

Mathematical Subject Classification: 34E10, 34A34  
УДК 517.925

А. М. Клопот

Одесский национальный университет имени И. И. Мечникова

## АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ РЕШЕНИЙ НЕАВТОНОМНЫХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ $N$ -ГО ПОРЯДКА С ПРАВИЛЬНО МЕНЯЮЩИМИСЯ НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ

**Клопот О. М. Асимптотична поведінка розв'язків неавтономних звичайних диференціальних рівнянь  $n$ -ого порядку з правильно змінними нелінійностями.** Встановлюються умови існування і асимптотичні при  $t \uparrow \omega$  ( $\omega \leq +\infty$ ) представлення одного класу монотонних розв'язків диференціального рівняння  $n$ -го порядку, яке містить в правій частині суму нелінійних складових, що змінюються правильно.

**Ключові слова:** правильно змінні функції, звичайні диференціальні рівняння, асимптотична поведінка розв'язків.

**Клопот А. М. Асимптотическое поведение решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений  $n$ -го порядка с правильно меняющимися нелинейностями.** Устанавливаются условия существования и асимптотические при  $t \uparrow \omega$  ( $\omega \leq +\infty$ ) представления одного класса монотонных решений у дифференциального уравнения  $n$ -го порядка, содержащего в правой части сумму слагаемых с правильно меняющимися нелинейностями.

**Ключевые слова:** правильно меняющиеся функции, обыкновенные дифференциальные уравнения, асимптотическое поведение решений.

**Klopot A. Asymptotic behavior of solutions of  $n$ -th order nonautonomous ordinary differential equations with regularly varying nonlinearities.** Established existence conditions and asymptotic at  $t \uparrow \omega$  ( $\omega \leq +\infty$ ) representations of single class of monotonic solutions of differential equations of  $n$ -th order, in the right part containing made up sum with regularly varying nonlinearities.

**Key words:** regularly varying functions, ordinary differential equations, the asymptotic behavior of solutions.

### ВВЕДЕНИЕ.

Рассматривается дифференциальное уравнение

$$y^{(n)} = \sum_{k=1}^m \alpha_k p_k(t) \prod_{j=0}^{n-1} \varphi_{kj}(y^{(j)}), \quad (1.1)$$

где  $n \geq 2$ ,  $\alpha_k \in \{-1; 1\}$  ( $k = \overline{1, m}$ ),  $p_k : [a, \omega[ \rightarrow ]0, +\infty[$  ( $k = \overline{1, m}$ ) – непрерывные функции,  $\varphi_{kj} : \Delta_{Y_j} \rightarrow ]0, +\infty[$  ( $k = \overline{1, m}$ ;  $j = \overline{0, n-1}$ ) – непрерывные и правильно меняющиеся при  $y^{(j)} \rightarrow Y_j$  функции порядков  $\sigma_{kj}$ ,  $-\infty < a < \omega \leq +\infty^1$ ,  $\Delta_{Y_j}$

<sup>1</sup>Считаем, что  $a > 1$  при  $\omega = +\infty$ , и  $\omega - 1 < a < \omega$  при  $\omega < +\infty$ .

- односторонняя окрестность  $Y_j$ ,  $Y_j$  равно либо 0, либо  $\pm\infty$ . При этом предполагается, что числа  $\nu_j$  ( $j = \overline{0, n-1}$ ), определяемые следующим образом

$$\nu_j = \begin{cases} 1, & \text{если } Y_j = +\infty, \text{ либо} \\ & Y_j = 0 \text{ и } \Delta_{Y_j} - \text{правая окрестность } 0, \\ -1, & \text{если } Y_j = -\infty, \text{ либо} \\ & Y_j = 0 \text{ и } \Delta_{Y_j} - \text{левая окрестность } 0, \end{cases} \quad (1.2)$$

таковы, что

$$\nu_j \nu_{j+1} > 0 \text{ при } Y_j = \pm\infty, \quad \nu_j \nu_{j+1} < 0 \text{ при } Y_j = 0 \ (j = \overline{0, n-2}). \quad (1.3)$$

Эти условия на  $\nu_j$  ( $j = \overline{0, n-1}$ ) являются необходимыми для существования у уравнения (1.1) решений, определенных в левой окрестности  $\omega$ , каждое из которых удовлетворяет условиям

$$y^{(j)}(t) \in \Delta_{Y_j} \text{ при } t \in [t_0, \omega[ \ , \quad \lim_{t \uparrow \omega} y^{(j)}(t) = Y_j \quad (j = \overline{0, n-1}). \quad (1.4)$$

Среди строго монотонных вместе с производными до порядка  $n-1$  включительно в некоторой левой окрестности  $\omega$  решений уравнения (1.1) они представляют наибольший теоретический интерес, поскольку каждое из остальных допускает лишь одно из представлений вида

$$y(t) = \pi_\omega^{k-1}(t)[c_{k-1} + o(1)] \quad (k = \overline{1, n}),$$

где  $c_{k-1}$  ( $k = \overline{1, n}$ ) — отличные от нуля вещественные постоянные и

$$\pi_\omega(t) = \begin{cases} t, & \text{если } \omega = +\infty, \\ t - \omega, & \text{если } \omega < +\infty. \end{cases} \quad (1.5)$$

Ввиду отсутствия для решений со свойствами (1.4) конкретных асимптотических представлений возникает необходимость выделения из них класса решений, допускающих получение таких представлений. Один из таких достаточно широких классов решений был введен в работах [1]-[3], посвященных обобщенным уравнениям типа Эмдена-Фаулера  $n$ -го порядка вида

$$y^{(n)} = \alpha_0 p(t) \prod_{j=0}^{n-1} |y^{(j)}|^{\sigma_j}.$$

Для уравнения (1.1) этот класс определяется следующим образом.

**Определение 1.** *Решение  $y$  уравнения (1.1), заданное на промежутке  $[t_0, \omega[$   $[a, \omega[$ , называется  $P_\omega(Y_0, \dots, Y_{n-1}, \lambda_0)$ -решением, где  $-\infty \leq \lambda_0 \leq +\infty$ , если для него наряду с (1.4) соблюдается условие*

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{[y^{(n-1)}(t)]^2}{y^{(n-2)}(t)y^{(n)}} = \lambda_0. \quad (1.6)$$

Если  $y$  — решение со свойствами (1.4) дифференциального уравнения (1.1) и при этом функции  $\ln|y^{(n-1)}(t)|$  и  $\ln|\pi_\omega(t)|$  сравнимы порядка один (см. Н. Бурбаки [4], гл. 5, §4,5, стр. 296-301]) при  $t \uparrow \omega$ , то нетрудно проверить, что данное решение является  $P_\omega(Y_0, \dots, Y_{n-1}, \lambda_0)$ -решением при некотором значении  $\lambda_0$ , зависящем от значения предела  $\lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t)y^{(n)}(t)}{y^{(n-1)}(t)}$ .

Кроме того, используя предложения 1, 2, 5 и 9 (о свойствах правильно меняющихся функций) из монографии V. Marić [5, Appendix, pp. 115-117], можно доказать, что в случае правильно меняющихся при  $t \uparrow \omega$  коэффициентов  $p_k$  ( $k = \overline{1, m}$ ) уравнения (1.1) каждое его правильно меняющееся при  $t \uparrow \omega$  решение со свойствами (1.4) является  $P_\omega(Y_0, \dots, Y_{n-1}, \lambda_0)$ -решением при некотором конечном или равном  $\pm\infty$  значении  $\lambda_0$ .

Ранее в работах [5]–[7] для частного случая уравнения (1.1)

$$y'' = \alpha_0 p(t) \varphi(y)$$

устанавливались асимптотические свойства стремящихся к нулю при  $t \rightarrow +\infty$  ( $\omega = +\infty$ ) решений. Вопрос об асимптотике  $P_\omega(Y_0, \dots, Y_{n-1}, \lambda_0)$ -решений исследовался в [8]–[13] и некоторых других работах для уравнений вида

$$y'' = \alpha_0 p(t) \varphi_0(y) \varphi_1(y'), \quad y'' = \sum_{k=1}^m \alpha_k p_k(t) \varphi_{k0}(y) \varphi_{k1}(y'),$$

$$y^{(n)} = \alpha_0 p(t) \varphi(y) \quad (n \geq 2).$$

При  $n \geq 2$  и  $m \geq 1$  уравнение (1.1) рассматривалось в [14] и [15]. Здесь при некотором ограничении на коэффициенты  $p_k$  ( $k = \overline{1, m}$ ) были получены необходимые и достаточные условия существования у него  $P_\omega(Y_0, \dots, Y_{n-1}, \lambda_0)$ -решений в случаях, когда  $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \left\{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \dots, \frac{n-2}{n-1}, 1\right\}$ ,  $\lambda_0 = \pm\infty$  и  $\lambda_0 = 1$ . При этом также были выписаны асимптотические при  $t \uparrow \omega$  представления для таких решений и их производных до порядка  $n-1$  включительно.

