

Mathematical Subject Classification: 74G05  
УДК 539.3

**А. А. Фесенко**

Одесский национальный университет имени И. И. Мечникова

## СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ БЕСКОНЕЧНОЙ УПРУГОЙ ПЛИТЫ С УЧЕТОМ ВОЗДЕЙСТВИЯ ПРОИЗВОЛЬНО ОРИЕНТИРОВАННОЙ ВНУТРЕННЕЙ СИЛЫ

**Фесенко Г. О.** Мішана задача для нескінченної пружної плити з урахуванням впливу довільно орієнтованої внутрішньої сили. Отримано точний розв'язок задачі теорії пружності для нескінченної плити з урахуванням дії усередині плити довільно орієнтованої зосередженої сили. Припускається, що одна границя плити є жорстко закріпленою, а на іншій – задані напруження. Для отримання розв'язку використовується новий аналітичний метод, який базується на зведенні системи рівнянь Ламе до одного рівняння, що незалежно розв'язується, та двох сумісно розв'язуваних рівнянь. Граничні умови при цьому також розділяються. Отримана задача за допомогою інтегрального перетворення Фур'є зводиться до векторної одномірної крайової задачі. Проведено числовий аналіз розподілу напружень на закріпленій грані в залежності від розміру ділянки розподілу заданих напружень і розташування внутрішньої зосередженої сили.

**Ключові слова:** нескінченна плита, інтегральні перетворення, точний розв'язок, довільно орієнтована внутрішня сила.

**Фесенко А. А.** Смешанная задача для бесконечной упругой плиты с учетом воздействия произвольно ориентированной внутренней силы. Получено точное решение задачи теории упругости для бесконечной плиты в случае воздействия произвольно ориентированной сосредоточенной внутри плиты силы. Предполагается, что на одной грани заданы напряжения, а другая – жестко закреплена. Для построения решения используется новый аналитический метод, основанный на приведении системы уравнений Ламе к двум совместно решаемым и одному отдельно решаемому уравнениям. При этом граничные условия также разделяются. Полученная краевая задача с помощью интегрального преобразования Фурье сводится к векторной одномерной краевой задаче. Проведен численный анализ распределения напряжений на закрепленной грани в зависимости от параметров участка распределения заданного напряжения и расположения внутренней сосредоточенной силы.

**Ключевые слова:** бесконечная плита, интегральные преобразования, точное решение, произвольно ориентированная внутренняя сила.

**Fesenco A. A.** The space elasticity problem for the infinite layer with the presence of an arbitrary concentrated force inside the layer. The exact solution of the elasticity mixed problem for the space layer in the case of presence an arbitrary orientation concentrated force inside the layer is constructed. The stresses are set on one side, and another side is fixed. New method was used here, based on reducing Lamé equations to an independently solved one and two combined solved equations. Boundary conditions are divided as well. These two equations are reduced to the vector one-dimensional boundary problem using Fourier integral transformations method. The numerical analysis of the stresses distribution in the fixed side of the layer was done depending on the area parameters

of the initial stresses and the location of the concentrated force.

**Key words:** the infinite layer, the integral transformations, the exact solution, an arbitrary orientation inner force.

**ВВЕДЕНИЕ.** Традиционные подходы к исследованию трехмерных задач теории упругости основываются на представлениях решений однородных уравнений Ламе с помощью гармонических и бигармонических функций [6], [7]. Широко известен метод Папковича—Нейбера, который заключается в сведении уравнений Ламе к последовательности гармонических уравнений с неразделенными граничными условиями, что существенно усложняет технику построения решения. Обобщение этого метода для задач, в которых областью контакта является слой, использовано в [8]–[10]. В данной работе используется новый подход, предложенный Г. Я. Поповым в [2]. Метод основан на приведении уравнений Ламе к одному независимо решаемому и двум совместно решаемым уравнениям. Методом интегральных преобразований, применяемых непосредственно к полученным уравнениям равновесия и краевым условиям, задача сводится к одномерной векторной краевой задаче, которая решается точно. Этот подход применен в работе [5], где построено поле смещений точек упругого слоя, на одной грани которого задана равномерно распределенная нормальная сжимающая нагрузка единичной интенсивности, а на другой — жесткое закрепление. Внутри слоя действует произвольно ориентированная сосредоточенная сила. Оказалось, что выбранная система координат существенно усложняет расчеты. В данной работе выбрана другая система координат, построено поле смещений упругой среды и исследованы нормальные напряжения на закрепленной грани.

#### ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ.

**1. Постановка задачи** Рассмотрим упругую бесконечную плиту (рис. 1) (модуль сдвига  $G$ , коэффициент Пуассона  $\mu$ ),

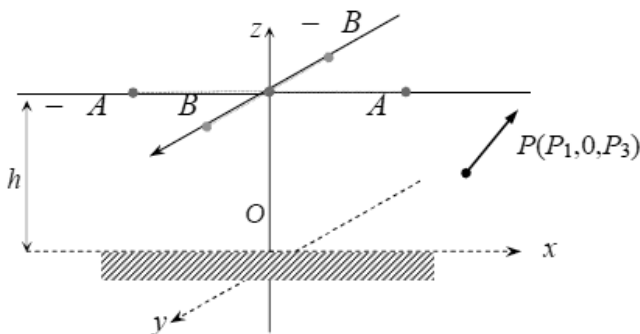


Рис. 1.

