Г. Є. Самкова, Н. В. Шарай, О. П. Мойсеєнок

Звичайні диференціальні рівняння та системи звичайних диференціальних рівнянь

НАВЧАЛЬНО-МЕТОДИЧНИЙ ПОСІБНИК

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ОДЕСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ імені І. І. МЕЧНИКОВА
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ, ФІЗИКИ ТА ІНФОРМАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ

Г. Є. Самкова, Н. В. Шарай, О. П. Мойсеєнок

Звичайні диференціальні рівняння та системи звичайних диференціальних рівнянь

НАВЧАЛЬНО-МЕТОДИЧНИЙ ПОСІБНИК

ОДЕСА
ОНУ
2019

УДК 517.91:517.922:517.926(075.8)
С17

Рецензенти:

В. М. Євтухов, доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри диференціальних рівнянь, геометрії і топології ОНУ імені І. І. Мечникова;

В. М. Шинкаренко, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри математичних методів аналізу економіки Одеського державного економічного університету;

Н. В. Крапива, кандидат фізико-математичних наук, професор кафедри вищої математики та моделювання систем Одеського національного політехнічного університету.

Рекомендовано до друку науково-методичною радою
ОНУ імені І. І. Мечникова.
Протокол № 2 від 22 квітня 2019 р.

Самкова Г.Є.
С17 Звичайні диференціальні рівняння та системи звичайних диференціальних рівнянь : навч.-метод. посіб. / Г. Є. Самкова, Н. В. Шарай, О. П. Мойсєєнок. – Одеса : Одес. нац. ун-т ім. І. І. Мечникова, 2019. – 112 с.
ISBN 978-617-689-349-3

Викладені основні теоретичні основи теорії звичайних диференціальних рівнянь та систем цих рівнянь. Наведені основні означення, теореми та методи розв’язування різних типів задач. Для ілюстрації основних методів розв’язування диференціальних рівнянь та систем диференціальних рівнянь наведено приклади до кожного типу рівнянь та систем.

Призначено для студентів вищих навчальних закладів, зокрема для студентів, які вивчаються за спеціальностями: 111 «Математика», 113 «Прикладна математика», 123 «Комп’ютерна інженерія».

УДК 517.91: 517.922; 517.926(075.8)

ISBN 978-617-689-349-3

Зміст

Розділ 1. Рівняння першого порядку, розв'язані відносно похідної

§ 1.1. Основні поняття та теореми

Означення. *Диференціальним рівнянням називається рівняння, що містить хоча б одну похідну невідомої функції.*

Невідомі функції можуть залежати від однієї ($y = y(x)$) або декількох змінних ($y = y(x_1, \dots, x_n)$). У зв'язку з цим диференціальні рівняння поділяють на два класи :

звичайні диференціальні рівняння

$$F\left(x, y, y', \dots, y^{(n)}\right) = 0 \tag{1.1}$$

та рівняння з частинними похідними

$$\Phi(x_1, x_2, \dots, x_n, y, \frac{\partial y}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial y}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2}, \dots, \frac{\partial^m y}{\partial x_n^m}) = 0,$$

де F, Φ – відомі скалярні функції своїх аргументів.

Означення. *Порядком диференціального рівняння називається порядок найвищої похідної невідомої функції, що входить до рівняння.*

Наприклад, рівняння

$$F(x, y, y') = 0 \tag{1.2}$$

– звичайне диференціальне рівняння 1-го порядку, а рівняння (1.1) - звичайне диференціальне рівняння n-го порядку.

Означення. *Розв'язком диференціального рівняння (1.2) на проміжку*

$I \subseteq \mathbb{R}$ *називається функція* $y = \varphi(x)$ *така, що*

1) $\varphi: I \to \mathbb{R}, \ \varphi \in C^1(I)$;
2) *стверджується тотожність*
   $F(x, \varphi(x), \varphi'(x)) \equiv 0$ *при* $x \in I$.

Наприклад, функція $y = \cos x + \sin x + 0.5x^2$ є розв'язком рівняння $y' = -\sin x + \cos x + x$ при $x \in (-\infty, +\infty)$. Дійсно, підставивши задану функцію у рівняння, маємо тотожність

$$\sin x - \cos x + x - \sin x + \cos x - x \equiv 0 \ \forall x \in (-\infty, +\infty).$$

Отже, функція $y = \cos x + \sin x + 0.5x^2$ є розв'язком рівняння при $x \in (-\infty, +\infty)$.

Означення. *Графік розв'язку диференціального рівняння називається інтегральною кривою.*

Якщо рівняння (1.2) можливо розв'язати щодо похідної, то одержимо рівняння

$$y' = f(x, y), \tag{1.3}$$

розв'язане відносно похідної у нормальній формі Коші. Іноді рівняння (1.3) (при деяких припущеннях) зручно перетворити до вигляду

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0. \tag{1.4}$$

Рівняння (1.4) – це диференціальна форма рівняння першого порядку, яке розв'язане відносно похідної. На відміну від (1.3), у рівнянні (1.4) змінні x та y є рівноправними.

Однією з важливих задач теорії диференціальних рівнянь є задача Коші. Для рівняння (1.3) вона ставиться так: з усіх розв'язків рівняння (1.3) знайти такі, які задовольняють умові

$$y(x_0) = y_0. \tag{1.5}$$

Числа x_0, y_0 називають початковими значеннями, а умову (1.5) – початковою умовою. Задача Коші записується у вигляді:

$$\begin{cases} y' = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0. \end{cases} \tag{1.6}$$

З геометричної точки зору розв'язати задачу Коші (1.6) означає знайти всі інтегральні криві рівняння (1.3), які проходять через задану точку (x_0, y_0) площини *XOY*.

Теорема Пікара-Коші ***(існування та єдиності розв'язку задачі Коші)***

Нехай

1) функція $f \in C(D),\ D = \{(x, y) : |x - x_0| \le a,\ |y - y_0| \le b,\ a > 0, b > 0, a, b = const\}$;

2) функція $f(x, y)$ *задовольняє умову Ліпшиця за змінною y в D, тобто* $\exists L > 0$ *таке, що для* $\forall (x, y_1), (x, y_2) \in D$ *:*

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| < L|y_1 - y_2|.$$

Тоді існує і притому єдиний розв'язок задачі Коші (1.6), означений на проміжку $|x-x_0| \le h \le a \quad (0 < h = const)$.

Умову 2) можливо замінити більш сильною умовою:

2.1) функція $f(x,y)$ має обмежену в D частинну похідну за змінною y. Ця умова є достатньою для виконання умови Ліпшиця за змінною y в D.

Означення. *Загальним розв'язком рівняння (1.3) в області G змінних x та y називається однопараметрична сім'я функцій*

$$y = \varphi(x,c), \tag{1.7}$$

неперервно-диференційованих за x та неперервних за c, яка задовольняє умовам:

1) *функція (1.7) є розв'язком рівняння (1.3) для кожного припустимого значення параметра c;*
2) *для довільної точки $(x_0, y_0) \in G$ існує таке значення c_0 сталої c, що функція $y = \varphi(x, c_0)$ є розв'язком задачі Коші (1.6).*

Ті значення, які може в загальному розв'язку рівняння (1.3) набувати параметр c, складають *множину припустимих значень параметру (та означаються* $\mathrm{E} \subseteq \mathbb{R}$).

Приклад 1.1. *Перевірити, що сім'я функцій*

$$y = \frac{x^2}{2} + c \tag{1.8}$$

є загальним розв'язком рівняння $y' - x = 0$ в $\mathbb{R}^2$.

Розв'язання. 1) Функція $\varphi = \dfrac{x^2}{2} + c, \varphi \in C^{1,0}_{x,c}(\mathbb{R}^2)$, задовольняє даному рівнянню $\forall c \in \mathbb{R}$. Справді,

$$\left(\frac{x^2}{2} + c\right)' - x \equiv 0 \ \textit{при} \ x \in \mathbb{R}.$$

2) Задаємо довільну точку $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Покладемо в (1.8) $x = x_0, y = y_0$, тоді одержимо $c_0 = y_0 - \dfrac{x_0^2}{2}$. При $c = c_0$ в сім'ї (1.8) маємо розв'язок

$$y = \frac{x^2}{2} + (y_0 - \frac{x_0^2}{2}),$$

який задовольняє початкову умову (1.5).

__Означення.__ *Точка* (x_0, y_0) *називається точкою єдиності рівняння (1.3), якщо задача Коші (1.6) має єдиний розв'язок.*

__Означення.__ *Якщо інтегральна крива деякого розв'язку рівняння (1.3) складається тільки з точок єдиності рівняння, то будемо називати цей розв'язок частинним розв'язком рівняння.*

Частинний розв'язок можна одержати з формули загального розв'язку при чисельному значенні довільної сталої c.

__Означення.__ *Точка* (x_0, y_0), *для якої задача Коші (1.6) має більш одного розв'язку, називається особливою точкою рівняння (1.3).*

__Означення.__ *Якщо інтегральна крива деякого розв'язку рівняння (1.3) складається тільки з особливих точок рівняння, то будемо називати цей розв'язок особливим розв'язком рівняння.*

Особливий розв'язок не міститься у формулі загального розв'язку ні при якому припустимому значенні довільної сталої c.

__Означення__. *Якщо загальний розв'язок рівняння (1.3) неявно задано співвідношенням* $\Phi(x, y, c) = 0$, *то це співвідношення називають загальним інтегралом рівняння.*

У § 1.2 – 1.7 розглянемо звичайні диференціальні рівняння 1-го порядку, які розв'язані відносно похідної, різних типів.

§ 1.2. Рівняння з відокремленими змінними

__Означення.__ *Рівняння (1.4) вигляду*

$$X(x)dx + Y(y)dy = 0 \qquad (1.9)$$

називається рівнянням з відокремленими змінними.

Припустимо, що функції $X(x)$ та $Y(y)$ інтегруються, та перетворимо рівняння (1.9) у рівносильне рівняння

$$d\left(\int X(x)dx + \int Y(y)dy\right) = 0.$$

Після інтегрування останнього рівняння отримаємо загальний інтеграл рівняння (1.9):

$$\int X(x)dx + \int Y(y)dy + c = 0, \qquad (1.10)$$

де c - довільна дійсна стала. Сукупність всіх розв'язків рівняння (1.9) співпадає з сукупністю всіх функцій $y(x)$, які означені співвідношенням (1.10).

<u>Приклад 1.2.</u> *Розв'язати рівняння*

$$y^3dy - (x^2+1)dx = 0. \qquad (1.11)$$

<u>Розв'язання.</u> (1.11) – рівняння з відокремленими змінними вигляду (1.9). Проінтегруємо рівняння (1.11) та одержимо

$$\frac{y^4}{4} - \frac{x^3}{3} - x = c. \qquad (1.12)$$

(1.12) – загальний розв'язок рівняння (1.11) у вигляді загального інтегралу.

§ 1.3. Рівняння з відокремлюваними змінними

<u>Означення.</u> *Рівняння (1.4) називається рівнянням з відокремлюваними змінними, якщо воно має вигляд*

$$X_1(x)Y_1(y)dx + X_2(x)Y_2(y)dy = 0. \qquad (1.13)$$

Рівняння (1.13) зводиться до рівняння (1.9), якщо обидві його частини поділити на функцію $w(x,y) = X_2(x)Y_1(y)$. Одержимо рівняння $\frac{X_1(x)}{X_2(x)}dx + \frac{Y_2(y)}{Y_1(y)}dy = 0$, яке є рівнянням з відокремленими змінними. При цьому важливо не втратити розв'язки рівняння (1.13), які одночасно є розв'язками рівняння $w(x,y) = 0$, тобто рівняння $Y_1(y) \cdot X_2(x) = 0$.

Приклад 1.3. *Розв'язати рівняння*

$$x\frac{dy}{dx}-(y^2-y)=0. \qquad (1.14)$$

Розв'язання. Перепишемо рівняння (1.14) у вигляді (1.13):

$$xdy-(y^2-y)dx=0. \qquad (1.15)$$

Поділимо обидві частини рівняння (1.15) на функцію $w(x,y)=x(y^2-y)$. Одержимо:

$$\frac{dy}{y(y-1)}-\frac{dx}{x}=0 \quad \text{або} \quad -\frac{dy}{y}+\frac{dy}{y-1}-\frac{dx}{x}=0.$$

Інтегруємо і одержуємо $\ln|y-1|-\ln|y|-\ln|x|=\ln|c|$, або

$$\frac{y-1}{y}=cx \quad \text{або} \quad y=\frac{1}{1-cx},\ c\in\mathbb{R}\backslash\{0\}. \qquad (1.16)$$

При розв'язуванні рівняння (1.14) можливо втратити розв'язки, які одночасно є розв'язками рівняння $w(x,y)=0$, тобто рівняння $xy(y-1)=0$. Після перевірки встановлюємо, що $x=0$ не є розв'язком рівняння (1.14), а $y=0, y=1$ – його розв'язки. Розв'язок $y=1$ – це розв'язок (1.14), який можливо включити у сім'ю розв'язків (1.16), доповнивши множину припустимих значень параметра c значенням $c=0$. У підсумку

$$y=\frac{1}{1-cx},\ c\in\mathbb{R},$$

– загальний розв'язок рівняння (1.14). Рівняння (1.14) також має розв'язок $y=0$.

Зауваження. Слід відмітити, що $x=0$ не є розв'язком рівняння (1.14). Але якщо заданим рівнянням було б рівняння (1.15), то $x=0$ – його розв'язок. Отже, перехід від однієї форми запису рівняння 1-го порядку до іншої не є рівносильним перетворенням.

Приклад 1.4. *Розв'язати рівняння*

$$\frac{dy}{dx}=\frac{3}{2}y^{\frac{1}{3}}$$

<u>Розв’язання.</u> Перепишемо рівняння у диференціальній формі (1.13):

$$dy=\frac{3}{2}y^{\frac{1}{3}}dx \qquad (1.17)$$

(1.17) – рівняння з відокремлюваними змінними. Поділимо обидві частини рівняння на функцію $w(x,y)=\frac{3}{2}y^{\frac{1}{3}}$. Отримаємо рівняння

$\frac{2}{3}\frac{dy}{y^{1/3}}=dx$, та $y^{\frac{2}{3}}=x+c$ – загальний інтеграл рівняння (1.17). Його загальний розв’язок має вигляд

$$y=(x+c)^{\frac{3}{2}},\ c\in\mathbb{R}\ .$$

Рівняння $w(x,y)=0$, тобто $\frac{3}{2}y^{\frac{1}{3}}=0$, має розв’язок $y=0$, причому $y=0$ – розв’язок рівняння (1.17), якого не містить загальний розв’язок ні при якому значенні параметру c. Помітимо, що $y=0$ – це особливий розв’язок рівняння (1.17). Через кожну точку $(x_0,0)$ інтегральної кривої $y=0$ проходить ще хоч одна інтегральна крива рівняння (1.17), наприклад, інтегральна крива $y=(x-x_0)^{\frac{3}{2}}$.

<u>Зауваження.</u> Для того, щоб розв’язати задачу Коші спочатку треба знайти загальний розв’язок або загальний інтеграл рівняння. Далі знайти значення параметру, який задовольняє початкову умову.

