

Бойко Ю.И., Копыт Н.Х.

*Одесский национальный университет имени И. И. Мечникова
Проблемная научно-исследовательская лаборатория №1*

О возможности расширения модели сплошной среды по Эйлеру

Отмечено, что возможность протяженного существования элементов среды в ее модели по Эйлеру определяется возможностью расширения модели через интегральный вариационный принцип. В геометрическом рассмотрении получающихся при этом через уравнение синус-Гордона солитонных решений показана особая роль ортогональности базиса их описания. В нем возможно упрощение этого уравнения до уравнения циклического процесса (маятника). Такая лоренц-инвариантность локальной метрики (солитона) может быть признаком физического существования солитонного этапа возмущенного состояния среды.

В механике на модель сплошной среды Эйлера обычно смотрят, как на некоторый этап развития ньютоновых представлений, отражаемый такой формой уравнения переноса импульса

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + (\bar{v} \bar{\nabla}) \bar{v} = -\frac{\bar{\nabla} p}{\rho}. \quad (1)$$

Параметры среды здесь относятся к ее состоянию (ρ – плотность, p – давление) и движению (v – скорость). В действительности при таком подходе проявляются проблемы изоморфизма этих моделей.

Так из принятых математических записей параметра ρ в ньютоновой и эйлеровой модели соответственно (для компоненты x «радиус-вектора») [1]

$$\rho_{(x)} = m_{(a)} \delta(x - a), \quad \rho_{(x)} = \frac{dm}{dx} \quad (2)$$

следует, что связь между интегральным параметром массы m и локальным параметром плотности ρ в этих моделях качественно различна. Если плотность в модели Эйлера, построенная с пониманием сплошности как непрерывности геометрических точек, соответствует пониманию операции предельного перехода в евклидовом пространстве E^3 , то плотность в модели Ньютона, построенная через δ – функцию, не входящую даже в гильбертово пространство, требует обобщения предельного перехода на топологическое пространство.

Относительно введения сил давления следует сказать, что уже линейное приближение (1), совместно с уравнением непрерывности дающее классическую теорию звука (развития бесконечно малых возмущений среды), требует термодинамической трактовки давления (наряду с термодинамическим пониманием скорости звука как

$c = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_{s=const}}$ – адиабатичность возмущения, удельная энтропия s сохраняется). С одной стороны, это и приближает к нью-

тоновой методологии, позволяя и для поверхностных сил давления ввести потенциал их объемного действия (изобарно-изоэнтروпийный термодинамический потенциал единицы массы – h). С другой стороны, получаемые при этом через (1) кинематические ограничения для такого элемента среды [2]

$$\frac{\bar{\nabla} p}{\rho} = \bar{\nabla} h \rightarrow \text{rot} \bar{v} = \text{const} \quad (3)$$

сводятся лишь к требованию сохранения его вращательного состояния, не создавая геометрических ограничений (это соответствует неопределенности нормы элемента среды и в ньютоновой модели при использовании первой формы (2), но противоречит заданию его геометрической точкой в аксиоматическом определении этой модели).

Все же в частном случае (3) $\text{const} = 0$, эйлерову модель через квазивекторное представление можно максимально близко подвести к ньютоновой. Действительно, трактовка этого случая через векторные операции

$$\text{const} = 0 \rightarrow \text{rot} \text{grad} \varphi = 0, \bar{v} \equiv \bar{\nabla} \varphi, \quad (4)$$

совместно с основной теоремой векторного анализа (расширяющей понятие «радиус-вектора» в ньютоновой модели до понятий линейного векторного пространства, содержащего два класса математических объектов – скаляры ψ и векторы \bar{A})

$$F = \text{grad} \psi + \text{rot} \bar{A}, \quad \text{div} \bar{A} = 0,$$

позволяет получить

$$\bar{F} = \bar{A} = \bar{v} \rightarrow (\bar{\nabla})^2 \varphi = 0, \text{div} \bar{v} = 0. \quad (5)$$

Это значит, что при поступательном движении элементов несжимаемой среды движение любого из них полностью описывается движением любой точки области пространственного существования этого элемента – тривиальный результат по используемым определениям, но позволяющий снять, для этого случая, неопределенность понятия скорости в механике сплошной среды. При этом тождественно выполняется и операция второго порядка

$$\text{div} \text{rot} \bar{v} \equiv \bar{\nabla} [\bar{\nabla} \bar{v}] \equiv 0, \quad (6)$$

которую, совместно с (4), (5), можно рассматривать, как условие идентификации линейного векторного пространства описания этих моделей. Именно, при указанных ограничениях под элементом среды, отражающим ее движение в результате воздействия («точкой» описательного пространства), равным образом можно понимать геометрическую точку и часть поверхности (по (4) и (6)), а также и часть объема, охватываемую поверхностью – тело (уравнение Лапласа в (5) есть и использование потенциала φ в асимптотике волнового уравнения, соответствующей бесконечной фазовой скорости, и использование его в задаче Дирихле, по состоянию области как движению тела в целом после удара [3]).