описываемую в декартовой системе координат соотношениями

$$-\infty < x < \infty, \quad -\infty < y < \infty, \quad 0 < z < h.$$

На грани  $z = h$  заданы напряжения

$$\sigma_z|_{z=h} = -p(x, y), \quad \tau_{zx}|_{z=h} = 0, \quad \tau_{zy}|_{z=h} = 0. \quad (1)$$

Грань  $z = 0$  предполагается жестко закрепленной:

$$u_x(x, y, 0) = 0, \quad u_y(x, y, 0) = 0, \quad u_z(x, y, 0) = 0. \quad (2)$$

В точке плиты с координатами  $x = d, y = 0, z = c$  приложена произвольно ориентированная сосредоточенная сила  $P = P_1, 0, P_3$ , которую можно трактовать как объемную силу интенсивности

$$q_x = P_1 \delta(x - d) \delta(y) \delta(z - c), \quad q_y = 0, \quad q_z = P_3 \delta(x - d) \delta(y) \delta(z - c), \quad (3)$$

$\delta(z)$  – дельта функция Дирака.

Требуется определить смещения упругой среды

$$u(x, y, z) = u_x, \quad v(x, y, z) = u_y, \quad w(x, y, z) = u_z, \quad (4)$$

удовлетворяющие граничным условиям (1), (2) и уравнениям равновесия

$$\Delta(u, v, w) + \mu_0(\Theta', \Theta', \Theta') = -G^{-1}(q_x, 0, q_z), \quad (5)$$

где штрих означает производную по переменной  $x$ , точка – производную по переменной  $y$ , запятая – по  $z$ ,  $\Theta = u' + v' + w'$  – объемное расширение,  $\mu_0 = (1 - 2\mu)^{-1}$ ,  $\Delta$  – оператор Лапласа.

## 2. Сведение задачи к векторной одномерной краевой задаче

Воспользовавшись известными формулами связи смещений и напряжений [1], запишем граничное условие (1) в виде

$$\mu [u'(x, y, h) + v'(x, y, h)] + (1 - \mu)w'(x, y, h) = -p(x, y)/(2G\mu_0). \quad (6)$$

Дальнейшее решение основано на введении новых неизвестных функций [2]

$$Z(x, y, z) = u'(x, y, z) + v'(x, y, z), \quad \tilde{Z}(x, y, z) = v'(x, y, z) - u'(x, y, z), \quad (7)$$

относительно которых уравнения равновесия (5) примут вид

$$\Delta w + \mu_0 \nabla_{xy}(Z + w)' = -q_z/G, \quad \Delta Z + \mu_0 \nabla_{xy}(Z + w)' = -q_x'/G. \quad (8)$$

Граничные условия (2), (5) переформулируются

$$\begin{aligned} \mu Z(x, y, h) + (1 - \mu)w'(x, y, h) &= -p(x, y)/(2G\mu_0), \\ \nabla_{xy} w(x, y, h) + Z'(x, y, h) &= 0, \quad \tilde{Z}'(x, y, h) = 0, \\ w(x, y, 0) = 0, \quad Z(x, y, 0) &= 0, \quad \tilde{Z}(x, y, 0) = 0, \end{aligned} \quad (9)$$

здесь  $\nabla_{xy} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ .

Перейдем в приведенных соотношениях от искомым и заданных функций к трансформантам Фурье по переменным  $x$  и  $y$

$$w_{\beta\alpha}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} w(x, y, z) e^{i\beta y} e^{i\alpha x} dy dx, \quad Z_{\beta\alpha}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} Z(x, y, z) e^{i\beta y} e^{i\alpha x} dy dx. \quad (10)$$

Тогда соотношения (8), (9) запишутся в форме

$$\begin{aligned} w''_{\beta\alpha}(z) - \mu_*^{-1} N^2 w_{\beta\alpha}(z) + \mu_*^{-1} \mu_0 Z'_{\beta\alpha}(z) &= -q_z^{\beta\alpha}(z\alpha)/G, \quad 0 < z < h, \\ Z''_{\beta\alpha}(z) - N^2 [\mu_* Z_{\beta\alpha}(z) + \mu_0 w'_{\beta\alpha}(z)] &= i\alpha q_x^{\beta\alpha}(z)/G, \quad N^2 = \alpha^2 + \beta^2, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} -N^2 w_{\beta\alpha}(h) + Z'_{\beta\alpha}(h) = 0, \quad \mu Z_{\beta\alpha}(h) + (1 - \mu)w'_{\beta\alpha}(h) = -(2G\mu_0)^{-1} p_{\beta\alpha}, \\ w_{\beta\alpha}(0) = 0, \quad Z_{\beta\alpha}(0) = 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Если будет решена краевая задача (11), (12), то трансформанты смещений  $u_{\beta\alpha}(z)$  и  $v_{\beta\alpha}(z)$  найдем из уравнений [2]

