Вісник Одеськ. нац. ун-ту. Матем. і мех. – 2008. – Т.13, вип. 17. – С. 63–72

УДК 517.925

Г. Є. Самкова, Н. В. Шарай
Одеський національний університет імені І. І. Мечникова

ДЕЯКІ ВЛАСТИВОСТІ РОЗВ'ЯЗКІВ НАПІВ'ЯВНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ СИСТЕМ

Самкова Г. Є., Шарай Н. В. Деякі властивості розв'язків напів'явних диференціальних рівнянь. Для одного з класів задач доведено існування аналітичних розв'язків задачі Коші в деякій області з особливою точкою на межі та знайдено оцінку таких розв'язків. Вигляд області має бути означений в залежності від властивостей матриць жмутка та функцій, які входять в систему.
Ключові слова: задача Коші, аналітичні розв'язки, асимптотичне повождення розв'язків.

Самкова Г. Е., Шарай Н. В. Некоторые свойства решений полуявных дифференциальных систем. Для одного из классов задач доказано существование аналитических решений задачи Коши в некоторой области с особой точкой на границе и найдена оценка таких решений. Вид области определяется в зависимости от свойств матриц пучка и функций, которые входят в систему.
Ключевые слова: задача Коши, аналитические решения, асимптотическое поведение решений.

Samkova G. E., Sharay N. V. About the investigation of some semi-obvious system of differential equations. The existence of analytical solutions of the Cauchy problem in certain area with the special point on the border is prove for one of the types, the estimation of these solutions being found. The type of this area should be defined depending on the beam matrices properties as well as on the functions involved in the system.
Key words: the Cauchy problem, the analytical solutions, asymptotic solutions behavior.

Вступ. Розглядається задача Коші

$$\begin{cases} A(z)Y' = B(z)Y + F(z, Y), & (1) \\ Y(z) \longrightarrow 0, z \longrightarrow 0, & (2) \end{cases}$$

де однозначні матриці $A, B : D \longrightarrow G_1 \times G_2$ розміру $m \times n$ аналітичні в області $D \subseteq C, 0 \in D$ або $0 \in \partial D, G_1 \times G_2 \subset C^{m \times n}, (0,0) \in G_1 \times G_2$ або $(0,0) \in \partial(G_1 \times G_2)$, однозначна вектор-функція $F : D \times G_2 \longrightarrow G_1$ аналітична в $D \times G_2$. Припустимо, що $m \neq n$, т. ч., жмуток матриць $A(z)\lambda + B(z)$ є сингулярним.

У другій половині XX століття особливий інтерес математиків було притягнуто до так званих систем диференціальних рівнянь з жмутком матриць з виродженням. Ці системи мають вигляд (1). В дійсній області спочатку вивчалися лінійні диференціальні системи вигляду (1) зі сталими матрицями A і B (Ф. Гантмахер та інші) та зі змінним жмутком матриць $A(x)\lambda + B(x)$ з виродженою матрицею $A(x)$ (А. М. Самолейнко, В. П. Яковець, В. О. Ерьоменко, А. А. Давиденко, St. Campbell, Ю. Є. Боярінцев, В. Ф. Чистяков, А. Г. Руткас, M. Hanke та інші). Зацікавленість нелінійними системами вигляду (1) особливо зросла за останні роки. Звернемо увагу на роботи А. М. Самолейнка, М. І. Шкиля, І. І. Старуна, В. П. Яковця, П. Ф. Самусенка, А. А. Давиденка, А. Г. Руткаса, Л. А. Власенка, В. Ф. Чистякова, R. März, M. Hanke та інших).

В комплесній області задачі вигляду (1)-(2) вивчалися у частинних випадках. Так, у роботах J. Malmquist, W. Trjitzinsky, M. Hukuhara, Е. І. Грудо, М. П. Єругіна, М. А. Лукашевича, M. Iwano, P. Bungart, W. Balsel, В. Вазова, W. Strodt, M. Roswida, В. В. Сергейчука, Р. Г. Грабовської, Г. Є. Самкової та інших в областях з особливою точкою на межі досліджуються питання про існування, кількість та асимптотичне поводження розв'язків систем диференціальних рівнянь (1) при наближенні із даної області до особливої точки у випадках діагональної та блочно-діагональної матриці $A(z)$, діагональні елементи якої є або степеневими, або узагальненими степеневими, або степенево-логарифмічними функціями.

Метою цієї роботи є дослідження питань про існування аналітичних розв'язків задачі Коші (1)-(2), задовольняючих умові $Y'(z) \longrightarrow 0$ при $z \longrightarrow 0$, якщо z змінюється в деякій області з особливою точкою $z = 0$ на межі.

Основні результати. В роботі [3] доведена лема про ранг, у відповідності з якою, якщо матриця $A(z)$ аналітична в однозв'язній області $D \subset C$, $(z = 0) \in \in D, A : D \longrightarrow C^{m\times n}$ і $rangA(0) = k$, $0 < k \le min(m, n)$, тоді існує або область $D_{10} = \{z : 0 < |z| < R_1\}$, або $D_1 = \{z : |z| < R_1\}$ з D, така, що ранг матриці $A(z)$ залишається сталим при $z \in D_{10}$ або $z \in D_1$ і дорівнює k_1, де $k \le k_1 \le min(m, n)$.

