М А Т Е М А Т И К А

УДК 517.5

А. Н. Адамов
Одесский национальный университет имени И. И. Мечникова

НЕРАВЕНСТВО ТИПА ТУРАНА ДЛЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ПОЛИНОМОВ В L_0

Благодарность д-ру физ.-мат. наук, проф. Стороженко Элеоноре Александровне за интересную задачу и помощь в обсуждении результатов

Адамов А. М. Нерівність типу Турана для алгебраїчних полиномів в L_0. В нерівності типу Т. Турана в просторі L_0, отриманному Е. О. Стороженко [2008], уточнюються та доповнюються оцінки коефіцієнта — міри одного полінома. Оцінки є асимптотично точними та отримані новим методом.
Ключові слова: нерівність типу Турана, композиція поліномів, міра поліномів, асимптотична оцінка, квазінорма L_0.

Адамов А. Н. Неравенство типа Турана для алгебраических полиномов в L_0. В неравенстве типа Т. Турана в пространстве L_0, полученном Э. А. Стороженко [2008], уточняются и дополняются оценки коэффициента — меры одного полинома. Они являются асимптотически точными и получены новым методом.
Ключевые слова: неравенство типа Турана, композиция полиномов, мера полиномов, асимптотическая оценка, квазинорма L_0 .

Adamov A. N. Turan type inequality for algebraic polynomials in L_0. E. A. Storoshenko proved Turan's type inequality in L_0 space in 2008. Here more precise estimates for the main coefficient in that inequality are given. They are asimptotically precise, and obtained by new method.
Key words: Turan type inequality, composition of polynomials, measure of polynomials, asimptotic .

Введение.

Пусть $\mathbb{P}_n$ множество алгебраических многочленов

$$P_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k \tag{1}$$

степени n с коэффициентами a_k из поля $\mathbb{C}$ комплексных чисел. Квазинорму полинома P_n в L_0

$$||f||_0 = \exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln\left|f\left(\mathrm{e}^{it}\right)\right|\,dt\right) \tag{2}$$

будем так же называть (следуя Малеру) мерой этого полинома.

Неравенства, дающие оценки снизу нормы производной полинома через норму самого полинома, принято называть неравенствами типа Турана. В 1939 году

Туран [1] доказал неравенство указанного вида для комплексных полиномов в равномерной метрике на единичной окружности.

Впоследствии ряд неравенств с точными константами для алгебраических и тригонометрических полиномов соответственно на промежутках $[-1,1]$ и $[0,2\pi]$ установили В. Ф. Бабенко и С. А. Пичугов [2, 3] как в пространстве $\mathbb{C}$, так и в L_p, $0<p<+\infty$. В случае комплексных полиномов имеются оценки в более поздних работах М. А. Малика [4], Е. Б. Саффа, Т. Шейл-Смойла [5] и других. Более подробные сведения можно найти в монографии [6].

Результат, когда $p=0$, принадлежит Э. А. Стороженко [7] для первой производной полинома, в более поздней статье этого автора [8] рассмотрены производные любого порядка $2\le m\le n-1$.

Сравнивать полученные оценки в L_p, $0<p<+\infty$, с L_0 не представляется возможным, так как в L_p, $p\neq 0$ они доказаны в зависимости от расположения нулей полинома (на промежутке $[-1,1]$ в алгебраическом случае, на действительной оси в тригонометрическом, или в единичном круге в комплексном), а в квазинорме L_0 предполагается равенство нулю первых m коэффициентов у полинома. Последнее условие для меры полинома более целесообразно. В самом деле, если у $P_n\in\mathbb{P}_n$ все нули $|z_k|\le 1$, то сразу получается тривиальное равенство $\left\|P_n^{(m)}\right\|_0=\frac{n!}{(n-m)!}\cdot\|P_n\|_0$.

