

Mathematical Subject Classification: 39A45  
УДК 517.925

Д. Е. Лиманская, Г. Е. Самкова

Одесский национальный университет имени И. И. Мечникова

**О ПОВЕДЕНИИ РЕШЕНИЙ НЕКОТОРЫХ СИСТЕМ  
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, ЧАСТИЧНО  
РАЗРЕШЕННЫХ ОТНОСИТЕЛЬНО ПРОИЗВОДНЫХ**

**Ліманська Д. Є., Самкова Г. Є. Про поведінку розв'язків деяких систем диференціальних рівнянь, які частково розв'язані відносно похідних.** Досліджуються питання існування аналітичних розв'язків деяких систем диференціальних рівнянь, які частково розв'язані відносно похідних. Одержані достатні умови існування аналітичних розв'язків задачі Коші навколо усуваної особливої точки.

**Ключові слова:** аналітичне продовження, задача Коші, пучок матриць, усувана особлива точка.

**Лиманская Д. Е., Самкова Г. Е. О поведении решений некоторых систем дифференциальных уравнений, частично разрешенных относительно производных.** Исследуются вопросы существования аналитических решений некоторых систем дифференциальных уравнений, частично разрешенных относительно производных. Получены достаточные условия существования аналитических решений задачи Коши вблизи устранимой особой точки.

**Ключевые слова:** аналитическое продолжение, задача Коши, пучок матриц, устранимая особая точка.

**Limanska D., Samkova G. Behavior of the solutions of some systems of differential equations which are partially resolved relatively to the derivatives.** This article investigates the questions of the analytical solutions existence for some differential equations systems partially resolved relatively to the derivatives. The sufficient conditions of the analytical solutions existence of the Cauchy problem near a removable singular point were investigated.

**Key words:** analytic continuation, Cauchy problem, pencil of matrices, removable singularity.

**ВВЕДЕНИЕ.** Рассматривается задача Коши вида

$$\begin{cases} A(z)Y' = B(z)Y + f(z, Y, Y'), & (1) \\ Y(z) \rightarrow 0 \text{ при } z \rightarrow 0, z \in D_{10}, & (2) \end{cases}$$

где матрицы  $A, B : D_1 \rightarrow \mathbb{C}^{m \times n}$ ,  $D_1 = \{z : |z| < R_1, R_1 > 0\} \subset \mathbb{C}$ , матрицы  $A(z)$ ,  $B(z)$  — аналитические в области  $D_{10}$ ,  $D_{10} = D_1 \setminus \{0\}$ , пучок матриц  $A(z)\lambda - B(z)$  является сингулярным при  $z \rightarrow 0$ , функция  $f : D_1 \times G_1 \times G_2 \rightarrow \mathbb{C}^m$ , где области  $G_k \subset \mathbb{C}^n$ ,  $0 \in G_k$ ,  $k = 1, 2$ , функция  $f(z, Y, Y')$  является аналитической всюду в  $D_{10} \times G_{10} \times G_{20}$ ,  $G_{k0} = G_k \setminus \{0\}$ ,  $k = 1, 2$  и в точке  $(0, 0, 0)$  имеет изолированную особую точку.

Исследование поведения решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений вблизи особой точки начаты в середине XIX века в работах Р. Фукса,

Ш. Брио и Ж. Буке и далее продолжены в работах А. М. Ляпунова, П. Пенлеве и многих других.

Впоследствии исследования подобных задач разбились на 2 класса: исследования в вещественной области, проводимые Р. Р. Frommer, Р. Е. Hartmann, Т. Wazewski, А. Winter, В. Н. Зубовым, В. Ф. Мячиным, А. В. Костиным, А. Ф. Андреевым, А. Д. Брюно и многими другими, и в комплексной области, проводимые Э. И. Грудо, М. Jwano, W. Trjitzinsky, М. Hurukaru, W. Wasow и многими другими.

Отдельной задачей является изучение вопросов существования и асимптотического поведения решений систем уравнений, не разрешенных относительно производных. В вещественной области в работах А. Самойленко [5], Н. Шкиля [7], И. Старуна, В. Яковца, А. Еременко и других проводятся исследования решений систем с постоянными и переменными пучками матриц.

Впервые уравнение, не разрешенное относительно производных, в комплексной области в конце XIX века исследовал французский математик П. Пенлеве. Вместе с Р. Фуксом П. Пенлеве были доказаны теоремы, согласно которым выделены классы уравнений, решения которых не имеют подвижных особых точек или существенно особых точек однозначного характера.

Исследования конкретных видов систем, не разрешенных относительно производных, проведены в работах М. Jwano [9], О Song Guk [10], Pak Ponk Chol, В. И. Громака и других. При этом изучаются вопросы о свойствах и числе решений сингулярных задач Коши в комплексной области с особой точкой на границе. Такие же классы задач изучались методом аналитического продолжения решений Р. Г. Грабовской [2], Л. Г. Просенюком, В. Г. Оскрого и другими.

Исследования Р. Г. Грабовской и J. Diblic [1, 2, 8] в вещественной области систем, не разрешенных относительно производных, продолжены в комплексной области в работах Г. Е. Самковой [3, 4], Н. В. Шарай [6], Михайленко Е. А. и других.

В данной работе исследуется задача Коши (1)-(2) в предположении, что  $m = n = p$ , матрица  $A(z)$  — аналитическая матрица в области  $D_1$  и  $\text{rang}A(z) = p$  при  $z \in D_1$ , матрица  $B(z)$  — аналитическая в области  $D_{10}$  и имеет в точке  $z = 0$  устранимую особую точку.

Исследуются вопросы существования аналитических решений задачи Коши (1)-(2), удовлетворяющих дополнительному условию

$$Y'(z) \rightarrow 0 \text{ при } z \rightarrow 0, z \in D_{10}. \quad (3)$$

По условию  $A^{-1}(z)B(z)$  — аналитическая матрица в области  $D_{10}$  и в точке  $z = 0$  имеет устранимую особую точку. Вектор-функция  $f(z, Y, Y')$  — аналитическая в области  $D_{10} \times G_{10} \times G_{20}$ , а значит, в точке  $(0, 0, 0)$  имеет изолированную особую точку. Следовательно, по теореме об изолированной особой точке для функции многих комплексных переменных, точка  $(0, 0, 0)$  — ее устранимая особая точка. Доопределим вектор-функцию  $f(z, Y, Y')$  в точке  $(0, 0, 0)$  так, чтобы она стала аналитической функцией в области  $D_1 \times G_1 \times G_2$  и  $f(0, 0, 0) = 0$ .