Припустимо, що $m > n, rangA(z) = n$ при $z \in D_1$, матриці $A(z), B(z)$ та вектор $F(z, Y)$ подані у вигляді:

$$A(z) = \begin{pmatrix} A_1(z) \\ A_2(z) \end{pmatrix}; \quad B(z) = \begin{pmatrix} B_1(z) \\ B_2(z) \end{pmatrix}; \quad F(z, Y) = \begin{pmatrix} F_1(z, Y) \\ F_2(z, Y) \end{pmatrix}, \tag{3}$$

де $A_1 : D \longrightarrow C^{n\times n}, detA_1(z) \ne 0$ при $z \in D_1; B_1 : D \longrightarrow C^{n\times n}, F_1 : D\times G_2 \longrightarrow C^n$.

Система (1) має бути переписана у вигляді:

$$\begin{cases} Y' = A_1^{-1}(z)B_1(z)Y + A_1^{-1}(z)F_1(z, Y), & (4)\\ A_2(z)Y' = B_2(z)Y + F_2(z, Y). & (5)\end{cases}$$

Припустимо, що матриця $A_1^{-1}(z)B_1(z)$ аналітична в області D_{10} і в точці $z = 0$ має полюс q-того порядку, $q \in N, q \ge 2$, і

$$A_1^{-1}(z)B_1(z) = z^{-q}P(z), \tag{6}$$

де матриця $P(z)$ аналітична в області D_1. Система (4)-(5) у відповідності з (6) приймає вигляд:

$$\begin{cases} z^qY' = P(z)Y + z^q f(z, Y), & (7)\\ A_2(z)Y' = B_2(z)Y + F_2(z, Y), & (8)\end{cases}$$

де $P(z) = (p_{ij}(z))_{i,j=1}^n$; $f(z, Y) = (f_i(z, Y))_{i=1}^n = A_1^{-1}(z)F_1(z, Y)$.

Ця робота є продовження циклу робіт ([2], [3], [6]) про дослідження властивостей розв'язків задачі (1)-(2) у випадку $m > n$. В даній роботі використовуються загальні позначення для всіх чотирьох робіт. Позначення класів A_4, K_4, P_4 відповідає розглянутому випадку.

Введемо деякі поняття.

Означення 1. *Нехай на множині* $\Phi_4(t_1) = \{(t,\nu) : t \in (0,t_1], \nu \in [\nu_1,\nu_2], \nu_1 < < \nu_2\}$ *визначені функції* $p(t,\nu)$,$g(t,\nu)$, *які приймають невід'ємні значення. Будемо казати, що функція* $p(t,\nu)$ *має властивість* Q *відносно функції* $g(t,\nu)$ *на множині* $\Phi_4(t_1)$, *якщо для кожного* $\nu \in [\nu_1,\nu_2]$ *функція* $p(t,\nu)$ *є функцією більш високого порядку мализни порявняно з* $g(t,\nu)$ *при* $t \longrightarrow +0$.

Означення 2. *Нехай вектор-функція* $\varphi(z) = col(\varphi_1(z),...,\varphi_n(z))$,$\varphi : D \longrightarrow \longrightarrow C^n$, *аналітична в області* $E \subset C, 0 \in \partial E$ *і така, що при* $(t,\nu) \in \Phi_4(t_1)$ *компоненти* $\varphi(z(t,\nu))$, *де* $z = te^{i\nu}$, *мають вигляд:*

$$\varphi_j(z(t,\nu)) = \psi_j(t,\nu)e^{i\eta_j(t,\nu)}, j \in \{1,\dots,n\},$$

причому $\psi_j(t,\nu) > 0$,$(\psi_j(t,\nu))'_t > 0$,$(\psi_j(t,\nu))'_\nu > 0$,$\psi_j(+0,\nu) = 0$.

Скажемо, що система (7) має властивість A_4 *відносно функцій* $\varphi(z(t,\nu))$, *якщо виконано:*

1) $|p_{jk}(z(t,\nu))|\psi_k(t,\nu) = o(t^q(\psi_j(t,\nu))'_t)$, $(j,k = \overline{1,n}, j \neq k)$ *при* $t \longrightarrow +0$ *рівномірно відносно* $\nu \in [\nu_1,\nu_2]$;

2) $|p_{jk}(z(t,\nu))|\,\psi_k(t,\nu)$ $(j,k = \overline{1,n}, j \neq k)$ *мають властивість* Q *відносно* $t^{q-1}(\psi_k(t,\nu))'_\nu$.

При фіксованому $\nu \in [\nu_1,\nu_2]$ *покладемо*

$$f(z(t,\nu),Y(z(t,\nu))) = f_{1\nu}(t,Y_1(t),Y_2(t)) + if_{2\nu}(t,Y_1(t),Y_2(t)),$$

де $Y(z(t,\nu)) = Y_1(t) + iY_2(t)$. *При фіксованому* $t \in (0,t_1]$:

$$f(z(t,\nu),Y(z(t,\nu))) = f_{1t}(\nu,Y_1(\nu),Y_2(\nu)) + if_{2t}(\nu,Y_1(\nu),Y_2(\nu)),$$

де $Y(z(t,\nu)) = Y_1(\nu) + iY_2(\nu)$.