$$\nabla_{xy} u = Z' - \tilde{Z}, \quad \nabla_{xy} v = Z - \tilde{Z}',$$

применив к ним преобразование Фурье (10)

$$u_{\beta\alpha}(z) = iN^{-2}(\alpha Z_{\beta\alpha}(z) - \beta \tilde{Z}_{\beta\alpha}(z)), \quad v_{\beta\alpha}(z) = iN^{-2}(\beta Z_{\beta\alpha}(z) + \alpha \tilde{Z}_{\beta\alpha}(z)). \quad (13)$$

Введем искомый вектор  $\vec{y}(z)$  и матрицы  $P, Q$

$$\vec{y}(z) = \begin{pmatrix} w_{\beta\alpha}(z) \\ Z_{\beta\alpha}(z) \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} \mu_*^{-1} & 0 \\ 0 & \mu_* \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & \mu_*^{-1} \\ -N^2_{\alpha\beta} & 0 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (14)$$

Тогда систему (11) запишем в векторной форме

$$L_2 \vec{y}(z) \equiv I \vec{y}''(z) + \mu_0 Q \vec{y}'(z) - N^2 P \vec{y}(z) = f(z), \quad 0 < z < h, \quad (15)$$

$$\text{где } f(z) = \frac{1}{G} \begin{pmatrix} -q_z^{\beta\alpha}(z) \\ i\alpha q_x^{\beta\alpha}(z) \end{pmatrix} = \frac{1}{G} \delta(z - c) e^{i\alpha d} \begin{pmatrix} -P_3 \\ i\alpha P_1 \end{pmatrix}.$$

Решение векторного уравнения (15) строим в форме [3]

$$\vec{y}(z) = \int_0^h \Phi(z, \xi) f(\xi) d\xi + Y_-(z) \begin{pmatrix} C_0^0 \\ C_0^1 \end{pmatrix} + Y_+(z) \begin{pmatrix} C_1^0 \\ C_1^1 \end{pmatrix}. \quad (16)$$

$C_i^j, i, j, = 0, 1$  — неизвестные постоянные, а  $\Phi(z, \xi)$  — фундаментальная матрица и  $Y_{\mp}(z)$  — фундаментальная матричная система решений построены ранее в [5]:

$$\begin{aligned} \Phi(z, \xi) = \mu_0 (4N)^{-1} e^{-N|z-\xi|} \begin{pmatrix} -\kappa - N|z-\xi| & \mu_*^{-1}(z-\xi) \\ -(z-\xi)N^2 & \mu_*^{-1}(N|z-\xi| - \kappa) \end{pmatrix}, \\ Y_{\mp}(z) = \mu_0 e^{\mp Nz} \begin{pmatrix} -Nz \mp \kappa & \pm \mu_*^{-1} z \\ \mp N^2 z & \mu_*^{-1}(Nz \mp \kappa) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

где  $\mu_* = 1 + \mu_0, \kappa = 3 - 4\mu$ .

Учитывая вид правой части уравнения (15), решение задачи (15), (12) в пространстве трансформант запишется так

$$\begin{aligned} w_{\beta\alpha}(z) = \frac{e^{i\alpha d} e^{-N|z-c|}}{4NG} \{(\kappa + N|z-c|)P_3 + \mu_1(z-c)i\alpha P_1\} - \\ - \mu_0(Nz + \kappa)e^{-Nz}C_0^0 + \mu_1 z e^{-Nz}C_0^1 + \mu_0(-Nz + \kappa)e^{Nz}C_1^0 - \mu_1 z e^{Nz}C_1^1, \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} Z_{\beta\alpha}(z) = \frac{e^{i\alpha d} e^{-N|z-c|}}{4NG} \{\mu_0(z-c)N^2 P_3 - \mu_1(\kappa - N|z-c|)i\alpha P_1\} - \\ - \mu_0 N^2 z e^{-Nz}C_0^0 + \mu_1(Nz - \kappa)e^{-Nz}C_0^1 + \mu_0 N^2 z e^{Nz}C_1^0 + \mu_1(Nz + \kappa)e^{Nz}C_1^1, \end{aligned}$$

где  $\mu_1 = (2 - 2\mu)^{-1}$ .