Введем обозначения:

$$P(z) = A^{-1}(z)B(z), \quad F(z, Y, Y') = A^{-1}(z)f(z, Y, Y'), \quad (4)$$

тогда система (1) примет вид

$$Y' = P(z)Y + F(z, Y, Y'), \quad (5)$$

где  $P(z)$  — аналитическая матрица в области  $D_{10}$ ,  $F(z, Y, Y')$  — аналитическая вектор-функция в области  $D_1 \times G_1 \times G_2$ .

Так как матрица  $P(z)$  в точке  $z = 0$  имеет устранимую особую точку, то доопределим матрицу  $P(z)$  в точке  $z = 0$  так, чтобы она стала аналитической в области  $D_1$ .

Согласно методу аналитического продолжения решений систему (5) изучим вдоль двух семейств кривых, а затем проведем аналитическое продолжение решений с кривой одного семейства при помощи кривых второго семейства на некоторую область.

**ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ.** На комплексной плоскости введем множества:

- 1)  $I = \{z = te^{iv} \in \mathbb{C} : t \in (0, t_1], t_1 > 0, v \in [v_1, v_2], v_1 < v_2\}$ ;
- 2)  $L_{v_0} = \{z = te^{iv} \in \mathbb{C} : t \in (0, t_1], v = v_0\}$ , где  $v_0 \in [v_1, v_2]$ ,  $v_0$  — фиксированное число;
- 3)  $O_{t_0} = \{z = te^{iv} \in \mathbb{C} : t = t_0, v \in [v_1, v_2]\}$ , где  $t_0 \in (0, t_1]$ ,  $t_0$  — фиксированное число.

Пусть вещественнозначные функции  $p(t, v)$ ,  $g(t, v)$  принимают неотрицательные значения на множестве  $I$ .

**Определение 1.** Будем говорить, что функция  $p(t, v)$  обладает свойством  $Q_1$  относительно функции  $g(t, v)$  на множестве  $I$  при  $t \rightarrow +0$ , если функция  $p(t, v)$  является функцией более высокого порядка малости относительно функции  $g(t, v)$  при  $t \rightarrow +0$  равномерно относительно  $v \in [v_1, v_2]$ .

**Определение 2.** Будем говорить, что функция  $p(t, v)$  обладает свойством  $Q_2$  относительно функции  $g(t, v)$  на множестве  $I$ , если существуют такие  $C_1 > 0, C_2 > 0$ , что равномерно относительно  $t \in (0, t_1]$  выполняется неравенство

$$C_1|g(t, v)| \leq |p(t, v)| \leq C_2|g(t, v)| \quad \forall v \in [v_1, v_2].$$

Введем вспомогательные вектор-функции:

$$\varphi^{(0)}(z) = \left( \varphi_1^{(0)}(z), \dots, \varphi_p^{(0)}(z) \right), \quad \varphi^{(0)} : I \rightarrow \mathbb{C}^p, \quad z(t, v) = te^{iv},$$

$$\psi_j^{(0)}(t, v) = \left| \varphi_j^{(0)}(z(t, v)) \right|, \quad j = \overline{1, p}, \quad \psi^{(0)}(t, v) = \left( \psi_1^{(0)}(t, v), \dots, \psi_p^{(0)}(t, v) \right).$$

**Определение 3.** Будем говорить, что аналитическая на множестве  $I$  вектор-функция  $\varphi^{(0)}(z)$  обладает свойством  $T_0$ , если для любых  $z(t, v) \in I$  выполнены следующие условия:

$$\psi_j^{(0)}(t, v) > 0, \quad j = \overline{1, p}; \quad \left( \psi_j^{(0)}(t, v) \right)'_t > 0, \quad j = \overline{1, p};$$

$$\left( \psi_j^{(0)}(t, v) \right)'_v > 0, \quad j = \overline{1, p};$$

$$\psi_j^{(0)}(+0, v) = 0, \quad j = \overline{1, p}, \quad \left( \psi_j^{(0)}(+0, v) \right)'_t = 0, \quad j = \overline{1, p}.$$

**Система (5) на множестве  $L_{v_0}$**

Рассмотрим систему (5) на отрезке  $L_{v_0}$  при произвольном фиксированном  $v_0 \in [v_1, v_2]$ .

При  $z = z(t, v_0) = te^{iv_0}$  в системе (5) представим каждую из функций и матриц в алгебраической форме, отделяя вещественные и мнимые части и вводя следующие обозначения:

$$Y(z(t, v_0)) = \tilde{Y}(t), \quad \tilde{Y}(t) = \tilde{Y}_1(t) + i\tilde{Y}_2(t);$$

$$\tilde{Y}_j(t) = \text{col}(\tilde{Y}_{j1}(t), \dots, \tilde{Y}_{jp}(t)), \quad j = 1, 2;$$

$$P(z(t, v_0)) = \|\tilde{p}_{jk}(t)\|_{j,k=1}^p = \tilde{P}_1(t) + i\tilde{P}_2(t),$$

$$\tilde{P}_s(t) = \|\tilde{p}_{jk}^{(s)}(t)\|_{j,k=1}^p, \quad s = 1, 2,$$

где  $\tilde{p}_{jk}(t) = \tilde{p}_{jk}^{(1)}(t) + i\tilde{p}_{jk}^{(2)}(t)$ ,  $j, k = \overline{1, p}$ .

$$F(z(t, v_0), Y(z(t, v_0)), Y'(z(t, v_0))) = \tilde{F}(t, \tilde{Y}_1, \tilde{Y}_2, \tilde{Y}'_1, \tilde{Y}'_2);$$

$$\tilde{F}(t, \tilde{Y}_1, \tilde{Y}_2, \tilde{Y}'_1, \tilde{Y}'_2) = \text{col}(\tilde{F}_1(t, \tilde{Y}_1, \tilde{Y}_2, \tilde{Y}'_1, \tilde{Y}'_2), \dots, \tilde{F}_p(t, \tilde{Y}_1, \tilde{Y}_2, \tilde{Y}'_1, \tilde{Y}'_2)),$$

$$\tilde{F}_j(t, \tilde{Y}_1, \tilde{Y}_2, \tilde{Y}'_1, \tilde{Y}'_2) = \tilde{F}_{1j}(t, \tilde{Y}_1, \tilde{Y}_2, \tilde{Y}'_1, \tilde{Y}'_2) + i\tilde{F}_{2j}(t, \tilde{Y}_1, \tilde{Y}_2, \tilde{Y}'_1, \tilde{Y}'_2), \quad j = \overline{1, p}.$$