Позначимо: як $\Omega(t,Y,\tau)$ *множину*

$$\Omega(t,Y,\tau) = \{(t,Y) : Y_{1j}^2(t) + Y_{2j}^2 < \tau_j^2|\varphi_j(z(t,\nu))|^2, \tau_j > 0, j = \overline{1,n}, t \in (0,t_1)\};$$

як $\Omega(\nu,Y,\sigma)$ *множину:*

$$\Omega(\nu,Y,\sigma) = \{(\nu,Y) : Y_{1j}^2(t) + Y_{2j}^2 < \sigma_j^2|\varphi_j(z(t,\nu))|^2, \sigma_j > 0, j = \overline{1,n}, \nu \in [\nu_1,\nu_2]\}.$$

Означення 3. *Скажемо, що система (7) має властивість* P_4 *відносно функції* $f(z,Y)$, $f_j = f_{1j} + if_{2j}, j = \overline{1,n}$, *якщо виконано:*

1) для кожного фіксованого $Y(z(t,\nu))$ *з множини* $\Omega(t,Y,\tau)$

$$t^q f_{kj\nu}(t,Y_1(t),Y_2(t)) = o(t^q(\psi_j(t,\nu))'_t),$$

$k = 1,2, j = \overline{1,n}, t \longrightarrow +0$ *рівномірно відносно* $\nu \in [\nu_1,\nu_2]$;

2) для кожного фіксованого $Y(z(t,\nu))$ *з множини* $\Omega(\nu,Y,\sigma)$ *функція* $t^q f_{kjt}(\nu,Y_1(\nu),Y_2(\nu))$ *має властивість* Q *відносно* $t^{q-1}(\psi_j(t,\nu))'_\nu, j = \overline{1,n}$, $k = 1,2$.

Позначимо як $\widetilde{G_4}(\rho) = \{z : 0 < |z| \leq \rho, z \in \Phi_4(\rho), \rho > 0\}$.

Означення 4. *Скажемо, що система (7) належить класу* K_4, *якщо матриця* $P(z) = = P(te^{i\nu})$ *така, що* $(t,\nu) \in \Phi_4(t_1)$.

Теорема 1. *Нехай для системи (1) виконано наступні умови:*

1) однозначна матриця $A : D \longrightarrow C^{m\times n}$,$m > n$, *аналітична в області* D;

2) існує область $D_1 \subset D$, *така, що* $rangA(z) = n$ *при* $z \in D_1$;

3) матриці $A(z), B(z)$ *та вектор-функція* $F(z, Y)$ *подані у вигляді (3), причому матриця* $B_1(z)$ *аналітична в області* D_{10}, *в точці* $z = 0$ *має полюс* q*-го порядку* $(q \geq 2)$ *і подана у вигляді (6); а вектор-функція* $F_1(z, Y)$ *аналітична в* $D_{10} \times G_{20}$,$G_{20} = G_2\backslash\{0\}$, *і в точці (0,0) має ізольовану особливу точку;*

4) система (7)-(8) така, що:

а) система (7) має властивість A_4 *відносно функцій* $\varphi(z(t, \nu))$ *при* $t \in \in (0, t_1]$ *рівномірно відносно* $\nu \in [\nu_1, \nu_2]$;

б) система (7) належить класу K_4;

в) система (7) має властивість P_4 *відносно вектор-функцій* $f(z, Y)$, *при* $t \in (0, t_1]$, $\nu \in [\nu_1, \nu_2]$;

г) $B_2(z)$ *і* $F_2(z, W)$ *такі, що вздовж розв'зків системи (7) виконано умову сумісності (8) при* $z \in D_2$, $D_2 \cap G_4(\rho) \neq \emptyset$, $D_2 \subseteq D_1$, $0 \in D_2$.

Тоді знайдеться таке $\rho \in (0, t_1]$, *що задача Коші для системи (1)* $Y(z) = = col(Y_1(z), ..., Y_n(z))$ *з початковими значеннями* (z_0, Y_0), *такими, що*

$$z_0 \in G_4(\rho), Y_0 \in \{Y : |Y_{kj}(z_0)| < \delta_j|\varphi_j(z_0)|, j = \overline{1, n}, k = 1, 2\},$$

$$Y_j(z) = Y_{1j}(z) + iY_{2j}(z), j = \overline{1, n},$$

при $z \in G_4(\rho) \cap D_2$, *має хоч би один аналітичний розв'язок, який здовільняє:*

$$|Y_j(z)|^2 < \delta_j^2|\varphi_j(z)|^2, j = \overline{1, n}. \tag{9}$$

Доведення. [Доведення теореми 1.] Доведення проведемо в три етапи у відповідності з методом аналітичних продовжень розв'язків.

1-й етап. Нехай z змінюється вздовж довільного фіксованого проміня з сім'ї

$$L_\nu : z = z(t, \nu) = te^{i\nu}, t \in (0, t_1], \nu \in (0, 2\pi] \text{ фіксовано.}$$

При $z \in L_\nu$ покладемо $Y(z(t, \nu)) = Y_1(t) + iY_2(t)$, $P(z(t, \nu)) = P_1(t) + iP_2(t)$, $f(z(t, \nu), Y_1(t), Y_2(t)) = f_{1\nu}(t, Y_1 + iY_2) + if_{2\nu}(t, Y_1 + iY_2)$.