Целью настоящей работы является установление такого же типа результатов для  $P_\omega(Y_0, \dots, Y_{n-1}, \lambda_0)$ -решений уравнения (1.1) в особом случае, когда  $\lambda_0 = 0$ .

В силу результатов из [3] данные решения уравнения (1.1) обладают следующими априорными асимптотическими свойствами.

**Лемма 1.** Пусть  $y : [t_0, \omega[ \rightarrow \Delta_{Y_0}$  — произвольное  $P_\omega(Y_0, \dots, Y_{n-1}, 0)$ -решение уравнения (1.1). Тогда при  $t \uparrow \omega$  имеют место асимптотические соотношения

$$y^{(k-1)}(t) \sim \frac{[\pi_\omega(t)]^{n-k-1}}{(n-k-1)!} y^{(n-2)}(t) \quad (k = \overline{1, n-2})^1, \quad (1.7)$$

$$y^{(n-1)}(t) = o\left(\frac{y^{(n-2)}(t)}{\pi_\omega(t)}\right) \quad (1.8)$$

и в случае существования (конечного или равного  $\pm\infty$ ) предела  $\lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t)y^{(n)}(t)}{y^{(n-1)}(t)}$

$$y^{(n)}(t) \sim \frac{-1}{\pi_\omega(t) y^{(n-1)}(t)} \quad \text{при } t \uparrow \omega. \quad (1.9)$$

<sup>1</sup>При  $n = 2$  эти соотношения отсутствуют.

**ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ.**

Для формулировки установленных теорем потребуются некоторые вспомогательные обозначения и одно определение.

В силу определения правильно меняющейся функции (см. [16], Гл. 1, п. 1.1, стр. 9-10) нелинейности в (1.1) представимы в виде

$$\varphi_{kj} \left( y^{(j)} \right) = \left| y^{(j)} \right|^{\sigma_{kj}} L_{kj} \left( y^{(j)} \right) \quad (k = \overline{1, m}; j = \overline{0, n-1}), \quad (2.1)$$

где  $L_{kj} : \Delta_{Y_j} \rightarrow ]0, +\infty[$  непрерывные (медленно меняющиеся при  $y^j \rightarrow Y_j$ ) функции, т.е. такие, для которых при любом  $\lambda > 0$

$$\lim_{\substack{y^{(j)} \rightarrow Y_j \\ y^{(j)} \in \Delta_{Y_j}}} \frac{L_{kj} \left( \lambda y^{(j)} \right)}{L_{kj} \left( y^{(j)} \right)} = 1 \quad (k = \overline{1, m}; j = \overline{0, n-1}). \quad (2.2)$$

Также известно (см. [16], гл. 1, п. 1.2, стр. 10-15), что предельные соотношения (2.2) выполняются равномерно по  $\lambda$  на любом промежутке  $[c, d] \subset ]0, +\infty[$  (свойство  $M_1$ ) и существуют непрерывно дифференцируемые медленно меняющиеся при  $y^{(j)} \rightarrow Y_j$  функции  $L_{0kj} : \Delta_{Y_j} \rightarrow ]0, +\infty[$  (свойство  $M_2$ ) такие, что

$$\lim_{\substack{y^{(j)} \rightarrow Y_j \\ y^{(j)} \in \Delta_{Y_j}}} \frac{L_{kj} \left( y^{(j)} \right)}{L_{0kj} \left( y^{(j)} \right)} = 1 \quad \text{и} \quad \lim_{\substack{y^{(j)} \rightarrow Y_j \\ y^{(j)} \in \Delta_{Y_j}}} \frac{y^{(j)} L'_{0kj} \left( y^{(j)} \right)}{L_{0kj} \left( y^{(j)} \right)} = 0. \quad (2.3)$$

$$(k = \overline{1, m}; j = \overline{0, n-1})$$

**Определение 2.** Будем говорить, что медленно меняющаяся при  $z \rightarrow Z_0$  функция  $L : \Delta_{Z_0} \rightarrow ]0, +\infty[$ , где  $Z_0$  равно либо нулю, либо  $\pm\infty$ , и  $\Delta_{Z_0}$ - односторонняя окрестность  $Z_0$ , удовлетворяет условию  $S_0$ , если

$$L \left( \nu e^{[1+o(1)] \ln |z|} \right) = L(z) [1 + o(1)] \quad \text{при} \quad z \rightarrow Z_0 \quad (z \in \Delta_{Z_0}),$$

где  $\nu = \text{sign } z$ .

**Замечание 1.** Если медленно меняющаяся при  $z \rightarrow Z_0$  функция  $L : \Delta_{Z_0} \rightarrow ]0, +\infty[$  удовлетворяет условию  $S_0$ , то для любой медленно меняющейся при  $z \rightarrow Z_0$  функции  $l : \Delta_{Z_0} \rightarrow ]0, +\infty[$

$$L(zl(z)) = L(z) [1 + o(1)] \quad \text{при} \quad z \rightarrow Z_0 \quad (z \in \Delta_{Z_0}).$$

Справедливость этого утверждения непосредственно вытекает из теоремы о представлении (см. [16], гл. 1, §1.2, стр. 10) медленно меняющейся функции  $l$  и свойства  $M_1$  функции  $L$ .

**Замечание 2.** (см. [13]) Если медленно меняющаяся при  $z \rightarrow Z_0$  функция  $L : \Delta_{Z_0} \rightarrow ]0, +\infty[$  удовлетворяет условию  $S_0$ , а функция  $y : [t_0, \omega[ \rightarrow \Delta_{Y_0}$  непрерывно дифференцируемая и такая, что

$$\lim_{t \uparrow \omega} y(t) = Y_0, \quad \frac{y'(t)}{y(t)} = \frac{\xi'(t)}{\xi(t)} [r + o(1)] \quad \text{при } t \uparrow \omega,$$

где  $r$  — отличная от нуля вещественная постоянная,  $\xi$  — непрерывно дифференцируемая в некоторой левой окрестности  $\omega$  вещественная функция, для которой  $\xi'(t) \neq 0$ , то

$$L(y(t)) = L(\nu |\xi(t)|^r) [1 + o(1)] \quad \text{при } t \uparrow \omega,$$

где  $\nu = \text{sign } y(t)$  в левой окрестности  $\omega$ .

**Замечание 3.** Если медленно меняющаяся при  $z \rightarrow Z_0$  функция  $L : \Delta_{Z_0} \rightarrow ]0, +\infty[$  удовлетворяет условию  $S_0$ , а функция  $r : \Delta_{Z_0} \times K \rightarrow \mathbb{R}$ , где  $K$  — компакт в  $\mathbb{R}^m$ , такова, что

$$\lim_{\substack{z \rightarrow Z_0 \\ z \in \Delta_{Z_0}}} r(z, v) = 0 \quad \text{равномерно по } v \in K,$$

то

$$\lim_{\substack{z \rightarrow Z_0 \\ z \in \Delta_{Z_0}}} \frac{L(\nu e^{[1+r(z,v)] \ln |z|})}{L(z)} = 1 \quad \text{равномерно по } v \in K, \quad \text{где } \nu = \text{sign } z.$$

В самом деле, если бы это было не так, то существовали бы последовательность  $\{v_n\} \in K$  и последовательность  $\{z_n\} \in \Delta_{Z_0}$ , сходящаяся к  $Z_0$ , такие, что соблюдалось бы неравенство

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{L(\nu e^{[1+r(z_n, v_n)] \ln |z_n|})}{L(z_n)} - 1 \right| > 0. \quad (2.4)$$

При этом ясно, что существует функция  $v : \Delta_{Z_0} \rightarrow K$  такая, что  $v(z_n) = v_n$ . Для этой функции, очевидно,  $\lim_{\substack{z \rightarrow Z_0 \\ z \in \Delta_{Z_0}}} r(z, v(z)) = 0$  и поэтому

$$\lim_{\substack{z \rightarrow Z_0 \\ z \in \Delta_{Z_0}}} \frac{L(\nu e^{[1+r(z, v(z))] \ln |z|})}{L(z)} = 1,$$

что противоречит неравенству (2.4).

Наконец, введем вспомогательные обозначения, полагая

$$\mu_k = \sum_{j=0}^{n-3} \sigma_{kj} (n-2-j), \quad \gamma_k = 1 - \sum_{j=0}^{n-1} \sigma_{kj},$$

$$C_k = \prod_{j=0}^{n-2} [(n-j-2)!]^{-\sigma_{kj}} \quad (k = \overline{1, m});$$

$$J_k(t) = \int_{A_k}^t p_k(s) |\pi_\omega(s)|^{\mu_k} \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq n-2}}^{n-1} L_{kj} (\nu_j |\pi_\omega(s)|^{n-2-j}) ds \quad (k = \overline{1, m}),$$

$$J_{k1}(t) = \int_{A_{k1}}^t |J_k(s)|^{\frac{1}{1-\sigma_{kn-1}}} ds \quad (k = \overline{1, m}),$$

где каждый из пределов интегрирования  $A_k$ ,  $A_{k1}$  выбирается равным точке  $a_0 \in [a, \omega[$  (справа от которой, т. е. при  $t \in [a_0, \omega[$  подынтегральная функция непрерывна), если при этом значении предела интегрирования соответствующий интеграл стремится к  $\pm\infty$  при  $t \uparrow \omega$ , и равным  $\omega$ , если при таком значении предела интегрирования он стремится к нулю при  $t \uparrow \omega$ .

