1. Итерационные методы подпространства Крылова

Пусть  $x_0$  — начальное приближение к решению системы

$$Ax = b \quad (2)$$

и  $r_0 = b - Ax_0$  — невязка начального приближения. На  $k$ -ой итерации итерационные методы подпространства Крылова определяют приближение  $x_k$  к решению системы, удовлетворяющее условию

$$x_k \in x_0 + \mathcal{K}_k(\mathcal{A}, r_0), \quad (3)$$

где

$$\mathcal{K}_k(\mathcal{A}, r_0) \equiv \text{span}\{r_0, \mathcal{A}r_0, \dots, \mathcal{A}^{k-1}r_0\}$$

есть  $k$ -е подпространство Крылова, определяемое матрицей  $\mathcal{A}$  и вектором  $r_0$ . Хорошо известно, что подпространства Крылова образуют вложенную последовательность подпространств, наибольшая размерность которых

$$d \equiv \dim \mathcal{K}_{m+n}(\mathcal{A}, r_0) \leq m + n,$$

т. е.

$$\mathcal{K}_1(\mathcal{A}, r_0) \subset \dots \subset \mathcal{K}_d(\mathcal{A}, r_0) = \dots = \mathcal{K}_{m+n}(\mathcal{A}, r_0).$$

В частности, для любого  $k \leq d$  размерность подпространства Крылова  $\mathcal{K}_k(\mathcal{A}, r_0)$  равна  $k$ .

Поскольку число степеней свободы для определения приближения  $x_k$  равно  $k$ , то для его однозначного определения необходимо  $k$  условий. В методах подпространства Крылова эти условия определяются следующим образом

$$r_k = b - Ax_k \in r_0 + \mathcal{A}\mathcal{K}_k(\mathcal{A}, r_0), \quad r_k \perp \mathcal{C}_k, \quad (4)$$

где  $\mathcal{C}_k$  подпространство размерности  $k$ .

Если подпространство Крылова  $\mathcal{K}_k(\mathcal{A}, r_0)$  имеет размерность  $k$  и

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}^T > 0 \quad \text{и} \quad \mathcal{C}_k = \mathcal{K}_k(\mathcal{A}, r_0) \quad (I)$$

или

$$\det \mathcal{A} \neq 0 \quad \text{и} \quad \mathcal{A}\mathcal{C}_k = \mathcal{K}_k(\mathcal{A}, r_0), \quad (II)$$

то приближение  $x_k$  вида (3), невязка которого удовлетворяет условию (4), однозначно определяется.

Условия (I) лежат в основе известных реализаций методов подпространства Крылова MINRES и CG, а условия (II) — в основе метода GMRES.

Наиболее предпочтительным методом для систем с симметричными положительно определенными матрицами является алгоритм сопряженных градиентов CG. Он наименее подвержен численной неустойчивости и его реализация наименее трудоемкая, ибо на  $k$ -м шаге необходимо хранить лишь четыре вектора, а не  $k$ [4].

Отметим, что матрица (1) несимметрична и не является положительно определенной. Далее будет построен такой преобуславливатель, что матрица преобусловленной системы будет симметричной и положительно определенной.

## 2. Неполное обобщенное разложение Холецкого

Известно, что методы подпространства Крылова требуют преобуславливания исходной системы. В противном случае методы сходятся очень медленно или вообще расходятся [4]. Преобуславливание состоит в следующем. Вместо системы (2) рассматривается преобусловленная система

$$M^{-1}Ax = M^{-1}b, \quad (5)$$

где преобуславливатель  $M$  выбирают так, чтобы:

- 1) система  $Mu = g$  решалась легче исходной;
- 2) матрица  $M^{-1}$  была близка к исходной, в результате чего уменьшается число обусловленности задачи и, как следствие, увеличивается скорость сходимости метода.

Один из известных способов построения преобуславливателя состоит в использовании неполного разложения матрицы. Например, неполное  $LU$ -разложение имеет вид

$$A = LU + R, \quad (6)$$

где  $L$  — нижняя треугольная матрица с единицами на главной диагонали,  $U$  — верхняя треугольная матрица. При этом  $l_{ij} \neq 0$ ,  $u_{ij} \neq 0$ , только если  $a_{ij} \neq 0$  и если  $a_{ij} \neq 0$ , то  $r_{ij} = 0$ . Если построено разложение (6), то преобуславливатель выбирают следующим образом

$$M = LU.$$

К сожалению, неполное разложение вида (6) может не существовать для многих типов матриц. Например, хорошо известно, что неполное разложение Холецкого может не существовать для симметричной положительно определенной матрицы [5].