<u>Приклад 1.5.</u> *Розв’язати задачу Коші*

$$\begin{cases}(1+x^2)y'+y\sqrt{1+x^2}=xy, & (1.18)\\ y(0)=1. & (1.19)\end{cases}$$

<u>Розв’язання.</u> Перепишемо рівняння (1.18) у диференціальній формі (1.13):

$$(1+x^2)dy+y(\sqrt{1+x^2}-x)dx=0 \qquad (1.20)$$

(1.20) – рівняння з відокремлюваними змінними. Розділимо змінні, одержуємо рівняння вигляду (1.9):

$$\frac{1}{y}dy + \frac{\sqrt{1+x^2}-x}{(1+x^2)}dx = 0.$$

Проінтегруємо його: $\frac{1}{y}dy + \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{x}{(1+x^2)}dx = 0,$

$\ln|y| + \ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right| - \frac{1}{2}\ln\left|1+x^2\right| = \ln|c|,$

звідки $y = \frac{c\sqrt{1+x^2}}{x+\sqrt{1+x^2}}$ – загальний розв’язок рівняння (1.20), $c \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

При перетворенні рівняння (1.18) до рівняння (1.20) можливо втратити розв’язок $y=0$, але цей розв’язок можна додати до загального, доповнивши множину припустимих значень параметра c значенням $c=0$. Таким чином, всі розв’язки даного рівняння подаємо у вигляді:

$$y = \frac{c\sqrt{1+x^2}}{x+\sqrt{1+x^2}},\ c \in \mathbb{R}.$$

Щоб знайти розв’язок, який відповідає початковій умові (1.19), покладемо у загальному розв’язку $x=0, y=1$; одержимо, що $c=1$. Остаточно, розв’язком задачі Коші (1.18) - (1.19) буде функція $y = \frac{\sqrt{1+x^2}}{x+\sqrt{1+x^2}}$.

<u>Приклад 1.6</u>. *Розв'язати рівняння*

$$y' = (x+y-1)^2. \tag{1.21}$$

<u>Розв’язання.</u> Введемо нову невідому функцію $z(x) = x+y-1$. Тоді $y' = z'-1$ та одержимо рівняння:

$$\frac{dz}{z^2+1} = dx, \tag{1.22}$$

де $\omega(x,y) = z^2+1 \neq 0$. Загальний інтеграл рівняння (1.22) має вигляд: $arctgz = x+c$, $c \in \mathbb{R}$, і, як наслідок, загальний розв'язок рівняння (1.22): $z = tg(x+c)$.

Вернемося до невідомої функції $y = y(x)$. загальний розв'язок рівняння (1.21) має вигляд $y = tg(x+c) - x + 1,\ c \in \mathbb{R}$.

§ 1.4. Однорідні рівняння

<u>Означення.</u> *Функція $M(x, y)$ називається однорідною степені однорідності m, якщо $\forall t > 0$ виконано:*

$$M(tx, ty) = t^m M(x, y).$$

<u>Означення.</u> *Рівняння (1.4) називається однорідним, якщо функції $M(x, y)$ та $N(x, y)$ є однорідні функції однакової степені однорідності.*

<u>Зауваження.</u> Однорідне рівняння зводиться до рівняння з відокремлюваними змінними за допомогою заміни $z(x) = \dfrac{y(x)}{x}$.

<u>Приклад 1.7.</u> *Розв'язати рівняння*

$$(\sqrt{x^2 - y^2} + y)dx - xdy = 0. \tag{1.23}$$

<u>Розв'язання.</u> (1.23) – однорідне рівняння першої степені однорідності, оскільки функції $M(x, y) = \sqrt{x^2 - y^2} + y$ та $N(x, y) = -x$ є однорідними функціями 1-ї степені однорідності. Дійсно, за означенням $\forall t > 0$:

$$M(tx, ty) = \sqrt{(tx)^2 - (ty)^2} + ty = t(\sqrt{x^2 - y^2} + y) = tM(x, y);\ N(tx, ty) = -tx = tN(x, y).$$

Розв'яжемо рівняння (1.23) щодо похідної:

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{1 - \left(\frac{y}{x}\right)^2} + \frac{y}{x}. \tag{1.24}$$

В рівнянні (1.24) зробимо заміну (введемо нову невідому функцію) $z(x) = \dfrac{y(x)}{x}$. Так як $y = xz,\ y' = z + xz'$, то одержимо рівняння

$$x\frac{dz}{dx} = \sqrt{1 - z^2}. \tag{1.25}$$

(1.25) – рівняння з відокремлюваними змінними. Розв'яжемо його:

$$\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = \frac{dx}{x}, \text{ якщо } \omega(x,z) = x\sqrt{1-z^2} \neq 0.$$

Загальний інтеграл рівняння (1.25): $\arcsin z = \ln cx, c \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

Отже, загальний інтеграл однорідного рівняння (1.23):

$\arcsin \frac{y}{x} = \ln cx, c \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

Розв’яжемо рівняння

$$\omega(x,z) = 0: \ \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ y = \pm x. \end{array}\right.$$

Рівняння (1.23) має розв’язок $x = 0$. Функції $y = \pm x$ – також є розв’язками однорідного рівняння (1.23), яких не має у загальному розв’язку ні при якому значенні $c \in \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

Остаточно, всі розв’язки рівняння (1.23) надаємо у сукупності:

$$\left[\begin{array}{c} \arcsin\frac{y}{x} = \ln cx, c \in \mathbb{R}\backslash\{0\}, \\ x = 0, \\ y = \pm x. \end{array}\right.$$

<u>Приклад 1.8.</u> *Розв’язати задачу Коші:*

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = \frac{x+2y}{2x-y}, & (1.26) \\ y(1) = 1. & (1.27) \end{cases}$$

<u>Розв’язання.</u> Рівняння (1.26) – однорідне рівняння. Отже, $\frac{dy}{dx} = \frac{1+2\frac{y}{x}}{2-\frac{y}{x}}$.

Введемо нову невідому функцію $z(x) = \frac{y}{x}$. Тоді $y' = z + xz'$. Після заміни одержуємо рівняння: $z'x + z = \frac{1+2z}{2-z}$, або рівняння $\frac{2-z}{z^2+1}dz = \frac{dx}{x}$, яке є рівнянням з відокремленими змінними. Його загальний інтеграл: $2arctgz - 0.5\ln\left|z^2+1\right| = \ln|x| + c$. Повернемося до змінних x та y, отримуємо

$$2arctg\frac{y}{x}-0.5\ln\left|\left(\frac{y}{x}\right)^2+1\right|=\ln|x|+c\,. \qquad (1.28)$$

(1.28) – загальний інтеграл рівняння (1.26).

Для того, щоб знайти розв'язок, який задовольняє початковій умові, покладемо у (1.28) $x=1, y=1$, одержимо $c=\frac{\pi}{2}-0.5\ln 2$. Остаточно, розв'язок задачі Коші (1.26) – (1.27) – функція, яка неявно задана у вигляді інтеграла:

$$2arctg\frac{y}{x}-0.5\ln\left|\left(\frac{y}{x}\right)^2+1\right|=\ln|x|+\frac{\pi}{2}-0.5\ln 2\,.$$

§ 1.5. Лінійні рівняння першого порядку

<u>Означення.</u> *Звичайне диференціальне рівняння 1-го порядку (1.2) називається лінійним, якщо функція F є лінійною стосовно невідомої функції та її похідної.*

Лінійне диференціальне рівняння 1-го порядку можна представити у вигляді

$$A(x)y'+B(x)y=C(x)\text{, де } A,B,C\in C(I),\ I\subseteq\mathbb{R}.$$

Якщо при $x\in I\ A(x)\neq 0$, то поділивши обидві частини рівняння на $A(x)$, отримаємо канонічну форму лінійного рівняння

$$y'+p(x)y=q(x)\,. \qquad (1.29)$$

<u>Означення.</u> *Якщо $q(x)\not\equiv 0$ при $x\in I$, то рівняння (1.29) називається лінійним неоднорідним диференціальним рівнянням (ЛНР).*

<u>Означення.</u> *Якщо $q(x)\equiv 0$ при $x\in I$, то рівняння (1.29) називається лінійним однорідним диференціальним рівнянням (ЛОР).*

Звичайне лінійне однорідне диференціальне рівняння 1-го порядку має вигляд

$$y'+p(x)y=0\,. \qquad (1.30)$$

Про рівняння (1.30) будемо казати, що воно *відповідає* лінійному неоднорідному рівнянню (1.29).

Рівняння (1.30) є рівнянням з відокремлюваними змінними, його загальний розв'язок має вигляд

$$y = ce^{-\int p(x)dx} \qquad (1.31)$$

де c – довільна стала, $c \in \mathbb{R}$.

Існує декілька методів розв'язання лінійних неоднорідних рівнянь. Основними з них вважаються ***метод варіації сталої Лагранжа*** та ***u-v метод Бернуллі***. Розглянемо ці методи.

Метод варіації сталої Лагранжа. Відповідно до методу Лагранжа розв'язання ЛНР (1.29), у загальному розв'язку (1.31) відповідного ЛОР (1.30) введемо нову невідому диференційовану функцію $c = c(x)$ за формулою

$$y = c(x)e^{-\int p(x)dx}. \qquad (1.32)$$

З (1.32):

$$y' = c'(x)e^{-\int p(x)dx} - c(x)p(x)e^{-\int p(x)dx}. \qquad (1.33)$$

Підставимо (1.32) та (1.33) у рівняння (1.29) та отримаємо відносно $c'(x)$ рівняння з відокремлюваними змінними

$$c'(x) = q(x)e^{\int p(x)dx}, \text{ звідки}$$

$$c(x) = \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + c_1,$$

де c_1 – довільна дійсна стала. Загальний розв'язок ЛНР (1.29) одержимо у вигляді

$$y = \left(\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + c_1\right)e^{-\int p(x)dx}, \; c_1 \in \mathbb{R}.$$

Приклад 1.9. *Розв'язати рівняння*

$$(1+x)y' + y = \cos x.$$

Розв'язання. Це – лінійне неоднорідне рівняння. При $x \neq -1$ перепишемо його у канонічній формі (1.29):

$$y' + \frac{1}{1+x}y = \frac{\cos x}{1+x} \qquad (1.34)$$

Розв'яжемо відповідне лінійне однорідне рівняння

$$y' + \frac{1}{1+x} y = 0 \qquad (1.35)$$

Загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння (1.35) має вигляд (1.31):

$$y = \frac{c}{1+x}, c \in \mathbb{R}.$$

Відповідно до методу Лагранжа, введемо нову невідому диференційовану функцію $c = c(x)$ за формулою (1.32):

$$y = \frac{c(x)}{1+x}. \qquad \text{Тоді} \quad y' = \frac{c'(x)(1+x) - c(x)}{(1+x)^2}.$$

Підставимо y та y' у рівняння (1.34), маємо $c'(x) = \cos x$, звідки $c(x) = \sin x + c_1, c_1 \in \mathbb{R}$. Загальний розв'язок заданого лінійного неоднорідного рівняння:

$$y = \frac{\sin x + c_1}{1+x}, \text{ де } c_1 \text{ – довільна дійсна стала.}$$

<u>Метод Бернуллі (u-v метод).</u> Розв'язок лінійного неоднорідного рівняння (1.29) будемо шукати у вигляді:

$$y = u(x)v(x) \qquad (1.36)$$

де *u(x)*та *v(x)* – нові невідомі диференційовані функції. Підставимо (1.36) у (1.29), дістанемо:

$$\frac{du}{dx} v + u\frac{dv}{dx} + p(x)uv = q(x) \text{ або } v\left(\frac{du}{dx} + p(x)u\right) + u\frac{dv}{dx} = q(x).$$

Нехай $\frac{du}{dx} + p(x)u = 0, u \neq 0$. Один з розв'язків останнього рівняння $u(x) = e^{-\int P(x)dx}$. Тоді функцію $v(x)$ дістанемо з рівняння:

$$e^{-\int p(x)dx} \frac{dv}{dx} = q(x),$$

тобто :

$$v(x) = c + \int q(x) e^{\int p(x)dx} dx, c \in \mathbb{R}.$$

Підставимо знайдені $u(x)$ та $v(x)$ у (1.36), дістаємо загальний розв'язок ЛНР (1.29):

$$y = e^{-\int p(x)dx}\left(c + \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx\right),\text{ де } c \text{ – довільна дійсна стала.}$$

<u>Зауваження.</u> *Розглянемо рівняння*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{3x - y^2}.$$

Воно не є лінійним відносно y та y' . Перепишемо його у вигляді

$$\frac{dx}{dy} = \frac{3}{y}x - y. \tag{1.37}$$

(1.37) – лінійне неоднорідне рівняння відносно невідомої функції $x(y)$.

Таким чином, рівняння, нелінійне відносно $y(x)$ та $y'(x)$, може бути лінійним відносно $x(y)$ та $x'(y)$.

<u>Приклад 1.10.</u> *Розв'язати рівняння (1.37) методом Бернуллі.*

<u>Розв'язання.</u> Нехай $x = u(y)v(y)$. Одержуємо:

$$\frac{du}{dy}v + u\frac{dv}{dy} = \frac{3}{y}uv - y\text{, або: } v\left(\frac{du}{dy} - \frac{3}{y}u\right) + u\frac{dv}{dy} = -y.$$

Якщо $u \neq 0$, то $\frac{du}{dy} - \frac{3}{y}u = 0$ – рівняння з відокремлюваними змінними. Його загальний розв'язок $u = cy^3$. Тоді $v(x)$ дістанемо із рівняння

$$y^3\frac{dv}{dy} = -y,$$

де $u = y^3$ один із розв'язків сім'ї $u = cy^3$, отже

$$v = \frac{1}{y} + c \quad .$$

Загальний розв'язок рівняння (1.37) має вигляд:

$$x = y^3\left(\frac{1}{y} + c\right),\text{ де } c \text{ – довільна дійсна стала.}$$

§ 1.6. Рівняння, які зводяться до лінійних рівнянь першого порядку. Рівняння Бернуллі

Існує багато рівнянь першого порядку, які за допомогою деяких перетворень зводяться до лінійних рівнянь першого порядку. Розглянемо одно з таких рівнянь – рівняння Бернуллі.

<u>Означення.</u> *Диференціальне рівняння вигляду*

$$y' + p(x)y = q(x)y^n \quad , \tag{1.38}$$

де $p, q \in C(I), n \in \mathbb{R}$ $, n \neq 0, n \neq 1$, *називається рівнянням Бернуллі.*

<u>Примітка</u>. Якщо $n = 0$ або $n = 1$, то (1.38) – лінійне рівняння.

Рівняння Бернуллі (1.38) можна звести до лінійного неоднорідного рівняння за допомогою заміни невідомої функції. Попередньо поділимо обидві частини рівняння (1.38) на $y^n \, (y^n \neq 0)$:

$$y^{-n} y' + p(x) y^{1-n} = q(x) . \tag{1.39}$$

В рівнянні (1.39) зробимо заміну $z(x) = y^{1-n}$. Врахуємо, що $z'(x) = (1-n)y^{-n}y'$, рівняння (1.39) зводиться до лінійного неоднорідного рівняння відносно невідомої функції $z(x)$ вигляду:

$$z'(x) + (1-n)p(x)z(x) = (1-n)q(x) .$$

Зауважимо, що , якщо $n > 0$, то $y = 0$ є розв'язком рівняння Бернуллі (1.38).