Теорема 1 (Э. А. Стороженко). [7, 8] *Пусть у полинома первые m коэффициентов, начиная со свободного члена, равны нулю. Тогда*

$$\|P_n\|_0\le\prod_{l=0}^{m-1}(n-l)^{-1}\left\|\sum_{k=m}^{n}C_n^kz^k\right\|_0\cdot(0.3)\left\|P_n^{(m)}\right\|_0. \tag{3}$$

Знак равенства в правой части достигается на полиномах $c(z+e^{i\alpha})^n$ без первых m коэффициентов. Для множителя коэффициента справедлива оценка

$$\left\|\sum_{k=m}^{n}C_n^kz^k\right\|_0\le\begin{cases}\prod\limits_{n/6<k<5n/6}2\sin\frac{\pi k}{6}, & m=1\\ K_m\cdot\left\|(1+z)^{n-m+1}-1\right\|_0\cdot\left(C_{n-1}^{m-1}+1\right)^{\frac{1}{3}}, & 2\le m<\frac{n}{2}\\ C_n^m, & m\ge\left[\frac{n}{2}\right]+1\end{cases}. \tag{4}$$

Существенную роль в оценке теоремы 1 играет значение меры полинома $\sum_{k=m}^{n}C_n^kz^k$, зависящего от двух параметров m и n.

В данной статье другим способом по сравнению с работой [8] определяются асимптотически точные оценки величины $\left\|\sum_{k=m}^{n}C_n^kz^k\right\|_0$ сверху и снизу, и при $n\to+\infty$ отношение между ними стремится к 1.

Теорема (Основной результат). *Пусть полином $P_n\in\mathbb{P}_n$ такой, что $P_n^{(k)}(0)=0$, $0\le k\le m-1$, где $1\le m\le n$. Тогда*

$$\left\|P_n^{(m)}\right\|_0\ge\frac{n!}{(n-m)!}\cdot\frac{1}{\left\|\sum\limits_{k=m}^{n}C_n^kz^k\right\|_0}\cdot\|P_n\|_0. \tag{5}$$

Равенство в (5) достигается, например, на $P_n = \sum\limits_{k=m}^{n} C_n^k z^k$]. При $1 \le m < \frac{n}{2}$

$$\left\| \sum_{k=m}^{n} C_n^k z^k \right\|_0 = e^{n\gamma} \cdot \left(C_n^{m-1}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot \eta_{n,m}, \qquad (6)$$
$$\text{где} \quad \gamma = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{\frac{2\pi}{3}} \ln\left(2\cos\frac{t}{2}\right) dt \approx 0.32307$$

и при фиксированном m $\eta_{n,m} \to 1$ когда $n \to \infty$. Оценки $\eta_{n,m}$ достаточно громоздки и приводятся в тексте доказательства теоремы в разделе 2 статьи.

Основные результаты.

1. Доказательство теоремы.

Приведем несколько фактов, которыми будем в дальнейшем пользоваться.

Любому многочлену P_n из $\mathbb{P}_n$ и многочлену

$$\Lambda_n(z) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \lambda_k z^k$$

сопоставим многочлен

$$\Lambda_n \otimes P_n(z) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k a_k z^k, \qquad (7)$$

который будет композицией Сеге многочленов P_n и Λ_n (см. [9], т. II отд. V).

Теорема 2 (В. В. Арестов). [10] *Для любого $0 \le p \le \infty$ и любых двух многочленов Λ_n, $P_n \in \mathbb{P}_n$ имеет место неравенство*

$$\|\Lambda_n \otimes P_n\|_p \le \|\Lambda_n\|_0 \cdot \|P_n\|_p \,. \qquad (8)$$

В нашей работе будем использовать неравенство (8) в частном случае $p = 0$.