В итоге при  $z = z(t, v_0) = te^{iv_0}$  система (5) примет вид

$$\begin{aligned} (\tilde{Y}'_1 + i\tilde{Y}'_2) &= (\tilde{P}_1 + i\tilde{P}_2)(\tilde{Y}_1 + i\tilde{Y}_2)e^{iv_0} + \\ &+ e^{iv_0}(\text{Re}\tilde{F}(t, \tilde{Y}_1, \tilde{Y}_2, \tilde{Y}'_1, \tilde{Y}'_2) + i\text{Im}\tilde{F}(t, \tilde{Y}_1, \tilde{Y}_2, \tilde{Y}'_1, \tilde{Y}'_2)). \end{aligned} \quad (6)$$

Введем матрицы и вектор-функцию вида

$$\begin{aligned} \tilde{P}(t) &= \begin{pmatrix} \tilde{P}_1(t) & -\tilde{P}_2(t) \\ \tilde{P}_2(t) & \tilde{P}_1(t) \end{pmatrix}; \\ \tilde{f}(t, \tilde{Y}_1, \tilde{Y}_2, \tilde{Y}'_1, \tilde{Y}'_2) &= \\ &= \text{col}(\tilde{F}_{11}(t, \tilde{Y}_1, \tilde{Y}_2, \tilde{Y}'_1, \tilde{Y}'_2) \dots \tilde{F}_{1p}(t, \tilde{Y}_1, \tilde{Y}_2, \tilde{Y}'_1, \tilde{Y}'_2) \dots \\ &\dots \tilde{F}_{21}(t, \tilde{Y}_1, \tilde{Y}_2, \tilde{Y}'_1, \tilde{Y}'_2) \dots \tilde{F}_{2p}(t, \tilde{Y}_1, \tilde{Y}_2, \tilde{Y}'_1, \tilde{Y}'_2)); \end{aligned} \quad (7)$$

$$\tilde{Q}_1(v_0) = \begin{pmatrix} \cos(v_0) E & -\sin(v_0) E \\ \sin(v_0) E & \cos(v_0) E \end{pmatrix},$$

где  $E$  — единичная матрица размерности  $p \times p$ .

Приравняем слева и справа в системе (6) действительные и мнимые части записанных вектор-функций. Тогда система (6) примет вид

$$\begin{pmatrix} \tilde{Y}'_1(t) \\ \tilde{Y}'_2(t) \end{pmatrix} = \tilde{P}(t)\tilde{Q}_1(v_0) \begin{pmatrix} \tilde{Y}_1(t) \\ \tilde{Y}_2(t) \end{pmatrix} + \tilde{Q}_1(v_0)\tilde{f}(t, \tilde{Y}_1, \tilde{Y}_2, \tilde{Y}'_1, \tilde{Y}'_2). \quad (8)$$

Таким образом, система (5) вдоль отрезка  $L_{v_0}$  при произвольном фиксированном  $v_0 \in [v_1, v_2]$  будет иметь вид (8).

**Система (5) на множестве  $O_{t_0}$**

Рассмотрим систему (5) вдоль дуги окружности  $O_{t_0}$  при произвольном фиксированном  $t_0 \in (0, t_1]$ .

При  $z = z(t_0, v) = t_0 e^{iv}$  в системе (5) представим каждую из функций и матриц в алгебраической форме, отделяя вещественные и мнимые части и вводя следующие обозначения:

$$Y(z(t_0, v)) = \hat{Y}(v), \quad \hat{Y}(v) = \hat{Y}_1(v) + i\hat{Y}_2(v);$$

$$\hat{Y}_j(v) = \text{col}(\hat{Y}_{j1}(v), \dots, \hat{Y}_{jp}(v)), \quad j = 1, 2$$

$$P(z(t_0, v)) = \|\hat{p}_{jk}(v)\|_{k,j=1}^p = \hat{P}_1(v) + i\hat{P}_2(v);$$

$$\hat{P}_s(v) = \left\| \hat{p}_{jk}^{(s)}(v) \right\|_{j,k=1}^p, \quad s = 1, 2,$$

где  $\hat{p}_{jk}(v) = \hat{p}_{jk}^{(1)}(v) + i\hat{p}_{jk}^{(2)}(v)$ ,  $j, k = \overline{1, p}$ .

$$F(z(t_0, v), Y(z(t_0, v)), Y'(z(t_0, v))) = \hat{F}(v, \hat{Y}_1, \hat{Y}_2, \hat{Y}'_1, \hat{Y}'_2),$$

$$\hat{F}(v, \hat{Y}_1, \hat{Y}_2, \hat{Y}'_1, \hat{Y}'_2) = \text{col}(\hat{F}_1(v, \hat{Y}_1, \hat{Y}_2, \hat{Y}'_1, \hat{Y}'_2), \dots, \hat{F}_p(v, \hat{Y}_1, \hat{Y}_2, \hat{Y}'_1, \hat{Y}'_2)),$$

$$\hat{F}_j(v, \hat{Y}_1, \hat{Y}_2, \hat{Y}'_1, \hat{Y}'_2) = \hat{F}_{1j}(v, \hat{Y}_1, \hat{Y}_2, \hat{Y}'_1, \hat{Y}'_2) + i\hat{F}_{2j}(v, \hat{Y}_1, \hat{Y}_2, \hat{Y}'_1, \hat{Y}'_2),$$

$$j = \overline{1, p}.$$

В итоге при  $z = z(t_0, v) = t_0 e^{iv}$  система (5) примет вид

$$\begin{aligned} (\hat{Y}'_1 + i\hat{Y}'_2) &= it_0 e^{iv} (\hat{P}_1 + i\hat{P}_2) (\hat{Y}_1 + i\hat{Y}_2) + \\ &+ it_0 e^{iv} (\text{Re}\hat{F}(v, \hat{Y}_1, \hat{Y}_2, \hat{Y}'_1, \hat{Y}'_2) + i\text{Im}\hat{F}(v, \hat{Y}_1, \hat{Y}_2, \hat{Y}'_1, \hat{Y}'_2)). \end{aligned} \quad (9)$$