<u>Приклад 1.11.</u> *Розв'язати рівняння*

$$y' + \frac{2}{x} y = \frac{y^3}{x^3} . \tag{1.40}$$

<u>Розв'язання.</u> (1.40) – рівняння Бернуллі, де $n = 3$. Поділимо обидві частини рівняння (1.40) на y^3 $(y \neq 0)$:

$$y^{-3} y' + \frac{2}{x} y^{-2} = \frac{1}{x^3} .$$

Зробимо заміну $z(x) = y^{-2}$, отже, $z' = -2y^{-3}y'$, звідси одержуємо відносно невідомої функції $z(x)$ лінійне неоднорідне рівняння

$$\frac{dz}{dx}-\frac{4}{x}z=-\frac{2}{x^3}.$$

Його загальний розв’язок: $z=\frac{1}{3x^2}+cx^4, c\in\mathbb{R}$. Вернемося до невідомої функції y, одержимо загальний інтеграл рівняння (1.40):

$$\frac{1}{y^2}=\frac{1}{3x^2}+cx^4, c\in\mathbb{R}.$$

Так як $n=3>0$, то $y=0$ - також розв’язок рівняння (1.40).

§ 1.7. Рівняння у повних диференціалах

<u>Означення.</u> *Диференціальне рівняння вигляду (1.4) називається рівнянням у повних диференціалах, якщо існує функція* $u=u(x,y)$ *така, що ліва частина рівняння (1.4) є її повним диференціалом функції* $u(x,y)$*, тобто*

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=du(x,y). \tag{1.41}$$

Рівняння (1.4) приводиться до вигляду $du(x,y)=0$. Звідки, інтегруючи обидві частини, одержимо $u(x,y)=c$ – *загальний інтеграл рівняння у повних диференціалах.*

<u>Критерій рівняння у повних диференціалах</u>. *Припустимо, що функції* $M=M(x,y), N=N(x,y)$ – *неперервні та мають неперервні частинні похідні відповідно по* x *та по* y *в однозв’язній області* $D\subseteq\mathbb{R}^2$*. Крім того,* $M^2+N^2>0$ *в області D. Для того, щоб в* D *рівняння (1.4) було рівнянням у повних диференціалах, необхідно і достатньо, щоб всюди в* D *було виконано*

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}. \tag{1.42}$$

<u>Приклад 1.12.</u> *Розв’язати рівняння*

$$(2x+3x^2y)dx+(x^3-3y^2)dy=0. \tag{1.43}$$

<u>Розв’язання.</u> Перевіримо, чи є рівняння (1.43) рівнянням у повних диференціалах. Функції $M=2x+3x^2y$ та $N=x^3-3y^2$ разом в нуль не обертаються. Частинні похідні $\frac{\partial M}{\partial y}$ та $\frac{\partial N}{\partial x}$ існують у $\mathbb{R}^2$ та $\frac{\partial M}{\partial y}=3x^2=\frac{\partial N}{\partial x}$.

Умови критерія рівняння у повних диференціалах виконані всюди в $\mathbb{R}^2$, зокрема, умова (1.42) виконується всюди в $\mathbb{R}^2$. Таким чином, (1.43) – диференціальне рівняння у повних диференціалах.

На прикладі рівняння (1.43) покажемо один із методів знаходження функції $u(x,y)$. Будемо шукати функцію $u(x,y)$ із того, що, з одного боку, $du = Mdx + Ndy$, а з другого, за означенням, $du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy$. Оскільки dx та dy – незалежні, то

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + 3x^2 y, \tag{1.44}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x^3 - 3y^2. \tag{1.45}$$

Інтегруючи обидві частини (1.44) по змінної *x*, одержимо:

$$u(x,y) = \int (2x + 3x^2 y)dx + \varphi(y),$$

$$u(x,y) = x^2 + x^3 y + \varphi(y),$$

де $\varphi(y)$ – довільна неперервно-диференційована функція від y. Будемо шукати $\varphi(y)$ так, щоб функція $u(x,y)$ задовольняла умові (1.42). Із урахуванням (1.45) маємо

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x^3 + \varphi'(y), \qquad \text{або } \varphi'(y) = -3y^2, \varphi(y) = -y^3 + c, c \in \mathbb{R}.$$

$$x^3 + \varphi'(y) = x^3 - 3y^2,$$

Отже, $u(x,y) = x^2 + x^3 y - y^3 + c, c \in \mathbb{R}$. Остаточно, загальний інтеграл рівняння (1.43) у повних диференціалах має вигляд: $x^2 + x^3 y - y^3 = c$.

Припустимо, що рівняння (1.4) не є рівнянням у повних диференціалах. Виникає питання: можна лі за допомогою деяких перетворень перейти від рівняння (1.4) до рівняння у повних диференціалах? Цю задачу вирішує інтегрувальний множник.

Означення. *Функція $\mu = \mu(x,y), \mu \in C(D), D \subseteq R^2$, яка не перетворюється в нуль в жодній точці області D, називається **інтегрувальним множником** рівняння (1.4), якщо після помноження обох частин рівняння (1.4) на функцію $\mu = \mu(x,y)$, рівняння (1.4) перетворюється на рівняння у повних диференціалах.*

Зауваження. Область D є невласною підмножиною множини існування функцій M та N, які входять у рівняння (1.4).

Якщо $\mu = \mu(x, y)$ - інтегрувальний множник рівняння (1.4), то існує така функція $u = u(x, y)$, що

$$\mu(x, y)M(x, y)dx + \mu(x, y)N(x, y)dy = du(x, y). \quad (1.46)$$

Згідно з критерієм рівняння у повних диференціалах для рівняння (1.46) в області D виконується тотожність:

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu(x, y)M(x, y)) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu(x, y)N(x, y)).$$

Функція $\mu(x, y)$, яка є інтегрувальним множником рівняння (1.4), є розв'язком рівняння:

$$\mu(x, y)\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = N\frac{\partial \mu}{\partial x} - M\frac{\partial \mu}{\partial y} \ . \quad (1.47)$$

Розглянемо деякі випадки відшукування інтегрувального множника рівняння (1.4).

1. Нехай інтегрувальний множник рівняння (1.4) залежить тільки від змінної x, тобто $\mu(x, y) = \mu(x)$. Тоді з (1.47) маємо:

$$\frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dx} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N}. \quad (1.48)$$

2. Нехай інтегрувальний множник рівняння (1.4) залежить тільки від змінної y, тобто $\mu(x, y) = \mu(y)$. Тоді з (1.47) маємо:

$$\frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dy} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{-M}. \quad (1.49)$$

Приклад 1.13. *Розв'язати рівняння*

$$\left(1 - \frac{x}{y}\right)dx + \left(2xy + \frac{x}{y} + \frac{x^2}{y^2}\right)dy = 0. \quad (1.50)$$

Розв'язання. Перевіримо, чи є рівняння (1.50) рівнянням у повних диференціалах. Функції $M = 1 - \frac{x}{y}$ та $N = 2xy + \frac{x}{y} + \frac{x^2}{y^2}$ разом в нуль не обертаються. Обчислимо частинні похідні: $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{x}{y^2}$ та $\frac{\partial N}{\partial x} = 2y + \frac{1}{y} + \frac{2x}{y^2}$.

Частинні похідні $\frac{\partial M}{\partial y}$ та $\frac{\partial N}{\partial x}$ існують у $\mathbb{R}^2 \backslash \{(a: 0), a \epsilon \mathbb{R}\}$. .

Умови критерію рівняння у повних диференціалах не виконані. Перевіримо, чи має рівняння (1.50) інтегрувальний множник як функцію однієї змінної, тобто розглянемо можливість розв'язку або рівняння (1.48), або рівняння (1.49).

Обчислимо: $\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{x}{y^2} - 2y - \frac{1}{y} - \frac{2x}{y^2} = -(2y + \frac{1}{y} + \frac{x}{y^2})$.

Т.я. $$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = \frac{-\left(2y + \frac{1}{y} + \frac{x}{y^2}\right)}{x\left(2y + \frac{1}{y} + \frac{x}{y^2}\right)} = -\frac{1}{x}.$$

то інтегрувальний множник рівняння (1.50) $\mu = \mu(x)$ та знаходиться з рівняння вигляду (1.48): $\frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dx} = -\frac{1}{x}$, $\frac{d\mu}{\mu} + \frac{dx}{x} = 0$. Один з розв'язків отриманого рівняння $\mu(x) = \frac{1}{x}$ - інтегрувальний множник рівняння (1.50).

Помножимо обидві частини диференціального рівняння (1.50) на функцію $\mu(x) = \frac{1}{x}$, одержимо рівняння: $\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right)dx + \left(2y + \frac{1}{y} + \frac{x}{y^2}\right)dy = 0$.

Т.я. умова (1.42) виконана (перевірте це та вкажіть, на якій множині), то отримано диференціальне рівняння у повних диференціалах. Будемо шукати функцію $u(x, y)$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{y}, \qquad (1.51)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 2y + \frac{1}{y} + \frac{x}{y^2}. \qquad (1.52)$$

Інтегруючи обидві частини (1.51) по змінній *x*, одержимо:

$$u(x,y)=\int\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)dx+\varphi(y),$$

$$u(x,y)=\ln|x|-\frac{x}{y}+\varphi(y),$$

де $\varphi(y)$ – довільна неперервно-диференційована функція від y. Будемо шукати функцію $\varphi(y)$ так, щоб функція $u(x,y)$ задовольняла умові (1.42). Із урахуванням (1.52) маємо

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{x}{y^2}+\varphi'(y),$$
$$\frac{x}{y^2}+\varphi'(y)=2y+\frac{1}{y}+\frac{x}{y^2},$$

або $\varphi'(y)=2y+\dfrac{1}{y}$, $\varphi(y)=y^2+\ln|y|+c$.

Отже, $u(x,y)=\ln|x|-\dfrac{x}{y}+y^2+\ln|y|+c$. Таким чином, загальний інтеграл рівняння (1.50) має вигляд: $\ln|x|-\dfrac{x}{y}+y^2+\ln|y|=c$, де c – довільна дійсна стала.

<u>Приклад 1.14</u>. *Розв'язати рівняння*

$$\left(3x^2\cos y-\sin y\right)\cos y dx-xdy=0\,. \qquad (1.53)$$

<u>Розв'язання.</u> Функції $M=3x^2\cos^2 y-\sin y\cos y$ та $N=-x$ разом в нуль не обертаються. Частинні похідні $\dfrac{\partial M}{\partial y}$ та $\dfrac{\partial N}{\partial x}$ існують у $\mathbb{R}^2$. Обчислимо частинні похідні: $\dfrac{\partial M}{\partial y}=-6x^2\cos y\sin y-\cos 2y$ та $\dfrac{\partial N}{\partial x}=-1$. Умови критерію рівняння у повних диференціалах не виконані. Перевіримо, чи має рівняння (1.53) інтегрувальний множник як функцію однієї змінної, тобто розглянемо можливість розв'язку або рівняння (1.48), або рівняння (1.49).

Обчислимо: $\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}=-3x^2 2\cos y\sin y-\cos 2y+1=-2(3x^2\cos y-\sin y)\sin y$

Так як $\dfrac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{-M}=\dfrac{-2\left(3x^2\cos y-\sin y\right)\sin y}{-\left(3x^2\cos y-\sin y\right)\cos y}=2tgy$.

то інтегрувальний множник знаходимо з рівняння вигляду (1.49): $\dfrac{1}{\mu}\dfrac{d\mu}{dy}=2tgy$,

$\frac{d\mu}{\mu} = 2\frac{\sin ydy}{\cos y}$. Один з розв’язків отриманого рівняння: $\mu(y) = \frac{1}{\cos^2 y}$ - інтегрувальний множник рівняння (1.53).

Помножимо обидві частини рівняння (1.53) на функцію $\mu = \frac{1}{\cos^2 y}$, одержимо рівняння у повних диференціалах: $(3x^2 - tgy)dx - \frac{x}{\cos^2 y}dy = 0$.

Будемо шукати функцію $u(x, y)$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - tgy, \tag{1.54}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{x}{\cos^2 y}. \tag{1.55}$$

Інтегруючи обидві частини (1.54) по змінній *x*, одержимо:

$$u(x, y) = \int (3x^2 - tgy)dx + \varphi(y),$$

$$u(x, y) = x^3 - xtgy + \varphi(y),$$

де $\varphi(y)$ – довільна неперервно-диференційована функція від y. Будемо шукати функцію $\varphi(y)$ так, щоб функція $u(x, y)$ задовольняла умові (1.42). З урахуванням (1.55) маємо

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{x}{\cos^2 y} + \varphi'(y),$$

$$-\frac{x}{\cos^2 y} + \varphi'(y) = -\frac{x}{\cos^2 y},$$

або $\varphi'(y) = 0, \varphi(y) = c$.

Отже, $u(x, y) = x^3 - xtgy + c$. Таким чином, загальний інтеграл рівняння (1.53) має вигляд: $x^3 - xtgy = c$ де c – довільна дійсна стала.

Контрольні запитання до тем розділу 1

1. Яке рівняння називається диференціальним рівнянням?
2. Яке диференціальне рівняння називається звичайним диференціальним рівнянням?
3. Що таке порядок диференціального рівняння?
4. Що називається розв’язком звичайного диференціального рівняння?
5. Що називається інтегральною кривою?

6. Форми запису звичайних диференціальних рівнянь першого порядку, які розв'язані відносно похідної.
7. Постановка задачі Коші для звичайного диференціального рівняння першого порядку, яке розв'язане відносно похідної.
8. Сформулюйте теорему Пікара-Коші.
9. Означення частинного та особливого розв'язків диференціального рівняння.
10. Що називається загальним розв'язком диференціального рівняння першого порядку?
11. Що називається загальним інтегралом диференціального рівняння першого порядку?
12. Яке рівняння називається рівнянням з відокремленими змінними?
13. Метод розв'язування рівняння з відокремленими змінними.
14. Яке рівняння називається рівнянням з відокремлюваними змінними?
15. Метод розв'язування рівняння з відокремлюваними змінними.
16. Яке рівняння називається однорідним рівнянням?
17. Методи розв'язування однорідних рівнянь та рівнянь, які зводяться до однорідних рівнянь.
18. Яке рівняння називається лінійним рівнянням першого порядку?
19. Метод варіації сталих Лагранжа розв'язування лінійних рівнянь першого порядку.
20. Метод Бернуллі розв'язування лінійних рівнянь першого порядку.
21. Яке рівняння називається рівнянням Бернуллі?
22. Метод розв'язування рівняння Бернуллі.
23. Яке рівняння називається рівнянням у повних диференціалах?
24. Який вигляд має загальний розв'язок рівнянням у повних диференціалах?
25. Сформулюйте критерій рівнянням у повних диференціалах.
26. Яка функція називається інтегрувальним множником диференціального рівняння першого порядку?
27. Як знайти інтегрувальний множник диференціального рівняння першого порядку, який залежить тільки від однієї змінної?