Представим матрицу  $A$  в виде

$$\begin{bmatrix} A & B \\ -B^T & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 & 0 \\ -(L_1^{-1}B)^T & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_1^T & L_1^{-1}B \\ 0 & I \end{bmatrix}, \quad (7)$$

где  $L_1 \in R^{m \times m}$  — множитель Холецкого матрицы  $A$  ( $A = L_1 L_1^T$ ),

$$S = (L_1^{-1}B)^T (L_1^{-1}B) = B^T L_1^{-T} L_1^{-1} B = B^T A^{-1} B$$

— положительно определенная матрица. Построив разложение Холецкого  $S = LL^T$ , из (7) получаем разложение

$$\begin{bmatrix} A & B \\ -B^T & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 & 0 \\ -(L_1^{-1}B)^T & L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_1^T & L_1^{-1}B \\ 0 & L^T \end{bmatrix}. \quad (8)$$

Разложение (8) называется обобщенным разложением Холецкого седловой матрицы  $\mathcal{A}$  [6].

Пусть  $\tilde{S}$  — положительно определенная матрица, получаемая из матрицы  $S$  обнулением некоторых элементов. Например, если матрицу  $S$  представить в блочном виде с квадратными диагональными блоками

$$S = \begin{bmatrix} S_{11} & \cdots & S_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{k1} & \cdots & S_{kk} \end{bmatrix},$$

то

$$\tilde{S} = \begin{bmatrix} S_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & S_{kk} \end{bmatrix}.$$

Заметим, что в этом случае  $\tilde{S}$  — блочный предобуславливатель Якоби для матрицы  $S$ . Самый простой способ выбора матрицы  $\tilde{S}$  — это положить  $\tilde{S} = \text{diag}(S)$ .

Построим разложение Холецкого матрицы  $\tilde{S} = L_2L_2^T$ . Положив  $S = L_2L_2^T + R$ , из (7) получаем разложение

$$\begin{bmatrix} A & B \\ -B^T & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 & 0 \\ -(L_1^{-1}B)^T & L_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_1^T & L_1^{-1}B \\ 0 & L_2^T \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix}. \quad (9)$$

Разложение (9) назовем неполным обобщенным разложением Холецкого седловой матрицы  $\mathcal{A}$ .

Построим предобуславливатель для системы (2), используя неполное обобщенное разложение Холецкого. Системе (2) поставим в соответствие предобусловленную систему

$$\mathcal{L}^{-1}\mathcal{A}\tilde{\mathcal{L}}^{-T}y = \mathcal{L}^{-1}b, \quad (10)$$

где  $y = \tilde{\mathcal{L}}^T x$ ,

$$\mathcal{L} = \begin{bmatrix} L_1 & 0 \\ -(L_1^{-1}B)^T & L_2 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathcal{L}}^T = \begin{bmatrix} L_1^T & L_1^{-1}B \\ 0 & L_2^T \end{bmatrix}.$$

**Теорема 1.** Матрица  $\mathcal{L}^{-1}\mathcal{A}\tilde{\mathcal{L}}^{-T}$  предобусловленной системы (10) симметрична, а если все собственные значения матрицы  $L_2^{-1}RL_2^{-T}$  больше  $-1$ , то и положительно определена, в частности матрица,  $\mathcal{L}^{-1}\mathcal{A}\tilde{\mathcal{L}}^{-T}$  положительно определена, если

$$\|R\|_1 < \lambda_{\min}(\tilde{S}). \quad (11)$$

**Доказательство.** Легко проверить, что

$$\mathcal{L}^{-1} \mathcal{A} \tilde{\mathcal{L}}^{-T} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I + L_2^{-1} R L_2^{-T} \end{bmatrix}.$$

Отсюда сразу следуют первые два утверждения теоремы.