**Теорема 1.** Пусть  $n \geq 2$  и для некоторого  $s \in \{1, \dots, m\}$  при всех  $k \in \{\overline{1, m}\} \setminus \{s\}$  выполняются неравенства

$$\limsup_{t \uparrow \omega} \frac{\ln p_k(t) - \ln p_s(t)}{\beta \ln |\pi_\omega(t)|} < \beta \sum_{j=0}^{n-1} (\sigma_{sj} - \sigma_{kj})(n-j-2), \quad (2.5)$$

где  $\beta = \text{sign } \pi_\omega(t)$  при  $t \in [a, \omega[$ . Пусть, кроме того,  $\gamma_s(1 - \sigma_{sn-1}) \neq 0$  и функции  $L_{sj}$  при всех  $j \in \{0, \dots, n-1\} \setminus \{n-2\}$  удовлетворяют условию  $S_0$ . Тогда для существования у уравнения (1.1)  $P_\omega(Y_0, \dots, Y_{n-1}, 0)$ -решений, для которых существует (конечный или равный  $\pm\infty$ ) предел  $\lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t)y^{(n)}(t)}{y^{(n-1)}(t)}$ , необходимо и достаточно, чтобы (наряду с (1.3)) соблюдались неравенства

$$\nu_j \nu_{j-1} (n-j-1) \pi_\omega(t) > 0 \quad (j = \overline{1, n-2}), \quad (2.6)$$

$$\nu_{n-1} \nu_{n-2} \gamma_s (1 - \sigma_{sn-1}) J_{s1}(t) > 0, \quad \nu_{n-1} \alpha_s (1 - \sigma_{sn-1}) J_s(t) > 0 \quad (2.7)$$

в некоторой левой окрестности  $\omega$ , а также условия

$$\nu_{j-1} \lim_{t \uparrow \omega} |\pi_\omega(t)|^{n-j-1} = Y_{j-1} \quad \text{при всех } j \in \{\overline{1, n}\} \setminus \{n-1\}, \quad (2.8)$$

$$\nu_{n-2} \lim_{t \uparrow \omega} |J_{s1}(t)|^{\frac{1-\sigma_{sn-1}}{\gamma_s}} = Y_{n-2},$$

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t) J'_s(t)}{J_s(t)} = \sigma_{sn-1} - 1, \quad \lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t) J'_{s1}(t)}{J_{s1}(t)} = 0. \quad (2.9)$$

Более того, для каждого такого решения имеют место при  $t \uparrow \omega$  асимптотические представления

$$y^{(j-1)}(t) = \frac{[\pi_\omega(t)]^{n-j-1}}{(n-j-1)!} y^{(n-2)}(t) [1 + o(1)] \quad (j = 1, \dots, n-2), \quad (2.10)$$

$$y^{(n-1)}(t) = \frac{(1 - \sigma_{sn-1})J'_{s1}(t)}{\gamma_s J_{s1}(t)} y^{(n-2)}(t)[1 + o(1)], \quad (2.11)$$

$$\frac{|y^{(n-2)}(t)|^{\gamma_s}}{L_{sn-2}(y^{(n-2)}(t))} = |(1 - \sigma_{sn-1})C_s| \left| \frac{\gamma_s}{1 - \sigma_{sn-1}} J_{s1}(t) \right|^{1 - \sigma_{sn-1}} [1 + o(1)], \quad (2.12)$$

причем решений с такими представлениями в случае  $\omega = +\infty$  существует  $n$ -параметрическое семейство, если  $1 - \sigma_{sn-1} < 0$  и  $\nu_{n-1}\nu_{n-2}\gamma_s < 0$ ,  $n-1$ -параметрическое, если  $\nu_{n-1}\nu_{n-2}\gamma_s > 0$ ,  $n-2$ -параметрическое, если  $1 - \sigma_{sn-1} > 0$  и  $\nu_{n-1}\nu_{n-2}\gamma_s < 0$ , а в случае  $\omega < +\infty$  таких решений существует однопараметрическое семейство при  $\nu_{n-1}\nu_{n-2}\gamma_s < 0$  и двухпараметрическое семейство при выполнении неравенств  $1 - \sigma_{sn-1} > 0$  и  $\nu_{n-1}\nu_{n-2}\gamma_s > 0$ .

**Замечание 4.** Если в дифференциальном уравнении (1.1) коэффициенты  $p_k$  ( $k = \overline{1, m}$ ) являются правильно меняющимися функциями при  $t \uparrow \omega$  порядков  $\varrho_k$  ( $k = \overline{1, m}$ ), то

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{\ln p_k(t)}{\ln |\pi_\omega(t)|} = \varrho_k \quad (k = \overline{1, m}).$$

В силу этих условий неравенства (2.5) принимают следующий вид:

$$\beta(\varrho_k - \varrho_s) < \beta \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq n-2}}^{n-1} (\sigma_{sj} - \sigma_{kj})(n - j - 2) \quad \text{при всех } k \in \{1, \dots, m\} \setminus \{s\}.$$

**Доказательство. Необходимость.** Пусть  $y : [t_0, \omega[ \rightarrow \Delta_{Y_0}$  — произвольное  $P_\omega(Y_0, \dots, Y_{n-1}, 0)$ -решение уравнения (1.1), для которого существует (конечный или равный  $\pm\infty$ ) предел  $\lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t)y^{(n)}(t)}{y^{(n-1)}(t)}$ . Тогда соблюдаются условия (1.4), существует  $t_1 \in [a, \omega[$  такое, что  $\nu_j y^{(j)}(t) > 0$  ( $j = \overline{0, n-1}$ ) при  $t \in [t_1, \omega[$  и в силу леммы 1 имеют место асимптотические соотношения (1.7) – (1.9). Согласно (1.7) справедливы асимптотические представления (2.10). Кроме того, из (1.7) – (1.9) вытекают соотношения

$$\frac{y^{(j)}(t)}{y^{(j-1)}(t)} = \frac{n - j - 1 + o(1)}{\pi_\omega(t)} \quad (j = \overline{1, n}) \quad \text{при } t \uparrow \omega \quad (2.13)$$

и поэтому

$$\ln |y^{(j-1)}(t)| = [n - j - 1 + o(1)] \ln |\pi_\omega(t)| \quad (j = \overline{1, n-1}) \quad \text{при } t \uparrow \omega. \quad (2.14)$$

В силу (2.13) соблюдаются неравенства (2.6), а в силу (2.14) выполняются первые из условий (2.8).

Учитывая (2.14), представления (2.1) и условия

$$\lim_{\substack{y^{(j)} \rightarrow Y_j \\ y^{(j)} \in \Delta_{y_j}}} \frac{\ln L_{kj}(y^{(j)})}{\ln |y^{(j)}|} = 0 \quad (k = \overline{1, m}, \quad j = \overline{0, n-1}), \quad (2.15)$$

которые соблюдаются ввиду свойств медленно меняющихся функций (см. [16], гл.1, п.1.5, стр. 24), находим

$$\ln \varphi_{kj} \left( y^{(j)}(t) \right) = \sigma_{kj} \ln |y^{(j)}(t)| + \ln L_{kj}(y^{(j)}(t)) = [\sigma_{kj} + o(1)] \ln |y^{(j)}(t)| =$$

$$= [\sigma_{kj}(n-j-2) + o(1)] \ln |\pi_\omega(t)| \quad (k = \overline{1, m}, j = \overline{0, n-1}) \quad \text{при } t \uparrow \omega.$$

Поэтому для любого  $k \in \{1, \dots, m\} \setminus \{s\}$  при  $t \uparrow \omega$

$$\begin{aligned} \ln \left[ \frac{p_k(t) \prod_{j=0}^{n-1} \varphi_{kj}(y^{(j)}(t))}{p_s(t) \prod_{j=0}^{n-1} \varphi_{sj}(y^{(j)}(t))} \right] &= \ln \frac{p_k(t)}{p_s(t)} + \sum_{j=0}^{n-1} [\ln \varphi_{kj}(y^{(j)}(t)) - \ln \varphi_{sj}(y^{(j)}(t))] = \\ &= \ln \frac{p_k(t)}{p_s(t)} + \ln |\pi_\omega(t)| \sum_{j=0}^{n-1} [(\sigma_{kj} - \sigma_{sj})(n-j-2) + o(1)] = \\ &= \beta \ln |\pi_\omega(t)| \left[ \frac{\ln p_k(t) - \ln p_s(t)}{\beta \ln |\pi_\omega(t)|} + \beta \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq t-1}}^{n-1} (\sigma_{kj} - \sigma_{sj})(n-j-2) + o(1) \right]. \end{aligned}$$