Введем матрицы и вектор-функцию вида

$$\hat{P}(v) = \begin{pmatrix} \hat{P}_1(v) & -\hat{P}_2(v) \\ \hat{P}_2(v) & \hat{P}_1(v) \end{pmatrix};$$

$$\hat{f}(v, \hat{Y}_1, \hat{Y}_2, \hat{Y}'_1, \hat{Y}'_2) =$$

$$= \text{col}(\hat{F}_{11}(v, \hat{Y}_1, \hat{Y}_2, \hat{Y}'_1, \hat{Y}'_2) \dots \hat{F}_{1p}(v, \hat{Y}_1, \hat{Y}_2, \hat{Y}'_1, \hat{Y}'_2) \dots$$

$$\dots \hat{F}_{21}(v, \hat{Y}_1, \hat{Y}_2, \hat{Y}'_1, \hat{Y}'_2) \dots \hat{F}_{2p}(v, \hat{Y}_1, \hat{Y}_2, \hat{Y}'_1, \hat{Y}'_2));$$

$$\hat{Q}_1(v) = \begin{pmatrix} -\sin(v)E & -\cos(v)E \\ \cos(v)E & -\sin(v)E \end{pmatrix}.$$

Приравняем слева и справа в системе (9) действительные и мнимые части записанных вектор-функций. Тогда система (9) примет вид:

$$\begin{pmatrix} \hat{Y}'_1(v) \\ \hat{Y}'_2(v) \end{pmatrix} = t_0 \tilde{P}(v) \hat{Q}_1(v) \begin{pmatrix} \hat{Y}_1(v) \\ \hat{Y}_2(v) \end{pmatrix} + t_0 \hat{Q}_1(v) \hat{f}(v, \hat{Y}_1, \hat{Y}_2, \hat{Y}'_1, \hat{Y}'_2). \quad (10)$$

Таким образом, система (5) вдоль дуги окружности  $O_{t_0}$  при произвольном фиксированном  $t_0 \in (0, t_1]$  будет иметь вид (10).

### Некоторые классы функций и свойства систем

Введем вспомогательное свойство  $S_1$ , согласно которому элементы матрицы  $P(z)$  удовлетворяют некоторым условиям.

**Определение 4.** Будем говорить, что матрица  $P(z)$  обладает свойством  $S_1$  относительно вектор-функции  $\varphi^{(0)}(z)$ , если выполняются условия:

- 1) функции  $\left(\psi_j^{(0)}(t, v_0)\right)'_t$  обладают свойством  $Q_1$  относительно функций  $|\tilde{p}_{jj}(t)| \psi_j^{(0)}(z(t, v_0))$ ,  $j = \overline{1, p}$ , на множестве  $I$  при  $t \rightarrow +0$ ;
- 2) функции  $\left(\psi_j^{(0)}(t_0, v)\right)'_v$  обладают свойством  $Q_2$  относительно функций  $|\hat{p}_{jj}(v)| \psi_j^{(0)}(t_0, v)$ ,  $j = \overline{1, p}$ , на множестве  $I$ ;
- 3) функции  $|\tilde{p}_{jk}(t)| \psi_k^{(0)}(t, v_0)$  обладают свойством  $Q_1$  относительно функций  $\left(\psi_j^{(0)}(t, v_0)\right)'_t$ ,  $j, k = \overline{1, p}$ ,  $j \neq k$ , на множестве  $I$  при  $t \rightarrow +0$ ;
- 4) функции  $|\hat{p}_{jk}(v)| \psi_k^{(0)}(t_0, v)$  обладают свойством  $Q_2$  относительно функций  $\left(\psi_j^{(0)}(t_0, v)\right)'_v$ ,  $j, k = \overline{1, p}$ ,  $j \neq k$ , на множестве  $I$ .

Введем вспомогательное свойство  $M_1$ , согласно которому элементы вектор-функции  $F(z, Y, Y')$  удовлетворяют некоторым условиям.

Обозначим множества:

$$\begin{aligned} & \tilde{\Omega}(\delta, \varphi^{(0)}(z(t, v_0))) = \\ & = \left\{ (t, \tilde{Y}_1, \tilde{Y}_2) : t \in (0, t_1], \tilde{Y}_{1j}^2 + \tilde{Y}_{2j}^2 < \delta_j^2 \left(\psi_j^{(0)}(t, v_0)\right)^2, j = \overline{1, p} \right\}, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} & \hat{\Omega}(\tau, \varphi^{(0)}z((t_0, v))) = \\ & = \left\{ (v, \hat{Y}_1, \hat{Y}_2) : v \in [v_1, v_2], \hat{Y}_{1j}^2 + \hat{Y}_{2j}^2 < \tau_j^2 \left(\psi_j^{(0)}(t_0, v)\right)^2, j = \overline{1, p} \right\}, \end{aligned} \quad (12)$$

где  $v_0$  — фиксировано на  $[v_1, v_2]$ ,  $t_0$  фиксировано на  $(0, t_1]$ ,  $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_p)$ ,  $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_p)$ ,  $\delta_j, \tau_j \in \mathbb{R}$ ,  $j = \overline{1, p}$ .

**Определение 5.** Будем говорить, что вектор-функция  $F(z, Y, Y')$  обладает свойством  $M_1$  относительно вектор-функции  $\varphi^{(0)}(z)$ , если выполняются условия:

- 1) для любых  $(t, \tilde{Y}_1, \tilde{Y}_2) \in \tilde{\Omega}(\delta, \varphi^{(0)}(z(t, v_0)))$  функции  $\tilde{F}_{kj}(t, \tilde{Y}_1, \tilde{Y}_2, \tilde{Y}'_1, \tilde{Y}'_2)$  обладают свойством  $Q_1$  на множестве  $I$  относительно функций  $|\tilde{p}_{jj}(t)| \times \psi_j^{(0)}(z(t, v_0))$ ,  $j = \overline{1, p}$ ,  $k = 1, 2$  при  $t \rightarrow +0$ ;

- 2) для любых  $(v, \hat{Y}_1, \hat{Y}_2) \in \widehat{\Omega}(\tau, \varphi^{(0)}(z(t_0, v)))$  функции  $\hat{F}_{kj}(v, \hat{Y}_1, \hat{Y}_2, \hat{Y}'_1, \hat{Y}'_2)$  обладают свойством  $Q_2$  на множестве  $I$  относительно функций  $|\hat{p}_{jj}(v)| \times \times \psi_j^{(0)}(t_0, v)$ ,  $j = \overline{1, p}, k = 1, 2$ .