В общем же случае, как то следует из работы самого Эйлера «Метод нахождения кривых линий...», его модель должна связываться с интегральным вариационным принципом

$$I_{(y)} = \int_{x_0}^{x_1} f(x, y, y') dx \rightarrow f'_{y'} - \frac{d}{dx} f'_{y'} = 0. \quad (7)$$

Если функция $y^0_{(x)}$ доставляет функционалу $I_{(y)}$ слабый (локальный) экстремум, то она должна являться решением дифференциального уравнения Эйлера-Лагранжа, понимаемого при таком необходимом и достаточном условии как основное уравнение механики, из которого может быть получена ньютонова модель движения материальной точки. Однако из сопоставления понятий нормы в классе C_0 непрерывных и классе C_1 непрерывно дифференцируемых функций следует, что сильный (локальный) экстремум (определяемый как экстремум в классе C_0) есть одновременно и слабый (локальный) экстремум (определяемый как экстремум в классе C_1). Соответственно, дифференциальное уравнение Эйлера-Лагранжа есть также и необходимое условие для сильного (локального) экстремума. Вопрос же о сочетании его с достаточностью условий для движения элемента среды, определяемого первой частью (вариационным принципом) соотношений (7) рассмотрим с привлечением понятий внутренней геометрии такого элемента. Это позволяет включить в изучение развития возмущения на нелинейной стадии и условия состояния самого элемента среды. Отражение его, в обобщение предыдущего, центром масс, дает возможность учета нелинейных признаков состояния лишь опосредованным способом, через статистический вес положений составляющих тела, в определении, и сопоставлением различных определений скорости [4].

При определенности поверхности такого элемента как регулярной (допускающей двукратное дифференцирование) во всей области ее задания мы возвращаемся к ньютоновой модели, в аспекте понятия тела как системы геометрических точек. Допустимость менее жестких требований к понятиям внутренней геометрии поверхностей исследовал Гильберт, на примере задания угла z между ортами u, v локального базиса поверхности уравнением синус-Гордона [5]

$$\partial^2 z / \partial u \partial v = \sin z. \quad (8)$$

Он показал, что при этом поверхность постоянной отрицательной кривизны как целое в евклидовом пространстве E^3 существовать не может. Эквивалентная обратная формулировка – существует кусками с особенностями, т.е. происходит выделение частей из целого, сопровождаемое при этом проявлением их фрактальных и солитонных свойств. Для дальнейшего, в частности имея в виду распространение солитонных понятий на распад струй жидкости [6], рассмотрим представление такого куска псевдосферой. В обоснование такого выбора заметим, что псевдосфера образуется вращением трактрисы. Последняя же весьма значима в плане геометризации динамического воздействия, поскольку ее эволюта (кривая центров кривизны, фундаментального понятия внутренней геометрии) есть цепная линия (геометризация проявления потенциальных сил (тяжести) в действии на нерастяжимую (т.е. удовлетворяющую требованиям Гаусса по внутренней геометрии) весоую кривую) [7].

Поверхность псевдосферы, за исключением таких ее особенностей как ребро возврата и острия, удовлетворяет требованию постоянной отрицательной кривизны. При этом такое ее развитие отражается преобразованием элемента площади (четырехугольника чебышевской сети [5]) по (8). Таким способом в задачу о развитии возмущений эйлеровой среды уравнение синус-Гордона вводится как эволюционное уравнение. Что касается особенностей (где (8) становится тождественным нулем), то эти геометрические места позволяют подключать к описанию такого элемента понятие фрактальности, как допустимого сочетания непрерывности с недифференцируемостью. Развитие этих областей может быть представлено в одномерном базисе, что, без противоречия подходу Гильберта, можно считать формой преобразования, отвечающей таким особенностям. Снижение размерности базиса описания есть признак автомодельности, что соответствует сопоставлению фрактальных и солитонных образов с автомодельностью второго рода, как промежуточной асимптотикой [8].