Поскольку выражение, стоящее в этом соотношении справа, в силу (2.5) и вида функции  $\pi_\omega$  из (1.5) стремится к  $-\infty$  при  $t \uparrow \omega$ , то

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{p_k(t) \prod_{j=0}^{n-1} \varphi_{kj}(y^{(j)}(t))}{p_s(t) \prod_{j=0}^{n-1} \varphi_{sj}(y^{(j)}(t))} = 0 \quad \text{при всех } k \in \{1, \dots, m\} \setminus \{s\}. \quad (2.16)$$

Тогда из (1.1) следует, что для данного решения имеет место асимптотическое соотношение

$$y^{(n)}(t) = \alpha_s p_s(t) [1 + o(1)] \prod_{j=0}^{n-1} \varphi_{sj}(y^{(j)}(t)) \quad \text{при } t \uparrow \omega. \quad (2.17)$$

Здесь при всех  $j \in \{0, \dots, n-1\} \setminus \{n-2\}$  функции  $L_{sj}$  в представлениях (2.1) функций  $\varphi_{sj}$  удовлетворяют условию  $S_0$ . Поэтому в силу (2.13) и замечания 2.2 для них имеют место представления

$$L_{sj}(y^{(j)}(t)) = L_{sj}(\nu_j |\pi_\omega(t)|^{n-j-2}) [1 + o(1)] \quad \text{при } t \uparrow \omega.$$

Учитывая (2.1) и эти представления, запишем (2.17) в виде

$$\begin{aligned} y^{(n)}(t) &= \alpha_s p_s(t) \left| y^{(n-2)}(t) \right|^{\sigma_{sn-2}} L_{sn-2}(y^{(n-2)}(t)) \times \\ &\times \left( \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq n-2}}^{n-1} |y^{(j)}(t)|^{\sigma_{sj}} L_{sj}(\nu_j |\pi_\omega(t)|^{n-j-2}) \right) [1 + o(1)] \quad \text{при } t \uparrow \omega. \end{aligned}$$

Отсюда, используя соотношения (1.7), получим с учетом введенных до формулировки теорем обозначений соотношение

$$\frac{y^{(n)}(t) |y^{(n-1)}(t)|^{-\sigma_{sn-1}}}{|y^{(n-2)}(t)|^{1-\sigma_{sn-1}-\gamma_s} L_{sn-2}(y^{(n-2)}(t))} =$$

$$= \alpha_s C_s p_s(t) |\pi_\omega(t)|^{\mu_s} \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq n-2}}^{n-1} L_{sj} (\nu_j |\pi_\omega(t)|^{n-j-2}) [1 + o(1)] \quad \text{при } t \uparrow \omega. \quad (2.18)$$

В силу свойства  $M_2$  медленно меняющихся функций существует непрерывно дифференцируемая функция  $L_{0sn-2} : \Delta_{Y_{n-2}} \rightarrow ]0, +\infty[$ , удовлетворяющая условиям (2.3) при  $k = s$  и  $j = n - 2$ . С использованием этих условий и (2.13) при  $t \uparrow \omega$  находим

$$\begin{aligned} & \left( \frac{|y^{(n-1)}(t)|^{1-\sigma_{sn-1}}}{|y^{(n-2)}(t)|^{1-\sigma_{sn-1}-\gamma_s} L_{0sn-1}(y^{(n-2)}(t))} \right)' = \\ & = \frac{\nu_{n-1} y^{(n)}(t) |y^{(n-1)}(t)|^{-\sigma_{sn-1}}}{|y^{(n-2)}(t)|^{1-\sigma_{sn-1}-\gamma_s} L_{0sn-2}(y^{(n-2)}(t))} \times \\ & \times \left( 1 - \sigma_{sn-1} + (\gamma_s + \sigma_{sn-1} - 1) \frac{y^{(n-1)}(t)}{y^{(n)}(t)} \cdot \frac{y^{(n-1)}(t)}{y^{(n-2)}(t)} - \right. \\ & \left. - \frac{y^{(n-1)}(t)}{y^{(n)}(t)} \cdot \frac{y^{(n-1)}(t)}{y^{(n-2)}(t)} \cdot \frac{y^{(n-2)}(t) L'_{0sn-2}(y^{(n-2)}(t))}{L_{0sn-2}(y^{(n-2)}(t))} \right) = \\ & = \frac{y^{(n)}(t) |y^{(n-1)}(t)|^{-\sigma_{sn-1}}}{|y^{(n-2)}(t)|^{1-\sigma_{sn-1}-\gamma_s} L_{0sn-2}(y^{(n-2)}(t))} [\nu_{n-1} (1 - \sigma_{sn-1}) + o(1)]. \end{aligned}$$

Поэтому (2.18) при  $t \uparrow \omega$  может быть записано в виде

$$\begin{aligned} & \left( \frac{|y^{(n-1)}(t)|^{1-\sigma_{sn-1}}}{|y^{(n-2)}(t)|^{1-\sigma_{sn-1}-\gamma_s} L_{0sn-2}(y^{(n-2)}(t))} \right)' = \\ & = \nu_{n-1} \alpha_s (1 - \sigma_{sn-1}) C_s p_s(t) |\pi_\omega(t)|^{\mu_s} \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq n-2}}^{n-1} L_{sj} (\nu_j |\pi_\omega(t)|^{n-j-2}) [1 + o(1)]. \end{aligned}$$

Интегрируя это соотношение на промежутке от  $t_1$  до  $t$  и учитывая, что дробь под знаком производной в силу условия  $1 - \sigma_{sn-1} \neq 0$  стремится либо к нулю, либо к  $\pm\infty$  при  $t \uparrow \omega$ , получим

$$\frac{|y^{(n-1)}(t)|^{1-\sigma_{sn-1}}}{|y^{(n-2)}(t)|^{1-\sigma_{sn-1}-\gamma_s} L_{0sn-2}(y^{(n-2)}(t))} = \nu_{n-1} \alpha_s (1 - \sigma_{sn-1}) C_s J_s(t) [1 + o(1)].$$

Отсюда, прежде всего, следует, что выполняется второе из (2.7). Кроме того, отсюда и (2.18) ввиду эквивалентности функций  $L_{sn-2}$  и  $L_{0sn-2}$  при  $y^{(n-2)} \rightarrow Y_{n-2}$  следует, что

$$\frac{y^{(n)}(t)}{y^{(n-1)}(t)} = \frac{J'_s(t)}{(1 - \sigma_{sn-1}) J_s(t)} [1 + o(1)] \quad \text{при } t \uparrow \omega,$$

откуда с учетом (2.13) при  $j = n$  вытекает справедливость первого из условий (2.9).

Из полученного соотношения также имеем

$$\frac{y^{(n-1)}(t)}{|y^{(n-2)}(t)|^{\frac{1-\sigma_{sn-1}-\gamma_s}{1-\sigma_{sn-1}} L_{0sn-2}^{\frac{1}{1-\sigma_{sn-1}}}(y^{(n-2)}(t))}} =$$

$$= \nu_{n-1} |C_s(1 - \sigma_{sn-1})J_s(t)|^{\frac{1}{1-\sigma_{sn-1}}} [1 + o(1)] \quad \text{при } t \uparrow \omega. \quad (2.19)$$

Поскольку

$$\begin{aligned} \left( \frac{|y^{(n-2)}(t)|^{\frac{\gamma_s}{1-\sigma_{sn-1}}}}{L_{0sn-2}^{\frac{1}{1-\sigma_{sn-1}}}(y^{(n-2)}(t))} \right)' &= \frac{\nu_{n-2}y^{(n-1)}(t)|y^{(n-2)}(t)|^{\frac{\gamma_s+\sigma_{sn-1}-1}{1-\sigma_{sn-1}}}}{(1-\sigma_{sn-1})L_{0sn-2}^{\frac{1}{1-\sigma_{sn-1}}}(y^{(n-2)}(t))} \times \\ &\times \left[ \gamma_s - \frac{y^{(n-2)}(t)L'_{0sn-2}(y^{(n-2)}(t))}{L_{0sn-2}(y^{(n-2)}(t))} \right] = \\ &= \frac{\nu_{n-2}y^{(n-1)}(t)|y^{(n-2)}(t)|^{\frac{\gamma_s+\sigma_{sn-1}-1}{1-\sigma_{sn-1}}}}{L_{0sn-2}^{\frac{1}{1-\sigma_{sn-1}}}(y^{(n-2)}(t))} \left[ \frac{\gamma_s}{1-\sigma_{sn-1}} + o(1) \right] \quad \text{при } t \uparrow \omega, \end{aligned}$$

то из (2.19) и при  $t \uparrow \omega$  следует, что

$$\left( \frac{|y^{(n-2)}(t)|^{\frac{\gamma_s}{1-\sigma_{sn-1}}}}{L_{0sn-2}^{\frac{1}{1-\sigma_{sn-1}}}(y^{(n-2)}(t))} \right)' = \frac{\nu_{n-1}\nu_{n-2}\gamma_s}{1-\sigma_{sn-1}} |C_s(1 - \sigma_{sn-1})J_s(t)|^{\frac{1}{1-\sigma_{sn-1}}} [1 + o(1)].$$