Проведем дальнейшую классификацию свойств матрицы  $P(z)$ .

Введем вспомогательные функции  $\tilde{\alpha}_{jk}(t)$ ,  $\hat{\alpha}_{jk}(v)$ ,  $j, k = \overline{1, p}$  так, что:

$$\begin{cases} \cos(\tilde{\alpha}_{jk}(t)) = \frac{\tilde{p}_{jk}^{(1)}(t)}{\sqrt{(\tilde{p}_{jk}^{(1)}(t))^2 + (\tilde{p}_{jk}^{(2)}(t))^2}} \\ \sin(\tilde{\alpha}_{jk}(t)) = \frac{\tilde{p}_{jk}^{(2)}(t)}{\sqrt{(\tilde{p}_{jk}^{(1)}(t))^2 + (\tilde{p}_{jk}^{(2)}(t))^2}} \end{cases} \quad j, k = \overline{1, p}; \quad (13)$$

$$\begin{cases} \cos(\hat{\alpha}_{jk}(v)) = \frac{\hat{p}_{jk}^{(1)}(v)}{\sqrt{(\hat{p}_{jk}^{(1)}(v))^2 + (\hat{p}_{jk}^{(2)}(v))^2}} \\ \sin(\hat{\alpha}_{jk}(v)) = \frac{\hat{p}_{jk}^{(2)}(v)}{\sqrt{(\hat{p}_{jk}^{(1)}(v))^2 + (\hat{p}_{jk}^{(2)}(v))^2}} \end{cases} \quad j, k = \overline{1, p}. \quad (14)$$

Пусть  $t^* = \min(R_1, t_1)$ , тогда введем области  $\Phi_{+,k}(t^*)$ ,  $k \in \{+, -\}$ , которые определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} \Phi_{+,+}(t^*) &= \{(t, v) : \cos(v + \tilde{\alpha}_{jk}(t)) > 0, \\ &\sin(v + \hat{\alpha}_{jk}(v)) > 0, j, k = \overline{1, p}, t \in (0, t^*), v \in (v_1, v_2)\}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi_{+,-}(t^*) &= \{(t, v) : \cos(v + \tilde{\alpha}_{jk}(t)) > 0, \\ &\sin(v + \hat{\alpha}_{jk}(v)) < 0, j, k = \overline{1, p}, t \in (0, t^*), v \in (v_1, v_2)\}. \end{aligned}$$

**Определение 6.** Будем говорить, что система (5) принадлежит классу  $K_{+,k}$ , если матрица  $P(z) = P(te^{iv})$  такова, что  $(t, v) \in \Phi_{+,k}$ ,  $k \in \{+, -\}$ .

$$G_{1,+,k}(t^*) = \{z : 0 < |z| < t^*, \text{Arg}z \in \Phi_{+,k}(t^*)\}, k \in \{+, -\}.$$

**ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ.** Изучим асимптотику решений задачи Коши (1)–(2) в случае, когда матрица  $B(z)$  имеет в точке  $z = 0$  устранимую особую точку и система (5) принадлежит одному из классов  $K_{+,k}$ ,  $k \in \{+, -\}$ .

**Теорема 1.** Пусть для системы (1) выполняются условия:

1. Однозначная матрица  $A : D_1 \rightarrow \mathbb{C}^{p \times p}$  является аналитической в области  $D_1$ ,  $\text{rang}A(z) = p$  при  $z \in D_1$ ;
2.  $B(z)$  – аналитическая матрица в области  $D_{10}$ , которая в точке  $z = 0$  имеет устранимую особую точку и такова, что соответствующая матрица  $P(z)$  обладает свойством  $S_1$  относительно некоторой вектор-функции  $\varphi^{(0)}(z)$ ;
3. Вектор-функция  $f(z, Y, Y')$  является аналитической в области  $D_{10} \times G_{10} \times \times G_{20}$  и такова, что соответствующая функция  $F(z, Y, Y')$  обладает свойством  $M_1$  относительно некоторой вектор-функции  $\varphi^{(0)}(z)$ ;

4. Соответствующая системе (1) система (5) принадлежит одному из классов  $K_{+,k}$ ,  $k \in \{+, -\}$ .

Тогда для каждого  $k \in \{+, -\}$  существует  $t^* \in (0, t_1)$ , для которого решение системы (1), удовлетворяющее начальным условиям  $Y(z_0) = Y_0$  при  $z_0 \in G_{1+,k}(t^*)$ ,  $Y_0 \in \{Y : |Y_j(z_0)| < \delta_j |\varphi^{(0)}(z_0)|, \delta_j > 0, j = \overline{1, p}\}$  аналитично в области  $D_1 \cap G_{1+,k}(t^*)$  и обладает в этой области оценкой

$$|Y_j(z)|^2 < \delta_j^2 |\varphi_j^{(0)}(z)|^2, j = \overline{1, p}. \quad (15)$$

**Доказательство.**

1. Рассмотрим систему (5) на отрезке  $L_{v_0}$  при фиксированном значении  $v_0 \in (v_1, v_2)$ .

Рассмотрим множество  $\widetilde{\Omega}(\delta, \varphi^{(0)}(z(t, v_0)))$  как пересечение множеств  $\widetilde{\Omega}_j$  вида

$$\widetilde{\Omega}(\delta, \varphi^{(0)}(z(t, v_0))) = \bigcap_{j=1}^p \widetilde{\Omega}_j(\delta, \varphi^{(0)}(z(t, v_0))),$$

где

$$\begin{aligned} & \widetilde{\Omega}_j(\delta, \varphi^{(0)}(z(t, v_0))) = \\ & = \left\{ (t, \tilde{Y}_1, \tilde{Y}_2) : \tilde{Y}_{1j}^2 + \tilde{Y}_{2j}^2 < \delta_j^2 (\psi_j^{(0)}(t, v_0))^2, t \in (0, t_1] \right\}. \end{aligned}$$