Розділ 2. Звичайні диференціальні рівняння першого порядку, які не розв'язані відносно похідної

§ 2.1. Основні поняття та означення

Розглянемо звичайне диференціальне рівняння першого порядку (1.2), яке не розв'язане відносно похідної:

$$F(x, y, y') = 0. \tag{2.1}$$

Задачу Коші для рівняння (2.1) ставимо так: із усіх розв'язків рівняння (2.1) знайти ті, які задовольняють початковій умові

$$y(x_0) = y_0, \tag{2.2}$$

тобто задача Коші для рівняння (2.1) має вигляд

$$\begin{cases} F(x, y, y') = 0, \\ y(x_0) = y_0. \end{cases} \tag{2.3}$$

Загальним розв'язком рівняння (2.1) є однопараметрична сім'я функцій $y = \varphi(x, c)$, *де* $\varphi \in C^{1,0}_{x,c}(I \times E), I \subseteq \mathbb{R}$, $E \subseteq \mathbb{R}$ *– область припустимих значень параметра* c.

Означення. *Загальний розв'язок рівняння (2.1), який записано у неявній формі* $\Phi(x, y, c) = 0$*, називається загальним інтегралом рівняння (2.1).*

Існують різні методи розв'язання рівнянь 1-го порядку, які не розв'язані відносно похідної. Розглянемо перший з них. Це метод, коли рівняння (2.1) розв'язується відносно похідної. В цьому випадку диференціальне рівняння (2.1) відносно y' рівносильне сукупності (не системі!) диференціальних рівнянь, які розв'язані відносно похідної.

Приклад 2.1. *Розв'язати рівняння*

$$(y')^2 - x^2 = 0. \tag{2.4}$$

Розв'язання. Рівняння (2.4) рівносильне сукупності диференціальних рівнянь, які розв'язані відносно похідної:

$$\left[\begin{aligned} y' &= x, \\ y' &= -x. \end{aligned}\right.$$

Маємо загальні розв'язки кожного з них:

$$\left[\begin{array}{l} y = \frac{1}{2}x^2 + c, \\ y = -\frac{1}{2}x^2 + c. \end{array}\right.$$

Остаточно, $(y - \frac{1}{2}x^2 + c)(y + \frac{1}{2}x^2 + c) = 0$ – загальний інтеграл рівняння (2.4), де c – довільна дійсна стала.

<u>Примітка.</u> Не у всіх випадках можна знайти розв'язок рівняння (2.1) у явній чи неявній формі, іноді знаходять розв'язок рівняння у параметричній формі.

§ 2.2. Функції та криві у параметричній формі

Із означення рівняння (2.1) відомо, що його розв'язок є скалярна функція однієї змінної. Її графік – крива на площині. Одним з аналітичних способів завдання такої кривої у декартових координатах є параметричний:

$$\begin{cases} x = x(p), \\ y = y(p), \end{cases} \quad p \in < a; b > \subseteq R.$$

<u>Примітка</u>. Під означенням $< a; b >$ розуміють один з проміжків: $(a; b), [a; b], (a;b], [a;b)$.

Від параметричної форми завдання кривої на площині у деяких випадках можна перейти до явної форми завдання цієї ж кривої:

- якщо $\frac{dx}{dp}(p_0) \neq 0$, то рівняння $x = x(p)$ можна розв'язати відносно p у деякому малому околі точки p_0: $p = p(x)$. Тоді одержимо рівняння кривої у явному вигляді: $y = y(p(x))$;

- якщо $\frac{dx}{dp}(p_0) = 0$, але $\frac{dy}{dp}(p_0) \neq 0$, то рівняння $y = y(p)$ можливо розв'язати відносно p у деякому малому околі точки p_0: $p = p(y)$. Тоді неявно задана функція має вигляд: $x = x(p(y))$.

<u>Означення.</u> *Якщо* $\frac{dx}{dp}(p_0) = \frac{dy}{dp}(p_0) = 0$, *то точка кривої, яка відповідає значенню параметра* $p = p_0$, *називається особливою точкою кривої. В противному випадку точка кривої називається звичайною.*

Геометрично особливі точки кривої у параметричній формі – це точки звертання.

Приклад 2.2. *Описати рівняння кривих*

$$y = \pm\sqrt{1-x^2};\ y^2 + x^2 = 1;\ \begin{cases} x = \cos p, \\ y = \sin\ p, \end{cases}\ p \in [0,2\pi).$$

Розв'язання. Кожне з цих трьох співвідношень – рівняння одиничного кола на площині з центром у початку координат відповідно у явній, неявній та параметричній формах. Всі точки кривої звичайні.

Приклад 2.3. *Задати пряму* $y = 2x + 3$ *у параметричній формі.*

Розв'язання. Задачу будемо розв'язувати так: покладемо x параметром $x = p,\ p \in (-\infty,+\infty)$, таким чином, $y = 2p + 3$ вираз y через цій параметр. Остаточно, рівняння прямої у параметричній формі має вигляд: $\begin{cases} x = p, \\ y = 2p + 3,\ p \in (-\infty,+\infty). \end{cases}$

Загальний розв'язок рівняння (2.1) у параметричній формі має вигляд:

$\begin{cases} x = x(p,c), \\ y = y(p,c), \end{cases}$ $p \in < a,b >, c \in E \subseteq \mathbb{R}$, а загальний інтеграл:

$$\begin{cases} \Phi(x,y,p,c) = 0, \\ \psi(x,y,p,c) = 0, \end{cases}\quad p \in < a,b >, c \in E \subseteq \mathbb{R}.$$

Розглянемо методи розв'язання рівнянь першого порядку, які не розв'язані відносно похідної, пов'язані з введенням параметрів.

§ 2.3. Метод введення параметрів

Загальний метод введення параметрів для рівняння (2.1) полягає в наступному: ввести в рівнянні (2.1) два параметри так, щоб за допомогою основного диференціального співвідношення

$$dy = y'dx \qquad (2.5)$$

перейти від звичайного диференціального рівняння першого порядку (2.1), яке не розв'язне відносно похідної, до звичайного диференціального рівняння першого порядку, яке розв'язане відносно похідної, у диференціальній формі вигляду (1.4) відносно двох нових змінних. Всі розв'язки здобутого рівняння дадуть відповідні розв'язки рівняння (2.1).

<u>Примітка.</u> Існують випадки, коли в якості одного з двох параметрів зручно використовувати змінну x або y з рівняння (2.1). Ці випадки докладно розглянемо далі.

а) Розглянемо випадок, коли рівняння (2.1) не розв'язне відносно y', але його можна розв'язати відносно y:

$$y = f(x, y'). \tag{2.6}$$

В рівнянні (2.6) введемо параметр p так: $y' = p$. Введення параметрів у рівнянні (2.6) має вигляд:

$$\begin{cases} x = x, \\ y = f(x; p), \\ y' = p. \end{cases} \tag{2.7}$$

У припущенні, що функція $f(x, p)$ має неперервні частинні похідні, за допомогою основного диференціального співвідношення (2.5) з (2.7) одержуємо:

$$\frac{\partial f(x, p)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(x, p)}{\partial p} dp = pdx\,. \tag{2.8}$$

(2.8) - звичайне диференціальне рівняння першого порядку, яке розв'язане відносно похідної, у диференціальній формі вигляду (1.4).

Розглянемо три випадки.

а.1) Якщо можливо знайти загальний розв'язок рівняння (2.8) у вигляді $x = x(p, c)$, то з урахуванням (2.7) загальний розв'язок рівняння (2.6) з у параметричній формі має вигляд: $\begin{cases} x = x(p, c), \\ y = f(x(p, c), p). \end{cases}$

а.2) Якщо можливо знайти загальний розв'язок рівняння (2.8) у вигляді $p = p(x, c)$.то з урахуванням (2.7) загальний розв'язок рівняння (2.6) у явній формі має вигляд

$$y = f(x, p(x, c))\,.$$

а.3) Якщо знайдено загальний інтеграл рівняння (2.8):

$$\Phi(x,p,c)=0,$$

то з урахуванням (2.7) загальний інтеграл рівняння (2.6) у параметричній формі має вигляд:

$$\begin{cases}\Phi(x,p,c)=0,\\ y=f(x,p).\end{cases}$$

б) Розглянемо випадок, коли рівняння (2.1) не розв'язне відносно y', але воно може бути розв'язано відносно *x*:

$$x=f(y,y') \tag{2.9}$$

В рівнянні (2.9) введемо параметр p так: $y'=p$. Введення параметрів у рівнянні (2.9) має вигляд:

$$\begin{cases}x=f(y,p),\\ \quad y=y,\\ \quad y'=p.\end{cases} \tag{2.10}$$

У припущенні, що функція $f(y,p)$ має неперервні частинні похідні, за допомогою основного диференціального співвідношення (2.5) з (2.10) одержуємо:

$$dy=p\left(\frac{\partial f(y,p)}{\partial y}dy+\frac{\partial f(y,p)}{\partial p}dp\right). \tag{2.11}$$

(2.11) - звичайне диференціальне рівняння першого порядку, яке розв'язане відносно похідної, у диференціальній формі вигляду (1.4).

Розглянемо три випадки.

б.1) Якщо можна знайти загальний розв'язок рівняння (2.11) у вигляді $y=y(p,c)$, то з урахуванням (2.10) загальний розв'язок рівняння (2.9) у параметричній формі має вигляд: $\begin{cases}x=f(y(p,c),p),\\ y=y(p,c).\end{cases}$

б.2) Якщо можливо знайти загальний розв'язок рівняння (2.11) у вигляді $p=p(y,c)$, то з урахуванням (2.10) загальний інтеграл рівняння (2.9) має вигляд:

$$x=f(y,p(y,c))..$$

б.3) Якщо знайдено загальний інтеграл рівняння (2.11):

$$\Phi(x,p,c)=0,$$

то з урахуванням (2.10) загальний інтеграл рівняння (2.9) у параметричній формі має вигляд:

$$\begin{cases}\Phi(x,p,c)=0,\\ x=f(y,p).\end{cases}$$

Зауваження. Слід відмітити, що рівняння (2.8) та (2.11) не завжди інтегруються у квадратурах, а звідки і рівняння (2.1) у випадках а) і б) не завжди інтегрується методом введення параметра. Далі розглянемо ті частинні випадки, у яких рівняння (2.8) та (2.11) інтегруються у квадратурах.

§ 2.4. Рівняння, які не містять явно однієї зі змінних

Означення. *Диференціальне рівняння (2.1) називається рівнянням, яке не містить явно одного із змінних, якщо в ньому не має однієї зі змінних* x *або* y.

Рівняння, які не містить явно одного із змінних, мають вигляд:

а) $F(y,y')=0$; *б)* $F(x,y')=0$; *в)* $F(y')=0$.

Розглянемо кожне з вказаних рівнянь у випадках, коли їх можна проінтегрувати у квадратурах.

а) Розглянемо рівняння $F(y,y')=0$ у припущенні, що воно розв'язне відносно y:

$$y=f(y'). \tag{2.12}$$

Тобто отримаємо частинний випадок рівняння (2.6). В рівнянні (2.12) введемо параметр p так: $y'=p$. Введення параметрів у рівнянні (2.12) має вигляд:

$$\begin{cases}x=x,\\ y=f(p),\\ y'=p.\end{cases} \tag{2.13}$$

У припущенні, що функція $f(p)$ є диференційованою, за допомогою основного диференціального співвідношення (2.5) з (2.13) одержуємо рівняння вигляду (2.8):

$$f'(p)dp=pdx. \tag{2.14}$$

(2.14) - рівняння з відокремлюваними змінними. Його загальний розв’язок має вигляд:

$$x = \int \frac{f'(p)}{p} dp + c,$$

де c – довільна дійсна стала.

З урахуванням (2.13) загальний розв’язок рівняння (2.12) у параметричній формі має вигляд:

$$\begin{cases} x = \int \frac{f'(p)}{p} dp + c \\ y = f(p), \end{cases}$$

де c – довільна дійсна стала.

б) Розглянемо рівняння $F(x, y') = 0$ у припущенні, що воно розв’язне відносно x :

$$x = f(y'). \tag{2.15}$$

Тобто отримаємо частинний випадок рівняння (2.9). В рівнянні (2.15) введемо параметр p так: $y' = p$. Введення параметрів у рівнянні (2.15) має вигляд:

$$\begin{cases} x = f(p), \\ y = y, \\ y' = p. \end{cases} \tag{2.16}$$

У припущенні, що функція $f(p)$ є диференційованою, за допомогою основного диференціального співвідношення (2.5) з (2.16) одержуємо рівняння вигляду (2.11):

$$dy = pf'(p)dp. \tag{2.17}$$

(2.17) - рівняння з відокремлюваними змінними. Його загальний розв’язок має вигляд:

$$y = \int pf'(p)dp + c,$$

де c – довільна дійсна стала.

З урахуванням (2.16) загальний розв'язок рівняння (2.15) у параметричній формі має вигляд:

$$\begin{cases} x = f(p), \\ y = \int pf'(p)dp + c, \end{cases}$$

де c – довільна дійсна стала.

Приклад 2.4. *Розв'язати рівняння:*

$$y'\sin y' + \cos y' - y = 0. \qquad (2.18)$$

Розв'язання. (2.18) – рівняння, яке не містить явно змінної x та не розв'язне щодо похідної. Розв'яжемо його відносно змінної y, тобто отримаємо рівняння вигляду (2.12) :

$$y = y'\sin y' + \cos y'.$$

Введемо параметр $y' = p$. Тоді $y = p\sin p + \cos p,\ pdx = (\sin p + p\cos p - \sin p)dp$. Таким чином,

$$x = \int(\cos p)dp = \sin p + c,$$

Остаточно, загальний розв'язок рівняння (2.18) у параметричній формі має вигляд:

$$\begin{cases} y = p\sin p + \cos p, \\ x = \sin p + c. \end{cases}$$

де c – довільна дійсна стала.

Приклад 2.5. *Розв'язати рівняння :*

$$y = (y')^2 e^{y'}. \qquad (2.19)$$

Розв'язання. (2.19) – рівняння, яке не містить явно змінної x та не розв'язне щодо похідної, але воно розв'язне відносно змінної y, тобто рівняння вигляду (2.12).

Введемо параметр $y' = p$. Тоді $y = p^2e^p,\ pdx = (2pe^p + p^2e^p)dp$. Таким чином,

$$x = \int(2e^p + pe^p)dp = e^p(p+1) + c.$$

Остаточно, загальний розв'язок рівняння (2.19) у параметричній формі має вигляд:

$$\begin{cases} y = p^2 e^p \\ x = e^p(p+1) + c. \end{cases}$$

де с – довільна дійсна стала.

<u>Приклад 2.6.</u> *Розв'язати рівняння :*

$$y' + e^{y'} - x = 0\,. \qquad (2.20)$$

<u>Розв'язання.</u> (2.20) – рівняння, яке не містить явно y та не розв'язне відносно похідної. Розв'яжемо його відносно *x*, тобто отримаємо рівняння вигляду (2.15):

$$x = y' + e^{y'}\,.$$

Введемо параметр $y' = p$. Тоді $x = e^p + p, dy = p(1+e^p)dp$. Таким чином,

$$y = \int (p + pe^p)dp = \frac{1}{2}p^2 + pe^p - e^p + c\,.$$

Остаточно, загальний розв'язок рівняння (2.20) у параметричній формі має вигляд:

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}p^2 + pe^p - e^p + c, \\ x = p + e^p, \end{cases}$$

де с – довільна дійсна стала.