Здесь дробь, стоящая под знаком производной, стремится либо к нулю, либо к  $\pm\infty$  при  $t \uparrow \omega$ , так как в силу (1.4) и свойств медленно меняющихся функций (см. (2.15))

$$\begin{aligned} &\ln \frac{|y^{(n-2)}(t)|^{\frac{\gamma_s}{1-\sigma_{sn-1}}}}{L_{0sn-2}^{\frac{1}{1-\sigma_{sn-1}}}(y^{(n-2)}(t))} = \\ &= \ln |y^{(n-2)}(t)| \left[ \frac{\gamma_s}{1-\sigma_{sn-1}} - \frac{1}{1-\sigma_{sn-1}} \frac{\ln L_{0sn-2}(y^{(n-2)}(t))}{\ln |y^{(n-2)}(t)|} \right] = \\ &= \ln |y^{(n-2)}(t)| \left[ \frac{\gamma_s}{1-\sigma_{sn-1}} + o(1) \right] \rightarrow \pm\infty \quad \text{при } t \uparrow \omega. \end{aligned}$$

Поэтому, интегрируя данное соотношение на промежутке от  $t_1$  до  $t$ , получим

$$\frac{|y^{(n-2)}(t)|^{\frac{\gamma_s}{1-\sigma_{sn-1}}}}{L_{0sn-2}^{\frac{1}{1-\sigma_{sn-1}}}(y^{(n-2)}(t))} = \frac{\nu_{n-1}\nu_{n-2}\gamma_s}{1-\sigma_{sn-1}} |\gamma_{sn-1}C_s|^{\frac{1}{1-\sigma_{sn-1}}} J_{s1}(t)[1 + o(1)]. \quad (2.20)$$

Отсюда вытекает справедливость первого из неравенств (2.7), а также ввиду эквивалентности при  $y^{(n-2)} \rightarrow Y_{n-2}$  функций  $L_{sn-2}$  и  $L_{0sn-2}$  - асимптотического представления (2.12). Кроме того, из (2.19) и (2.20) следует, что

$$\frac{y^{(n-1)}(t)}{y^{(n-2)}(t)} = \frac{(1 - \sigma_{sn-1})J'_{s1}(t)}{\gamma_s J_{s1}(t)} [1 + o(1)] \quad \text{при } t \uparrow \omega. \quad (2.21)$$

В силу этого соотношения и леммы 1.1 соблюдаются вторые из условий (2.8) и (2.9), а также имеет место асимптотическое представление (2.11).

*Достаточность.* Предполагая выполненными условия (2.5) — (2.9), установим существование у уравнения (1.1) решений, допускающих при  $t \uparrow \omega$  асимптотические представления (2.10) — (2.12), и выясним вопрос о количестве таких решений.

Для этого сначала рассмотрим соотношение

$$\frac{|Y|^{\frac{\gamma_s}{1-\sigma_{sn-1}}}}{L_{0sn-2}^{\frac{1}{1-\sigma_{sn-1}}}(Y)} = |(1-\sigma_{sn-1})C_s|^{\frac{1}{1-\sigma_{sn-1}}} \left| \frac{\gamma_s}{1-\sigma_{sn-1}} J_{s1}(t) \right| [1+v_n], \quad (2.22)$$

где  $L_{0sn-2} : \Delta_{Y_{n-2}} \rightarrow ]0, +\infty[$  — непрерывно дифференцируемая медленно меняющаяся при  $Y \rightarrow Y_{n-2}$  функция, удовлетворяющая условиям (2.3) (при  $k = s$  и  $j = n - 2$ ), существующая в силу свойства  $M_2$  медленно меняющихся функций.

Выбрав произвольным образом число  $d \in ]0, \left| \frac{1-\sigma_{sn-1}}{\gamma_s} \right|$ , устанавливаем аналогично тому, как для соотношения (3.11) в работе [15], что при некотором  $t_0 \in ]a, \omega[$  соотношение (2.22) однозначно определяет заданную на множестве  $[t_0, \omega[ \times \mathbb{R}_{\frac{1}{2}}$ , где  $\mathbb{R}_{\frac{1}{2}} = \{v \in \mathbb{R} : |v| \leq \frac{1}{2}\}$ , непрерывно дифференцируемую неявную функцию  $Y = Y(t, v_n)$  вида

$$Y(t, v_n) = \nu_{n-2} |J_{s1}(t)|^{\frac{1-\sigma_{sn-1}}{\gamma_s} + z(t, v_n)}, \quad (2.23)$$

где функция  $z$  такова, что

$$\begin{aligned} |z(t, v_n)| &\leq d \quad \text{при} \quad (t, v_n) \in [t_0, \omega[ \times \mathbb{R}_{\frac{1}{2}}, \\ \lim_{t \uparrow \omega} z(t, v_n) &= 0 \quad \text{равномерно по} \quad v_n \in \mathbb{R}_{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (2.24)$$

В силу (2.24) и второго из условий (2.8) функция  $Y$  из (2.23) удовлетворяет условиям

$$\begin{aligned} Y(t, v_n) &\in \Delta_{Y_{n-2}} \quad \text{при} \quad (t, v_n) \in [t_0, \omega[ \times \mathbb{R}_{\frac{1}{2}}, \\ \lim_{t \uparrow \omega} Y(t, v_n) &= Y_{n-2} \quad \text{равномерно по} \quad v_n \in \mathbb{R}_{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Теперь, применяя к дифференциальному уравнению (1.1) преобразование

$$\begin{aligned} y^{(j-1)}(t) &= \frac{[\pi_\omega(t)]^{n-j-1}}{(n-j-1)!} y^{(n-2)}(t) [1+v_j(\tau)] \quad (j = \overline{1, n-2}), \\ y^{(n-1)}(t) &= \frac{(1-\sigma_{sn-1})J'_{s1}(t)}{\gamma_s J_{s1}(t)} y^{(n-2)}(t) [1+v_{n-1}(\tau)], \end{aligned} \quad (2.26)$$

$$y^{(n-2)}(t) = Y(t, v_n(\tau)), \quad \tau(t) = \beta \ln |\pi_\omega(t)|,$$

где  $\beta$  определено в (2.5), и учитывая, что функция  $y^{(n-2)}(t) = Y(t, v_n(\tau))$  при  $t \in [t_0, \omega[$  и  $v_n(\tau) \in \mathbb{R}_{\frac{1}{2}}$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{|y^{(n-2)}(t)|^{\frac{\gamma_s}{1-\sigma_{sn-1}}}}{L_{0sn-2}^{\frac{1}{1-\sigma_{sn-1}}}(y^{(n-2)}(t))} = |(1-\sigma_{sn-1})C_s|^{\frac{1}{1-\sigma_{sn-1}}} \left| \frac{\gamma_s}{1-\sigma_{sn-1}} J_{s1}(t) \right| [1+v_n(\tau)],$$

получим с использованием знаковых условий (2.6), (2.7) систему дифференциальных уравнений вида

$$\left\{ \begin{array}{l} v'_j = \beta \left[ (n-j-1)(v_{j+1} - v_j) - \frac{1 - \sigma_{sn-1}}{\gamma_s} h_1(\tau)(1+v_j)(1+v_{n-1}) \right] \\ (j = \overline{1, n-3}), \\ v'_{n-2} = \beta \left[ -v_{n-2} - \frac{1 - \sigma_{sn-1}}{\gamma_s} h_1(\tau)(1+v_{n-2})(1+v_{n-1}) \right], \\ v'_{n-1} = \beta \left[ \frac{1}{\gamma_s} h_1(\tau)(1+v_{n-1})(\gamma_s + \sigma_{sn-1} - 1) - (1 - \sigma_{sn-1})v_{n-1} + \right. \\ \left. + \frac{h_2(\tau)}{1 - \sigma_{sn-1}} \left( \frac{\prod_{j=0}^{n-3} |1+v_{j+1}|^{\sigma_{sj}} |1+v_{n-1}|^{\sigma_{sn-1}}}{|1+v_n|^{1-\sigma_{sn-1}}} G(\tau, v_1, \dots, v_n) - 1 - v_{n-1} \right) \right], \\ v'_n = \beta h_1(\tau) \left[ (1+v_n)(1+v_{n-1}) - (1+v_n) - \frac{1}{\gamma_s} H(\tau, v_n)(1+v_n)(1+v_{n-1}) \right], \end{array} \right.$$