Пусть  $\{\lambda, x\}$  — произвольная собственная пара матрицы  $L_2^{-1} R L_2^{-T}$ , тогда

$$L_2^{-1} R L_2^{-T} x = \lambda x, \quad x \neq 0,$$

$$R y = \lambda L_2 L_2^T y, \quad y = L_2^{-T} x \neq 0,$$

$$R (L_2 L_2^T)^{-1} z = \lambda z, \quad z = (L_2 L_2^T) y \neq 0.$$

Из последнего равенства получаем

$$|\lambda| \|z\|_2 = \|R (L_2 L_2^T)^{-1} z\|_2 = \|R \tilde{S}^{-1} z\|_2 \leq \|R\|_2 \|\tilde{S}^{-1}\|_2 \|z\|_2 \leq \frac{\|R\|_1 \|z\|_2}{\lambda_{\min}(\tilde{S})}.$$

Значит,

$$|\lambda| \leq \frac{\|R\|_1}{\lambda_{\min}(\tilde{S})}.$$

Поэтому, если условие (11) выполняется, все собственные значения матрицы  $L_2^{-1} R L_2^{-T}$  по модулю меньше 1 и по второму утверждению теоремы матрица  $\mathcal{L}^{-1} \mathcal{A} \tilde{\mathcal{L}}^{-T}$  положительно определена.

Таким образом, согласно теореме 1, для нахождения решения предобусловленной системы (10) можно применить метод сопряженных градиентов CG.

Известно, что эффективность предобуславливателя, построенного на неполном разложении, зависит от перенумерации неизвестных [7]. Очевидно, что чем ближе к нулевой матрице матрица  $R$ , тем лучше матрица  $\mathcal{L} \tilde{\mathcal{L}}^T$  аппроксимирует матрицу  $\mathcal{A}$ , а значит, тем эффективней будет предобуславливатель. С другой стороны, чем больше разреженность матрицы  $S$ , тем меньше ненулевых элементов содержит матрица  $R$  при фиксированном выборе матрицы  $\tilde{S}$ . В рассматриваемом выше случае матрица  $S$  будет полностью заполненной. В работе [6] предложены алгоритмы перенумерации для уменьшения заполнений обобщенных множителей Холецкого. Покажем, что эти алгоритмы перенумерации можно применить и для построения более эффективных предобуславливателей на основании неполного обобщенного разложения Холецкого.

Седловую матрицу  $\mathcal{A}$ , элементы которой переупорядочены с целью уменьшения заполнения обобщенных множителей Холецкого, представим в блочном виде следующим образом:

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & B_{12} & A_{13} & B_{14} & \cdots & A_{1,2p-1} & B_{1,2p} \\ -B_{12}^T & O_{22} & B_{23} & O_{24} & \cdots & B_{2,2p-1} & O_{2,2p} \\ A_{13}^T & -B_{23}^T & A_{33} & B_{34} & \cdots & A_{3,2p-1} & B_{3,2p} \\ -B_{14} & O_{24}^T & -B_{34}^T & O_{44} & \cdots & B_{4,2p-1} & O_{4,2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ A_{1,2p-1}^T & -B_{2,2p-1}^T & A_{3,2p-1}^T & -B_{4,2p-1}^T & \cdots & A_{2p-1,2p-1} & B_{2p-1,2p} \\ -B_{1,2p}^T & O_{2,2p}^T & -B_{3,2p}^T & O_{4,2p}^T & \cdots & -B_{2p-1,2p}^T & O_{2p,2p} \end{bmatrix}. \quad (12)$$

Докажем следующую лемму.

**Лемма 1.** *Столбцы блока*

$$[B_{1,2k}^T, O_{2,2k}^T, B_{3,2k}^T, O_{4,2k}^T, \dots, B_{2k-1,2k}^T]^T,$$

который расположен над диагональным нулевым блоком  $O_{2k,2k}$ ,  $k = \overline{1, p}$ , линейно независимы.

**Доказательство.** Поскольку для матрицы (12) можно построить обобщенное разложение Холецкого, а значит, и  $LU$ -разложение, то по теореме об  $LU$ -разложении определители всех главных ведущих подматриц матрицы (12) отличны от нуля. Значит, столбцы указанного блока не могут быть линейно зависимы, ибо в этом случае определитель главной ведущей подматрицы, содержащий эти столбцы и часть нулевого блока  $O_{2k,2k}$ , равнялся бы нулю.