Часть границы множества  $\widetilde{\Omega}_j$ ,  $j \in \{1, 2, \dots, p\}$ , будем обозначать так:

$$\begin{aligned} & \partial \widetilde{\Omega}_j(\delta, \varphi^{(0)}(z(t, v_0))) = \\ & = \left\{ (t, \tilde{Y}_1, \tilde{Y}_2) : \tilde{Y}_{1j}^2 + \tilde{Y}_{2j}^2 = \delta_j^2 (\psi_j^{(0)}(t, v_0))^2, \tilde{Y}_{1k}^2 + \tilde{Y}_{2k}^2 < \delta_k^2 (\psi_k^{(0)}(t, v_0))^2, \right. \\ & \left. k = \overline{1, p}, k \neq j, t \in (0, t_1] \right\}. \end{aligned}$$

Обозначим через

$$\widetilde{\Phi}_j(t, \tilde{Y}(t)) = \tilde{Y}_{1j}^2(t) + \tilde{Y}_{2j}^2(t) - \delta_j^2 |\varphi_j^{(0)}(t, v_0)|^2, j \in \{1, 2, \dots, p\}.$$

Тогда вектор внешней нормали поверхности  $\partial \widetilde{\Omega}_j(\delta, \varphi(z(t, v_0)))$  при фиксированном  $j \in \{1, \dots, p\}$  будет иметь вид

$$\vec{N}_j = \left( -\delta_j^2 \cdot \psi_j^{(0)}(t, v_0) \cdot (\psi_j^{(0)}(t, v_0))'_t, 0, \dots, 0, \tilde{Y}_{1j}, 0, \dots, 0, \tilde{Y}_{2j}, 0, \dots, 0 \right).$$

Пусть  $\vec{T}$  — вектор поля направлений системы (8) в произвольной фиксированной точке  $(t^*, \tilde{Y}(t^*)) \in \partial \widetilde{\Omega}_j(\delta, \varphi(z(t, v_0)))$ ,  $j \in \{1, \dots, p\}$ .



Обозначим:

$$\begin{aligned}
S_{1j} &= \sum_{k=1}^p [(\tilde{p}_{jk}^{(1)}(t) \cos(v_0) - \tilde{p}_{jk}^{(2)}(t) \sin(v_0))\tilde{Y}_{1k} + \\
&+ (\tilde{p}_{jk}^{(1)}(t) \sin(v_0) - \tilde{p}_{jk}^{(2)}(t) \cos(v_0))\tilde{Y}_{2k}] + (\tilde{F}_{1j} \cos v_0 - \tilde{F}_{2j} \sin v_0), \quad j = \overline{1, p}; \\
S_{2j} &= \sum_{k=1}^p [(\tilde{p}_{jk}^{(1)}(t) \cos(v_0) - \tilde{p}_{jk}^{(2)}(t) \sin(v_0))\tilde{Y}_{2k} + \\
&+ (\tilde{p}_{jk}^{(1)}(t) \sin(v_0) + \tilde{p}_{jk}^{(2)}(t) \cos(v_0))\tilde{Y}_{1k}] + (\tilde{F}_{1j} \sin v_0 + \tilde{F}_{2j} \cos v_0), \quad j = \overline{1, p}.
\end{aligned}$$

Рассмотрим скалярное произведение:

$$\begin{aligned}
\left( \vec{T}, \frac{\vec{N}_j}{2} \right) &= -\delta_j^2 \cdot \psi_j^{(0)}(t, v_0) \cdot (\psi_j^{(0)}(t, v_0))'_t + S_{1j}\tilde{Y}_{1j} + S_{2j}\tilde{Y}_{2j}, \quad j = \overline{1, p}. \\
\left( \vec{T}, \frac{\vec{N}_j}{2} \right) &= -\delta_j^2 \cdot \psi_j^{(0)}(t, v_0) \cdot (\psi_j^{(0)}(t, v_0))'_t + (\tilde{p}_{jj}^{(1)}(t) \cos(v_0) - \\
&\quad - \tilde{p}_{jj}^{(2)}(t) \sin(v_0))\delta_j^2 (\psi_j^{(0)}(t, v_0))^2 + \\
&+ \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^p (\tilde{p}_{jk}^{(1)}(t) \cos(v_0) - \tilde{p}_{jk}^{(2)}(t) \sin(v_0)) (\tilde{Y}_{1k}\tilde{Y}_{1j} + \tilde{Y}_{2k}\tilde{Y}_{2j}) + \\
&+ \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^p (\tilde{p}_{jk}^{(1)}(t) \sin(v_0) + \tilde{p}_{jk}^{(2)}(t) \cos(v_0)) (\tilde{Y}_{2k}\tilde{Y}_{1j} - \tilde{Y}_{1k}\tilde{Y}_{2j}) + \\
&+ (\tilde{F}_{1j} \cos v_0 - \tilde{F}_{2j} \sin v_0)\tilde{Y}_{1j} + (\tilde{F}_{1j} \sin v_0 + \tilde{F}_{2j} \cos v_0)\tilde{Y}_{2j}, \quad j = \overline{1, p}. \quad (16)
\end{aligned}$$

Так как, по условию, матрица  $P(z)$  обладает свойством  $S_1$ , а вектор-функция  $F(z, Y, Y')$  обладает свойством  $M_1$  относительно вектор-функции  $\varphi^{(0)}(z)$ , то

$$\begin{aligned}
\left( \vec{T}, \frac{\vec{N}_j}{2} \right) &\rightarrow \sqrt{(\tilde{p}_{jj}^{(1)}(t))^2 + (\tilde{p}_{jj}^{(2)}(t))^2} (\cos(v_0 + \tilde{\alpha}_{jj}(t))), \\
j &= \overline{1, p} \quad \text{при } t \rightarrow +0, \quad (17)
\end{aligned}$$

где функция  $\tilde{\alpha}_{jj}(t)$  такова, что выполняется равенство (13).

Так как система (5) принадлежит одному из классов  $K_{+,k}(t, v)$ ,  $k \in \{+, -\}$ , то существует такое  $t^*$ , что при  $t \in (0, t^*)$  справедливо  $\left( \vec{T}, \frac{\vec{N}_j}{2} \right) > 0$ ,  $j = \overline{1, p}$ .

Следовательно, при  $t \in (0, t^*)$  поверхность  $\partial\tilde{\Omega}(\delta, \varphi^{(0)}(z(t, v_0)))$  является поверхностью без контакта для системы (8), причем при убывании переменной  $t$  интегральная кривая входит в область  $\tilde{\Omega}(\delta, \varphi^{(0)}(z(t, v_0)))$ .