в которой

$$h_1(\tau) = h_1(\tau(t)) = \frac{\pi_\omega(t) J'_{s1}(t)}{J_{s1}(t)}, \quad h_2(\tau) = h_2(\tau(t)) = \frac{\pi_\omega(t) J'_s(t)}{J_s(t)},$$

$$G(\tau(t), v_1, \dots, v_n) = \frac{L_{sn-2}(Y(t, v_n))}{L_{0sn-2}(Y(t, v_n))} \cdot \frac{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq n-2}}^{n-1} L_{sj}(Y^{[j]}(t, v_j, v_{j+1}, v_n))}{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq n-2}}^{n-1} L_{sj}(v_j |\pi_\omega(t)|^{n-j-2})} \times$$

$$\times \frac{\sum_{k=1}^m \alpha_k p_k(t) \varphi_{kn-2}(Y(t, v_n)) \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq n-2}}^{n-1} \varphi_{kj}(Y^{[j]}(t, v_j, v_{j+1}, v_n))}{\alpha_s p_s(t) \varphi_{sn-2}(Y(t, v_n)) \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq n-2}}^{n-1} \varphi_{sj}(Y^{[j]}(t, v_j, v_{j+1}, v_n))},$$

$$H(\tau(t), v_n) = \frac{Y(t, v_n) L'_{0sn-2}(Y(t, v_n))}{L_{0sn-2}(Y(t, v_n))},$$

$$Y^{[j]}(t, v_j, v_{j+1}, v_n) = \begin{cases} \frac{\pi_\omega^{n-j-2}(t)}{(n-j-2)!} Y(t, v_n)(1+v_{j+1}), & j = \overline{0, n-3}, \\ \frac{1 - \sigma_{sn-1}}{\gamma_s} \frac{J'_{s1}(t)}{J_{s1}(t)} Y(t, v_n)(1+v_{n-1}), & j = n-1. \end{cases}$$

Здесь функция  $\tau(t) = \beta \ln |\pi_\omega(t)|$  обладает свойствами

$$\tau'(t) > 0 \quad \text{при} \quad t \in [t_0, \omega[, \quad \lim_{t \uparrow \omega} \tau(t) = +\infty$$

и поэтому согласно условиям (2.9)

$$\lim_{\tau \rightarrow +\infty} h_1(\tau) = \lim_{t \uparrow \omega} h_1(\tau(t)) = 0, \quad (2.27)$$

$$\lim_{\tau \rightarrow +\infty} h_2(\tau) = \lim_{t \uparrow \omega} h_2(\tau(t)) = \sigma_{sn-1} - 1.$$

В силу (2.25) и (2.3) (при  $k = s$  и  $j = n - 2$ ) функция  $H$  стремится к нулю при  $\tau \rightarrow +\infty$  равномерно по  $v_n \in \mathbb{R}_{\frac{1}{2}}$  и первая дробь в представлении функции  $G$  стремится к единице при  $\tau \rightarrow +\infty$  равномерно по  $v_n \in \mathbb{R}_{\frac{1}{2}}$ .

Покажем, что вторая и третья дроби в представлении функции  $G$  также стремятся к единице при  $\tau \rightarrow +\infty$  равномерно по  $(v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}_{\frac{1}{2}}^n$ .

Ввиду (2.9) с использованием правила Лопиталья имеем

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{\ln |J_{s1}(t)|}{\ln |\pi_\omega(t)|} = \lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t) J'_{s1}(t)}{J_{s1}(t)} = 0,$$

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{\ln \left| \frac{J'_{s1}(t)}{J_{s1}(t)} \right|}{\ln |\pi_\omega(t)|} = \lim_{t \uparrow \omega} \left[ \frac{\pi_\omega(t) J'_s(t)}{(1 - \sigma_{sn-1}) J_s(t)} - \frac{\pi_\omega(t) J'_{s1}(t)}{J_{s1}(t)} \right] = -1.$$

Поэтому, учитывая вид функций  $Y$  и  $Y^{[j]}$  ( $j = \overline{0, n-1}$ ,  $j \neq n-2$ ), находим

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{\ln |Y(t, v_n)|}{\ln |\pi_\omega(t)|} = \lim_{t \uparrow \omega} \left[ \frac{\gamma_s}{1 - \sigma_{sn-1}} + z(t, v_n) \right] \lim_{t \uparrow \omega} \frac{\ln |J_{s1}(t)|}{\ln |\pi_\omega(t)|} = 0$$

равномерно по  $v_n \in \mathbb{R}_{\frac{1}{2}}$ ,

$$\begin{aligned} \lim_{t \uparrow \omega} \frac{\ln |Y^{[j]}(t, v_j, v_{j+1}, v_n)|}{\ln |\pi_\omega(t)|} &= n - j - 2 + \lim_{t \uparrow \omega} \frac{\ln |Y(t, v_n)|}{\ln |\pi_\omega(t)|} + \lim_{t \uparrow \omega} \frac{\ln \frac{|1+v_{j+1}|}{(n-j-2)!}}{\ln |\pi_\omega(t)|} = \\ &= n - j - 2 \quad \text{равномерно по } (v_{j+1}, v_n) \in \mathbb{R}_{\frac{1}{2}}^2 \quad \text{при } j = \overline{0, n-3} \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \lim_{t \uparrow \omega} \frac{\ln |Y^{[n-1]}(t, v_{n-1}, v_n, v_n)|}{\ln |\pi_\omega(t)|} &= \lim_{t \uparrow \omega} \frac{\ln |Y(t, v_n)|}{\ln |\pi_\omega(t)|} + \lim_{t \uparrow \omega} \frac{\ln \left| \frac{J'_{s1}(t)}{J_{s1}(t)} \right|}{\ln |\pi_\omega(t)|} + \\ &+ \lim_{t \uparrow \omega} \frac{\ln \frac{|(1-\sigma_{sn-1})(1+v_j)|}{|\gamma_s|}}{\ln |\pi_\omega(t)|} = -1 \quad \text{равномерно по } (v_{n-1}, v_n) \in \mathbb{R}_{\frac{1}{2}}^2. \end{aligned}$$

Принимая во внимание эти предельные соотношения с использованием неравенств (2.5), получаем, повторяя рассуждения из доказательства необходимости, что для любого  $k \in \{1, \dots, m\} \setminus \{s\}$

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{p_k(t) \varphi_{kn-2}(Y(t, v_n)) \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq n-2}}^{n-1} \varphi_{kj}(Y^{[j]}(t, v_j, v_{j+1}, v_n))}{p_s(t) \varphi_{sn-2}(Y(t, v_n)) \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq n-2}}^{n-1} \varphi_{sj}(Y^{[j]}(t, v_j, v_{j+1}, v_n))} = 0$$

равномерно по  $(v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}_{\frac{1}{2}}^n$ .

Ввиду этих условий последняя дробь в представлении функции  $G$  стремится к единице при  $\tau \rightarrow +\infty$  равномерно по  $(v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}_{\frac{1}{2}}^n$ .

Кроме того, ввиду установленных выше предельных соотношений имеют место представления

$$Y^{[j]}(t, v_j, v_{j+1}, v_n) = \nu_j e^{\ln |Y^{[j]}(t, v_j, v_{j+1}, v_n)|} = \nu_j e^{[1+r_j(t, v_j, v_{j+1}, v_n)] \ln |\pi_\omega(t)|^{n-j-2}}$$

при  $j \in \{0, \dots, n-1\} \setminus \{n-2\}$ ,

где

$$\lim_{t \uparrow \omega} r_j(t, v_j, v_{j+1}, v_n) = 0$$

равномерно по  $(v_j, v_{j+1}, v_n) \in \mathbb{R}_{\frac{1}{2}}^3$  для всех  $j \in \{0, \dots, n-1\} \setminus \{n-2\}$ .

Поскольку функции  $L_{sj}$  ( $j = \overline{1, n-1}$ ,  $j \neq n-2$ ) удовлетворяют условию  $S_0$ , то отсюда с учетом замечания 2.3 следует, что

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq n-2}}^{n-1} L_{sj}(Y^{[j]}(t, v_j, v_{j+1}, v_n))}{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq n-2}}^{n-1} L_{sj}(\nu_j |\pi_\omega(t)|^{n-j-2})} = 1 \quad \text{равномерно по } (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}_{\frac{1}{2}}^n.$$

Поэтому вторая дробь в представлении функции  $G$  стремится к единице при  $\tau \rightarrow +\infty$  равномерно по  $(v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}_{\frac{1}{2}}^n$ .

