УДК 534.222.2

Асланов С.К.

Одесский национальный университет имени И.И. Мечникова,
кафедра теоретической механики

К теории неустойчивости фронта газовой детонации

Раскрывается принципиальная некорректность получения широко известного критерия неустойчивости детонационных волн. Соответствующий математический анализ позволяет получить правильный результат.

Теоретическое объяснение экспериментально наблюдаемой внутренней пространственно-временной структуры детонационного процесса, распространяющегося в газовых смесях, было дано в [1,2]. С этой целью исследовалась устойчивость стационарной плоской детонационной волны по отношению к искривляющим ее возмущениям. В качестве модели процесса детонации использовался стационарный двухфронтовой комплекс, состоящий из ударной волны и следующей за ней на фиксированном расстоянии l_1 плоскости мгновенного воспламенения. Зона индукции химреакции, разделяющая эти два фронта, характеризуется временем задержки, которое в данном случае идентично времени реакции. Его величина τ, будучи, вообще говоря, обратно пропорциональной скорости реакции, в рамках закона Аррениуса представляется выражением

$$\tau(T) = K\exp(E_a / RT), \tag{1}$$

если ограничиться главной температурной зависимостью. Здесь E_a – энергия активации химической реакции, R – газовая постоянная, T – местная температура.

В рассматриваемой простейшей стационарной модели исходная горючая смесь, сжатая в ударном фронте до давления p_1 и нагретая до температуры T_1, не реагирует при этих значениях, то есть на протяжении всей зоны индукции. Затем по истечении периода задержки $\tau_1 = \tau(T_1) = K\exp(E_a / RT_1)$ она во фронте сгорания (скачке разрежения) мгновенно преобразуется в конечные продукты с параметрами $p_2 < p_1$ и $T_2 > T_1$, отвечающими самоподдерживающемуся режиму детонации Жугэ. Таким образом, используемая модель базируется на предположении

$$E_a/(RT_1) >> 1, \tag{2}$$

делающем скорость химической реакции во всем промежутке индукции исчезающее малой за счет большой энергии активации: $\exp(-E_a / RT_1) << 1$. При этом период задержки воспламенения $\tau_1 = K\exp(E_a / RT_1)$ играет роль основного модельного масштаба детонационного процесса, определяя протяженность зоны индукции $l_1 = V_1\tau_1$, где V_1 – скорость движения ударно-сжатой исходной смеси.

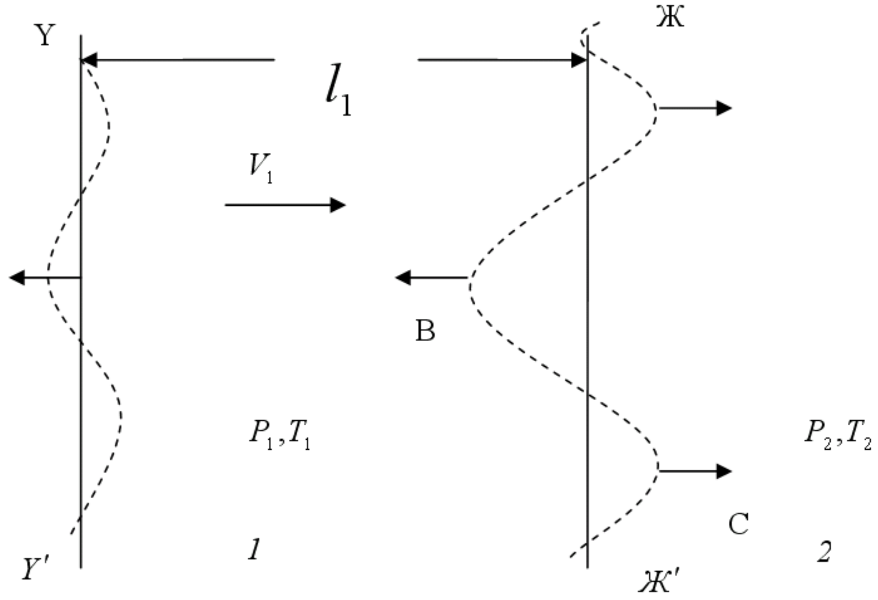

Рис. 1 *Схема модели процесса*

Период индукции воспламенения согласно (1) будет испытывать соответствующее изменение $\Delta\tau$ относительно своего стационарного значения τ_1, если температура ударно-сжатой смеси «1» получает по отношению к T_1 некоторое возмущение ΔT (в частности, за счет неоднородности ее состава) в направлении, поперечном к распространению детонационной волны (D).