Сначала покажем (5). Применяя метод В. В. Арестова, возьмем $P_n \in \mathbb{P}_n$ такой, что $P_n^{(k)}(0) = a_k = 0$, $0 \le k \le m-1$, где $1 \le m \le n$. Очевидно,

$$P_n^{(m)}(z) = \sum_{k=m}^{n} a_k \frac{k!}{m!} z^{k-m}.$$

Полиномы $P_n(z)$ и $z^m P_n^{(m)}(z)$ связаны друг с другом следующей композицией:

$$P_n = B_{n,m} \otimes \left(z^m P_n^{(m)}(z)\right). \qquad (9)$$

Применив теорему 2, получаем (5). Легко проверить, что на $P_n = B_{n,m}$ в (5) достигается равенство.

Начнем оценку меры $\left\| \sum\limits_{k=m}^{n} C_n^k z^k \right\|_0$. При $\frac{1}{2} \le \frac{m}{n} \le 1$ (4) дает точное значение $\left\| \sum\limits_{k=m}^{n} C_n^k z^k \right\|_0 = C_n^m$. Будем в дальнейшем считать, что $m \le \frac{n}{2}$. Воспользуемся определением меры полинома (2), беря в качестве промежутка интегрирования полуокружность, так как все коэффициенты действительны:

$$\left\| \sum_{k=m}^{n} C_n^k z^k \right\|_0 = \exp\left(\frac{1}{\pi} \int\limits_0^{\pi} \ln \left| \sum_{k=m}^{n} C_n^k e^{ikt} \right| dt \right) = \exp\left(\frac{1}{\pi} I_{n,m} \right). \tag{10}$$

Для удобства оценки $I_{n,m}$ обозначим

$$\sum_{k=m}^{n} C_n^k z^k = (1+z)^n - \sum_{k=0}^{m-1} C_n^k z^k = (1+z)^n - D_{n,m}(z). \tag{11}$$

Таким образом, подынтегральная функция разбита на разность двух, чье поведение на $[0, \pi]$ легко исследовать. Действительно, $\left|1+e^{it}\right|^n$ монотонно убывает на $t \in [0, \pi]$, а $D_{n,m}\left(e^{it}\right)$ ведет себя как старший коэффициент и примерно равно C_n^{m-1} , поэтому выберем точки t_1, t_2, t_3 так, чтобы выполнялись равенства

$$\left|1+e^{it_k}\right|^n = n^{2-k} C_n^{m-1}, \qquad k = 1, 2, 3. \tag{12}$$

Чтобы выразить t_k, явно обозначим $u(t) = \ln\left(2\cos\frac{t}{2}\right) = \ln\left|1+e^{it}\right|$ и $\phi(\alpha) = 2\arccos\left(\frac{1}{2}e^{\alpha}\right)$ и получим

$$t_k = \phi(\alpha_k), \quad \text{где} \quad \alpha_k = \frac{\ln\left(n^{2-k} C_n^{m-1}\right)}{n} = u(t_k) \quad \text{при} \quad k = 1, 2, 3. \tag{13}$$

Легко видеть, что при $n \to +\infty$ все α_k стремятся к нулю, а t_k к $\frac{2\pi}{3}$.

Из (13) следует

$$\begin{aligned} nC_n^{m-1} \le \left|1+\mathrm{e}^{it}\right|^n &\le 2^n \quad \text{при} \quad t \in [0, t_1], \\ C_n^{m-1} \le \left|1+\mathrm{e}^{it}\right|^n &\le nC_n^{m-1} \quad \text{при} \quad t \in [t_1, t_2], \\ \frac{C_n^{m-1}}{n} \le \left|1+\mathrm{e}^{it}\right|^n &\le C_n^{m-1} \quad \text{при} \quad t \in [t_2, t_3], \\ 0 \le \left|1+\mathrm{e}^{it}\right|^n &\le \frac{C_n^{m-1}}{n} \quad \text{при} \quad t \in [t_3, \pi]. \end{aligned} \tag{14}$$