В силу изложенного выше полученная система дифференциальных уравнений может быть записана в виде

$$\left\{ \begin{array}{l} v'_j = \beta \left[ f_i(\tau, v_1, \dots, v_n) + \sum_{k=1}^n p_{jk} v_k \right] \quad (k = \overline{1, n-2}), \\ v'_{n-1} = \beta \left[ f_{n-1}(\tau, v_1, \dots, v_n) + \sum_{k=1}^n p_{n-1k} v_k + V_{n-1}(v_1, \dots, v_n) \right], \\ v'_n = \beta h_1(\tau) \left[ f_n(\tau, v_1, \dots, v_n) + \sum_{k=1}^n p_{nk} v_k + V_n(v_1, \dots, v_n) \right], \end{array} \right. \quad (2.28)$$

где функции  $f_i$  ( $i = \overline{1, n}$ ) непрерывны на множестве  $[\tau_1, +\infty[ \times \mathbb{R}_{\frac{1}{2}}^n$  при некотором  $\tau_1 \geq \beta \ln |\pi_\omega(t_0)|$  и таковы, что

$$\lim_{\tau \rightarrow +\infty} f_i(\tau, v_1, \dots, v_n) = 0 \quad \text{равномерно по } (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}_{\frac{1}{2}}^n, \quad (2.29)$$

$$p_{jj} = j - n + 1, \quad p_{jj+1} = n - j - 1, \quad p_{jk} = 0,$$

при  $k \in \{1, \dots, n\} \setminus \{j, j+1\}$  ( $j = \overline{1, n-3}$ ),<sup>1</sup>

<sup>1</sup>При  $i = 2$  эта строка отсутствует, а при  $i = 1$  наряду с ней отсутствует и следующая строка.

$$\begin{aligned}
p_{n-2n-2} &= -1, \quad p_{n-2k} = 0 \quad \text{при} \quad k \in \{1, \dots, n\} \setminus \{n-2\}, \\
p_{n-1k} &= -\sigma_{sk-1} \quad (k = \overline{1, n-2}), \quad p_{n-1n-1} = 1 - \sigma_{sn-1}, \\
p_{n-1n} &= 1 - \sigma_{sn-1}), \quad p_{nn-1} = 1, \quad p_{nk} = 0 \quad \text{при} \quad k \in \{1, \dots, n\} \setminus \{n-1\}, \\
V_n(v_1, \dots, v_n) &= v_{n-1}v_n, \\
V_{n-1}(v_1, \dots, v_n) &= -\frac{\prod_{j=0}^{n-3} |1 + v_{j+1}|^{\sigma_{sj}} |1 + v_{n-1}|^{\sigma_{sn-1}}}{|1 + v_n|^{1-\sigma_{sn-1}}} + \\
&+ 1 + \sum_{k=1}^{n-2} \sigma_{sk-1}v_k + \sigma_{sn-1}v_{n-1} - (1 - \sigma_{sn-1})v_n.
\end{aligned}$$

Поскольку соблюдаются условия (2.29) и

$$\lim_{|v_1|+\dots+|v_n|\rightarrow 0} \frac{\partial V_j(v_1, \dots, v_n)}{\partial v_k} = 0 \quad (j = n-1, n; k = \overline{1, n}),$$

то данная система принадлежит к классу систем дифференциальных уравнений, для которых в [17] были получены признаки существования исчезающих в бесконечности решений. Покажем, что для нее выполняются условия теоремы 2.6 из этой работы.

Прежде всего, учитывая условия (2.27) и вид интеграла  $J_{s1}(t)$ , заметим, что функция  $h_1$  обладает свойствами

$$\lim_{\tau \rightarrow +\infty} h_1(\tau) = 0,$$

$$\begin{aligned}
\int_{\tau_1}^{+\infty} h_1(\tau) d\tau &= \beta \int_{t_1}^{\omega} \frac{J'_{sii}(t)}{J_{sii}(t)} dt = \beta \ln |J_{sii}(t)|_{t_1}^{\omega} = \pm \infty \quad (\tau_1 = \beta \ln |\pi_{\omega}(t_1)|), \\
\lim_{\tau \rightarrow +\infty} \frac{h'_1(\tau)}{h_1(\tau)} &= \lim_{t \uparrow \omega} \frac{(h_1(\tau(t)))'_t}{\tau'(t)h_1(\tau(t))} = \\
&= \beta \lim_{t \uparrow \omega} \left[ \frac{\pi_{\omega}(t)J'_{sii}(t)}{J_{sii}(t)} + \frac{1}{\gamma_{si}} \frac{\pi_{\omega}(t)J'_{si}(t)}{J_{si}(t)} \frac{\pi_{\omega}(t)J'_{sii}(t)}{J_{sii}(t)} - \left( \frac{\pi_{\omega}(t)J'_{sii}(t)}{J_{sii}(t)} \right)^2 \right] = 0.
\end{aligned}$$

Далее, рассмотрим матрицы  $P_n = (p_{jk})_{j,k=1}^n$  и  $P_{n-1} = (p_{jk})_{j,k=1}^{n-1}$ . Для них имеем

$$\det P_{n-1} = (-1)^{n-2}(n-2)!(1 - \sigma_{sn-1}), \quad \det P_n = (-1)^{n-1}(n-2)!(1 - \sigma_{sn-1}),$$

$$\det [P_{n-1} - \rho E_{n-1}] = (-1)^{n-2} [1 - \sigma_{sn-1} - \rho] \prod_{k=1}^{n-2} (k + \rho).$$

Здесь корнями характеристического уравнения матрицы  $P_{n-1}$  являются числа  $\rho_k = -k$  ( $k = \overline{1, n-2}$ ),  $\rho_{n-1} = 1 - \sigma_{sn-1}$ . Все они отличны от нуля и поэтому на основании теоремы 2.6 из работы [17] у системы дифференциальных уравнений (2.28) существует хотя бы одно решение  $(v_j)_{j=1}^n : [\tau_2, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}^n$  ( $\tau_2 \geq \tau_1$ ),

стремящееся к нулю при  $\tau \rightarrow +\infty$ . Более того, согласно этой теореме в случае  $\beta = 1$  у данной системы уравнений существует  $n$ -параметрическое семейство таких решений при выполнении неравенств  $\nu_{n-1}\nu_{n-2}\gamma_s < 0$  и  $\sigma_{sn-1} > 1$ ,  $n - 1$ -параметрическое семейство при выполнении неравенства  $\nu_{n-1}\nu_{n-2}\gamma_s > 0$  и  $n - 2$ -параметрическое — при  $\nu_{n-1}\nu_{n-2}\gamma_s < 0$  и  $\sigma_{sn-1} < 1$ , а в случае  $\beta = -1$  существует однопараметрическое семейство таких решений при выполнении неравенства  $\nu_{n-1}\nu_{n-2}\gamma_s > 0$  и двухпараметрическое — при выполнении неравенств  $\nu_{n-1}\nu_{n-2}\gamma_s < 0$  и  $\sigma_{sn-1} < 1$ .

Каждому такому решению системы (2.28) соответствует в силу замен (2.26) и первого из условий (2.3) решение  $y : [t_2, \omega[ \rightarrow \mathbb{R}$  ( $t_2 \in [a, \omega[$ ) уравнения (1.1), допускающее при  $t \uparrow \omega$  асимптотические представления (2.10) — (2.12). Используя эти представления и условия (2.5) - (2.9) нетрудно убедиться в том, что оно является  $P_\omega(Y_0, \dots, Y_{n-1}, 0)$ -решением. Теорема полностью доказана.

**Замечание 5.** Из доказательства необходимости ясно, что если вместо неравенств (2.5) хотя бы для одного  $k \in \{1, \dots, m\} \setminus \{s\}$  будет выполняться неравенство

$$\liminf_{t \uparrow \omega} \frac{\ln p_k(t) - \ln p_s(t)}{\beta \ln |\pi_\omega(t)|} > \beta \sum_{j=0}^{n-1} (\sigma_{sj} - \sigma_{kj})(n - j - 2)$$

при всех  $k \in \{\overline{1, m}\} \setminus \{s\}$ ,

то для этого  $k$  вместо (2.16) будем иметь

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{p_k(t) \prod_{j=0}^{n-1} \varphi_{kj}(y^{(j)}(t))}{p_s(t) \prod_{j=0}^{n-1} \varphi_{sj}(y^{(j)}(t))} = +\infty$$

и поэтому  $s$ -е слагаемое в правой части уравнения (1.1) не будет главным на любом его  $P_\omega(Y_0, \dots, Y_{n-1}, 0)$ -решении.

**Замечание 6.** Из полученного при доказательстве необходимости соотношения

$$\frac{y^{(n)}(t)}{y^{(n-1)}(t)} = \frac{J'_s(t)}{(1 - \sigma_{sn-1})J_s(t)} [1 + o(1)] \quad \text{при } t \uparrow \omega$$

и леммы 1.1 ясно, что в формулировке теоремы предположение о существовании (конечного или равного  $\pm\infty$ ) предела  $\lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t)y^{(n)}(t)}{y^{(n-1)}(t)}$  может быть заменено условием о существовании предела  $\lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t)J'_s(t)}{J_s(t)}$ .

В теореме 2.1 асимптотическое представление для  $y^{(n-2)}$  записано в неявном виде. Следующая теорема указывает дополнительное ограничение, при котором это представление может быть записано в явном виде.