Постоянные вектора  $C_0^i$  и  $C_1^i$ ,  $i = 0, 1$ , из (16) найдем, удовлетворив граничные условия (12).

$$C_0^0 = C_1^0 = -\frac{p\beta\alpha}{2G\mu_0\kappa} \frac{1}{N} \frac{1}{D_N} (-Nh \sinh Nh + \mu_1^{-1} \cosh Nh) - \frac{e^{i\alpha d} F_1}{4\kappa N D_N G},$$

$$C_0^1 = C_1^1 = \frac{p\beta\alpha}{2G\mu_0\kappa} \frac{\mu_*}{D_N} (Nh \cosh Nh - \mu_0^{-1} \sinh Nh) - \frac{\mu_* e^{i\alpha d} F_2}{4\kappa N D_N G}, \quad (18)$$

$$D_N = \frac{1}{\kappa} (4(Nh)^2 + \kappa^2 + 1) + e^{2Nh} + e^{-2Nh} = 2 \cosh 2Nh + \frac{1}{\kappa} (4(Nh)^2 + \kappa^2 + 1),$$

где

$$F_1 = e^{-Nc} \{Nh\delta_1 + \delta_3\} - e^{Nc} \{Nh\delta_2 + \delta_4\} + e^{-2Nh} e^{Nc} \delta_5 - e^{2Nh} e^{-Nc} \delta_6,$$

$$\delta_1 = \pm 2N^2(h-c)P_3 + \kappa NP_3 + 2\mu_0^{-1}\mu_1 N(h-c)i\alpha P_1 \pm \mu_0^{-1}\mu_1 \kappa i\alpha P_1,$$

$$\delta_3 = \kappa N^2(h-c)P_3 \mp \frac{1+\kappa^2}{2} NP_3 \mp \mu_0^{-1}\mu_1 \kappa N(h-c)i\alpha P_1 - 2\mu_0^{-2}i\alpha P_1,$$

$$\delta_5 = Nh(NP_3 \pm \mu_0^{-1}\mu_1 i\alpha P_1) - N^2(h-c)P_3 \mp \kappa NP_3 \mp \mu_0^{-1}\mu_1 N(h-c)i\alpha P_1.$$

$$F_2 = e^{-Nc} \{Nh\delta_7 + \delta_9\} + e^{Nc} \{Nh\delta_8 - \delta_{10}\} + e^{-2Nh} e^{Nc} \delta_{11} + e^{2Nh} e^{-Nc} \delta_{12},$$

$$\delta_7 = \mp 2N^2(h-c)P_3 + \kappa NP_3 + 2\mu_0^{-1}\mu_1 N(h-c)i\alpha P_1 \pm \mu_0^{-1}\mu_1 \kappa i\alpha P_1,$$

$$\delta_9 = \mu_0^{-1} (\mp \kappa \mu_0 N^2(h-c)P_3 + 2\mu_1^{-1} NP_3 + \mu_1 \kappa N(h-c)i\alpha P_1 \pm \mu_1 \frac{1+\kappa^2}{2} i\alpha P_1),$$

$$\delta_{11} = Nh(NP_3 \pm \mu_0^{-1}\mu_1 i\alpha P_1) + \mu_0^{-1} (-\mu_0 N^2(h-c)P_3 \mp \mu_1 N(h-c)i\alpha P_1 - \mu_1 \kappa i\alpha P_1).$$

Решение задачи строится в виде суперпозиции функций

$$w_{\beta\alpha}(z) = w_{\beta\alpha}^0(z) + w_{\beta\alpha}^P(z), \quad Z_{\beta\alpha}(z) = Z_{\beta\alpha}^0(z) + Z_{\beta\alpha}^P(z),$$

$$w_{\beta\alpha}^P(z) = w_{\beta\alpha}^{P_1}(z) + w_{\beta\alpha}^{P_3}(z), \quad (19)$$

где функции с верхним индексом 0 соответствуют задаче о загрузении грани  $z = h$  бесконечного слоя равномерно распределенной нормальной сжимающей нагрузкой единичной интенсивности по прямоугольной площадке  $-A < x < A$ ,  $-B < y < B$ . Функции с индексом  $P$  означают смещения, вызванные действием внутренней силы.

Для задачи о загрузении бесконечной плиты сжимающей нагрузкой ранее получено решение [5]

$$\begin{aligned} u^0(x, y, z) &= -\frac{1}{4\pi G} \frac{\partial}{\partial x} \int_{-A}^A \int_{-B}^B \int_0^\infty \frac{S_1(t, z)}{tD_t} \tilde{J}_0(t, x, y, a, b) dadbdt, \\ v^0(x, y, z) &= -\frac{1}{4\pi G} \frac{\partial}{\partial y} \int_{-A}^A \int_{-B}^B \int_0^\infty \frac{S_1(t, z)}{tD_t} \tilde{J}_0(t, x, y, a, b) dadbdt, \\ w^0(x, y, z) &= \frac{1}{4\pi G} \frac{\partial}{\partial x} \int_{-A}^A \int_{-B}^B \int_0^\infty \frac{t \cdot S_2(t, z)}{D_t} \tilde{J}_0(t, x, y, a, b) dadbdt, \end{aligned} \quad (20)$$

