А. А. Зыков (Одесса)

МОЖНО ЛИ ВЫНОСИТЬ dx ЗА ЗНАК ИНТЕГРАЛА ?

А.П.Чехова по поводу постановки его пьесы “Вишневый сад” спросили, можно ли играть Раневскую в ярком платье, на что Антон Павлович ответил:

- Можно. Но не нужно.

Точно такими словами, но с добавлением логико-математического обоснования (и лирико-исторического отступления), мы отвечаем на вопрос в заголовке нашей заметки.

Помню, более 70 лет назад, когда только начиналась моя учеба в Горьковском университете, на лекции об интегрировании по частям я вдруг усомнился в том, что в процессе преобразований не может возникнуть выражение типа ∫ cos *x* без традиционного множителя dx под интегральном, и из пространного ответа на мой прагматический вопрос, что же делать в таком случае, помню теперь только фразу: ’’смотря что понимать под таким выражением”. Я не мог ничего возразить и лишь затаил в душе долю непонимания.

Спустя примерно 12 лет один мой знакомый, услышав из уст известного академика при выводе второго дифференциала, что производная и дифференциал от dx равны нулю, так как dx не зависит от *x*, спросил не без ехидства: а можно ли на этом основании выносить dx за знак интеграла? Лектор пообещал ответить на следующем занятии, но выполнил ли он свое обещание (и как) - этого я не знаю и только на старости лет сам могу ответить по-чеховски.

Вместо заумных рассуждений о том, что следует понимать под выражением ∫ cos *x*, достаточно воспользоваться уже имеющимися определениями. Подынтегральная функция может, кроме переменной интегрирования (x), содержать параметры (в частности dx), которые в процессе дифференцирования и интегрирования ведут себя как постоянные*. Первообразная - это функция, производная от которой равна данной функции, а интеграл (неопределенный) - функция, дифференциал которой равен данной функции (подынтегральному выражению). В нашем примере, согласно второму определению,

$$\int \cos x = \frac{\sin x}{dx} \quad (\text{поскольку } d\left(\frac{\sin x}{dx}\right) = \frac{1}{dx}\cdot d(\sin x) = \frac{\cos x \cdot dx}{dx} = \cos x),$$

и выносить dx за знак интеграла можно. Но нужно ли?

Пусть кому-то взбрело в голову вычислить ∫ cos t *x*. Но для этого надо знать, каким из символов *x, t* обозначена переменная интегрирования, а каким - параметр, и соответственно написать

$$\text{либо } \int \cos tx = \frac{\sin tx}{t\cdot dx}, \quad \text{либо } \int \cos tx = \frac{\sin tx}{x\cdot dt}.$$

Наличие же дифференциала в подынтегральном выражении устраняет эту двусмысленность:

$$\int \cos tx\, dx = \frac{\sin tx}{t}, \quad \int \cos tx\, dt = \frac{\sin tx}{x}.$$

Но чтобы развеять впечатление, будто всё здесь так уж просто, предложим читателю следующий вопрос.

Как известно, первообразная для функции, заданной на саязном множестве, определена с точностью до произвольного постоянного слагаемого. Как же ’’правильнее” записать ’’полный ответ”:

$$\int \cos x = \frac{\sin x + C}{dx} \quad \text{или} \quad \int \cos x = \frac{\sin x}{dx} + C\ ?$$

В брошюре

А. А. Зыков. Беседы о преподавании математического анализа. Одесса, Астропринт, 1997, 2003

эти вопросы не решаются (и даже не ставятся); но у того, кто ее внимательно прочитает, могут возникнуть кое-какие соображения.

* Для порядка напомним, что это верно лишь в случаях, когда *x* является линейной функцией от переменной интегрирования, в частности, само играет эту роль.