Відносно дійсної вектор-функції $Y(t) = col\ (Y_1(t),\ Y_2(t))$, $Y_i(t) = = col(Y_{i1}, Y_{i2}, ..., Y_{in})$, $i = 1, 2$, вздовж проміня одержуємо систему

$$t^q(Y_1'(t) + iY_2'(t)) = (P_1(t) + iP_2(t))(Y_1(t) + iY_2(t))e^{i(1-q)\nu} + \\ +t^q e^{i\nu}(f_{1\nu}(t, Y_1, Y_2) + if_{2\nu}(t, Y_1, Y_2)).$$

Порівнюючи дійсні і уявні частини, одержуємо дійсну систему вигляду:

$$t^q Y'(t) = \widetilde{P}(t)Q_1(\nu)Y(t) + t^q Q_2(\nu)\widetilde{f}(t, Y), \tag{10}$$

де

$$\widetilde{P}(t) = \begin{pmatrix} P_1(t) & -P_2(t) \\ P_2(t) & P_1(t) \end{pmatrix}; \qquad Q_1(\nu) = \begin{pmatrix} q_1(\nu) & q_2(\nu) \\ -q_2(\nu) & q_1(\nu) \end{pmatrix};$$

$$Q_2(\nu) = \begin{pmatrix} q_3(\nu) & -q_4(\nu) \\ q_4(\nu) & q_3(\nu) \end{pmatrix}; \qquad \widetilde{f}(t, Y) = \begin{pmatrix} f_{1\nu}(t, Y_1, Y_2) \\ f_{2\nu}(t, Y_1, Y_2) \end{pmatrix};$$

$q_1(\nu) = E \cdot cos((q-1)\nu)$, $q_2(\nu) = E \cdot sin((q-1)\nu)$, $q_3(\nu) = E \cdot cos\nu$, $q_1(\nu) = = E \cdot sin\nu$, $P_r(t) = (p^r_{ij}(t))^n_{i,j=1}$,$r = 1, 2$,E — одинична матриця розміру $n \times n$.

Побудуємо область

$$\Omega_1 = \left\{(t, Y) : Y^2_{1i} + Y^2_{2i} < \delta^2_i |\varphi_i(z(t,\nu))|^2,\, i = \overline{1,n}, t \in (0, t_1)\right\},$$

де $\delta_i > 0, i = \overline{1,n}$, сталі, $\nu \in (0, 2\pi], \nu$ фіксовано.

Частину межі області Ω_1 позначимо

$$\partial\Omega_{10} = \left\{(t, Y) : Y^2_{1i} + Y^2_{2i} = \delta^2_i |\varphi_i(z(t,\nu))|^2, i = \overline{1,n}, t \in (0, t_1)\right\}.$$

Вивчемо розподіл знака функції

$$\left(t^q\overline{T}, \frac{\overline{N_i}}{2}\right) = (p^1_{ii}(t)cos((q-1)\nu) + p^2_{ii}(t)sin((q-1)\nu))\delta^2_i|\varphi_i(z(t,\nu))|^2 +$$

$$+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}(p^1_{ij}(t)cos((q-1)\nu) + p^2_{ij}sin((q-1)\nu))(Y_{1j}Y_{1i} + Y_{2j}Y_{2i}) +$$

$$+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}(p^1_{ij}(t)sin((q-1)\nu) - p^2_{ij}cos((q-1)\nu))(Y_{2j}Y_{1i} - Y_{1j}Y_{2i}) +$$

$$+t^q(f_{1i\nu}cos\nu - f_{2i\nu}sin\nu)Y_{1i} + t^q(f_{1i\nu}sin\nu + f_{2i\nu}cos\nu)Y_{2i} - \delta^2_i|\varphi_i|\psi'_{it},$$

де $\overline{T}$ — вектор поля напрямків системи (10), означений у точці $(z, Y_1, Y_2) \in \partial\Omega_{10}$, а $\overline{N_i}, i = \overline{1,n}$ — вектор нормалі до поверхні Ω_1 в той же точці.

У відповідності з тим, що в області Ω_1 система (7) має властивість A_4 відносно функцій $\varphi(z(t,\nu))$ при $t \in (0, t_1]$ рівномірно відносно $\nu \in (0, 2\pi]$; має властивість P_4 відносно функції $F(z, Y)$, знак скалярного добутку

$$sign\left(t^q\overline{T}, \frac{\overline{N_i}}{2}\right) = sign\left(-\delta^2_j|\varphi_j|\psi'_{jt}\right), j = \overline{1,n}.$$

Так як система (7) означена в класі $K_4, (t,\nu) \in \Phi_4(t_1)$, одержуємо, що знайдеться таке достатньо мале $t_0 \in (0, t_1)$ для ν по всьому проміжку $[\nu_1, \nu_2]$, що при $t \in (0, t_0]$ $(\partial\Omega_1(t, Y, \delta))_{t\in(0,t_0]}$ є поверхнею без контакту для системи (10), точки $(\partial\Omega_1(t, Y, \delta))_{t\in(0,t_0]}$ є точками строгого виходу, $sign\left(t^q\overline{T}, \frac{\overline{N_j}}{2}\right) < 0, j = \overline{1,n}$, а точки перерізу $\Omega_1(t, Y, \delta) \cap (t = t_0)$ є точками строгого виходу при спаданні t з проміжку $(0, t_0]$.