**Теорема 2.** *Если элементы седловой матрицы  $A$  перепорядочены так, что для нее существует обобщенное разложение Холецкого, то для нее можно построить неполное обобщенное разложение Холецкого.*

**Доказательство.** Для построения неполного обобщенного разложения Холецкого матрицы (12) необходимо  $p$  шагов. Каждый шаг состоит из двух этапов. Рассмотрим первый шаг разложения. Обозначим  $\mathcal{A}^{(0)} = A$ . Матрица

$$\mathcal{A}_A^{(0)} = \begin{bmatrix} A_{11}^{(0)} & A_{13}^{(0)} & \cdots & A_{1,2p-1}^{(0)} \\ (A_{13}^{(0)})^T & A_{33}^{(0)} & \cdots & A_{3,2p-1}^{(0)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (A_{1,2p-1}^{(0)})^T & (A_{3,2p-1}^{(0)})^T & \cdots & A_{2p-1,2p-1}^{(0)} \end{bmatrix}$$

положительно определена. Построим разложение Холецкого матрицы  $A_{11}^{(0)} = L_{11} L_{11}^T$ . Тогда первая блочная строка множителя  $\tilde{\mathcal{L}}^T$  будет иметь вид

$$[L_{11}^T, B_{12}^{(1)}, A_{13}^{(1)}, B_{14}^{(1)}, \dots, A_{1,2p-1}^{(1)}, B_{1,2p}^{(1)}],$$

где

$$B_{1,2j}^{(1)} = L_{11}^{-1} B_{1,2j}^{(0)}, \quad A_{1,2j-1}^{(1)} = L_{11}^{-1} A_{1,2j-1}^{(0)}, \quad j = \overline{2, p},$$

а первый блочный столбец множителя  $\mathcal{L}$  будет таким

$$[L_{11}^T, -B_{12}^{(1)}, A_{13}^{(1)}, -B_{14}^{(1)}, \dots, A_{1,2p}^{(1)}, -B_{1,2p-1}^{(1)}]^T.$$

Блоки активной подматрицы первого этапа первого шага разложения вычисляются следующим образом:

$$\mathcal{A}_A^{(0.5)} = \begin{bmatrix} A_{33}^{(0)} & \cdots & A_{3,2p-1}^{(0)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (A_{3,2p-1}^{(0)})^T & \cdots & A_{2p-1,2p-1}^{(0)} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} (A_{13}^{(1)})^T \\ \vdots \\ (A_{1,2p-1}^{(1)})^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (A_{13}^{(1)})^T \\ \vdots \\ (A_{1,2p-1}^{(1)})^T \end{bmatrix}^T; \quad (13)$$

$$B_{2k,2j-1}^{(1)} = [B_{2k,2j-1}^{(0)} + (B_{1,2k}^{(1)})^T A_{1,2j-1}^{(1)}], \quad k = \overline{1, p}, j = \overline{k+1, p};$$

$$B_{2k-1,2j}^{(1)} = B_{2k-1,2j}^{(0)} - (A_{1,2k-1}^{(1)})^T B_{1,,2j}^{(1)}, \quad k = \overline{2, p}, j = \overline{k, p}; \quad (14)$$

$$O_{2k,2k}^{(1)} = \text{diag}((B_{1,2k}^{(1)})^T B_{1,2k}^{(1)}), \quad k = \overline{1, p};$$

блоки  $O_{2k,2j}$ ,  $k \neq j$ , остаются нулевыми. Здесь скобки  $\lfloor \rfloor$  означают, что элемент блока  $B_{2k,2j-1}^{(1)}$  вычисляется лишь тогда, когда соответствующий элемент блока  $B_{2k,2j-1}^{(0)}$  отличен от нуля. Поскольку фактически матрица  $\mathcal{A}_A^{(0.5)}$  является активной подматрицей после первого шага разложения Холецкого матрицы  $\mathcal{A}_A^{(0)}$ , то она положительно определена. В силу леммы 1 диагональные элементы матрицы  $O_{2,2}^{(1)}$  положительны, поэтому можно вычислить разложение Холецкого  $O_{2,2}^{(1)} = L_{22} L_{22}^T$ . Теперь на втором этапе первого шага вычислим вторую блочную строку множителя  $\tilde{\mathcal{L}}^T$ ,

$$\left[ L_{22}^T, B_{23}^{(1)}, O_{24}, \dots, B_{2,2p-1}^{(1)}, O_{2,2p} \right],$$