В результате фронт сгорания $ЖЖ'$, представляющий ее заднюю границу, приобретает извилистую форму ABC (рис. 1, пунктир).

Под действием разности давлений $(p_1 - p_2) > 0$ исходная смесь «1», попавшая во впадины A(C), будет адиабатически расширяться в сторону окружающих продуктов «2», охлаждаясь при этом. Напротив, продукты «2», попавшие в выступ B, будут адиабатически сжиматься и нагреваться, подвергаясь обжатию со стороны окружающего ударно-сжатого газа «1» под действием того же перепада давления.

Такое приращение (снижение) температуры газа в выступах (впадинах) влечет за собой соответственно уменьшение (увеличение) задержки воспламенения τ, а значит, протяженности зоны индукции l_1. Это, в свою очередь, приводит к росту амплитуды волнообразования ABC на фронте сгорания $ЖЖ'$, ускоряя (замедляя) соответствующие участки переднего ударного фронта YY'. Наибольшей величины адиабатическое охлаждение газа во впадинах A(C) будет достигать в предельном случае, когда перепад давления $(p_1 - p_2)$ полностью разгрузится. Тогда, пользуясь адиабатой Пуассона и уравнением Клапейрона, получим

$$\Delta T_{\max} = T_a - T_1 = -T_1 \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{1-\frac{1}{\gamma}} \right], \tag{3}$$

где T_a – температура адиабатического расширения, γ – отношение теплоемкостей

Тем самым детонационная волна в целом оказывается покрытой прогрессивно нарастающими со временем волнообразными искажениями первоначально плоской стационарной формы. В качестве требования, достаточного для обеспечения такой неустойчивости, было предложено следующее условие:

$$\Delta\tau \geq \tau_1, \tag{4}$$

Однако дальнейший вывод количественного критерия существенно базируется на принципиальной математической некорректности, что ставит под сомнение окончательный результат. Ниже удается устранить вскрытую ошибку, и с помощью правильного математического анализа, исправить известный критерий Щелкина для неустойчивости детонации.

Разложение в ряд Тейлора левой части (4) содержит лишь главный линейный член [1,2]

$$\Delta\tau = \left. \frac{d\tau}{dT} \right|_{T=T_1} (T - T_1), \tag{5}$$

что отождествляет $\Delta\tau$ с дифференциалом $d\tau$ функции $\tau(T)$ в точке $T = T_1$, который является бесконечно малой величиной. Последняя, по определению, есть переменная величина, которая при $T \to T_1$ имеет пределом нуль [3], а следовательно, никак не может быть ограничена снизу. В таком случае условие (4) лишается всякого смысла, ибо справа стоит конечная фиксированная величина – основной масштаб процесса (задачи) τ_1.

Поэтому требование (4) может быть использовано лишь для конечной величины приращения $\Delta\tau$. А это, в свою очередь, требует удержания бесконечно большого числа членов в степенном разложении $\Delta\tau$ в ряд Тейлора:

$$\Delta\tau = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{d^n\tau}{dT^n} \right)_{T=T_1} (T - T_1)^n \tag{6}$$

Покажем, что все отброшенные [1, 2] слагаемые имеют тот же порядок, что и сохраненный в (5) первый член (6). Выполняя дифференцирование (1), находим

$$\left. \frac{1}{\tau_1} \frac{d\tau}{dT} \right|_{T=T_1} = -\frac{E_a}{RT_1^2}, \qquad \left. \frac{1}{\tau_1} \frac{d^2\tau}{dT^2} \right|_{T=T_1} = \left(-\frac{E_a}{RT_1^2} \right)^2 \left(1 + \frac{RT_1}{E_a} \right)$$

Последнее слагаемое в скобке исчезает в связи с модельным предположение (2). Аналогично продолжая дифференцирование, в общем случае будем иметь

$$\left. \frac{1}{\tau_1} \frac{d^n\tau}{dT^n} \right|_{T=T_1} = \left(-\frac{E_a}{RT_1^2} \right)^n$$

Подстановка этого в (6) приводит к степенному ряду

$$\frac{\Delta\tau}{\tau_1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u^n}{n!}, \qquad u = \frac{E_a}{RT_1}\left(1 - \frac{T}{T_1}\right), \tag{7}$$