Через кожну точку множини $\Omega_1(t, Y, \delta) \cap (t = t_0)$ із справедливості для системи (7) теореми існування і єдиності Пікара, проходить одна і тільки одна гладка інтегральна крива системи (10) і, так як $sign\left(t^q\overline{T}, \frac{\overline{N_j}}{2}\right) < 0, j = = \overline{1,n}$ при $t \in (0, t_0]$, то знайдеться хоч би один розв'язок з початковими даними $\overline{\Omega_1}(t, Y, \delta) \cap \cap (t = t_0)$, який залишається в області $(\Omega_1(t, Y, \delta))_{t\in(0,t_0]}$,$(t_0, \nu) \in \Phi_4(t_0)$, ν — фіксовано, при спаданні t з інтервала $(0, t_0]$, причому

$$|Y_{kj}(z(t,\nu))| < \delta_j|\varphi_j(z(t,\nu))|, j = \overline{1,n}, k = 1, 2, (t,\nu) \in \Phi_4(t_0).$$

2-й етап. Нехай z змінюється вздовж довільної фіксованної дуги кола з сім'ї $O_r : z = z(r,\theta), z(r,\theta) = re^{i\theta}, (r,\theta) \in \Phi_4$, r — фіксовано. При $z \in O_r$ покладемо $Y(z(r,\theta)) = Y_1(\theta) + iY_2(\theta)$, $P(z(r,\theta)) = P_1(\theta) + iP_2(\theta)$, $f(z(r,\theta), Y_1(\theta) + iY_2(\theta)) = f_{1r}(\theta, Y_1, Y_2) + if_{2r}(\theta, Y_1, Y_2)$.

Відносно дійсної вектор-функції $Y(\theta) = col(Y_1(\theta), Y_2(\theta))$, $Y_i(\theta) = col(Y_{i1}, Y_{i2}, ..., Y_{in})$, $i = 1, 2$, одержуємо систему вигляду:

$$r^{q-1}Y'(\theta) = \widetilde{P}(\theta)\widetilde{Q_1}(\theta)Y(\theta) + r^q\widetilde{Q_2}(\theta)\widetilde{F}(\theta, Y(\theta)) \tag{11}$$

де

$$\widetilde{P}(\theta) = \begin{pmatrix} P_1(\theta) & -P_2(\theta) \\ P_2(\theta) & P_1(\theta) \end{pmatrix}; \qquad \widetilde{Q_1}(\theta) = \begin{pmatrix} q_5(\theta) & -q_6(\theta) \\ q_6(\theta) & q_5(\theta) \end{pmatrix};$$

$$\widetilde{Q_2}(\theta) = \begin{pmatrix} -q_7(\theta) & -q_8(\theta) \\ q_8(\theta) & -q_7(\theta) \end{pmatrix}; \qquad \widetilde{F}(\theta, Y) = \begin{pmatrix} f_{1r}(\theta, Y_1, Y_2) \\ f_{2r}(\theta, Y_1, Y_2) \end{pmatrix};$$

$q_5(\theta) = E \cdot sin((q-1)\theta)$, $q_6(\theta) = E \cdot cos((q-1)\theta)$, $q_7(\theta) = E \cdot sin\theta$, $q_8(\theta) = E \cdot cos\theta$.

Вивчимо поводження інтегральних кривих системи (11) відносно області

$$\Omega_{11} = \left\{(\theta, Y) : Y_{1i}^2 + Y_{2i}^2 < \eta_i^2|\varphi_i(z(r,\theta))|^2,\ i = \overline{1,n}, (r,\theta) \in \Phi_4(t_1)\right\}.$$

Вивчимо розподіл знака функції

$$\left(r^{q-1}\overline{T}, \frac{\overline{N_i}}{2}\right) = (p_{ii}^1(\theta)sin((q-1)\theta) + p_{ii}^2(\theta)cos((q-1)\theta))\eta_i^2|\varphi_i(z(r,\theta))|^2 +$$

$$+ \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} (p_{ij}^1(\theta)sin((q-1)\theta) - p_{ij}^2cos((q-1)\theta))(Y_{1j}Y_{1i} + Y_{2j}Y_{2i}) +$$

$$+ \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} (p_{ij}^1(\theta)cos((q-1)\theta) + p_{ij}^2sin((q-1)\theta))(Y_{2j}Y_{1i} - Y_{1j}Y_{2i}) +$$

$$+ r^q(-f_{1ir}sin\theta - f_{2ir}cos\theta)Y_{1i} + r^q(f_{1ir}cos\theta - f_{2ir}sin\theta)Y_{2i} - \eta_i^2|\varphi_i|\psi'_{i\theta}.$$

Так як система (7) має властивість A_4 відносно функцій $\varphi(z(r,\theta))$ для деякого r_1, $r_1 = min(t_0, t_1)$, $0 < r_1 \le t_0$, $\theta \in [\nu_1, \nu_2]$; має властивість P_4 відносно функції $f(z, Y)$ для деякого r_2, $0 < r_2 \le t_0$; існує таке достатньо мале число $r_0 \in (0, min(r_1, r_2))$, що для кожного фіксованого $r \in (0, r_0)$ $(\partial\Omega_1)_{(r,\theta)\in\Phi_4(r)}$ є проверхнею без контакту для системи (11) і $sign(r^{q-1}\overline{T}, \overline{N}_j/2) < 0, j = \overline{1,n}$.