где

$$\begin{aligned} D_t &= 2 \cosh 2th + \frac{1}{\kappa} (4(th)^2 + \kappa^2 + 1), \\ \frac{1}{2} S_1(t, z) &= t \left( \frac{1}{\kappa} z - 1 \right) \sinh t(1-z) + t(1-z) \sinh t(1+z) + \frac{2}{\kappa} t^2 z \cosh t(1-z) - \\ &\quad - \mu_0^{-1} (\cosh t(1+z) - \cosh t(1-z)), \\ \frac{1}{2} S_2(t, z) &= \left( \frac{1}{\kappa} z + 1 \right) \cosh t(1-z) - (1-z) \cosh t(1+z) + \frac{2}{\kappa} tz \sinh t(1-z) - \\ &\quad - \mu_1^{-1} \frac{1}{t} (\sinh t(1+z) - \sinh t(1-z)), \\ \tilde{J}_0(t, x, y, a, b) &= J_0(t\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}) + J_0(t\sqrt{(x+a)^2 + (y-b)^2}), \end{aligned} \quad (21)$$

$J_0(t)$  – функция Бесселя.

Для напряжения, возникающего на нижнем торце  $z = 0$ , получена формула

$$\begin{aligned} \sigma_z^{AB}(x, y, 0) &= -\frac{8}{\mu_1 \kappa \pi} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \int_0^\infty \frac{(\kappa + 1) \cosh t + 2t \sinh t}{tD_t} \cdot \\ &\quad \cdot \frac{\sin(t \frac{A}{h} \sqrt{1 - \tau_k^2}) \sin(t \frac{B}{h} \tau_k) \cos(t \frac{x}{h} \sqrt{1 - \tau_k^2}) \cos(t \frac{y}{h} \tau_k)}{\tau_k \sqrt{1 - \tau_k^2}} dt, \\ \tau_k^{(N)} &= \cos \frac{2k-1}{2N} \pi, \quad k = \overline{1, N}, \end{aligned} \quad (22)$$

$\tau_k^{(N)}$  – нули многочлена Чебышева 1-го рода.

### 3. Построение функции $\tilde{Z}(x, y, z)$

Для отыскания функции  $\tilde{Z}(x, y, z)$  получена независимо решаемая краевая задача

$$\Delta \tilde{Z}(x, y, z) = q_x / G, \quad \tilde{Z}'(x, y, h) = 0, \quad \tilde{Z}(x, y, 0) = 0,$$

которая в трансформантах (10) имеет вид

$$\tilde{Z}''_{\beta\alpha}(z) - N^2 \tilde{Z}_{\beta\alpha}(z) = -i\beta q_x^{\beta\alpha}(z) / G, \quad 0 < z < h, \quad \tilde{Z}'_{\beta\alpha}(h) = 0, \quad \tilde{Z}_{\beta\alpha}(0) = 0.$$

Ранее в работе [5] найдено точное решение этой краевой задачи

$$\tilde{Z}_{\beta\alpha}(z) = \frac{i\beta e^{i\alpha d} P_1}{2NG \cosh Nh} [e^{-N|z-c|} \cosh Nh + e^{-N(h-z)} \cosh Nc -] \quad (23)$$

$$-e^{-Nz} \cosh N(h-c)].$$

**4. Детализация задачи для двух различных видов сосредоточенной силы  $P = (P_1, 0, P_3)$**

Рассмотрим случай, когда  $P_1 \neq 0$ ,  $P_3 = 0$ . Исходя из соотношений (17), (18), получим в пространстве трансформант выражение для смещения

$$w_{\beta\alpha}^{P_1}(z) = \frac{e^{i\alpha d}}{4NG} i\alpha P_1 \mu_1 F^{(1)}(z, N), \quad (24)$$

где

$$F^{(1)}(z, N) = (z-c)(e^{-N|z-c|} - e^{-N(z-c)}) + \frac{2}{D_N} \left[ \frac{2}{N} \sinh Nz \cdot f_1 + z \cdot f_2 \right],$$

$$f_1 = 2N^2 h(h-c) \sinh Nc - Nc \cosh N(2h-c) - \kappa \cosh Nc,$$

$$f_2 = -\sinh N(2h-c+z) + 2N(h-c) \sinh N(z+c) + \frac{1}{\kappa} (4N^2 h(h-c) + 1) \sinh N(z-c) + 2Nh \cosh N(z-c) + \left( \frac{2}{\kappa} N(2h-c) + 1 \right) \cosh(2h-c-z) - \kappa \cosh N(z+c).$$

Применим к полученной трансформанте последовательно обратные преобразования Фурье  $N^2 = \alpha^2 + \beta^2$  и учтем соотношение [4]

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}) e^{-i\alpha x - i\beta y} d\alpha d\beta = \int_0^{\infty} t F(t) J_0(t\sqrt{x^2 + y^2}) dt, \quad (25)$$

тогда получим смещение в виде

$$w^{P_1}(x, y, z) = -P_1 \frac{\mu_1}{8\pi G} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\infty} F^{(1)}(z, t) J_0(t\sqrt{(x-d)^2 + y^2}) dt, \quad (26)$$

где функция  $F^{(1)}(z, t)$  такая же, как и  $F^{(1)}(z, N)$  в (24) с заменой переменной  $N$  на  $t$ , функция  $D_t$  определена в (21).