и второй блочный столбец множителя  $\mathcal{L}$

$$\left[ L_{22}^T, -B_{23}^{(1)}, O_{24}, \dots, -B_{2,2p-1}^{(1)}, O_{2,2p} \right]^T,$$

где  $B_{2,2k-1}^{(1)} = L_{22}^{-1} B_{2,2k-1}^{(0)}$ ,  $k = \overline{2, p}$ . Активная подматрица этого этапа вычисляется так:

$$\mathcal{A}_A^{(1)} = \mathcal{A}_A^{(0.5)} + \begin{bmatrix} (B_{23}^{(1)})^T \\ \vdots \\ (B_{2,2p-1}^{(1)})^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (B_{23}^{(1)})^T \\ \vdots \\ (B_{2,2p-1}^{(1)})^T \end{bmatrix}^T. \quad (15)$$

Поскольку матрица  $\mathcal{A}_A^{(0.5)}$  положительно определена, то и матрица  $\mathcal{A}_A^{(1)}$  тоже положительно определена.

Предположим, что выполнено  $k$  шагов разложения. Покажем, что можно выполнить  $(k+1)$ -й шаг. Матрица

$$\mathcal{A}_A^{(k)} = \begin{bmatrix} A_{2k+1,2k+1}^{(k)} & \cdots & A_{2k+1,2p-1}^{(k)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (A_{2p-1,2k+1}^{(k)})^T & \cdots & A_{2p-1,2p-1}^{(k)} \end{bmatrix}$$

положительно определена, поскольку преобразования активной подматрицы на обоих этапах каждого шага, определяемые формулами типа (13) и (15), сохраняют положительную определенность. Значит, можно выполнить первый этап  $(k+1)$ -го шага разложения. Второй этап  $(k+1)$ -го шага можно выполнить, если диагональные элементы матрицы

$$O_{2k+2,2k+2}^{(k+1)} = \text{diag} \left( (B_{1,2k+2}^{(1)})^T B_{1,2k+2}^{(1)} + (B_{3,2k+2}^{(2)})^T B_{2,2k+2}^{(2)} + \cdots + \right. \\ \left. + (B_{2k+1,2k+2}^{(k+1)})^T B_{2k+1,2k+2}^{(k+1)} \right)$$

положительны.  $l$ -й диагональный элемент этой матрицы будет положительным, если  $l$ -й столбец матрицы

$$\left[ (B_{1,2k+2}^{(1)})^T, O_{2,2k+2}^T, (B_{3,2k+2}^{(2)})^T, \dots, (B_{2k+1,2k+2}^{(k+1)})^T \right]^T$$

отличен от нулевого. Поскольку по лемме 1 столбцы матрицы

$$\left[ B_{1,2k+2}^T, O_{2,2k+2}^T, B_{3,2k+2}^T, \dots, B_{2k+1,2k+2}^T \right]^T$$

линейно независимы, найдется такой индекс  $t$ ,  $1 \leq t \leq k+1$ , что

$$(B_{2\tilde{t}-1,2k+2})_{*,l} = 0, \quad 1 \leq \tilde{t} < t, \quad (B_{2t-1,2k+2})_{*,l} \neq 0.$$

Тогда, учитывая формулы преобразования типа (14), находим, что

$$(B_{2t-1,2k+2}^{(t)})_{*,l} \neq 0.$$

### 3. Вычислительный эксперимент

Аппроксимируя задачу Дирихле для бигармонического оператора

$$\begin{aligned} \Delta^2 u &= f \quad \text{в } \Omega, \\ u &= \partial_n u = 0 \quad \text{на } \partial\Omega, \end{aligned}$$

где  $\Omega = \{(x, y) : 0 < x < 1, 0 < y < 1 - x\}$ , смешанным методом конечных элементов по схеме Германа–Мийоси, получаем систему (2) с матрицей  $A$  вида (1), размерность которой зависит от триангуляции области  $\Omega$ .