который строго суммируется, поскольку относится к представлению известной функции [3]

$$\exp u = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^n}{n!} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u^n}{n!}, \tag{8}$$

Таким образом, окончательно получаем для (7)

$$\frac{\Delta\tau}{\tau_1} = e^u - 1$$

откуда по условию (4), т.е. $(\Delta\tau/\tau_1) \geq 1$, можно найти логарифмированием $u \geq \ln 2 = 0.693$, или

$$\frac{E_a}{RT_1}\left(1 - \frac{T}{T_1}\right) \geq \ln 2, \tag{9}$$

Поскольку диапазон сходимости ряда (8) является неограниченным [3], в нем может использоваться любая (конечная по (9)) величина *u*. В качестве приращения температуры $\Delta T = T - T_1$ можно принять, следуя [1, 2] его максимальное значение (3), отвечающее полной разгрузке возмущения давления. Тогда условие (9) приобретает смысл достаточного критерия неустойчивости детонационной волны

$$\frac{E_a}{RT_1}\left(1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{1-\frac{1}{\gamma}}\right) \geq \ln 2, \tag{10}$$

К его достоинствам следует прежде всего отнести то, что он выведен для возмущений конечной амплитуды, т.е. возмущений нелинейного типа.

С позиции теории малых (линеаризованных) возмущений, путем строгого математического подхода к решению задачи нами [4] был получен необходимый и достаточный критерий неустойчивости детонационной волны в рассматриваемой модели. В рамках зависимости (1) он представляется следующим образом:

$$(\gamma_1 - 1)\frac{E_a}{RT_1}\frac{(\delta - 1)M_1^2}{A} > 1, \qquad A = (1 + M_1)\frac{\gamma_2(\delta - 1) + 1}{\gamma_2(\delta - 1) + 1 + \delta} \tag{11}$$

где $\delta = \rho_1/\rho_2$, M – число Маха, ρ – плотность, γ – отношение теплоемкостей; индексы соответствуют номерам областей ударно-сжатого исходного газа (“1”) и продуктов детонации (“2”).

Сравнение этого критерия (11) с таковым (10) произведем на примере [1,2] реального случая детонации, распространяющейся со скоростью D = 1.7 км/с (M_0 = 5) в газе при T_0 = 290 К, T_1 = 1650К, R = 1.987 кал/(моль·К), E_a = 40000 кал/моль считая $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$ = 1.4. В результате будем иметь $\delta = 3$, $M_1^2 = 0.17$;

$(E_a / RT_1) > B_{()}$; $B_{(10)} = 3.85$; $B_{(11)} = 5.73$ при $\left(E_a / RT_1\right) = 12.2$, что действительно согласуется с модельным требованием (2).

Как и следовало ожидать, диапазон неустойчивости относительно возмущений конечной амплитуды (10) оказывается шире, нежели для бесконечно малых (линейных) возмущений, поскольку первые могут обеспечивать более интенсивную положительную обратную связь в области химической реакции (задержки “1”)

В заключение следует заметить, что вскрытая выше некорректность математического характера при выводе критерия [1,2], а именно

$$\frac{E_a}{RT_1}\left[1-\left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{1-\frac{1}{\gamma}}\right] \geq 1$$

целиком повторена в [5].

Литература:

1. *Щелкин К.И.* Два случая неустойчивого горения // Журнал экспериментальной и теоретической физики. – 1959 – Т. 36. № 2. – С. 600-606.
2. *Щелкин К.И., Трошин Я.К.* Газодинамика горения М.: Наука – 1963. – 255 с.
3. *Бронштейн И.Н., Семендяев К.А.* Справочник по математике. – М.: ГИТТЛ. – 1953 – 608с.
4. *Асланов С.К.* Критерий неустойчивости детонации Чепмена – Жуге в газе. // Доклады АН СССР. – 1965 – Т. 163, №3. – С 667-670.
5. *Щетинков Е.С.* Физика горения газов. – М.: Наука. – 1965. – 739с.

Асланов С.К.

До теорії нестійкості фронту газової детонації

АНОТАЦІЯ

Розкривається принципова некоректність отримання широко відомого критерію нестійкості детонаційних хвиль. Відповідний математичний аналіз дозволяє отримати правильний результат.

Aslanov S.K.

About the instability theory of gaseous detonation front

SUMMARY

The fundamental incorrectness of well-known detonation wave instability criterion derivation was shown. By the appropriate mathematical analysis this error was eliminated. As a result the correct criterion was obtained.