На каждом из промежутков модуль разности функций уже можно оценивать непосредственно. Разобьем интеграл $I_{n,m}$ на 2 части так, чтобы на каждой части одна из функций была больше другой, и выделим главную часть, пользуясь мультипликативностью логарифма:

$$I_{n,m} = \int_0^{t_2} \ln\left|\left(1+\mathrm{e}^{it}\right)^n - D_{n,m}\left(\mathrm{e}^{it}\right)\right| dt +$$

$$+ \int_{t_2}^{\pi} \ln\left|\left(1+\mathrm{e}^{it}\right)^n - D_{n,m}\left(\mathrm{e}^{it}\right)\right| dt.$$

$$I_{n,m} = \int_0^{t_2} \ln\left|\left|1+\mathrm{e}^{it}\right|^n \cdot \left(1 - \left(1+\mathrm{e}^{it}\right)^{-n} D_{n,m}\left(\mathrm{e}^{it}\right)\right)\right| dt +$$

$$+\int_{t_2}^{\pi}\ln\left|C_n^{m-1}\cdot\left(\frac{D_{n,m}\left(\mathrm{e}^{it}\right)}{C_n^{m-1}}-\frac{\left(1+\mathrm{e}^{it}\right)^n}{C_n^{m-1}}\right)\right|dt=$$

$$=n\int_0^{t_2}\ln\left(2\cos\frac{t}{2}\right)dt+\int_0^{t_2}\ln\left|1-\left(1+\mathrm{e}^{it}\right)^{-n}D_{n,m}\left(\mathrm{e}^{it}\right)\right|dt+$$

$$+\int_{t_2}^{\pi}\ln C_n^{m-1}\,dt+\int_{t_2}^{\pi}\ln\left|\frac{D_{n,m}\left(\mathrm{e}^{it}\right)}{C_n^{m-1}}-\frac{\left(1+\mathrm{e}^{it}\right)^n}{C_n^{m-1}}\right|dt.$$

Так как t_2 близко к $\frac{2\pi}{3}$, первый интеграл представим в виде разности двух интегралов, один из них даст константу γ (6), а другой будет мал за счет длины промежутка интегрирования. Во втором и четвертом интеграле модуль подынтегральных функций заметно меняется на промежутках интегрирования, потому разобьем каждый из них на 2 части точками t_1 и t_3 так, чтобы в одной части был мал промежуток, а в другой подынтегральная функция.

Итого, интеграл $I_{n,m}$ разбит на 7 интегралов, первый из них равен $n\pi\gamma=$ $=n\int\limits_0^{t_2}\ln\left(2\cos\frac{t}{2}\right)dt$, четвертый — $(\pi-t_2)\ln\left(C_n^{m-1}\right)$, а остальные мы обозначим следующим образом:

$$E_1=\int_0^{t_1}\ln\left|1-\left(1+\mathrm{e}^{it}\right)^{-n}D_{n,m}\left(\mathrm{e}^{it}\right)\right|dt,$$

$$E_2=\int_{t_1}^{t_2}\ln\left|1-\left(1+\mathrm{e}^{it}\right)^{-n}D_{n,m}\left(\mathrm{e}^{it}\right)\right|dt,$$

$$E_3=\int_{t_2}^{2\pi/3}\ln\left(2\cos\frac{t}{2}\right)dt=\int_{t_2}^{2\pi/3}u(t)\,dt,$$

$$E_4=\int_{t_3}\pi\ln\left|\frac{D_{n,m}\left(\mathrm{e}^{it}\right)}{C_n^{m-1}}-\frac{\left(1+\mathrm{e}^{it}\right)^n}{C_n^{m-1}}\right|dt,$$

$$E_5=\int_{t_2}^{t_3}\ln\left|\frac{D_{n,m}\left(\mathrm{e}^{it}\right)}{C_n^{m-1}}-\frac{\left(1+\mathrm{e}^{it}\right)^n}{C_n^{m-1}}\right|dt.$$

В результате

$$I_{n,m}=n\gamma+(E_1+E_4)+(E_2+E_5)+\left((\pi-t_2)\ln\left(C_n^{m-1}\right)-nE_3\right). \tag{15}$$

Каждую из величин, входящих в (15), уже можно оценивать непосредственно. Чтобы начать оценку, рассмотрим, насколько $D_{n,m}\left(e^{it}\right)$ отличается от постоянной C_n^{m-1} на $t\in[0,\pi]$.