Применительно к геометризации преобразований проблема размерности базиса пространства описания может быть затронута более общо. В физическом подходе, когда в описательном пространстве время выделяется как особая координата, геометризация есть кинематика процесса в определенный момент времени. Время играет роль параметра при рассмотрении процесса по всем координатам базиса в физическом пространстве, будучи в этом смысле всем им коллинеарно. Такая форма смещения координат, согласуясь по этому качественному признаку с преобразованиями Лоренца и автомодельности, вместе с тем ведет и к более специальным симметриям описания. Равноправность всех координат при математическом подходе к описательному пространству наиболее просто достигается введением в нем ортогонального базиса. При этом время как такая геометрическая координата получается из физического времени t (с признаком коллинеарности) его ортогонализацией через операцию $t \rightarrow it$, алгебраическим признаком которой есть $i \cdot i = -1$ [1]. Процедура возврата из описательного пространства в пространство физического наблюдения процесса состоит в отбрасывании мнимой части результата описания, что соответствует теореме о проекции [9], важными содержательными частями которой являются также определяемость нормы в этом пространстве и среднеквадратичное представление погрешности наблюдения.

Возвращаясь на основе указанных представлений к преобразованию (8) получаем, что в одной координате базиса оно существует как

$$\frac{d^2 z}{d(i\omega t)^2} = \sin z,$$

т.е. уравнение маятника с циклической частотой ω . Подчеркнем, что речь идет не о замене $u = v = i\omega t$, а о их равноправном существовании в ортогональном базисе, т.е. о расширении алгебраической структуры уравнения синус-Гордона на использование еще одной координаты описательного базиса, для обобщения наблюдения за угловой переменной, подобно тому как имеет место обобщение оператора Лапласа оператором Даламбера в пространстве Минковского. Математически это соответствует тому, что замкнутая осесимметричная поверх-

ность может быть получена как в процессе изгиба куса поверхности (в соответствии с условиями внутренней геометрии), так и в процессе вращения (поворота) образующей (как накрывающая [5]). Это положение нашло отражение в моделировании уравнением синус-Гордона солитонных преобразований, в механической модели Скотта непосредственно, и в понятии кинка с выходом на многосолитонные решения [10]. Рассмотренное получение математического элемента позволяет говорить о лоренц-инвариантности его состояния на таком этапе представления им развития возмущения, что есть существенный аргумент в пользу его физического существования.

Таким образом, проведенное рассмотрение служит обоснованию солитонных решений в модели Эйлера как отражению представления нелинейной стадии возмущений среды физическим образом солитона.

Литература:

1. Зельдович Я.Б., Мышкис А.Д. Элементы прикладной математики. – М.: Наука, 1967. – 648с.
2. Бойко Ю.И., Копыт Н.Х. Диспергирование сплошной среды (как выделение частей системы) в ее модели по Эйлеру. // Физика аэродисперсных систем. – 2006. – Вып. 43. – С.5–8.
3. Седов Л.И. Механика сплошной среды. – Т.2. – М.: Наука. – 1970. – 568с.
4. Бойко Ю.И., Копыт М.Х. Розпад суцільного середовища як процес автотодельності другого роду // Фізика в Україні. Всеукраїнський з'їзд. – Одеса. – 3-6 жовтня, 2005. – С.87.
5. Позняк Э.Г., Попов А.Г. Геометрия уравнения sin-Гордона // Проблемы геометрии. Итоги науки и техн. – 1991. – Т.23. – С.99 – 130.
6. Бойко Ю.И., Копыт Н.Х. О подобии диспергирования жидкости под действием инерционных и гравитационных сил. // Физика аэродисперсных систем. – 2003. – Вып. 40. – С.23-29.
7. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике. – М.: Наука, 1986. – 544с.
8. Баренблатт Г.И. Подобие, автотодельность, промежуточная асимптотика. – Л.: Гидрометеиздат, 1982.- 255с.
9. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. – М.: Наука, 1973. – 832с.
10. Ньюэлл А. Солитоны в математике и физике. – М.: Мир, 1989. – 326с.

Бойко Ю.І., Копит М.Х.

Про можливість розширення моделі суцільного середовища по Ейлеру

АНОТАЦІЯ

Зазначено, що можливість об'ємного існування елементів середовища в його моделі по Ейлеру обумовлена можливістю її розширення через інтегральний варіаційний принцип. В геометричному розгляді отримуваних при цьому через рівняння синус-Гордона солітонних рішень показано особливу роль ортогонального базису їх опису. В ньому це рівняння спрощується до рівняння циклічного процесу (маятника). Така ж лоренц-інваріантність локальної метрики (солітона) може бути ознакою фізичного існування солітонного етапу збуреного стану середовища.

Boyko Yu. I., Kopyt N. Kh.

On the possibility of Euler's model of continuous media expansion

SUMMARY

It was noted that the opportunity of bulk existence of media elements in Euler formalism was defined by this model expansion possibility by integrated variational principle. By geometrical consideration of sinus - Gordon equation soliton solutions the special role of their description basis orthogonality was shown. This equation could be reduced to cyclic process (pendulum) equation. Such Lorenz-invariancy of the local metrics (soliton) could be a sign of physical existence of soliton stage of the environment excited state.