По аналогии, для случая  $P_1 = 0$ ,  $P_3 \neq 0$  найдем оригинал смещения

$$w^{P_3}(x, y, z) = P_3 \frac{\mu_0}{8\pi G} \int_0^{\infty} F^{(2)}(z, t) J_0(t\sqrt{(x-d)^2 + y^2}) dt, \quad (27)$$

где

$$F^{(2)}(z, t) = (\kappa + t|z-c|) e^{-t|z-c|} - (\kappa - t(z-c)) e^{t(z-c)} + \frac{2}{D_t} (2 \sinh tz \cdot f_3 + tz \cdot f_4),$$

$$f_3 = (2t^2 h(h-c) + \frac{1 + \kappa^2}{2}) \cosh tc + (tc + \kappa) \sinh t(2h-c) + \kappa t(h-c+1) \sinh tc,$$

$$f_4 = 2t(h-c) \cosh t(z+c) - \frac{4}{\kappa} t^2 h(h-c) \cosh t(z-c) + \left( \frac{2}{\kappa} t(h-c) - 1 \right) \cosh t(2h-c-z) + (2ht - \frac{1}{\kappa}) \sinh t(z-c) - \cosh t(2h-c+z) - \frac{2}{\kappa} tc \sinh t(2h-c-z) + \kappa \sinh t(z+c).$$

Построим функции  $Z_{\beta\alpha}^{P_1}(z)$  и  $Z_{\beta\alpha}^{P_3}(z)$ .

$$Z_{\beta\alpha}^{P_1}(z) = \frac{e^{i\alpha d}}{4NG} i\alpha P_1 \mu_1 F^{(3)}(z, N), \quad (28)$$

где

$$F^{(3)}(z, N) = -(\kappa - N|z - c|)e^{-N|z-c|} + (\kappa + N(z - c))e^{N(z-c)} + \frac{2}{D_N}(-2 \sinh Nz \cdot f_5 + Nz \cdot f_6),$$

$$f_5 = (2N^2 h(h - c) + \frac{\kappa^2 + 1}{2}) \cosh Nc - Nc \sinh N(2h - c) - \kappa \cosh N(2h - c) - \kappa(N(h - c) + 1) \sinh Nc,$$

$$f_6 = -\sinh N(z - c) - \kappa \cosh N(z + c) - \frac{1}{\kappa}(4N^2 h(h - c) + 2Nh\kappa + 1) \cosh N(z - c) + 2N(h - c) \sinh N(z + c) - \frac{2}{\kappa}(N(2h - c) - \kappa) \cosh N(2h - c - z).$$

$$Z_{\beta\alpha}^{P_3}(z) = \frac{e^{i\alpha d}}{4NG} P_3 \mu_0 F^{(4)}(z, N), \quad (29)$$

где

$$F^{(4)}(z, N) = (z - c)(e^{-N|z-c|} - e^{N(z-c)}) + \frac{2}{D_N}(-2N \sinh Nz \cdot f_7 + N^2 z \cdot f_8),$$

$$f_7 = 2(N^2 h(h - c) - \mu_0^{-1} \mu_1^{-1}) \sinh Nc + \kappa Nc \cosh Nc + Nc \cosh N(2h - c),$$

$$f_8 = \kappa \sinh N(z + c) + 2N(h - c) \cosh N(z + c) + \frac{1}{\kappa}(4N^2 h(h - c) + 1) \cosh N(z - c) - 2Nh \sinh N(z - c) - N(\frac{2}{\kappa}c + 1) \sinh N(2h - c - z) + N \sinh N(2h - c + z).$$

Трансформанты  $u_{\beta\alpha}(z)$  и  $v_{\beta\alpha}(z)$  найдем из соотношений (13), учитывая (23).

Для случая  $P_1 = 0$ ,  $P_3 \neq 0$

$$\tilde{Z}_{\beta\alpha}(z) = 0, \quad u_{\beta\alpha}(z) = \frac{i\alpha}{N^2} Z_{\beta\alpha}^{P_3}(z), \quad v_{\beta\alpha}(z) = \frac{i\beta}{N^2} Z_{\beta\alpha}^{P_3}(z).$$

Применим к полученным трансформантам обратные преобразования Фурье с учетом формулы (25):

$$u^{P_3}(x, y, z) = -P_3 \frac{\mu_0}{8\pi G} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\infty \frac{F^{(4)}(z, t)}{t^2} J_0(t\sqrt{(x-d)^2 + y^2}) dt, \quad (30)$$

$$v^{P_3}(x, y, z) = -P_3 \frac{\mu_0}{8\pi G} \frac{\partial}{\partial y} \int_0^\infty \frac{F^{(4)}(z, t)}{t^2} J_0(t\sqrt{(x-d)^2 + y^2}) dt.$$