Контрольні запитання до тем розділу 2

1. Яке рівняння називається звичайним диференціальним рівнянням першого порядку, яке не розв'язане відносно похідної?
2. Постановка задачі Коші для звичайного диференціального рівняння першого порядку, яке не розв'язане відносно похідної.
3. Що називається загальним розв'язком диференціального рівняння першого порядку, яке не розв'язане відносно похідної?
4. Що називається загальним інтегралом диференціального рівняння першого порядку, яке не розв'язане відносно похідної?
5. Різні форми запису функцій та кривих: аналітична явна форма запису, аналітична неявна форма запису, параметрична форма запису.

6. Яка точка називається звичайною точкою кривої?
7. Яка точка називається особливою точкою кривої?
8. В чому полягає загальний метод введення параметру для звичайного диференціального рівняння першого порядку, яке не розв’язане відносно похідної?
9. Як застосовується загальний метод введення параметру для звичайного диференціального рівняння першого порядку, яке не розв’язне відносно похідної, але яке можна розв'язати відносно невідомої функції?
10. Як застосовується загальний метод введення параметру для звичайного диференціального рівняння першого порядку, яке не розв’язне відносно похідної, але яке можна розв'язати відносно незалежної змінної?
11. Назвіть три вигляду звичайних диференціальних рівняння першого порядку, які не розв’язані відносно похідної, які явно не містять однієї зі змінних.
12. Як розв’язати звичайне диференціальне рівняння першого порядку, яке явно містить тільки незалежну змінну та похідну невідомої функції?
13. Як розв’язати звичайне диференціальне рівняння першого порядку, яке явно містить тільки невідому функцію та її похідну?
14. Як розв’язати звичайне диференціальне рівняння першого порядку, яке явно містить тільки похідну невідомої функції?

Розділ 3. Звичайні диференціальні рівняння вищих порядків

§ 3.1. *Основні поняття та означення*

Розглянемо звичайне диференціальне рівняння n-го порядку

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0, \tag{3.1}$$

де F — відома функція своїх аргументів.

Рівняння n-го порядку, розв'язане відносно старшої похідної, має вигляд

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}). \tag{3.2}$$

<u>Означення.</u> *Нехай функція f визначена в області $D \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$.Функція $y = \varphi(x), \varphi \in \boldsymbol{C}^{(n)}(I)$, $I \subseteq \mathbb{R}$, називається розв'язком рівняння (3.2) на I, якщо:*

1) $\forall x \in I : (x, \varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(n-1)}(x)) \in D$;
2) виконується тотожність $\varphi^{(n)} \equiv f(x, \varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(n-1)}(x))$ при $x \in I$.

Задача Коші для рівняння (3.2) ставиться так: серед усіх розв'язків рівняння (3.2) знайти ті, які задовольняють початковим умовам: при $x = x_0$: $y = y_{00}$, $y' = y_{01}$, …, $y^{(n-1)} = y_{0n-1}$, де x_0, y_0, y_{01},…, y_{0n-1} — задані числа з $\mathbb{R}$. Задача Коші записується так:

$$\begin{cases} y^{(n)} = f\left(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}\right) \\ y^{(k)}(x_0) = y_{0k}, k = \overline{0, n-1}. \end{cases} \tag{3.3}$$

Загальний розв'язок рівняння (3.2) має вигляд:

$$y = \varphi(x, c_1, \dots, c_n) \Leftrightarrow y = \varphi(x, c), c \in E \subseteq \mathbb{R}^n, \tag{3.4}$$

де (3.4) – n - параметрична сім'я функцій, яка має такі властивості:

1. $\varphi \in C^{n,0}_{x,c}(D_1 \times E)$; $D_1 \subseteq \mathbb{R}$, E — множина припустимих значень параметрів;
2. при будь-якому фіксованому значенні $c \in E$ функція (3.4) є розв'язком диференціального рівняння (3.2);
3. $\forall (x_0, y_{00}, y_{01}, \dots, y_{0n-1}) \in D$ існують такі значення параметрів $(c_{01}, \dots, c_{0n}) = c_0 \in E$, що функція $y = \varphi(x, c_0)$ є розв'язком задачі Коші (3.3).

Означення. Якщо загальний розв'язок рівняння (3.2) знайдено неявно у вигляді

$$\Phi(x, y, c) = 0, \tag{3.5}$$

то його називають *загальним інтегралом* цього рівняння.

Означення. Функція $F = F\left(x, y,\ y',\ y'', \dots, y^{(n)}\right)$ називається однорідною відносно змінної y та всіх її похідних зі степенем однорідності m, якщо $\forall k > 0$:

$$F(x, ky, ky',\ \dots,\ ky^{(n)}) = k^m F(x, y, y',\ \dots,\ y^{(n)}).$$

Означення. Рівняння (3.1) називається однорідним відносно змінної y та всіх її похідних зі степенем однорідності m, якщо функція F є однорідною відносно змінної y та всіх її похідних зі степенем однорідності m.

§ 3.2. *Неповні рівняння вищого порядку*

До неповних рівнянь n-го порядку відносять рівняння вигляду:

а) $F\left(x, y^{(n)}\right) = 0;$ б) $F\left(\ y^{(n-1)}, y^{(n)}\right) = 0;$ в) $F\left(\ y^{(n-2)}, y^{(n)}\right) = 0.$

Зупинимося на питанні інтегрування неповних рівнянь у випадку, коли їх можна представити у вигляді (3.2), тобто коли вони розв'язані відносно старшої похідної.

У випадку а) рівняння набуває вигляду:

$$y^{(n)} = f(x). \tag{3.6}$$

Тоді загальний розв'язок рівняння (3. 6) має вигляд

$$y = \underbrace{\int\int \dots \int}_{n \text{ разів}} f(x)\, dx\, dx \dots dx + c_1 x^{n-1} + \dots + c_{n-1} x + c_n.$$

У випадку б) рівняння набуває вигляду:

$$y^{(n)} = f(y^{(n-1)}). \tag{3.7}$$

Виконаємо заміну $y^{(n-1)} = z(x)$, тоді $y^{(n)} = z'(x)$ і рівняння (3.7) зводиться до рівняння:

$$z' = f(z).$$

Це — рівняння 1-го порядку з відокремлюваними змінними. Нехай його загальний розв'язок має вигляд:

$$z = \varphi(x, c_1).$$

Повернемося до невідомої функції $y = y(x)$ завдяки тому, що $z(x) = y^{(n-1)}$, отримаємо рівняння $y^{(n-1)} = \varphi(x, c_1)$, тобто рівняння вигляду (3.6).

У випадку в) рівняння набуває вигляду:

$$y^{(n)} = f(y^{(n-2)}). \qquad (3.8)$$

Виконаємо заміну $y^{(n-2)} = z(x)$, тоді $y^{(n-1)} = z'(x)$, а $y^{(n)} = z''(x)$. Після заміни рівняння (3.8) зводиться до рівняння:

$$z''(x) = f(z). \qquad (3.9)$$

Один з методів інтегрування рівняння (3.9) такий: домножимо обидві частини рівняння (3.9) на $2z'(x)dx$, тоді одержимо рівняння

$$d(z')^2 = 2f(z)dz,$$

звідки $(z')^2 = 2\int f(z)dz + c_1$. Розв'яжемо останнє рівняння відносно похідної і розділимо змінні:

$$\frac{dz}{\sqrt{2\int f(z)dz + c_1}} = \pm dx.$$

Тоді загальний інтеграл рівняння (3.9) має вигляд:

$$\int \frac{dz}{\sqrt{2\int f(z)dz + c_1}} = \pm x + c_2. \qquad (3.10)$$

Загальний інтеграл (3.10) при заміні z на $y^{(n-2)}$ приймає вигляд:

$$\Phi(x, y^{(n-2)}, c_1, c_2) = 0. \qquad (3.11)$$

Припустимо, що рівняння (3.11) вдалося розв'язати відносно похідної, тоді отримуємо рівняння $y^{(n-2)} = \varphi(x, c_1, c_2)$, тобто рівняння виду (3.6).

Приклад 3.1. *Розв'язати рівняння* $y''' = \sqrt{1-(y'')^2}$.

Розв'язання. Задане рівняння — рівняння вигляду (3.7). Виконаємо заміну: $y'' = z(x)$, тоді $z' = \sqrt{1-(z)^2}$ – рівняння 1-го порядку з відокремлюваними змінними. Після відокремлення змінних (при $z \neq \pm 1$):

$$\frac{dz}{\sqrt{1-(z)^2}} = dx$$

і інтегрування одержуємо: $\arcsin z = x + c_1$, звідки $z = \sin(x + c_1)$. Повернемося до невідомої функції $y = y(x)$ та отримаємо рівняння вигляду (3.6): $y'' = \sin(x + c_1)$. Послідовно інтегруючи його обидві частини два рази по x, одержуємо:

$$y' = -\cos(x + c_1) + c_2,$$
$$y = -\sin(x + c_1) + c_2 x + c_3, \qquad (3.12)$$

(3.12) – загальний розв'язок заданого в умові рівняння.

Перевіримо, чи не втратили ми розв'язки, наклавши умову $z \neq \pm 1$. Нехай $z = \pm 1$, тобто $y'' = \pm 1$.Тоді, після дворазового інтегрування його обох частин по x одержуємо:

$$y = \pm\frac{x^2}{2} + c_4 x + c_5 \; .$$

Отримані сім'ї функцій — теж розв'язки заданого рівняння. Остаточно, відповіддю є сукупність функцій:

$$\left[\begin{array}{l} y = -\sin(x + c_1) + c_2 x + c_3, \\ \quad y = \pm\dfrac{x^2}{2} + c_4 x + c_5. \end{array}\right.$$

Приклад 3.2. *Розв'язати рівняння* $y^{(4)} = y''$.

Розв'язання. Задане рівняння – рівняння вигляду (3.8). Зробимо заміну $y'' = z(x)$, тоді задане рівняння зведеться до рівняння: $z'' = z$. Домножимо обидві частини отриманого рівняння на $2z'(x)dx$, одержимо $d(z')^2 = 2zdz$, звідки $(z')^2 = z^2 + c_1$, тобто $z' = \pm\sqrt{z^2 + c_1}$.Розділимо змінні:

$$\frac{dz}{\sqrt{z^2 + c_1}} = \pm dx, \text{ тоді } \ln\left|z + \sqrt{z^2 + c_1}\right| = \pm x + c_2,$$

або, розв'язуючи відносно z, одержуємо:

$$z=\frac{c_2}{2}e^{x}-\frac{c_1}{2c_2}e^{-x}, z=\frac{c_2}{2}e^{-x}-\frac{c_1}{2c_2}e^{x}.$$

Повернемося до невідомої функції $y=y(x)$ та отримаємо рівняння $y''=\frac{c_2}{2}e^{x}-\frac{c_1}{2c_2}e^{-x}$, $y''=\frac{c_2}{2}e^{-x}-\frac{c_1}{2c_2}e^{x}$. В результаті загальний розв'язок заданого рівняння буде мати вигляд: $\left[\begin{array}{l} y=A_1e^{x}+B_1e^{-x}+C_1x+D_1, \\ y=A_2e^{x}+B_2e^{-x}+C_2x+D_2. \end{array}\right.$

де $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2, D_1, D_2$ – довільні дійсні сталі.

§ 3.3. *Рівняння n-го порядку, що допускають зниження порядку*

Деякі рівняння вдається розв'язати, якщо попередньо знизити їхній порядок. Розглянемо кілька випадків, коли порядок рівняння можна знизити:

а) рівняння явно не містить шуканої функції y і декілька її похідних, починаючи з першої, тобто рівняння вигляду

$$F(x, y^{(k)}, \ldots, y^{(n)})=0, \tag{3.13}$$

де $1\le k<n, k\in\mathbb{N}$;

б) рівняння не містить явно незалежної змінної x, тобто має вигляд

$$F(y, y', \ldots, y^{(n)})=0; \tag{3.14}$$

в) рівняння (3.1) — однорідне щодо невідомої функції y та всіх її похідних степені однорідності m *(див. означення на ст. 38.);*

г) ліва частина рівняння (3.1) є повною похідною по x від деякої функції. Таке рівняння *називається рівнянням у повних (або точних) похідних.*

У кожному із зазначених випадків вивчимо способи зниження порядку рівнянь.

а) Порядок рівняння (3.13) може бути знижений на k одиниць. Покладемо в (3.13) $y^{(k)}=z(x)$, тоді, відповідно $y^{(k+1)}=z'(x)$, ... $y^{(n)}=z^{(n-k)}(x)$. Одержимо рівняння порядку $n-k$, тобто рівняння

$$F(x, z, z', \ldots, z^{(n-k)})=0, \tag{3.15}$$

Припустимо, що вдалося знайти загальний розв'язок рівняння (3.15): $z(x)=\varphi(x, c_1, \ldots, c_{n-k})$. Оскільки $y^{(k)}=z(x)$, одержуємо рівняння

$$y^{(k)} = \varphi(x, c_1, \dots, c_{n-k})$$

– вигляду (3.6).

б) Порядок рівняння (3.14) можна знизити на одиницю. Для цього покладемо в (3.14) $y' = z(y)$, де y – нова незалежна змінна, z – нова невідома функція. Тоді

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dz(y)}{dx} = \frac{dz(y)}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = z'(y)z(y)\ ,$$

$$y''' = \frac{dy''}{dx} = \frac{d\big(z'(y)z(y)\big)}{dx} = \frac{d\big(z'(y)z(y)\big)}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \big(z''(y)z(y) + z'(y)z'(y)\big)z(y) =$$

$$= z''z^2 + (z')^2 z \quad \text{та тощо.}$$

Якщо підставити вирази для y', y'', ... , $y^{(n)}$ у нових змінних у рівняння (3.14), одержуємо диференціальне рівняння порядку $n – 1$:

$$\Phi(y, z, \frac{dz}{dy}, \dots, \frac{d^{(n-1)}z}{dy^{n-1}}) = 0. \qquad (3.16)$$

Припустимо, що вдалося знайти загальний розв'язок рівняння (3.16) $z(y) = \psi(y, c_1, \dots, c_{n-1})$. Тоді одержимо диференціальне рівняння першого порядку з відокремлюваними змінними (тому що $z(y) = y'$):

$$y' = \psi(y, c_1, \dots, c_{n-1}).$$

Помітимо, що при розв'язанні рівняння (3.14) таким методом, можна втратити розв'язок вигляду $y = c$, де $c = \text{const}$.

в) Порядок однорідного рівняння може бути знижений на одиницю. Зробимо в однорідному рівнянні n-го порядку заміну $y' = y \cdot z(x), y \neq 0,$ де $z = z(x)$ – нова невідома функція. Тоді

$$y'' = y' \cdot z + y \cdot z' = y \cdot z^2 + y \cdot z' = y(z' + z^2);$$

$$y''' = (y'')' = \big(y(z' + z^2)\big)' = \dots = y(z'' + 3zz' + z^3).$$

Аналогічно маємо, що

$$y^{(n)} = y \cdot \omega\big(z, z', \dots, z^{(n-1)}\big),$$

де ω – відома функція своїх аргументів.