Действительно, так как для $0\le k\le m-2$ справедливо неравенство $\frac{C_n^{k-1}}{C_n^k}=$ $=\frac{k}{n-k+1}\le\frac{m-2}{n-m+3}$, и, следовательно, для таких k верно $\frac{C_n^k}{C_n^{m-2}}\le\left(\frac{m-2}{n-m+3}\right)^{m-2-k}$, имеем

$$\begin{aligned}\frac{\left|D_{n,m}\left(\mathrm{e}^{it}\right)\right|}{C_n^{m-1}} &\leq 1+\frac{m-1}{n-m+2}\sum_{k=0}^{m-2}\frac{C_n^k}{C_n^{m-2}} \leq \\ &\leq 1+\frac{m-1}{n-m+2}\sum_{k=0}^{m-2}\left(\frac{m-2}{n-m+3}\right)^k \leq \\ &\leq 1+\frac{m-1}{n-m+2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{m-2}{n-m+3}\right)^k = \\ &= 1+\frac{m-1}{n-m+2}\cdot\frac{n-m+3}{n-2m+5} \leq 1+\frac{m}{n-2m+5}.\end{aligned} \tag{16}$$

Снизу аналогично:

$$\frac{\left|D_{n,m}\left(\mathrm{e}^{it}\right)\right|}{C_n^{m-1}} \geq 1-\frac{m-1}{n-m+2}\sum_{k=0}^{m-2}\frac{C_n^k}{C_n m-2} \geq 1-\frac{m}{n-2m+5}. \tag{17}$$

Из (14), (16) и (17) вытекает

$$\left|1-\left(1+\mathrm{e}^{it}\right)^{-n}Dn,m\left(\mathrm{e}^{it}\right)\right| \leq 1+\frac{n-m+5}{n(n-2m+5)} \quad \text{при} \quad t\in[0,t_1],$$

$$\left|1+\left(1+\mathrm{e}^{it}\right)^{-n}D_{n,m}\left(\mathrm{e}^{it}\right)\right| \leq 2+\frac{m}{n-2m+5} \quad \text{при} \quad t\in[t_1,t_2],$$

$$\left|\frac{D_{n,m}\left(\mathrm{e}^{it}\right)}{C_n^{m-1}}-\frac{\left(1+\mathrm{e}^{it}\right)^n}{C_n^{m-1}}\right| \leq 2+\frac{m}{n-2m+5} \quad \text{при} \quad t\in[t_2,t_3].$$

$$\left|\frac{D_{n,m}\left(\mathrm{e}^{it}\right)}{C_n^{m-1}}-\frac{\left(1+\mathrm{e}^{it}\right)^n}{C_n^{m-1}}\right| \leq 1+\frac{m}{n-2m+5}+\frac{1}{n} \quad \text{при} \quad t\in[t_3,\pi].$$

В итоге при $2\leq m<\frac{n}{2}$

$$\begin{aligned}E_1+E_4 &\leq \int_0^{t_1}\ln\left(1+\frac{n-m+5}{n(n-2m+5)}\right)dt+ \\ &+\int_{t_3}^{\pi}\ln\left(1+\left(\frac{m}{n-2m+5}+\frac{1}{n}\right)\right)dt \leq \\ &\leq t_1\frac{n-m+5}{n(n-2m+5)}+(\pi-t_3)\left(\frac{m}{n-2m+5}+\frac{1}{n}\right) \leq \\ &\leq \frac{\pi}{n}+(\pi-t_3)\frac{m}{n-2m+5}.\end{aligned}$$