Через каждую точку множества

$$\tilde{\Omega} \left( \delta, \varphi^{(0)}(z(t, v_0)) \right) \cup \partial \tilde{\Omega} \left( \delta, \varphi^{(0)}(z(t, v_0)) \right) \cap (t = t^*)$$

проходит хотя бы одна гладкая интегральная кривая системы (8), и все интегральные кривые данной системы, проходящие через точки этого множества, остаются в области  $\tilde{\Omega}(\delta, \varphi^{(0)}(z(t, v_0)))$  при  $(t, v_0) \in \Phi_{+,k}(t^*)$ ,  $k \in \{+, -\}$ ,  $v_0 \in (v_1, v_2)$ ,  $t \in (0, t^*)$ . Причем выполнено неравенство

$$|Y_{sj}(z(t, v_0))|^2 < \delta_j^2 (\psi^{(0)}(t, v_0))^2, j = \overline{1, p}, s = 1, 2, \quad (18)$$

при  $(t, v_0) \in \Phi_{+,k}(t^*)$ ,  $k \in \{+, -\}$ .

2. Рассмотрим поведение решений системы (5) вдоль дуги окружности  $O_{t_0}$  при фиксированном  $t_0 \in (0, t_1)$ .

Рассмотрим множество  $\widehat{\Omega}(\tau, \varphi^{(0)}(z(t_0, v)))$  как пересечение множеств  $\widehat{\Omega}_j$  вида

$$\widehat{\Omega}(\tau, \varphi^{(0)}(z(t_0, v))) = \bigcap_{j=1}^p \widehat{\Omega}_j(\tau, \varphi^{(0)}(z(t_0, v))), v \in [v_1, v_2],$$

где

$$\begin{aligned} \widehat{\Omega}_j(\tau, \varphi^{(0)}(z(t_0, v))) &= \\ &= \left\{ (v, \hat{Y}_1, \hat{Y}_2) : \hat{Y}_{1j}^2 + \hat{Y}_{2j}^2 < \tau_j^2 (\psi_j^{(0)}(t_0, v))^2, t \in (0, t_1) \right\}. \end{aligned}$$

Часть границы множества  $\widetilde{\Omega}_j$ ,  $j = \{1, 2, \dots, p\}$ , будем обозначать так:

$$\begin{aligned} \partial \widehat{\Omega}_j(\tau, \varphi^{(0)}(z(t_0, v))) &= \left\{ (v, \hat{Y}_1, \hat{Y}_2) : \hat{Y}_{1j}^2 + \hat{Y}_{2j}^2 = \tau_j^2 (\psi_j^{(0)}(t_0, v))^2, \right. \\ &\quad \left. \hat{Y}_{1k}^2 + \hat{Y}_{2k}^2 < \tau_k^2 (\psi_k^{(0)}(t_0, v))^2, k = \overline{1, p}, k \neq j \right\}. \end{aligned}$$

Изучим поведение интегральных кривых системы (10) на поверхности  $\partial \widehat{\Omega}_j(\tau, \varphi^{(0)}(z(t_0, v)))$  при фиксированном  $j \in \{1, \dots, p\}$ :

$$\begin{aligned} \left( \frac{\vec{T}}{t_0}, \frac{\vec{N}_j}{2} \right) &= -\tau_j^2 \psi_j^{(0)}(t_0, v) \cdot \left( \psi_j^{(0)}(t_0, v) \right)'_v(t_0, v) + (\hat{p}_{jj}^{(1)}(v) \cos(v) - \\ &\quad - \hat{p}_{jj}^{(2)}(v) \sin(v)) \tau_j^2 (\psi_j^{(0)}(t_0, v))^2 + \\ &+ \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^p \left( \hat{p}_{jk}^{(1)}(v) \cos(v) - \hat{p}_{jk}^{(2)}(v) \sin(v) \right) \left( \hat{Y}_{1k} \hat{Y}_{1j} + \hat{Y}_{2k} \hat{Y}_{2j} \right) + \\ &+ \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^p \left( -\hat{p}_{jk}^{(1)}(v) \sin(v) - \hat{p}_{jk}^{(2)}(v) \cos(v) \right) \left( \hat{Y}_{2k} \hat{Y}_{1j} - \hat{Y}_{1k} \hat{Y}_{2j} \right) + \end{aligned}$$

$$+ \left( \hat{F}_{1j} \cos v - \hat{F}_{2j} \sin v \right) \hat{Y}_{1j} + \left( -\hat{F}_{1j} \sin v - \hat{F}_{2j} \cos v \right) \hat{Y}_{2j}, \quad j = \overline{1, p}. \quad (19)$$

Так как, по условию, матрица  $P(z)$  обладает свойством  $S_1$ , а вектор-функция  $F(z, Y(z), Y'(z))$  обладает свойством  $M_1$  относительно вектор-функции  $\varphi^{(0)}(z)$ , то

$$\left( \frac{\vec{T}}{t_0}, \frac{\vec{N}_j}{2} \right) \rightarrow \sqrt{\left( \hat{p}_{jj}^{(1)}(v) \right)^2 + \left( \hat{p}_{jj}^{(2)}(v) \right)^2} \cdot \sin((v) + \hat{\alpha}_{jj}(v)), \quad j = \overline{1, p},$$

при  $t \rightarrow 0$ ,  $v \in [v_1, v_2]$ , где функция  $\hat{\alpha}_{jj}(v)$  такова, что выполняется равенство (14). Следовательно,

$$\text{sign} \left( \frac{\vec{T}}{t_0}, \frac{\vec{N}_j}{2} \right) = \text{sign} \left( \sin(v + \hat{\alpha}_{jj}(v)) \right), \quad j = \overline{1, p}. \quad (20)$$

И существует  $t^* \in (0; t_1)$ , такое, что, не ограничивая общности, для каждого фиксированного  $t_0 \in (0, t^*)$  поверхность  $\partial \hat{\Omega}(\tau, \varphi^{(0)}(z(t_0, v))) \in \Phi_{+,k}(t^*)$ ,  $k \in \{+, -\}$  является поверхностью без контакта для системы (10).