Однорідне рівняння прийме вигляд

$$F(x, y, y \cdot z, y \cdot (z' + z^2), \ \dots, y \cdot \omega\big(z, z', \dots, z^{(n-1)}\big)) = 0,$$

або, з урахуванням однорідності функції F зі степенем однорідності m:

$$y^m \cdot F(x, 1, z, z' + z^2, \ \dots, \omega(z, z', \dots, z^{(n-1)})) = 0.$$

Отже, однорідне рівняння рівносильне сукупності двох рівнянь:

$$\left[\begin{array}{c} y^m = 0, \\ F\left(x, 1, z, z' + z^2, \ \dots, \omega(z, z', \dots, z^{(n-1)})\right) = 0. \end{array}\right. \tag{3.17}$$

Друге з рівнянь (3.17) – звичайне диференціальне рівняння (n –1)-го порядку відносно невідомої функції $z = z(x)$.

Подальші міркування є такими ж, як у випадках а) і б).

г) Порядок рівняння *у повних (або точних) похідних* може бути знижений на одиницю.

Дійсно, нехай ліва частина рівняння (3.1)

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = \frac{d}{dx}\Phi(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}),$$

тоді рівняння (3.1) зводиться до рівняння

$$\frac{d}{dx}\Phi(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) = 0,$$

тобто до рівняння (n–1)-го порядку вигляду:

$$\Phi(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) = c_1.$$

Зауваження. Рівняння (3.1) може не бути рівнянням у повних похідних, але після деяких перетворень зводитися до нього.

Приклад 3.3. *Розв'язати задачу Коші*

$$\begin{cases} 2y'' = \frac{y'}{x} + \frac{x^2}{y'}, \\ y(1) = \frac{\sqrt{2}}{5}, \\ y'(1) = \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{cases} \tag{3.18}$$

Розв'язання. Для того, щоб розв'язати задачу Коші, спочатку знайдемо загальний розв'язок рівняння із задачі Коші (3.18). У рівнянні явно відсутня невідома функція y. Отже, воно є рівнянням вигляду (3.13), де $k = 1$. Зробимо заміну $y' = z(x)$, $y'' = z'(x)$. Тоді одержимо рівняння

$$2z' = \frac{z}{x} + \frac{x^2}{z}. \qquad (3.19)$$

Рівняння (3.19) є рівнянням Бернуллі, де $n = -1$. Помножимо обидві частини рівняння (3.19) на z:

$$2zz' = \frac{z^2}{x} + x^2,$$

Та введемо нову невідому функцію $t = t(x)$ так: $z^2 = t(x)$, $2zz' = t'(x)$. Відносно нової невідомої функції маємо лінійне неоднорідне диференціальне рівняння першого порядку: $t' - \frac{t}{x} = x^2$.

Розв'яжемо відповідне йому лінійне однорідне рівняння: $t' - \frac{t}{x} = 0$, $\frac{dt}{t} = \frac{dx}{x}$, звідки $ln|t| = ln|x| + ln|c|$, чи $t = cx$ — загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння. Загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння шукаємо методом варіації сталої Лагранжа у вигляді $t = c(x)x$, тоді $t' = c'(x)\cdot x + c(x)$ і після підстановки t і t' у лінійне неоднорідне рівняння, одержуємо $c'(x) = x$, або $c(x) = \frac{x^2}{2} + c_1$, тобто

$t = (\frac{x^2}{2} + c_1)x$ — загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння.

Повернемося до невідомої функції $z = z(x)$ $(t = z^2)$ та отримаємо маємо $z = \pm\sqrt{\left(\frac{x^2}{2} + c_1\right)x}$. Повернемося до невідомої функції $y = y(x)$ та отримаємо рівняння $y' = \pm\sqrt{\left(\frac{x^2}{2} + c_1\right)x}$. Для зручності інтегрування отриманих рівнянь першого порядку визначимо c_1. Використаємо другу початкову умову задачі Коші (3.18): $\frac{\sqrt{2}}{2} = \pm\sqrt{\frac{1}{2} + c_1}$. Тоді залишається тільки рівняння $y' = \sqrt{\left(\frac{x^2}{2} + c_1\right)x}$ та $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} + c_1$, звідки $c_1 = 0$. Тоді з урахуванням значення c_1 рівняння перепишеться у вигляді:

$$y' = \frac{x^{3/2}}{\sqrt{2}}, \text{ звідки одержуємо } y = \frac{\sqrt{2}}{5}x^{5/2} + c_2 .$$

Для знаходження значення параметру c_2 використаємо першу початкову умову задачі Коші (3.18): $\frac{\sqrt{2}}{5} = \frac{\sqrt{2}}{5} + c_2, c_2 = 0$. Остаточно, розв'язком задачі Коші (3.18) є функція $y = \frac{\sqrt{2}}{5}x^{5/2}$.

<u>Приклад 3.4.</u> *Розв'язати рівняння* $x^2yy'' - (y - xy')^2 = 0$.

<u>Розв'язання.</u> Задане рівняння — повне. Перевіримо, чи не є воно однорідним? За умовою $F(x, y, y', y'') = x^2yy'' - (y - xy')^2$. Тоді

$$F(x, ky, ky', ky'') = k^2[x^2yy'' - (y - xy')^2] = k^2F(x, y, y', y'').$$

Отже, задане рівняння є однорідним зі ступенем однорідності 2. Введемо в заданому рівнянні нову невідому функцію $z = z(x)$: $y' = z(x) \cdot y$, $y \neq 0$, $y'' = (z' + z^2) \cdot y$. Тоді одержимо рівняння

$$x^2y^2(z' + z^2) - (y - xzy)^2 = 0,$$

яке рівносильно сукупності

$$\left[\begin{array}{l} y = 0, \\ x^2z' + 2xz = 1. \end{array}\right. \qquad (3.20)$$

$y = 0$ – розв'язок заданого рівняння. Друге рівняння сукупності (3.20) – лінійне неоднорідне звичайне диференціальне рівняння першого порядку, яке можна розв'язати, наприклад, методом варіації сталої Лагранжа. Його загальним розв'язком є функція $z = \frac{1}{x} + \frac{c_1}{x^2}$. Вертаємося до невідомої функції $y = y(x)$ при $y \neq 0$, маємо рівняння з відокремлюваними змінними $\frac{y'}{y} = \frac{1}{x} + \frac{c_1}{x^2}$, або $\frac{dy}{y} = \left(\frac{1}{x} + \frac{c_1}{x^2}\right)dx$. Інтегруємо обидві частини отриманого рівняння, знаходимо $\ln|y| = \ln|x| - \frac{c_1}{x} + \ln|c_2|, c_2 \neq 0.$ В результаті $y = c_2xe^{-\frac{c_1}{x}}$, $c_1 \in \mathbb{R}$, а $c_2 \in$

$\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Розв'язок $y = 0$ відповідає значенню сталої $c_2 = 0$. Остаточно $y = c_2 x e^{-\frac{c_1}{x}}$, $c_1 \in \mathbb{R}$, $c_2 \in \mathbb{R}$, — загальний розв'язок заданого рівняння.

<u>Приклад 3.5</u>. *Розв'язати рівняння* $1 + (y')^2 + yy'' = 0$.

<u>Розв'язання.</u> Задане рівняння — рівняння вигляду (3.14), тому що в ньому явно відсутня незалежна змінна x. Таким чином, варто покласти: y — нова незалежна змінна ($y \neq \text{const}$), $z = z(y)$ – нова невідома функція. Зробимо заміну $y' = z(y)$, $y'' = zz'$, тоді одержуємо рівняння

$$1 + z^2 + yzz' = 0,$$

яке рівносильно сукупності

$$\left[\begin{aligned} y &= 0, \\ z &= 0, \\ z' &= -\frac{z}{y} - \frac{1}{yz}. \end{aligned}\right. \tag{3.21}$$

$y = 0$ не є розв'язком заданого рівняння. $z = 0$, тобто $y' = 0$ відповідає сім'ї функцій $y = c$, які не є розв'язками заданого рівняння. Третє рівняння сукупності (3.21) є рівнянням Бернуллі при $n = -1$. Його загальний інтеграл: $z^2 = \frac{c_1}{y^2} - 1$. Вертаємося до невідомої функції $y = y(x)$: $(y')^2 = \frac{c_1}{y^2} - 1$. Тоді $y' = \pm\sqrt{\frac{c_1}{y^2} - 1}$ – рівняння з відокремлюваними змінними. Розділяючи змінні, одержуємо: $\frac{y\,dy}{\sqrt{c_1 - y^2}} = \pm dx$, $-\sqrt{c_1 - y^2} = \pm x + c_2$.

Остаточно, $(x + c_2)^2 = c_1 - y^2$ — загальний інтеграл заданого рівняння.

<u>Приклад 3.6</u>. *Розв'язати рівняння* $y \cdot y'' = 2(y')^2$.

<u>Розв'язання.</u> Дане рівняння одночасно є однорідним зі степеню однорідності 2 та в ньому явно відсутня незалежна змінна x, тобто два способи розв'язку вже відомі. Але простіше всього це рівняння інтегрується шляхом виділення точної похідної. Для цього розділимо обидві його частини на $y \cdot y' \neq 0$, одержимо $\frac{y''}{y'} = \frac{2y'}{y}$ — в обох частинах точні похідні:

$$(\ln|y'|)' = 2(\ln|y|)'.$$

Проінтегруємо отримане рівняння:

$$\ln|y'| = 2\ln|y| + \ln|c_1|, \quad \frac{dy}{dx} = c_1 y^2, \quad \frac{dy}{y^2} = c_1 dx \ .$$

Тоді $y = -\dfrac{1}{c_1 x + c_2}$ — загальний розв'язок заданого рівняння.

З рівняння $y \cdot y' = 0$, одержуємо, крім того, розв'язок заданого рівняння $y = 0$.

§ 3.4. *Звичайні лінійні рівняння n-го порядку*

Означення. *Звичайним лінійним диференціальним рівнянням n-го порядку називається рівняння вигляду*

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = f(x), \qquad (3.22)$$

де y – невідома функція незалежної змінної x, $p_i(x)$, $i = \overline{1;n}$, *та f(x) – відомі скалярні функції.*

Означення. *Якщо у рівнянні (3.22)* $f(x) \equiv 0$ *при* $x \in I \subseteq \mathbb{R}$, *то на проміжку I рівняння (3.22) називається лінійним однорідним рівнянням (ЛОР), у протилежному випадку (3.22) називається лінійним неоднорідним рівнянням (ЛНР).*

Лінійне однорідне диференціальне рівняння n-го порядку має вигляд:

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0. \qquad (3.23)$$

Означення. *Лінійне однорідне рівняння (3.23) називається рівнянням, що відповідає лінійному неоднорідному рівнянню (3.22).*

Означення. *n функцій* $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$ *називаються лінійно незалежними (ЛНЗ) на проміжку I, якщо тотожність*

$$\alpha_1 \varphi_1(x) + \ldots + \alpha_n \varphi_n(x) \equiv 0 \text{ на } I$$

зі сталими числами $\alpha_i, i = \overline{1,n}$, *виконується тільки тоді, коли всі* $\alpha_i = 0$, $i = \overline{1,n}$.

Означення. *Фундаментальною системою розв'язків (ФСР) чи базисом лінійного однорідного рівняння (3.23) на I називаються n ЛНЗ на I розв'язків цього рівняння.*

***Теорема* (про загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння).** *Нехай* $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ *— ФСР лінійного однорідного рівняння (3.23) на I. Тоді загальний* *розв'язок рівняння (3.23) дорівнює лінійної комбінації із довільними сталими всіх елементів ФСР:*

$$y(x) = c_1\, y_1(x) + \ldots + c_n y_n(x),$$

де $c_i \in \mathbb{R}$ *— довільні сталі,* $i = \overline{1,n}.$

Одним із класів лінійних рівнянь, що можливо розв'язати і які часто зустрічаються у прикладних задачах, є лінійні диференціальні рівняння *n-го* порядку зі сталими коефіцієнтами.

§ 3.5. *Лінійні однорідні рівняння зі сталими коефіцієнтами*

Розглянемо лінійне однорідне диференціальне рівняння *n-го* порядку з невідомою функцією $y = y(x)$ вигляду

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0 \tag{3.24}$$

де a_i , $i = \overline{1,n}$,— сталі дійсні числа.

Означення. *Рівняння (3.24) називається ЛОР зі сталими коефіцієнтами.*

Рівнянню (3.24) поставимо у відповідність алгебраїчне рівняння вигляду

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0 \ , \tag{3.25}$$

яке *називається характеристичним рівнянням, а його корені – характеристичними числами рівняння (3.24).*

Структура ФСР (а, виходить, і загального розв'язку) рівняння (3.24) залежить від значень коренів характеристичного рівняння (3.25). Розрізняють чотири випадки.

1) Число λ_1 — простий дійсний корінь характеристичного рівняння (3.25). Йому у ФСР рівняння (3.24) відповідає розв'язок

$$y_1 = e^{\lambda_1 x} \ .$$

2) Число $\lambda_1 = a + ib$ — простий комплексний корінь характеристичного рівняння (3.25). Тоді $\lambda_2 = a - ib$ — також простий корінь характеристичного рівняння (3.25). Парі простих комплексно сполучених коренів $a \pm ib$ харак-

теристичного рівняння (3.25) відповідають два дійсних лінійно незалежних розв'язки рівняння (3.24) вигляду

$$y_1 = e^{ax}\cos bx\ ,\quad y_2 = e^{ax}\sin bx\,.$$

3) Число λ_1 — дійсний корінь кратності k характеристичного рівняння (3.25). Йому відповідають k дійсних лінійно незалежних розв'язків рівняння (3.24):

$$y_1 = e^{\lambda_1 x}\ ,\ y_2 = xe^{\lambda_1 x}\ , \ldots ,\ y_k = x^{k-1}e^{\lambda_1 x}\ .$$

4) Кожне з чисел $a \pm ib$ є коренем кратності k характеристичного рівняння (3.25). Їм відповідають $2k$ ЛНЗ розв'язків рівняння (3.24) вигляду

$$y_1 = e^{ax}\cos bx\ ,\ y_3 = xe^{ax}\cos bx\ , \ldots ,\ y_{2k-1} = x^{k-1}e^{ax}\cos bx\,,$$

$$y_2 = e^{ax}\sin bx,\ y_4 = xe^{ax}\sin bx\,, \ldots ,\ y_{2k} = x^{k-1}e^{ax}\sin bx\,.$$

Доведено, що розв'язки рівняння (3.24), що відповідають різним кореням характеристичного рівняння (3.25), є лінійно незалежними. Тоді, після знаходження всіх розв'язків, що відповідають усім кореням характеристичного рівняння (3.25), для знаходження загального розв'язку рівняння (3.24) залишилося скористатися теоремою про його загальний розв'язок.

Приклад 3.7. *Розв'язати рівняння*

$$y''' + y'' - 6y' = 0\ . \qquad (3.26)$$

Розв'язання. Рівняння (3.26) — лінійне однорідне рівняння 3-го порядку зі сталими коефіцієнтами. Його характеристичне рівняння

$$\lambda^3 + \lambda^2 - 6\lambda = 0$$

має корені: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = -3$. ФСР рівняння (3.26) складається з розв'язків

$$y_1 = 1,\ y_2 = e^{2x},\ y_3 = e^{-3x}.$$

Остаточно, загальний розв'язок рівняння (3.26) має вигляд:

$$y = c_1 + c_2 e^{2x} + c_3 e^{-3x},$$

де c_1, c_2, c_3 – довільні дійсні сталі.