Снизу при $2\leq m\leq\frac{n}{3}$ имеем

$$E_1+E_4 \geq \int_0^{t_1}\ln\left(1-\frac{n-m+5}{n(n-2m+5)}\right)dt-$$

$$-\int_{t_3}^{\pi}\ln\left(1-\left(\frac{m}{n-2m+5}+\frac{1}{n}\right)\right)dt\geq$$

$$\geq t_1\ln\left(1-\frac{2}{n}\right)+(\pi-t_3)\ln\left(1-\frac{m+1}{n-2m+4}\right)\geq$$

$$\geq -t_1\frac{2}{n-2}-(\pi-t_3)\frac{m+1}{n-3m+3}.$$

При $m=1$ аналогично получаем $-\frac{\pi}{n-1}\leq E_1+E_4\leq\frac{\pi}{n}$. Таким же образом рассмотрим вторую сумму интегралов. При $2\leq m<\frac{n}{2}$

$$E_2+E_5\leq(t_3-t_1)\ln\left(2+\frac{m}{n-2m+5}\right)$$

Снизу оценим линейной функцией и получим выражение вида

$$\int\limits_0^{x_0}\ln\left(\frac{x}{x_0}\right)dx=-x_0,$$

и в результате $E_2+E_5\geq-(t_3-t_1)$.

При $m=1$ аналогично имеем $-(t_3-t_1)\leq E_2+E_5\leq(t_3-t_1)\ln 2$.

Для оценки E_3 воспользуемся формулой трапеций с оценкой погрешности для дважды дифференцируемых функций

$$\int_a^b f(x)\,dx=(b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{f''(\xi)}{12}(b-a)^3.$$

Так как $u\left(\frac{2\pi}{3}\right)=0$, $u(t_2)=\frac{\ln\left(C_n^{m-1}\right)}{n}$ и $u''(t)=-\frac{1}{4\cos^2\left(\frac{t}{2}\right)}$ монотонно убывает, причем $u''\left(\frac{2\pi}{3}\right)=-1$, а $u''(t_2)=-\frac{1}{\sqrt[n]{\left(C_n^{m-1}\right)^2}}=-\mathrm{e}^{-\alpha_2}\leq 0$, получаем:

$$0\leq\frac{\mathrm{e}^{-\alpha_2}}{12}\left(\frac{2\pi}{3}-t_2\right)^3\leq E_3-\left(\frac{2\pi}{3}-t_2\right)\frac{\ln\left(C_n^{m-1}\right)}{2n}\leq\frac{1}{12}\left(\frac{2\pi}{3}-t_2\right)^3.$$

$$(\pi-t_2)\ln\left(C_n^{m-1}\right)-nE_3\leq\frac{\pi}{3}\ln\left(C_n^{m-1}\right)+$$

$$+\left(\frac{2\pi}{3}-t_2\right)\frac{\ln\left(C_n^{m-1}\right)}{2}+\frac{n}{12}\left(\frac{2\pi}{3}-t_2\right)^3$$

$$(\pi-t_2)\ln\left(C_n^{m-1}\right)-nE_3\geq\frac{\pi}{3}\ln\left(C_n^{m-1}\right)+\left(\frac{2\pi}{3}-t_2\right)\frac{\ln\left(C_n^{m-1}\right)}{2}.$$

Легко видеть, что при $m=1$ $(\pi-t_2)\ln\left(C_n^{m-1}\right)-nE_3=0$. Вернемся к (15). Обозначим $\mu_{n,m}=I_{n,m}-\frac{\pi}{3}\ln\left(C_n^{m-1}\right)-n\pi\gamma$. При $m=1$ имеем

$$-\frac{\pi}{n-1}-(t_3-t_1)\leq\mu_{n,1}\leq\frac{\pi}{n}+(t_3-t_1)\ln 2 \tag{18}$$