**Теорема 2.** Пусть соблюдаются условия теоремы 2.1 и медленно меняющиеся при  $y^{(n-2)} \rightarrow Y_{n-2}$  функции  $L_{sn-2}$  удовлетворяют условию  $S_0$ . Тогда для каждого  $P_\omega(Y_0, \dots, Y_{n-1}, 0)$ -решения уравнения (1.1), для которого существует (конечный или равный  $\pm\infty$ ) предел  $\lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t)y^{(n)}(t)}{y^{(n-1)}(t)}$ , имеют место при  $t \uparrow \omega$  асимптотические представления (2.10), (2.11) и

$$y^{(n-2)}(t) = \nu_{n-2} \left| (1 - \sigma_{sn-1}) C_s L_{sn-2} \left( \nu_{n-2} |J_{s1}(t)|^{\frac{1-\sigma_{sn-1}}{\gamma_s}} \right) \right|^{\frac{1}{\gamma_s}} \times \left| \frac{\gamma_s}{1 - \sigma_{sn-1}} J_{s1}(t) \right|^{\frac{1-\sigma_{sn-1}}{\gamma_s}} [1 + o(1)]. \quad (2.30)$$

**Доказательство.** Пусть уравнение (1.1) имеет  $P_\omega(Y_0, \dots, Y_{n-1}, 0)$ -решение  $y : [t_0, \omega[ \rightarrow \Delta_{Y_0}$ , для которого существует (конечный или равный  $\pm\infty$ ) предел  $\lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t)y^{(n)}(t)}{y^{(n-1)}(t)}$ . Тогда согласно теореме 2.1 соблюдаются условия (2.6) – (2.9) и для этого решения имеют место при  $t \uparrow \omega$  асимптотические представления (2.10) – (2.12). Кроме того, из доказательства необходимости данной теоремы следует, что выполняется условие (2.21). Поскольку функции  $L_{n-2}$  удовлетворяют условию  $S_0$ , то ввиду (2.21) и замечания 2.2

$$L_{sn-2}(y^{(n-2)}(t)) = L_{sn-2} \left( \nu_{n-2} |J_{s1}(t)|^{\frac{1-\sigma_{sn-1}}{\gamma_s}} \right) [1 + o(1)] \quad \text{при } t \uparrow \omega.$$

Поэтому из (2.12) следует, что

$$|y^{(n-2)}(t)|^{\gamma_s} = |(1 - \sigma_{sn-1}) C_s| L_{sn-2} \left( \nu_{n-2} |J_{s1}(t)|^{\frac{1-\sigma_{sn-1}}{\gamma_s}} \right) \times \left| \frac{\gamma_s}{1 - \sigma_{sn-1}} J_{s1}(t) \right|^{1-\sigma_{sn-1}} [1 + o(1)] \quad \text{при } t \uparrow \omega,$$

откуда получаем представление (2.30).

**Замечание 7.** В случае одного слагаемого, стоящего в правой части уравнения (1.1), а именно для уравнения

$$y^{(n)} = \alpha_s p_s(t) \prod_{j=0}^{n-1} \varphi_{sj}(y^{(j)}), \quad (2.31)$$

теоремы 2.1 и 2.2 остаются справедливыми без предположения о выполнении неравенств (2.5).

**ЗАКЛЮЧЕНИЕ.** В настоящей работе продолжены исследования асимптотического поведения решений дифференциального уравнения (1.1), начатые в [14], [15]. Здесь для особого случая  $P_\omega(Y_0, \dots, Y_{n-1}, \lambda_0)$ -решений, когда  $\lambda_0 = 0$ , получены условия (неравенства (2.5)), при выполнении которых на каждом таком решении правая часть уравнения эквивалентна при  $t \uparrow \omega$  одному слагаемому.

Далее, предполагая выполненными неравенства (2.5) и условие  $S_0$  на все нелинейности, кроме одной, установлены (теорема 2.1) необходимые и достаточные условия существования у уравнения (1.1)  $P_\omega(Y_0, \dots, Y_{n-1}, 0)$ -решений, а также асимптотические представления этих решений и их производных до порядка  $n-1$  включительно. Кроме того, выяснен вопрос о количестве таких решений. Важной особенностью теоремы 2.1 является то, что в ней асимптотика для  $n-2$  производной  $P_\omega(Y_0, \dots, Y_{n-1}, 0)$ -решения выписана в неявном виде. В теореме 2.2 указано дополнительное условие, допускающее получение в явном виде асимптотических формул для  $P_\omega(Y_0, \dots, Y_{n-1}, 0)$ -решения и всех его производных до порядка  $n-1$  включительно.

Результаты работы (см. замечание 2.7) являются новыми даже для частного случая уравнения (1.1) вида (2.31). Асимптотическое поведение  $P_\omega(Y_0, \dots, Y_{n-1}, 0)$ -решений дифференциального уравнения (2.31) ранее исследовалось в работах В. М. Евтухова [1] – [3] в случае степенных нелинейностей, т.е. когда  $\varphi_{sj}(y^{(j)}) = |y^{(j)}|^{\sigma_{sj}}$  ( $j = \overline{0, n-1}$ ).

Следует также обратить внимание на то, что исследование проводится в предположении, что  $\omega \leq +\infty$ . Поэтому, выбирая в качестве  $\omega$  любое  $t_0$  из промежутка, где непрерывны коэффициенты  $p_k$  ( $k = \overline{1, m}$ ), можно с использованием теорем 2.1 и 2.2 получить признаки существования различных типов сингулярных решений (см. монографию И. Т. Кигурадзе, Т. А. Чантурия [18], гл. III, §11, стр. 262) и их асимптотические представления при  $t \uparrow t_0$ .

1. **Евтухов В. М.** Асимптотические представления монотонных решений нелинейного дифференциального уравнения типа Эмдена–Фаулера  $n$ -го порядка // Докл. АН России. – 1992. – Т. 234, №2. – С. 258–260.
2. **Евтухов В. М.** Об одном классе монотонных решений нелинейного дифференциального уравнения  $n$ -го порядка типа Эмдена–Фаулера // Сообщ. АН Грузии. – 1992. – Т. 145, №2. – С. 269–273.
3. **Евтухов В. М.** Асимптотические представления решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений: Дис. д-ра физ.-мат. наук / В. М. Евтухов. – Киев, 1998. – 295 с.
4. **Бурбаки Н.** Функции действительного переменного / Н. Бурбаки. – М.: Наука, 1965. – 424 с.
5. **Marić V.** Regular variation and differential equations. Lecture notes in mathematics 1726. / V. Marić. – Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2000. – 128 p.
6. **Marić V.** Asymptotic Properties of Solutions of the Equation  $y'' = f(x)\Phi(y)$  / V. Marić, M. Tomić // Mathematische Zeitschrift. – 1976. – V. 149. – P. 261–266.
7. **Talliaferro S. D.** Asymptotic behavior of the solutions of the equation  $y'' = \Phi(t)f(y)$  / S. D. Talliaferro // SIAM J. Math. Anal. – 1981. – V. 12, №6. – P. 47–59.
8. **Евтухов В. М.** Асимптотические представления решений существенно нелинейных неавтономных дифференциальных уравнений второго порядка / В. М. Евтухов, М. А. Белозерова // Укр. мат. журнал. – 2008. – Т. 60, №3. – С. 310–331.
9. **Белозерова М. А.** Асимптотические свойства одного класса решений существенно нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка // Мат. студії. – 2008. – Т. 29, №1. – С. 52–62.

10. **Евтухов В. М.** Асимптотические представления решений неавтономных дифференциальных уравнений второго порядка с нелинейностями, близкими к степенным / В. М. Евтухов, М. А. Белозерова // Нелінійні коливання. – 2009. – Т. 12, № 1. – С. 3–15.
11. **Евтухов В. М.** Признаки существования и асимптотика некоторых классов решений существенно нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка / В. М. Евтухов, А. А. Козьма // Укр. мат. журнал. – 2011. – Т. 63, №7. – С. 924–938.
12. **Козьма А. А.** Асимптотическое поведение одного класса решений нелинейных неавтономных дифференциальных уравнений второго порядка / А. А. Козьма // Нелинейные колебания. – 2011. – Т. 14, №4. – С. 468–481.
13. **Евтухов В. М.** Асимптотические представления решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений с правильно меняющимися нелинейностями / В. М. Евтухов, А. М. Самойленко // Дифференц. уравнения. – 2011. – Т. 47, №5. – С. 628–650.
14. **Клопот А. М.** Об асимптотике решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений  $n$ -го порядка / А. М. Клопот // Нелинейные колебания. – 2012. – Т. 15, № 4. – С. 447–465.
15. **Евтухов В. М.** Асимптотика некоторых классов решений обыкновенных дифференциальных уравнений  $n$ -го порядка с правильно меняющимися нелинейностями / В. М. Евтухов, А. М. Клопот // Укр. мат. журнал. – 2013. – Т. 56, №3. – С. 354–380.
16. **Сенета Е.** Правильно меняющиеся функции / Е. Сенета. – М. : Наука, 1985. – 144 с.
17. **Евтухов В. М.** Условия существования исчезающих в особой точке решений у вещественных неавтономных систем квазилинейных дифференциальных уравнений / В. М. Евтухов, А. М. Самойленко // Укр. мат. журнал. – 2010. – Т. 62, №1. – С. 52–80.
18. **Кигурадзе И. Т.** Асимптотические свойства решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений / И. Т. Кигурадзе, Т. А. Чантурия. — М. : Наука, 1990.