Приклад 3.8. *Розв'язати рівняння*

$$y''' + 5y'' + 33y' + 29y = 0 . \qquad (3.27)$$

Розв'язання. Характеристичне рівняння

$$\lambda^3 + 5\lambda^2 + 33\lambda + 29 = 0$$

має корені $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -2+5i$, $\lambda_3 = -2-5i$. ФСР така:

$$y_1 = e^{-x} \ , \ y_2 = e^{-2x}\cos 5x \, , \ y_3 = e^{-2x}\sin 5x .$$

Остаточно, загальний розв'язок рівняння (3.27) має вигляд:

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x}\cos 5x + c_3 e^{-2x}\sin 5x ,$$

де c_1, c_2, c_3 – довільні дійсні сталі.

Приклад 3.9. *Розв'язати рівняння*

$$y^{(4)} + 8y'' + 16y = 0 .$$

Розв'язання. Маємо $\lambda^4 + 8\lambda^2 + 16 = 0$, або $(\lambda^2 + 4)^2 = 0$, звідки $\lambda_1 = \lambda_2 = 2i$, $\lambda_3 = \lambda_4 = -2i$.

ФСР: $y_1 = \cos 2x$, $y_2 = \sin 2x$, $y_3 = x\cos 2x$, $y_4 = x\sin 2x$.

Остаточно, загальний розв'язок рівняння (3.27) –

$$y = c_1 cos2x + c_2 sin2x + c_3 xcos2x + c_4 xsin2x,$$

де c_1, c_2, c_3, c_4 – довільні дійсні сталі.

Приклад 3.10. *Розв'язати рівняння*

$$y''' + 3y'' - 4y = 0 .$$

Розв'язання. Характеристичне рівняння $\lambda^3 + 3\lambda^2 - 4 = 0$ має простий корінь $\lambda_1 = 1$ та корінь 2-ї кратності $\lambda_2 = \lambda_3 = -2$. Тому ФСР має вигляд

$$y_1 = e^{x} \ , \ y_2 = e^{-2x} , \ y_3 = xe^{-2x} .$$

Остаточно, загальний розв'язок заданого рівняння:

$$y = c_1 e^{x} + c_2 e^{-2x} + c_3 x e^{-2x} ,$$

де c_1, c_2, c_3 – довільні дійсні сталі.

<u>Приклад 3.11</u>. Розв'язати задачу Коші

$$\begin{cases} y''' - 5y'' + 6y' = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \\ y''(0) = 1. \end{cases}$$

<u>Розв'язання.</u> Загальний розв'язок заданого лінійного однорідного рівняння має вигляд:

$$y = c_1 + c_2 e^{2x} + c_3 e^{3x} .$$

Знайдемо розв'язок, що задовольняє початковим умовам задачі Коші. Оскільки $y(0) = 0$, то підставляючи значення $x = 0$ та $y = 0$ у формулу загального розв'язку, одержуємо $0 = c_1 + c_2 + c_3$. Знайдемо першу і другу похідні загального розв'язку. Аналогічно попередньому, враховуючи інші початкові умови задачі Коші маємо

$$y' = 2c_2 e^{2x} + 3c_3 e^{3x}, \quad y'(0) = 0 \Rightarrow 0 = 2c_2 + 3c_3;$$

$$y'' = 4c_2 e^{2x} + 9c_3 e^{3x}, \quad y''(0) = 1 \Rightarrow 1 = 4c_2 + 9c_3.$$

Таким чином, ми одержали лінійну систему алгебраїчних рівнянь відносно $c_i,\ i = \overline{1;3}$:

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 = 0 \\ 2c_2 + 3c_3 = 0 \\ 4c_2 + 9c_3 = 1. \end{cases}$$

Алгебраїчна система має розв'язок: $c_1 = \frac{1}{6}$, $c_2 = -\frac{1}{2}$, $c_3 = \frac{1}{3}$.

Остаточно, розв'язок заданої задачі Коші має вигляд

$$y = \frac{1}{6} - \frac{1}{2} e^{2x} + \frac{1}{3} e^{3x}.$$

§ 3.6. *Лінійні неоднорідні рівняння. Лінійні неоднорідні рівняння зі сталими коефіцієнтами*

***<u>Теорема</u> (про загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння)**. Нехай $y_1(x)$, ... , $y_n(x)$ — ФСР лінійного однорідного рівняння (3.23), $z(x)$—*

розв'язок лінійного неоднорідного рівняння (3.22). Тоді загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння (3.22) дорівнює сумі загального розв'язку (y_0) *лінійного однорідного рівняння (3.23), що відповідає рівнянню (3.22), та розв'язку лінійного неоднорідного рівняння (3.22), тобто*

$$y(x) = y_0 + z(x),$$

або

$$y = c_1 y_1(x) + \cdots + c_n y_n(x) + z(x).$$

<u>Теорема</u> (про суму розв'язків). *Якщо функції* $y = z_k(x), k \in \{1; 2; \dots; l\}$, *— розв'язки відповідно рівнянь*

$$y^{(n)} + p_1(x) y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(x) y' + p_n(x) y = f_k(x), \ k \in \{1; 2; \dots; l\},$$

то функція $z(x) = z_1(x) + \cdots + z_l(x)$ *є розв'язком рівняння*

$$y^{(n)} + p_1(x) y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(x) y' + p_n(x) y = f_1(x) + \dots + f_l(x).$$

Згідно з методом варіації сталих Лагранжа загальний розв'язок ЛНР (3.22) ошукається у вигляді

$$y(x) = c_1(x) \cdot y_1(x) + \dots + c_n(x) \cdot y_n(x), \tag{3.28}$$

де $c_1(x), \dots, c_n(x)$ — поки невідомі диференційовані функції на деякому проміжку. Для знаходження функцій $c_k(x), k = \overline{1; n}$, (3.28) підставляють до рівняння (3.22). Доведено, що (3.28) дає загальний розв'язок ЛНР (3.22), якщо функції $c_k(x), k = \overline{1; n}$, задовольняють системі рівнянь

$$\begin{cases} c_1'(x) \cdot y_1(x) + \dots + c_n'(x) \cdot y_n(x) = 0, \\ \dots \\ c_1'(x) \cdot y_1^{(n-2)}(x) + \dots + c_n'(x) \cdot y_n^{(n-2)}(x) = 0, \\ c_1'(x) \cdot y_1^{(n-1)}(x) + \dots + c_n'(x) \cdot y_n^{(n-1)}(x) = f(x). \end{cases} \tag{3.29}$$

Розглянемо лінійне неоднорідне рівняння *n*-го порядку зі сталими дійсними коефіцієнтами

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x), \tag{3.30}$$

де $f = f(x)$ – відома функція на деякому проміжку.

Якщо $f = f(x)$ — елементарна функція, то рівняння (3.30) інтегрується за допомогою методу варіації сталих Лагранжа, тому що ЛОР зі сталими коефіцієнтами (3.24) має ФСР, що складається з елементарних функцій.

Розглянемо випадок лінійних неоднорідних рівнянь зі сталими коефіцієнтами і спеціальним виглядом правої частини. Якщо права частина рівняння (3.30) має так званий спеціальний вигляд, то воно може бути розв'язане (крім методу варіації сталих Лагранжа) також методом невизначених коефіцієнтів. Зупинимося на цьому питанні.

Розглянемо спеціальні вигляди правих частин ЛНР (3.30) і відповідні їм розв'язки :

1. Нехай права частина рівняння (3.30) має вигляд:

$$f(x) = e^{\alpha x} P_m(x), \tag{3.31}$$

де $\alpha \in \mathbb{R}$, $P_m(x)$ — поліном від x *степені* m. Тоді розв'язок $y = z(x)$ рівняння (3.30) із правою частиною (3.31) має вигляд

$$z(x) = x^s e^{\alpha x} Q_m(x),$$

де число α є коренем кратності s характеристичного рівняння (3.25), $Q_m(x)$ — поліном від x степені m.

2. Нехай права частина рівняння (3.30) має вигляд:

$$f(x) = e^{\alpha x}(P_m(x)\cos\beta x + Q_l(x)\sin\beta x) \tag{3.32}$$

де $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \beta \neq 0, P_m(x)$ і $Q_l(x)$ — поліноми від x степенів m і l відповідно. Тоді розв'язок рівняння (3.30) ошукується в такому вигляді:

$$z(x) = x^s e^{\alpha x}(R_q(x)\cos\beta x + T_q(x)\sin\beta x),$$

де $\alpha + i\beta$ — корінь характеристичного рівняння кратності s, $R_q(x)$ і $T_q(x)$ — поліноми від x степені $q = \max\{m, l\}$.

Зауваження. Коефіцієнти поліномів $Q_m(x)$, $R_q(x)$ і $T_q(x)$ зручно шукати методом невизначених коефіцієнтів.

Приклад 3.12. *Розв'язати рівняння*

$$y'' - y' - 12y = 7e^{-3x} + (8x+7)e^{-4x} \qquad (3.33)$$

Розв'язання. Спочатку розв'яжемо відповідне лінійне однорідне рівняння

$$y'' - y' - 12y = 0.$$

Його характеристичне рівняння $\lambda^2 - \lambda - 12 = 0$ має два корені $\lambda_1 = -3, \lambda_2 = 4$. Загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння має вигляд: $y_0 = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{4x}$.

Знайдемо розв'язок рівняння (3.33). Для цього згідно з теоремою про суму розв'язків будемо шукати розв'язок кожного з двох рівнянь

$$y'' - y' - 12y = 7e^{-3x} \qquad (3.34)$$

та

$$y'' - y' - 12y = (8x+7)e^{-4x} \qquad (3.35)$$

Рівняння (3.34) має спеціальний вигляд (3.31), де $\alpha = -3, s = 1, m = 0$. Таким чином, його розв'язок

$$z_1(x) = Axe^{-3x}, A \in \mathbb{R}. \qquad (3.36)$$

Для знаходження невизначеного коефіцієнта A, підставимо розв'язок (3.36) у рівняння (3.34). Для цього будемо користуватись схемою:

$$\begin{array}{cr|l} & -12 & z_1(x) = Axe^{-3x} \\ «+» & -1 & z_1'(x) = Ae^{-3x} - 3Axe^{-3x} \\ & 1 & z_1''(x) = -6Ae^{-3x} + 9Axe^{-3x} \end{array}$$

$$-6Ae^{-3x} + 9Axe^{-3x} - Ae^{-3x} + 3Axe^{-3x} - 12Axe^{-3x} = 7e^{-3x},$$

$$-7Ae^{-3x} = 7e^{-3x}, \Rightarrow A = -1.$$

Таким чином, $z_1(x) = -xe^{-3x}$.

Рівняння (3.35) має спеціальний вигляд (3.31), де $\alpha = -4, s = 0, m = 1$.

Таким чином, воно має розв'язок

$$z_2(x) = (Ax+B)e^{-4x}, A, B \in \mathbb{R}. \qquad (3.37)$$

Для знаходження невизначених коефіцієнтів A та B підставимо (3.37) у (3.35):

$$
\begin{array}{lr|l}
 & -12 & z_2(x) = (Ax+B)e^{-4x}, \\
\text{«+»} & -1 & z_2'(x) = Ae^{-4x} - 4(Ax+B)e^{-4x}, \\
 & 1 & z''_2(x) = -8Ae^{-4x} + 16(Ax+B)e^{-4x},
\end{array}
$$

$$8(Ax+B)e^{-4x} - 9Ae^{-4x} = (8x+7)e^{-4x},$$

$$8(Ax+B) - 9A = 8x+7.$$

Зрівняємо коефіцієнти при однакових ступенях x :

$$
\begin{array}{c|l}
x^1 & 8A = 8 \qquad \Rightarrow A = 1 \\
x^0 & 8B - 9A = 7 \Rightarrow B = 2
\end{array},
$$

звідки $z_2(x) = (x+2)e^{-4x}$.

Згідно з теоремами про загальний розв’язок лінійного неоднорідного рівняння та про суму розв’язків загальний розв’язок рівняння (3.33) має вигляд:

$$y = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{4x} + (x+2)e^{-4x} - xe^{-3x}.$$

Приклад 3.13. *Розв’язати рівняння*

$$y'' + 4y = 6\cos x + 4\sin 2x. \tag{3.38}$$

Розв’язання. Спочатку розв’яжемо відповідне лінійне однорідне рівняння

$$y'' + 4y = 0.$$

Його характеристичне рівняння $\lambda^2 + 4 = 0$ має два корені $\lambda_1 = 2i, \lambda_2 = -2i$. Загальний розв’язок лінійного однорідного рівняння має вигляд:

$$y_0 = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x.$$

Знайдемо розв’язок рівняння (3.38). Для цього згідно з теоремою про суму розв’язків будемо шукати розв’язок кожного з двох рівнянь

$$y'' + 4y = 6\cos x \tag{3.39}$$

та

$$y'' + 4y = 4\sin 2x. \tag{3.40}$$

Рівняння (3.39) має спеціальний вигляд (3.32), де $\alpha = 0, \beta = 1, s = 0, m = l = q = 0$. Таким чином, його розв’язок треба шукати у вигляді

$$z_1(x) = A\cos x + B\sin x. \tag{3.41}$$

Для знаходження невизначених коефіцієнтів A та B, підставимо розв'язок (3.41) у рівняння (3.39):

$$\begin{array}{lr|l} & 4 & z_1(x) = A\cos x + B\sin x \\ «+» & 0 & z_1'(x) = -A\sin x + B\cos x \\ & 1 & z_1''(x) = -A\cos x - B\sin x \end{array}$$

$$\overline{\qquad 3A\cos x + 3B\sin x = 6\cos x \qquad}$$

Зрівняємо коефіцієнти при cos x та sin x, одержуємо: $A = 2$, $B = 0$. Отже, $z_1(x) = 2\cos x$.

Рівняння (3.40) має спеціальний вигляд (3.32), де $\alpha = 0, \beta = 2, s = 1, m = l = q = 0$. Таким чином, його розв'язок треба шукати у вигляді

$$z_2(x) = x(A\cos 2x + B\sin 2x). \qquad (3.42)$$

Для знаходження невизначених коефіцієнтів A та B, підставимо розв'язок (3.42) у рівняння (3.40):

$$\begin{array}{lr|l} & 4 & z_2(x) = x(A\cos 2x + B\sin 2x) \\ «+» & 0 & z_2'(x) = A\cos 2x + B\sin 2x + x(-2ASin2x + 2BCos2x) \\ & 1 & z_2''(x) = 4(-A\sin 2x + BCos2x) + x(-4ACos2x - 4B\sin 2x) \end{array}$$

$$-4A\sin 2x + 4B\cos 2x = 4\sin 2x \quad \Rightarrow A = -1, B = 0, \qquad z_2(x) = -x\cos 2x.$$

Загальний розв'язок рівняння (3.38) є

$$y = c_1\cos 2x + c_2\sin 2x + 2\cos x - x\cos 2x,$$

де c_1, c_2 – довільні дійсні сталі.