Внаслідок того, що система (7) належить класу K_4, $(r,\theta) \in \Phi_4\,(r_0)$, $sign(r^{q-1}\overline{T}, \overline{N}_j/2) < 0, j = \overline{1,n}$, то кожна інтегральна крива системи (11), яка проходить через точку множини $\overline{\Omega}_{11}(\theta, Y, \eta) \cap (\theta = \theta_0)$, $\theta_0 \in \Phi_4(r_0)$, залишається в області $\Omega_{11}(\theta, Y, \eta)$, якщо спадає (зростає) θ і задовольняє умову

$$|Y_{kj}(z(r,\theta))| < \eta_j|\varphi_j(z(r,\theta))|, j = \overline{1,n}, k = 1, 2,\ (r,\theta) \in \Phi_4(r_0). \tag{12}$$

3-й етап. Покладемо, що виконується співвідношення

$$\delta_j^2 \leq \eta_j^2, j = \overline{1,n}, \tag{13}$$

Позначимо $\rho = r_0$.

а) Розглянемо довільну фіксовану криву $L_\nu(0, z_1] \subset G_4(r_0)$, де $z_1 \in O_{r_0}((\Phi_4(t_0))$ На 1-му етапі доведено, що вздовж неї існує хоча б один неперервний розв'язок $Y_\nu^0(z(t,\nu))$ системи (7), який задовольняє

$$|Y^0_{\nu_{kj}}(z(r,\theta))|^2 < \delta_j^2 |\varphi_j(z(r,\theta))|^2, j = \overline{1,n}, k = 1,2, (r,\theta) \in \Phi_4(t_0). \tag{14}$$

Множина $\{Y_\nu(z)\}$ містить хоча б один елемент $Y_\nu^0(z)$. Здійснимо аналітичне продовження довільно обраного в $\{Y_\nu(z)\}$ розв'язку $Y_\nu^0(z)$ системи (7) на область, яка містить криву $L_\nu(0, |\widetilde{z}|]$ так, щоб

$$|Y^0_{\nu_{kj}}(z)|^2 < \delta_j^2 |\varphi_j(z)|^2, j = \overline{1,n}, k = 1,2. \tag{15}$$

Покладемо скілько завгодно мале $\xi > 0$. Для кожної точки $z = z(t,v)$, початкова задача

$$\begin{cases} (7) \\ Y(z) = Y^0(z(t,v)) \end{cases} \tag{16}$$

має аналітичний при $z \in U(z(t,v), \triangle_t^0) \neq \emptyset$, $0 < \triangle_t^0$ — стала, розв'язок.

Внаслідок єдиності аналітичності розв'язку задачі Коші при $z \in U(z(t,v), \triangle_t^0) \cap \cap L_\nu$, $Y_U^0(z) \equiv Y_\nu^0(z)$ і розв'язок $Y_U^0(z)$ — аналітичне продовження $Y_\nu^0(z)$ з кривої $U(z(t,v), \triangle_t^0) \cap L_\nu$ на область $U(z(t,v), \triangle_t^0)$.

Окіл $U(z(t,v), \triangle_t^0)$ оберемо так, щоб при $z \in U(z, \triangle_t^0)$ виконувалась нерівність (13). Це можливо внаслідок неперервності аналітичної функції і справедливості (15) на множині $U(z(t,v), \triangle_t^0) \cap L_\nu$.

Околи $U(z(t,v), \triangle_t^0)$ утворюють нескінчене відкрите покриття компакту $L_\nu[\xi, |\overline{z}|]$. За лемою Гейне-Бореля, з нього можливо виділити скінчене покриття $\{U_n^0\}, U_n^0 = U(z(t_n^0, v), \triangle_{t_n^0}^0), n = 1, ..., I_1$. За побудовою область $U_\nu^0 = \cup_{n=1}^{I_1} U_n^0$ містить компакт $L_\nu[\xi, |\overline{z}|]$. У відповідності з мализною ξ і повнотою R, яку б точку кривої $L_\nu[0, |\overline{z}|]$, найближчу до $z = 0$, не взяли, можливо знайти $\xi > 0$, що $z \in L_\nu[\xi, |\overline{z}|]$; таким чином, $U_\nu^0 \supset L_\nu[0, |\overline{z}|]$ і, так як для (7) теорема Коші виконана при $z \in G_4(r_0)$, то $0 \in (\partial U_\nu^0) \backslash U_\nu^0$.