Alexander A. Zykov (Odessa)

A PROBLEM of DISCRETE ANALOG for SCHRÖDINGER EQUATION

The table of chemical elements [1]

CLASSIFICATION PERIODIQUE DES ELEMENTS
La loi de Mendeleiev sous le jour des régles de Kletchkovski *

(t) q n (l)

0 0 0 0 |0 Nr|

1 1 1 s(0) |1 H| |2 He|

2 2 2 s |3 Li|4 Be|

3 3 2 p(1) |5 B|6 C|7 N|8 O|9 F|10 Ne|

4 3 3 s |11 Na|12 Mg|

5 4 3 p |13 Al|14 Si|15 P|16 S|17 Cl|18 Ar|

6 4 4 s |19 K|20 Ca|

7 5 3 d(2) |21 Sc|22 Ti|23 V|24 Cr|25 Mn|26 Fe|27 Co|28 Ni|29 Cu|30 Zn|

8 5 4 p |31 Ga|32 Ge|33 As|34 Se|35 Br|36 Kr|

9 5 5 s |37 Rb|38 Sr|

10 6 4 d |39 Y|40 Zr|41 Nb|42 Mo|43 Tc|44 Ru|45 Rh|46 Pd|47 Ag|48 Cd|

11 6 5 p |49 In|50 Sn|51 Sb|52 Te|53 I|54 Xe|

12 6 6 s |55 Ba|56 Ce|

13 7 4 f(3) |57 La|58 Ce|59 Pr|60 Nd|61 Pm|62 Sm|63 Eu|64 Gd|65 Tb|66 Dy|67 Ho|68 Er|70 Yb|

14 7 5 d |71 Lu|72 Hf|73 Ta|74 W|75 Re|76 Os|77 Ir|78 Pt|79 Au|89 Hg

15 7 6 p |81 Tl|82 Pb|83 Bi|84 Po|85 At|86 Rn|

16 7 7 s |87 Fr|88 Ra|

17 8 5 f |89 Ac|90 Th|91 Pa|92 U|93 Np|94 Pu|95 Am|96 Cm|97 Bk|98 Cf|99 Es|100 Fm|101 Md|102 No|

18 8 6 d |103 Lr|104 Ku|105 Nn|106|107|108|109|110|111|112

19 8 7 p |113|114|115|116|117|118|119 (Uuo)|

20 8 8 s |119|120|

Paris 07.04.96

* N.Glinka. Chemie générale I. 1981.

differs little from one offered by Longue-Higgins [2], which role is in [3] obvious underestimated. But in our writing form, where

t (row number) -power level of element,
n -principal quantum number,
l -azimuth quantum number,
$q = n + l$ - Klechkovsky number,

the arithmetical relations between these and further numerical characteristics of atome are revealed immediate. For their concrete expression we need some of auxiliary number-theoretic functions:

$$\lceil x \rceil = \min\{z / z \ge x\}, \quad \lfloor x \rfloor = \mathrm{Max}\{z / z \le x\} \quad (x \in \mathbb{R},\ z \in \mathbb{Z}),$$

$$u = u(t) = \lceil \sqrt{t} \rceil, \quad v = v(t) = \lceil \sqrt{t} - ½ \rceil,$$

and then

$$q = q(t) = \mathrm{Max}\{u + v - 1,\ 0\};$$
$$l = l(t) = uv - t;$$
$$n = n(t) = t - (u-1)(v-1) = q - 1;$$
$$t = t(q,\ l) = \lfloor [(q+1)/2]^2 \rfloor - l.$$

If further Z – atomic number of element, then

$$Z(t) = 4\sum_{i=1}^{t-1} u(t)\,v(t) - 2(t-1)2$$ – number Z of last element in $(t-1)$-th row;

$$Z(t+1) - Z(t) = 4uv - 4t + 2 = 4l + 2$$ – length of i-th row;

$$Z(t,\ r) = Z(t) + r$$ – number Z of element in i-ih row on r-th place;

$$t(Z) = \mathrm{Max}\{t / Z(t) < Z\} = \min\{t / Z(t) \ge Z\} - 1$$ – number of row containing element Z;

$$r(Z) = Z - Z(t(Z) - 1)$$ – place of element Z in its own row;

$$m = \lfloor [r(Z) - 1]/2 \rfloor$$ – magnetic quantum number.

The problem consists of replacement wavy Ψ-function by some one F wits integral arguments and values, and of discovery for F such an equation in finite differences (wits step 1), in order that its solutions, by proper boundary conditions, would generate the above-mentioned relations.

References

1. Keeping place - the Library of Chem. fac. Univ. Jussieu, Paris.
2. *Longuet-Higgins H.J.* //Chem. Educ., 1957, v.34, p.30.
3. *Day M Cl., Selbin J.* Theoretical Inorganic Chemistry, RBC, 1976.

Alexander A. Zykov <zykov@okean. Odessa. ua> 4.05.2011.