Для случая  $P_1 \neq 0$ ,  $P_3 = 0$

$$u^{P_1}(x, y, z) = \frac{P_1 \mu_1}{8\pi G} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_0^\infty \frac{F^{(3)}(z, t)}{t^2} J_0(t\sqrt{(x-d)^2 + y^2}) dt -$$



$$-\frac{P_1}{4\pi G} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \int_0^\infty \frac{F^{(0)}(z, t)}{t^2} J_0(t\sqrt{(x-d)^2 + y^2}) dt, \quad (31)$$

$$v^{P_1}(x, y, z) = \frac{P_1 \mu_1}{8\pi G} \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} \int_0^\infty \frac{F^{(3)}(z, t)}{t^2} J_0(t\sqrt{(x-d)^2 + y^2}) dt + \\ + \frac{P_1}{4\pi G} \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} \int_0^\infty \frac{F^{(0)}(z, t)}{t^2} J_0(t\sqrt{(x-d)^2 + y^2}) dt,$$

где

$$F^{(0)}(z, t) = e^{-t|z-c|} + e^{-t(h-c)} \frac{\sinh tc}{\cosh th} - e^{-tz} \frac{\cosh t(h-c)}{\cosh th}.$$

Таким образом, решение (4) поставленной задачи (1), (2), (5) выражается формулами (19), (29), (30), (27), (31), (26).

Найдем нормальное напряжение по формуле [1]

$$\sigma_z(x, y, z) = 2G\mu_0[\mu u' + \mu v' + (1 - \mu)w']. \quad (32)$$

На закрепленной грани  $z = 0$  формула (32) примет вид

$$\sigma_z(x, y, 0) = 2G\mu_0(1 - \mu)[w^{0,}(x, y, 0) + w^{P,}(x, y, 0)] = \\ = G\mu_0\mu_1^{-1}[w^{0,}(x, y, 0) + w^{P,}(x, y, 0)].$$

Окончательно запишем

$$\sigma_z(x, y, 0) = \sigma_z^{AB}(x, y, 0) + \sigma_z^P(x, y, 0), \quad (33) \\ \sigma_z^P(x, y, 0) = \sigma_z^{P_1}(x, y, 0) + \sigma_z^{P_3}(x, y, 0),$$

где напряжение  $\sigma_z^{AB}(x, y, 0)$  определено соотношением (22).

С помощью формул для смещений (26), (27) найдем напряжения

$$\sigma_z^{P_1}(x, y, 0) = -P_1 \frac{\mu_0}{h^2 8\pi} \frac{x - \alpha}{\sqrt{(x - \alpha)^2 + y^2}} \int_0^\infty t F_1(t) J_1(t\sqrt{(x - \alpha)^2 + y^2}) dt, \quad (34)$$

$$\sigma_z^{P_3}(x, y, 0) = P_3 \frac{\mu_0^2 \mu_1^{-1}}{h^2 \pi} \int_0^\infty t F_2(t) J_0(t\sqrt{(x - \alpha)^2 + y^2}) dt, \quad (35)$$

где  $\alpha = d/h$ ,  $\beta = c/h$ .

$$F_1(t) = (\beta + \beta^2)te^{-t\beta} - \frac{2}{D_t} f_1(t), \quad F_2(t) = \frac{1}{D_t} f_2(t),$$

$$f_1(t) = \frac{1}{\kappa} \left( \frac{8}{\mu_0} t^2 (1 - \beta) + 2t\kappa(1 - \beta) - 1 \right) \sinh t\beta + \frac{2}{\kappa} t (\kappa(1 - \beta) - 2\mu_0^{-1}) \cosh t(2 - \beta) + \\ + (2t - 3\kappa) \cosh t\beta + \frac{2}{\kappa} t (1 - \beta) \sinh t(2 - \beta),$$

$$f_2(t) = (t(1 - \beta) \left( \frac{4}{\kappa\mu_0} t + 1 \right) + \frac{\kappa^2 + 1}{2}) \cosh t\beta - \frac{2}{\kappa\mu_0} t\beta \sinh t(2 - \beta) +$$

$$+ \frac{2}{\mu_0} \cosh t(2 - \beta) + (t(\kappa(1 - \beta) - 1) + \frac{3\kappa^2 + 1}{2\kappa}) \sinh t\beta.$$

Функция  $D_t$  определена в соотношении (21).

#### 4. Анализ численных результатов

Для плиты из меди ( $\mu = 1/3$ ) толщиной  $h = 2$  с площадкой загрузки, равной  $B/A = 2$  ( $A = 1/2, B = 1$ ), что соответствует распределению сжимающей нагрузки по грани  $z = h$  по прямоугольнику, вытянутому вдоль оси  $y$ , зададим координаты точки приложения внутренней силы таким образом:  $\alpha = 1$  ( $d = 2$ ),  $\beta = 1/2$  ( $c = 1$ ). Компоненты вектора силы:  $P_1 = 1, P_3 = 1$ .