Нехай для всіх $n = 1, ..., I_1 - 1 : t_n^0 < t_{n+1}^0$. У відповідності з побудовою $U_n^0 \cap U_{n+1}^0 \neq \emptyset$ і множина $L_\nu \cap U_n^0 \cap U_{n+1}^0 = L_{\nu,n}^0$ містить більш однієї точки. В силу єдиності аналітичного розв'язку задачі Коші при $z \in L_{\nu,n}^0$:

$$Y_\nu^0(z) \equiv Y^0_{U_n^0}(z) \equiv Y^0_{U_{n+1}^0}(z) \equiv Y^0_{\nu,n}(z).$$

Множина $L_{\nu,n}^0$ містить свої граничні точки, таким чином, за принципом єдиності аналітичної функції, аналітичний при $z \in L_{\nu,n}^0$ розв'язок системи (7), аналітично продовжимо на область $U_n^0 \cap U_{n+1}^0$. Причому при $z \in U_t^0 : Y^0_{U_n^0}(z) \equiv \equiv Y^0_{U_{n+1}^0}(z)$. Внаслідок вибору окілу $U_t^0, t = \overline{1, I_1}$ при $z \in U_n^0 \cup U_{n+1}^0$ для $Y^0_{\nu,n}(z)$ справедлива оцінка

$$|Y_{\nu,n_{kj}}(z)|^2 < \delta_j^2 |\varphi_j(z)|^2.$$

З довільності вибору кривої в сім'ї L_ν і кількості n в множині $\{1, 2, ..., I_1 - 1\}$ виходить, що яку б криву вигляду $L_\nu(0, |\overline{z}|] \subset G_4(\rho)$ не взяли, існує непуста область $U_\nu^0 \supset L_\nu(0, |\overline{z}|]$ з точкою $z = 0$ на межі, на яку із зберіганням оцінки

$$|Y_{\nu, n_{kj}}(z)|^2 < \delta_j^2 |\varphi_j(z)|^2, \, j = \overline{1, n}$$

аналітично продовжується розв'язок $Y_\nu^0(z)$ системи (7).

Доведено, що для довільного елемента $\{Y_\nu^0(z)\}$ із $\{Y_\nu(z)\}$ — множини аналітичних функцій — виконано у відповідних областях U_ν нерівність

$$|Y_{\nu_{kj}}(z)|^2 < \delta_j^2 |\varphi_j(z)|^2, \, j = \overline{1, n}, k = 1, 2.$$

Області U_ν мають властивості:

1) $L_\nu(0, |\overline{z}|] \subset U_\nu$;

2) $0 \in (\partial U_\nu^0) \backslash U_\nu^0$.

Таким чином, для любого $\nu \in \Phi_4(r_0)$ існує хоча би один розв'язок $Y_\nu^0(z)$ системи (7), який аналітичний в області $U_\nu \supset L_\nu(0, |z_1(r_0, \nu)|], 0 \in (\partial U_\nu^0) \backslash U_\nu^0$, і задовольняє в ній оцінці (15).

b) Розглянемо тепер фіксовану криву $L_{\theta_0}(0, |z_1|]$. З 2-го етапу випливає, що кожний розв'язок системи (7) з початковими даними з множини $\overline{\Omega}_{11} \cap (\theta = \theta_0)$ продовжується вздовж кожної з кривих сім'ї $O_r(\Phi_4(r_0)), r \in (0, r_0]$ при спаданні θ на сегменті $\Phi_4(r_0)$; тобто продовжуються вздовж кожної з кривих сім'ї $O_r(\Phi_4(r_0)), r \in (0, r_0]$. Причому, розв'язок залишається у відповідному зміненні θ на кожному з вказаних проміжків області вигляду Ω_{11}.

З нерівностей (13) для кожного $r \in (0, r_0]$ множина значень функції $Y^0(z)$ при $z \in L_{\theta_0}(0, |z_1|]$ міститься в множині $\overline{\Omega}_{11} \cap (\theta = \theta_0)$, і висловлене в b) твердження вірно для розв'язків $Y_{\theta_0}^0(z)$.

c) Здійснимо аналітичне продовження розв'язку системи (7) на множину $G_4(\rho)$ так, щоб зберігалась оцінка

$$|Y_{\nu_{kj}}(z)|^2 < \delta_j^2 |\varphi_j(z)|^2, \, j = \overline{1, n}, k = 1, 2. \tag{15}$$

Нехай $Y_\theta^0(z)$ — довільний елемент множини $\{Y_\theta(z)\}$. Він продовжується із зберіганням оцінки (15) вздовж кривої $O_{|\overline{z}|}(\Phi_4(\rho))$. Внаслідок єдиності розв'язку задачі Коші для кожного фіксованого $\widetilde{\theta} \in \Phi_4$ в множині $\{Y_\theta(z)\}$ розв'язку $Y_\theta^0(z)$ однозначно відповідає розв'язок $Y_{\widetilde{\theta}}^0(z)$ такий, що $Y_\theta^0(z) \equiv Y_{\widetilde{\theta}}^0(z), z \in O_{|\overline{z}|}(\Phi_4(\rho)) \cap$ $\cap U_\theta^0$.

Розв'язок $Y_\theta^0(z)$ аналітичний в області U_θ^0 і задовольняє в неї (15).

Повторимо метод доведення аналітичного продовження розв'язку з кривої $L_\nu(0, |\widetilde{z}|]$ на утриману її область. Тільки тут компакт

$$G_4(\rho) = (G_4(\rho) \backslash G_4(\xi)) \cup O_\xi(\Phi_4(\rho)),$$

де $\xi > 0$ довільно і скільки завгодно мало, накривається відкритими областями U_ν^0. Скінчене покриття $U^0 = \cup_{n=1}^{I_3} U_{\nu_n}^0(z), I_3 \in N$ області $G_4(\rho)$ має властивості:

1) $G_4(\rho) \subset U^0$;

2) $0 \in \partial U^0 \backslash U^0$.