В вычислительном эксперименте правая часть  $f$  уравнения выбрана так, что точное решение краевой задачи имеет вид  $u(x, y) = x^2 y^2 (1 - x - y)^2$ . Использовались равномерные триангуляции, определяемые разбиением катетов треугольника  $\Omega$  на равные части. Узлы триангуляции нумеровались слева направо и снизу вверх. Матрица вида (1) получается, если вначале нумеровать неизвестные одного типа, а затем — другого типа. Матрица вида (12) получается, если в каждом узле вначале нумеровать неизвестные одного типа, а затем — другого типа.

Таблица 1.

Сетка	$m$	$n$	Без переном.	С переном.
$10 \times 10$	198	66	26	16
$20 \times 20$	693	231	123	59
$30 \times 30$	1488	496	*	140
$40 \times 40$	2583	861	*	259
$50 \times 50$	3978	1346	*	393

Число итераций алгоритма CG, необходимое для выполнения оценки  $\|Ax_k - b\|_2 / \|b\|_2 \leq 10^{-6}$

Известно, что такая нумерация позволяет построить обобщенное разложение Холецкого [6], а значит, можно построить и неполное обобщенное разложение Холецкого. Неполное обобщенное разложение Холецкого строилось для



матриц обоих типов. В качестве матрицы  $\tilde{S}$  выбиралась диагональная матрица. Затем строились предобуславливатели. Решение предобусловленной системы находилось методом сопряженных градиентов *CG*. Использовалась функция *cgs()* пакета MATLAB. В таблице 1 представлены результаты вычислительного эксперимента.

Отметим, что выбранная перенумерация далека от оптимальной (алгоритмы построения более эффективных перенумераций приведены в работе [6]). Тем не менее, предобуславливатель, построенный для перенумерованной матрицы, оказался значительно эффективнее предобуславливателя для исходной матрицы.

**ЗАКЛЮЧЕНИЕ.** Нами доказано существование неполного обобщенного разложения Холесского седловой матрицы. Показано, что неполное обобщенное разложение Холесского вместе с алгоритмами перенумерации элементов матрицы, уменьшающими заполнение обобщенных множителей Холесского, можно использовать для построения эффективных предобуславливателей. Причем предобусловленная система является симметричной и положительно определенной, что позволяет использовать метод сопряженных градиентов, который среди методов подпространств Крылова является одним из самых эффективных и наименее трудоемким. Проведенный вычислительный эксперимент, в котором седловые матрицы различной размерности получаются в результате аппроксимации задачи Дирихле для бигармонического оператора смешанным методом конечных элементов на последовательности равномерных ступающихся сеток, подтверждает теоретические результаты. Отметим, что построение предобуславливателей на основании неполного обобщенного разложения Холесского требует разработки эффективных методов перенумерации элементов седловой матрицы.

1. **Brezzi F.** Mixed and Hybrid Finite Element Methods / F. Brezzi, M. Fortin. – Springer-Verlag, 1991. – 350 p.
2. **Benzi M.** Numerical solution of saddle point problems / M. Benzi, G. H. Golub, J. Liesen // Acta Numerica. – 2005. – P. 1–137.
3. **Benzi M.** Some Preconditioning Techniques for Saddle Point Problems / M. Benzi, A. J. Wathen // Mathematics in Industry. – 2008. – V. 13. – P. 195–211.
4. **Saad Y.** Iterative Methods for Sparse Linear Systems, second edn / Y. Saad. – SIAM, Philadelphia, PA, 2003. – 547 p.
5. **Manteuffel T. A.** An incomplete factorization technique for positive definite linear systems / T. A. Manteuffel // Mathematics of computation. – 1980. – V. 34(150). – P. 473–497.
6. **Масловская Л.В.** Обобщенный алгоритм Холесского для смешанных дискретных аналогов эллиптических краевых задач / Л. В. Масловская // ЖВМ и МФ. – 1989. – Т. 29, № 1. – С. 67–74.
7. **Botta E. F. F.** Matrix renumbering ILU: An effective algebraic multilevel ILU preconditioner for sparse matrices / E. F. F. Botta, F. W. Wubs // SIAM J. Matrix Anal. Appl. – 1999. – V. 20, Is. 4. – P. 1007–1026.