Построим распределение напряжений по участку  $-2A < x < 2A, -2B < y < 2B$ . На рис. 2 приводится график напряжения  $\sigma_z^{AB}(x, y, 0)$ , определяемого по формуле (22).

На рис. 3 приводится график изменения напряжения, возникающего при действии внутренней сосредоточенной силы  $P = (P_1, 0, P_3)$ :

$$\sigma_z^P(x, y, 0) = \sigma_z^{P_1}(x, y, 0) + \sigma_z^{P_3}(x, y, 0),$$

рассчитанного по выражениям (33)–(35). На рис. 4 –  $\sigma_z^{AB}(x, y, 0) + \sigma_z^{P_3}(x, y, 0)$ , на рис. 5 –  $\sigma_z^{AB}(x, y, 0) + \sigma_z^{P_1}(x, y, 0)$ , определенных в соотношениях (22), (35). Учет составляющей силы  $P_1$  не существенно влияет на распределение напряжений при данном выборе параметров.

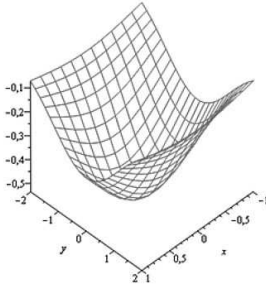


Рис. 2.

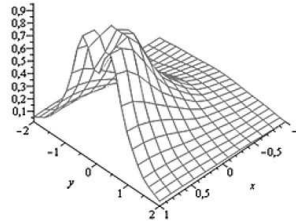


Рис. 3.

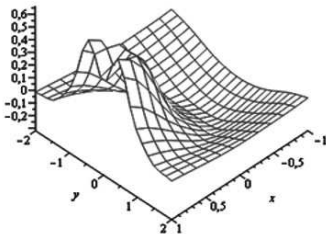


Рис. 4.

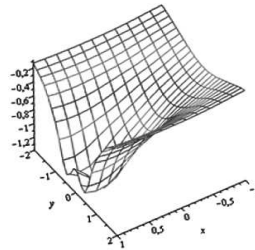


Рис. 5.

Из приведенных графиков видно, что возможен отрыв закрепленной грани в случае действия только внутренней силы (см. рис. 3) и в случае учета составляющей  $P_3$  (см. рис. 4). Когда проекция силы  $P$  на ось  $z$  имеет вид  $-P_3$ , т.е. сила прилагается коллинеарно к распределенной по грани  $z = h$  нагрузке, достигаются максимальные по абсолютной величине напряжения, равные  $-1.2$ .

#### ЗАКЛЮЧЕНИЕ.

1. Получено точное решение смешанной задачи для бесконечной плиты с учетом воздействия произвольно ориентированной внутренней силы.

2. Исследовано распределение напряжений на закрепленной грани в зависимости от площадки распределения заданных напряжений и расположения внутренней силы.

3. Выявлены параметры, при которых возможен отрыв плиты от жесткой стенки.

1. **Новацкий В.** Вопросы термоупругости / В. Новацкий. – Москва: Изд-во АН СССР, 1962. – 364 с.
2. **Попов Г. Я.** О приведении уравнений движения упругой среды к одному независимому и к двум совместно решаемым уравнениям / Г. Я. Попов // ДАН. – 2002. – 384, №2. – С. 193-196.
3. **Попов Г. Я.** Функции и матрицы Грина одномерных краевых задач / Г. Я. Попов, С. А. Абдыманапов, В. В. Ефимов. – Алматы: Изд. Рауан, 1999. – 133 с.
4. **Попов Г. Я.** Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений / Г. Я. Попов. – М.: Наука, 1982. – 344 с.
5. **Попов Г. Я.** Об одном новом методе решения пространственной задачи для упругого слоя / Г. Я. Попов, А. А. Фесенко // Проблемы машиностроения. Раздел: Динамика и прочность машин. – Харьков, 2010. – Т.13. – №2.
6. **Teodorescu P. P.** Treatise on Classical Elasticity, Mathematical and Analytical Techniques with Applications to Engineering, Chapter 9. Elastic Space / P. P. Teodorescu. – Elastic-Half-Space, DOI:10.1007/978-94-007-2616-1-9. – 2013, Springer.
7. **Chen W. T.** Computation of Stresses and Displacements in a Layered Elastic Medium / W. T. Chen // International Journal of Engineering Science. – 1971. – Vol.9. – P. 775–800.
8. **Bufler H.** Theory of elasticity of multilayered medium / H. Bufler // Journal of Elasticity. – 1971. – Vol.1, Issue 2. – P. 125–143.
9. **Johnson K. L.** Contact Mechanics / K. L. Johnson. – Cambridge University Press 0521347963. – 1984. – P. 448.
10. **Friedrichs K. O.** A boundary-layer theory for the elastic plates / K. O. Friedrichs, R. F. Dressier // Comm. on Pure and Applied Mathematics. – 1961. – Vol.14, Issue 1. – P. 1–33.