Перше виходить з 1-го етапу і справедливості теореми Коші при $z \in G_4(\rho)$.

Покладемо для всіх $n = 1, 2, ..., I_2 - 1 : \nu_n < \nu_{n+1}$, за побудовою отримаємо, що множина $U^0_{\nu_n} \cap U^0_{\nu_{n+1}} \neq \emptyset$ і знайдеться ν, $\nu_n < \nu < \nu_{n+1}$, що множина $L_\nu \cap U^0_{\nu_n} \cap U^0_{\nu_{n+1}}$:

а) міститься в $G_4(\rho)$;

б) містить відрізок кривої $L_\nu[\xi, |\widetilde{z}|]$.

З цього відрізка, який містить свої граничні точки, за принципом єдиності аналітичної функції аналогічно а) 3-го етапу здійснюється аналітичне продовження розв'язку $Y^0_\nu(z)$ на область $U^0_{\nu_n} \cup U^0_{\nu_{n+1}}$. За указаним принципом, при $z \in U^0_{\nu_n} \cap \cap U^0_{\nu_{n+1}} : Y^0_\nu(z) \equiv Y^0_{\nu_n}(z) \equiv Y^0_{\nu_{n+1}}(z)$. Таким чином, маємо аналітичне продовження розв'язку $Y^0_\nu(z)$ на область U^0. Причому розв'язок в цієї області задовольняє (15).

Таким чином, для системи (7):

а) теорема Коші справедлива в $G_4(\rho) \times Y_0$;

б) аналітичний при $z \in U^0_\theta$ розв'язок $Y^0_\theta(z)$ продовжується зберіганням оцінки (15) з кривої $L_\theta(0, \rho]$ вздовж кожної з кривих сім'ї $O_t(\Phi_4(\rho))$, коли $t \in (0, \rho]$.

Тобто, за принципом аналітичного продовження розв'язків $Y^0_\theta(z)$ аналітично продовжується на область U^0 зі зберіганням оцінки (13) однозначно. Цей процес описаний вище.

Таким чином, існує хоча б один аналітичний розв'язок $Y^0(z)$ системи (7) при $z \in G_4(\rho)$ з початковими даними

$$(z_0, Y_0) \in G_4(\rho) \times \{Y : |Y_{kj}| < \delta_j |\varphi_j(z_0)|, j = \overline{1, n}, k = 1, 2\}$$

аналітичний у відповідній області U і задовольняє в неї (9). Теорема доведена.

Висновки. Для диференціальних систем вигляду (1) одержані достатні умови про існування та кількість аналітичних розв'язків задачі Коші (1)-(2). Вони є суттєво новими та істотно доповнюють відомі результати теорії диференціальних рівнянь.

1. **Бояринцев Ю. Е.** Вырожденные системы обыкновенных дифференциальных уравнений [текст] / Ю. Е. Бояринцев. – Новосибирск: Наука, 1982. – 213 с.
2. **Самкова Г. Є.** Асимптотика розв'язків деяких напів'явних систем диференціальних рівнянь [текст] / Г. Є. Самкова, Н. В. Шарай // Науковий вісник Чернівецького університету. –2006. – Вип. 314–315. Математика. – С. 181–188.
3. **Самкова Г. Є.** Об исследовании некоторой полуявной системы дифференциальных уравнений в случае переменного пучка матриц [текст] / Г. Є. Самкова, Н. В. Шарай // Нелінійні коливання. –2002. – Т. 5. – № 2. – С. 224–236.
4. **Самойленко А. М.** Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженнями [текст] / А. М. Самойленко, Н. І. Шкиль, В. П. Яковець. – Київ: Вища школа, 2000. – 294 с.
5. **Чистяков В. Ф.** О свойствах квазилинейных вырожденных систем обыкновенных дифференциальных уравнений [текст] / В. Ф. Чистяков // Динамика нелинейных систем. – Новосибирск: Наука, 1993. – С. 164–173.
6. **Шарай Н. В.** Про дослідження деякої напів'явної системи диференціальних рівнянь [текст] / Н. В. Шарай // Науковий вісник Київського університету. – 2006. – Вип. 4. Фізико-математичні науки. – С. 129–133.

7. **Шкиль Н. И.** Асимптотическое интегрирование систем дифференциальных уравнений с вырождениями [текст] / Н. И. Шкиль, И. И. Старун, В. П. Яковець. – Киев: Вища школа, 1991. – 207 с.

8. **März R.** New Results concerning Index-3 Differential AlgebraicEquations [text] / R. März // Journal of Mathematical Analysis and Applications. –1989. – P. 140. – № 1. – С. 177–199.

9. **Rutkas A. G.** The solvability of a nonlinear degenerate differential equation [text] / A. G. Rutkas, L. A. Vlasenko // International Conference "Differential Equations and Related Topics", dedicated to the Centenary Annivessary of Ivan Petrovskii: 20 Joint Mathematical Society. – Moskow, May 22–27, 2001. Book of Abstracts. – С. 351–352.