Так как система (5) принадлежит классу  $K_{+,k}(t, v)$ ,  $k \in \{+, -\}$ , то всякая интегральная кривая системы (10), проходящая через точку множества

$$\hat{\Omega}(\tau, \varphi^{(0)}(z(t_0, v))) \cap (v = v^*)$$

если  $(t_0, v^*) \in \Phi_{+,+}(t^*)$ , остается в области  $\hat{\Omega}(\tau, \varphi^{(0)}(z(t_0, v)))$  при убывании  $v$ , а если  $(t_0, v^*) \in \Phi_{+,-}(t^*)$ , то остается в области  $\hat{\Omega}(\tau, \varphi^{(0)}(z(t_0, v)))$  при возрастании  $v$ .

Причем выполнено неравенство

$$|Y_{sj}(z(t_0, v))|^2 < \tau_j^2 \left| \psi_j^{(0)}(t_0, v) \right|^2, \quad j = \overline{1, p}, \quad s = 1, 2, \quad (21)$$

$$(t_0, v) \in \Phi_{+,k}(t^*), \quad k \in \{+, -\}.$$

3. Применим метод аналитического продолжения, предложенный Р. Г. Грабовской, развитый Г. Е. Самковой и использованный Н. В. Шарай в доказательстве пункта 3 теоремы 2.1 [6]. Предположим, что выполняются неравенства

$$\delta_j^2 < \tau_j^2, \quad j = \overline{1, p}. \quad (22)$$

В пункте 1 доказательства настоящей теоремы получено, что вдоль кривой  $L_{v_0}$ ,  $v_0 \in (v_1, v_2)$  при  $t \in (0, t^*)$  существует хотя бы одно непрерывное дифференцируемое решение системы (8), удовлетворяющее оценке (18). Обозначим множество таких решений  $\{Y(z(t, v_0))\}$ .

Любое решение  $Y(z(t, v_0))$  из множества  $\{Y(z(t, v_0))\}$  можно аналитически продолжить с  $L_{v_0}$ , где  $(t, v) \in \Phi_{+,k}(t^*)$ , при фиксированном  $v_0 \in (v_1, v_2)$  на содержащую ее область с сохранением оценки (18).

Из пункта 2 доказательства настоящей теоремы вытекает, что при выполнении неравенства (22), решение  $Y(z(t, v_0))$  при фиксированном  $v_0$  можно продолжить с кривой  $L_{v_0}$  вдоль кривых  $O_{t_0}$  на множество

$\widehat{\Omega}(\tau, \varphi^{(0)}(z(t_0, v))) \cap (v = v^*)$ , при  $t \in (0, |z_0|]$ , при этом, аналитическое продолжение обозначим  $Y(z)$ . Получим множество решений  $\{Y(z)\}$ .

В итоге получаем, что всякое решение  $Y(z)$  аналитически продолжаемо в область  $G_{1,+k}(t^*) \times \{Y : |Y_{sj}| < \delta_j |\varphi_j(z_0)|, j = \overline{1, p}, s = 1, 2\}$ , причем в данной области выполнено неравенство (15). А значит, система (1) имеет хотя бы одно аналитическое решение, удовлетворяющее оценке (15), при  $z \in D_1 \cap G_{1,+k}(t^*)$ .

Теорема доказана.

**ЗАКЛЮЧЕНИЕ.** В настоящей работе задача (1)–(2) изучена в предположении, что  $\text{rank } A(z) = p$  в области  $D_1$ , матрица  $B(z)$  имеет в точке  $z = 0$  устранимую особую точку, а вектор-функция  $f(z, Y, Y')$  является аналитической всюду в  $D_{10} \times G_{10} \times G_{20}$  и в точке  $(0, 0, 0)$  имеет изолированную особую точку. Для данного случая найдены достаточные условия существования решений системы (1) и доказано, что система (1) имеет хотя бы одно аналитическое решение в области  $D_1 \cap G_{1,+k}(t^*)$ , обладающее оценкой (15) при  $z \in D_1 \cap G_{1,+k}(t^*)$ .

1. **Грабовская Р. Г.** Об асимптотическом поведении решения системы двух нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка / Р. Г. Грабовская // Дифференциальные уравнения. – 1975. – Т. XI, № 4. – С. 639–644.
2. **Грабовская Р. Г.** Асимптотика систем дифференциальных уравнений, неразрешенных относительно производных / Р. Г. Грабовская, Й. Диблик // Деп. в ВИНТИ, № 1786. – 78 ДЕП. – С. 49.
3. **Самкова Г. Е.** Существование и асимптотическое поведение аналитических решений некоторых сингулярных дифференциальных систем, неразрешенных относительно производных / Г. Е. Самкова // Диф. уравнения. – 1991. – Т. 27, № 11. – С. 2012–2013.
4. **Самкова Г. Е.** Об исследовании некоторой полуявной системы дифференциальных уравнений в случае переменного пучка матриц / Г. Е. Самкова, Н. В. Шарай // Нелінійні коливання. – 2002. – Т. 5, № 2. – С. 224–236.
5. **Самойленко А. М.** Об асимптотическом интегрировании одной системы линейных дифференциальных уравнений с малым параметром при части производных / А. М. Самойленко // Укр. мат. журнал. – 2002. – Т. 54, № 11. – С. 1505–1517.
6. **Шарай Н. В.** Асимптотика розв'язків деяких напів'явних систем диференціальних рівнянь / Н. В. Шарай, Г. Є. Самкова // Науковий вісник Чернівецького університету. Математика. – 2006. – Вип. 314–315. – С. 181–188.
7. **Шкиль Н. И.** Асимптотическое интегрирование систем дифференциальных уравнений с вырождениями / Н. И. Шкиль, И. И. Старун, В. П. Яковец. – Киев: Вища школа, 1991. – 207 с.
8. **Diblic J.** On the an asymptotic behavior of solutions of a certain system of quasilinear differential equations not solved wich respect to derivatives / J. Diblic // Rici Math. Univ. Parma. – 1987. – № 13. – P. 413–419.
9. **Jwano M.** On an n-parameter family of solutions of a nonlinear n-systems with an irregular type singularity / M. Jwano // Ann. Mathpuraed Appl. – 1985. – № 140. – С. 57–145.

10. **Song Guk** Boundary condition of a system of linear ordinary differential equations in a closed angle domain of complex plane / O Song Guk, Pak Ponk, Chol Permissible // Kwahagwonthongbo Bull. Acad. Sci. DPR Korea. – 2001. – № 3. – С. 2–4.