При $2 \le m \le \frac{n}{3}$

$$\mu_{n,m} \le \frac{\pi}{n} + \left(\frac{2\pi}{3} - t_2\right)\frac{\ln\left(C_n^{m-1}\right)}{2} + \frac{n}{12}\left(\frac{2\pi}{3} - t_2\right)^3 + \\ + (\pi - t_3)\frac{m}{n-2m+5} + (t_3 - t_1)\ln\left(2 + \frac{m}{n-2m+5}\right) \qquad (19)$$

$$\mu_{n,m} \ge -t_1\frac{2}{n-2} - (\pi - t_3)\frac{m+1}{n-3m+3} - (t_3 - t_1) + \frac{\ln^2\left(C_n^{m-1}\right)}{n\sqrt{3}}.$$

Из (13) следует, что при фиксированном m $t_k \to \frac{2\pi}{3}$ при $n \to \infty$, $k = 1, 2, 3$. Отсюда следует, что все слагаемые в обеих оценках (19) также будут стремиться к нулю при тех же условиях, и, следовательно, $\mu_{n,m} \to 0$. Обозначая $\eta_{n,m} = \exp\left(\frac{\mu_{n,m}}{\pi}\right)$, получаем (6). Теорема доказана.

2. Оценки погрешности.

Мы показали, что $\eta_{n,m}$ для любого фиксированного m стремится к единице. Оценим порядок отклонения. Сначала рассмотрим случай $m = 1$. Тогда $(t_3 - t_1) \le \frac{4\ln n}{n\sqrt{3}}$, используя оценку (12) и (17) получаем

$$-\frac{\pi}{n-1} - \frac{4\ln n}{n\sqrt{3}} \le \mu_{n,1} \le \frac{\pi}{n} + \frac{4\ln 2\ln n}{n\sqrt{3}} \qquad (20)$$

$$\exp\left(-\frac{1}{n-1} - \frac{4\ln n}{n\pi\sqrt{3}}\right) \le \eta_{n,1} \le \exp\left(\frac{1}{n} + \frac{4\ln 2\ln n}{n\pi\sqrt{3}}\right). \qquad (21)$$

Неравенство (20) улучшает результат Стороженко [7], показывая степень отклонения величины A_n от $e^{n\gamma}$. При $m > 1$ у нас есть два варианта. При достаточно больших n имеем, оценивая величины $(t_3 - t_1)$ и $\left(\frac{2\pi}{3} - t_2\right)$ формулой Лагранжа

$$\mu_{n,m} \le \frac{\ln^2\left(C_n^{m-1}\right)}{n\sqrt{3}} + \frac{\pi}{n} + (\pi - t_3)\frac{m}{n-2m+5} + \\ + \frac{\ln n}{n}\frac{4}{\sqrt{4e^{-2\alpha_2} - 1}}\ln\left(2 + \frac{m}{n-2m+5}\right) + \\ + \frac{\ln^2\left(C_n^{m-1}\right)}{2n}\left(\frac{1}{\sqrt{4e^{-2\alpha_2} - 1}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \\ + \frac{\ln^3\left(C_n^{m-1}\right)}{12n^2}\left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4e^{-2\alpha_2} - 1}}\right)^3$$

$$\mu_{n,m} \ge \frac{\ln^2\left(C_n^{m-1}\right)}{n\sqrt{3}} - t_1\frac{2}{n-2} - (\pi - t_3)\frac{m+1}{n-3m+3} - \frac{\ln n}{n}\frac{4}{\sqrt{4e^{-2\alpha_2} - 1}}. \qquad (22)$$

Далее, беря $n \ge n(m)$, получаем неравенства типа (20) для любого m. Например, при $m = 2$, $n \ge 20$ получаем

$$-\frac{4.59\ln n + 7.54}{n} \le \mu_{n,2} - \frac{\ln^2 n}{n\sqrt{3}} \le \frac{4.02\ln n + 5.93}{n}.$$

При $m = 3$, $n \ge 20$ получаем

$$-\frac{4.91\ln n + 8.99}{n} \le \mu_{n,3} - \frac{\ln^2\left(\frac{n(n-1)}{2}\right)}{n\sqrt{3}} \le \frac{6.63\ln n + 6.17}{n}.$$

И в общем случае

$$\frac{a_m \ln n + b_m}{n} \le \mu_{n,m} - \frac{\ln^2\left(C_n^{m-1}\right)}{n\sqrt{3}} \le \frac{c_m \ln n + d_m}{n}, \tag{23}$$

где $n \ge n(m)$, $a_m, c_m > 0$. Коэффициенты можно явно выразить через m и $n(m)$ следующим образом:

$$a_m = 0.3283 \cdot m + 4.2572$$

$$b_m = \frac{8m+20}{15}\pi - 0.3283 \cdot \frac{\ln\left((m-1)!\right)}{n}$$

$$c_m = 0.2736 \cdot m + 3.2916 + 1.015 \cdot m \cdot \frac{\ln^2\left(C_{n(m)}^2\right)}{n\left(m\right)}$$

$$d_m = \frac{4m+9}{9}\pi - 0.2736 \cdot \frac{\ln\left((m-1)!\right)}{n} -$$

$$-1.015 \cdot \frac{\ln\left((m-1)!\right)}{n} \cdot \frac{\ln^2\left(C_{n(m)}^2\right)}{n\left(m\right)}. \tag{24}$$

При малых n по сравнению с m точки t_k будут уже сильно отличаться друг от друга, и линеаризация дает слишком большую погрешность. В этом случае нужный результат можно получить, исходя из неравенств (19).

Заключение. В данной статье основное внимание было уделено получению новой оценки константы в неравенстве для полиномов. Главная цель — окончательность оценки в смысле точности — была достигнута в асимптотическом случае. Метод, примененный в данной работе, можно использовать в других подобных задачах, когда надо, константа в неравенстве является мерой некоторого полинома.

1. **Turan P.** Uber die Ableitung von polynomen [text] / P. Turan //Composito Math. – 1939. – Vol. 7. – P. 89–95.

2. **Бабенко В. Ф.** Точное неравенство для производной тригонометрического полинома, имеющего только вещественные нули [текст] / В. Бабенко , С. Пичугов // Мат. зам. – 1986. – Т. 39. – № 3. – С. 330–336.

3. **Бабенко В. Ф.** О неравенствах для производных полиномов с вещественными нулями [текст] / В. Бабенко , С. Пичугов // Укр. мат. журн. – 1986. – Т. 38. – № 4. – С. 411–416.

4. **Malik M. A.** An integral mean estimate for polynomials [text] / M. Malik // Proc. Amer. Math. Soc. – 1984. – Vol. 38. – № 4. – P. 281–284.

5. **Saff E. B.** Coefficient and integral mean estimates for algebraic and trigonometric polynomials with restricted zeros [text] / E. Saff , T. Sheil-Small // J. London Math. Soc. – 1974. – Vol. 2. – № 9. – P. 16–22.

6. **Корнейчук Н. П.** Экстремальные свойства полиномов и сплайнов [текст] / Н. Корнейчук, В. Бабенко, А. Лигун // К.: Наукова думка, 1992. – 304 с.

7. **Стороженко Э. А.** К одной задаче Малера о нулях полинома и его производной [текст] / Э. Стороженко // Мат. сборник. – 1996. – Т. 187. – № 5. – С. 111–120.

8. **Стороженко Э. А.** Неравенство типа Турана для комплексных полиномов в L_0-метрике [текст] / Э. Стороженко // Известия вузов математика. – 2008. – Т. 5(552). – С. 1–6.

9. **Полиа Г.** Задачи и теоремы из анализа, в двух томах [текст] / Г. Полиа, Г. Сеге. – М.: Наука, 1978. – Т. 1. – 391 с. – Т. 2. – 431 с.

10. **Арестов В. В.** Интегральные неравенства для алгебраических многочленов на единичной окружности [текст] / В. Арестов // Мат. зам. – 1990. – Т. 48. – № 4. – С. 7–18.