Контрольні запитання до тем розділу 3

1. Яке рівняння називається звичайним диференціальним рівнянням n–го порядку?
2. Який вигляд має звичайне диференціальне рівняння n–го порядку, яке розв'язане відносно старшої похідної?
3. Що називається розв'язком звичайного диференціального рівняння n–го порядку?
4. Постановка задачі Коші для звичайного диференціального рівняння n–го порядку, яке розв'язане відносно старшої похідної.
5. Який вигляд має загальний розв'язок звичайного диференціального

рівняння n–го порядку?

6. Що називається загальним інтегралом звичайного диференціального рівняння n–го порядку?
7. Яка функція, залежна від $(n+2)$-х змінних називається однорідною по $(n+1)$ змінних зі степеню однорідності m?
8. Яке звичайне диференціальне рівняння n–го порядку називається однорідним відносно невідомої функції та всіх її похідних?
9. Назвіть три вигляди неповних звичайних диференціальних рівнянь n–го порядку.
10. Метод розв'язування неповного звичайного диференціального рівняння n–го порядку, яке явно містить тільки незалежну змінну та старшу похідну невідомої функції.
11. Метод розв'язування неповного звичайного диференціального рівняння n–го порядку, яке явно містить дві послідовні похідні невідомої функції, включно зі старшою похідною невідомої функції.
12. Метод розв'язування неповного звичайного диференціального рівняння n–го порядку, яке явно містить дві похідні невідомої функції, порядок яких відрізняється на 2, включно зі старшою похідною невідомої функції.
13. Яке звичайне диференціальне рівняння n–го порядку допускає зниження порядку?
14. Метод зниження порядку звичайного диференціального рівняння n–го порядку, яке явно не містить невідомої функції та декілька її похідних, починаючи з першої.
15. Метод зниження порядку звичайного диференціального рівняння n–го порядку, яке явно не містить незалежної змінної.
16. Метод зниження порядку звичайного диференціального рівняння n–го порядку, яке є однорідним рівнянням відносно невідомої функції та всіх її похідних степені однорідності m.
17. Яке звичайне диференціальне рівняння n–го порядку називається рівнянням у повних (або точних) похідних?
18. Метод зниження порядку звичайного диференціального рівняння n–го порядку у повних (або точних) похідних.
19. Яке звичайне диференціальне рівняння n–го порядку називається лінійним диференціального рівняння n-го порядку?
20. Яке звичайне лінійне диференціальне рівняння n–го порядку називається лінійним однорідним диференціального рівняння n-го порядку?
21. Яке звичайне лінійне диференціальне рівняння n–го порядку називається лінійним неоднорідним диференціального рівняння n-го порядку?

22. Які функції називаються лінійно незалежними на даному проміжку?
23. Що називається фундаментальною системою розв'язків або базисом на даному проміжку лінійного однорідного диференціального рівняння n-го порядку?
24. Сформулювати теорему про загальний розв'язок лінійного однорідного диференціального рівняння n-го порядку.
25. Яке звичайне лінійне диференціальне рівняння n–го порядку називається лінійним однорідним рівняння зі сталими коефіцієнтами?
26. Яке алгебраїчне рівняння називається характеристичним рівнянням для лінійного однорідного рівняння n–го порядку зі сталими коефіцієнтами?
27. Дати означення характеристичних чисел для лінійного однорідного рівняння n–го порядку зі сталими коефіцієнтами.
28. Побудова елементів фундаментальної системи розв'язків лінійного однорідного диференціального рівняння n–го порядку зі сталими коефіцієнтами у випадку простих дійсних коренів характеристичного рівняння.
29. Побудова елементів фундаментальної системи розв'язків лінійного однорідного диференціального рівняння n–го порядку зі сталими коефіцієнтами у випадку простих комплексних коренів характеристичного рівняння.
30. Побудова елементів фундаментальної системи розв'язків лінійного однорідного диференціального рівняння n–го порядку зі сталими коефіцієнтами у випадку кратних дійсних коренів характеристичного рівняння.
31. Побудова елементів фундаментальної системи розв'язків лінійного однорідного диференціального рівняння n–го порядку зі сталими коефіцієнтами у випадку кратних комплексних коренів характеристичного рівняння.
32. Сформулювати теорему про загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння n-го порядку.
33. Метод варіації довільних сталих Лагранжа знаходження загального розв'язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння n-го порядку.
34. Сформулювати теорему про суму розв'язків лінійного неоднорідного диференціального рівняння n-го порядку.
35. Дати означення двох спеціальних виглядів правої частини лінійного неоднорідного диференціального рівняння n-го порядку зі сталими коефіцієнтами.

36. Метод побудови розв’язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння n-го порядку зі сталими коефіцієнтами та спеціальним виглядом правої частини першого типу.
37. Метод побудови розв’язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння n-го порядку зі сталими коефіцієнтами та спеціальним виглядом правої частини другого типу.

Розділ 4. Системи звичайних диференціальних рівнянь

§ 4.1. *Метод виключення (зведення системи у нормальній формі Коші до рівняння n-го порядку)*

Розглянемо систему звичайних диференціальних рівнянь, яка задана в нормальній формі Коші:

$$\begin{cases} y_i' = f_i(x, y_1, \dots, y_n) \\ i = \overline{1, n} \end{cases} \tag{4.1}$$

або у векторній формі

$$y' = f(x, y), \quad f : R \times R^n \to R^n. \tag{4.2}$$

Нехай функції f_i, $i = \overline{1; n}$, визначені в області $D \subseteq R^{n+1}$.

Означення. *Сукупність n функцій* $y_1 = \varphi_1(x), \dots, y_n = \varphi_n(x)$, $\varphi_i \in C^1(I)$, $\varphi_i : I \to \mathbb{R}$, $I \subseteq \mathbb{R}$ $i = \overline{1; n}$, *називається розв'язком системи (4.1) на I, якщо*

$$\forall x \in I: \ (x, \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)) \in D,$$

$$\textit{при } x \in I: \begin{cases} \varphi_i'(x) \equiv f_i(x, \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)), \\ i = \overline{1, n}. \end{cases}$$

Або у векторній формі:

Означення. *Функція* $y = \varphi(x)$, $\varphi \in C^1(I)$, $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$, *називається розв'язком системи (4.2) на I, якщо*

1) $\forall x \in I: \ (x, \varphi(x)) \in D$,

2) при $x \in I: \ \varphi'(x) \equiv f(x, \varphi(x))$.

Одним з методів розв'язання системи (4.1) є зведення системи до рівняння *n*-го порядку. Цей метод називається методом виключення.

Припустимо, що функції f_i, $i = \overline{1; n}$, — диференційовані *n*–1 разів. Диференціюємо по *x* перше (взагалі кажучи, можна будь-яке) рівняння системи (4.1) *n*–1 разів, при цьому заміняв після кожного диференціювання похідні y_i' їх значеннями з системи (4.1). Тобто

$$y_1'' = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y_1} y_1' + \ldots + \frac{\partial f_1}{\partial y_n} y_n' \overset{(4.1)}{=} \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y_1} f_1 + \ldots + \frac{\partial f_1}{\partial y_n} f_n \equiv \Phi_2(x, y_1, \ldots, y_n);$$

$$y_1''' = \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial y_1} \cdot y_1' + \ldots + \frac{\partial \Phi_2}{\partial y_n} \cdot y_n' \overset{(4.1)}{=}$$
$$= \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial y_1} \cdot f_1 + \ldots + \frac{\partial \Phi_2}{\partial y_n} \cdot f_n \equiv \Phi_3(x, y_1, \ldots, y_n)$$

. . . .

По аналогії $$y_1^{(n-1)} = \Phi_{n-1}(x, y_1, \ldots, y_n)$$

та

$$y_1^{(n)} = \Phi_n(x, y_1, \ldots, y_n). \qquad (4.3)$$

Складемо допоміжну систему

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, \ldots, y_n) \\ y_1^{(k)} = \Phi_k(x, y_1, \ldots, y_n) \end{cases}, \quad k = \overline{2, n-1} \qquad (4.4)$$

Припустимо, що якобіан $\dfrac{D(f_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_{n-1})}{D(y_2, y_3, \ldots, y_n)} \neq 0$. Тоді, згідно з теоремою про існування неявних функцій система рівнянь (4.4) може бути розв’язана відносно $y_2, \ldots, y_n$ (в околі кожної точці, де якобіан відмінний від нуля). При цьому $y_2, \ldots, y_n$ будуть функціями від $x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(n-1)}$, тобто

$$\begin{cases} y_i = \omega_i\left(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(n-1)}\right) \\ i = \overline{2, n}. \end{cases} \qquad (4.5)$$

З урахуванням рівняння (4.3) та системи (4.5) дістанемо рівняння n-го порядку відносно невідомої функції $y_1 = y_1(x)$:

$$y_1^{(n)} = \Phi_n\left(x, y_1, \omega_2\left(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(n-1)}\right), \ldots, \omega_n\left(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(n-1)}\right)\right) \equiv f\left(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(n-1)}\right),$$

тобто

$$y_1^{(n)} = f\left(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(n-1)}\right). \qquad (4.6)$$

В теорії звичайних диференціальних рівнянь доведено, що розв’язок $y_1 = \varphi(x)$ рівняння (4.6) і функції $y_2, \ldots, y_n$, знайдені при $y_1 = \varphi(x)$ з (4.5), складають розв'язок системи (4.1). Та навпаки, якщо $y_1 = y_1(x),..., y_n = y_n(x)$ — розв'язок системи (4.1), то $y_1 = y_1(x)$ - розв'язок рівняння (4.6).

Рівняння (4.6) називається рівнянням *n*-го порядку, рівносильним до системи (4.1) у тому сенсі, що задача інтегрування системи (4.1) рівносильна до задачі інтегрування рівняння (4.6).

Приклад 4.1. *Розв'язати систему рівнянь*

$$\begin{cases} y' = z+1, \\ z' = \dfrac{(z+1)^2}{y}. \end{cases} \tag{4.7}$$

Розв'язання. Одержимо диференціальне рівняння другого порядку з невідомою функцією $y = y(x)$. Продиференціюємо по x перше рівняння системи (4.7): $y'' = z'$. З урахуванням другого рівняння системи (4.7) маємо $y'' = \dfrac{(z+1)^2}{y}$.

Це означає, що з рівняння $y'' = \dfrac{(z+1)^2}{y}$ треба виключити змінну z. З першого рівняння системи (4.7) знайдемо значення z як функції від x, y, y':

$$z = y' - 1. \tag{4.8}$$

Дістанемо рівняння другого порядку відносно $y(x)$:

$$y'' = \frac{(y')^2}{y}. \tag{4.9}$$

Розв'яжемо рівняння (4.9). Зведемо рівняння (4.9) до рівняння в точних похідних:

$$\frac{y''}{y'} = \frac{y'}{y}\ (y' \neq 0), \quad (\ln|y'|)' = (\ln|y|)' \Rightarrow y' = c_1 y.$$

звідки $\dfrac{y'}{y} = c_1\ (y \neq 0), \quad (\ln|y|)' = c_1,\ \ln|y| = c_1 x + c_2,\ y = c_2 e^{c_1 x}.$

$y = c_2 e^{c_1 x}$ – загальний розв'язок рівняння (4.9).

Повернемося до системи (4.7). З (4.8) $z=\left(c_2e^{c_1x}\right)'-1$, або $z=c_1c_2e^{c_1x}-1$. Остаточно,

$$\begin{cases} y=c_2e^{c_1x} \\ z=c_1c_2e^{c_1x}-1 \end{cases}$$ — загальний розв’язок системи (4.7).

При розв’язуванні рівняння (4.9) ми могли загубити розв’язки, для яких $y'=0$, тобто $y=c$. Для системи (4.7) це рівнозначно утраті сукупності розв’язків $y=c$, $z=-1$. Ці розв’язки містяться у загальному розв’язку при $c_1=0, c_2=c$.

Зауваження. Іноді зручніше виключати з системи не невідомі функції, а деякі вирази від них. Наприклад, у прикладі 4.1 зручніше виключити не z, а $z+1$, тоді рівність (4.8) набирає вигляду $z+1=y'$.

Зауваження. При застосуванні теорії диференціальних рівнянь у різних галузях знань, як правило, в якості незалежної змінної вибирають t (час). При цьому для невідомої функції $x=x(t)$ використовують означення: $\frac{dx}{dt}=\dot{x}$.

Приклад 4.2. *Розв’язати методом виключення систему рівнянь*

$$\begin{cases} \dot{x}=2x+y, \\ \dot{y}=x+3y-z, \\ \dot{z}=-x+2y+3z. \end{cases} \qquad (4.10)$$

Розв’язання. Продиференціюємо 2 рази перше рівняння системи (4.10) по незалежній змінній t, враховуючи кожного разу значення $\dot{x},\dot{y},\dot{z}$ з системи (4.10). Після першого диференціювання маємо: $\ddot{x}=2\dot{x}+\dot{y}$, або $\ddot{x}=2(2x+y)+(x+3y-z)$, або $\ddot{x}=5x+5y-z$. Після другого диференціювання $\dddot{x}=5\dot{x}+5\dot{y}-\dot{z}$ або

$$\dddot{x}=16x+18y-8z. \qquad (4.11)$$

Складемо систему вигляду (4.4):

$$\begin{cases} \dot{x}=2x+y \\ \ddot{x}=5x+5y-z \end{cases}. \qquad (4.12)$$

Оскільки якобіан $\dfrac{D(f_1,\Phi_2)}{D(y,z)}=\begin{vmatrix}1 & 0\\ 5 & -1\end{vmatrix}=-1\neq 0$, то система розв'язна відносно змінних y та z. З першого рівняння системи (4.12)

$$y=\dot{x}-2x. \tag{4.13}$$

З урахуванням і другого рівняння

$$z=-\ddot{x}+5\dot{x}-5x. \tag{4.14}$$

Співвідношення (4.13) та (4.14) складають систему (4.5).

Підставимо (4.13) та (4.14) в (4.11), дістанемо рівняння 3-го порядку відносно $x(t)$:

$$\dddot{x}-8\ddot{x}+22\dot{x}-20x=0. \tag{4.15}$$

(4.15) – ЛОР третього порядку зі сталими коефіцієнтами. Відповідне його характеристичне рівняння

$$\lambda^3-8\lambda^2+22\lambda-20=0 \quad\Leftrightarrow\quad (\lambda-2)(\lambda^2-6\lambda+10)=0$$

має корені $\lambda_1=2,\ \lambda_2=3+i,\ \lambda_3=3-i$. Звідки

$$x=c_1e^{2t}+c_2e^{3t}\cos t+c_3e^{3t}\sin t$$

– загальний розв'язок рівняння (4.15). З формул (4.13) та (4.14) знайдемо функції $z(t)$ і $y(t)$:

$$\begin{aligned}y&=\left(c_1e^{2t}+c_2e^{3t}\cos t+c_3e^{3t}\sin t\right)'-2\left(c_1e^{2t}+c_2e^{3t}\cos t+c_3e^{3t}\sin t\right)\equiv\\ &\equiv e^{3t}\left((c_2+c_3)\cos t+(c_3-c_2)\sin t\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}z=&-\left(c_1e^{2t}+c_2e^{3t}\cos t+c_3e^{3t}\sin t\right)''+5\left(c_1e^{2t}+c_2e^{3t}\cos t+c_3e^{3t}\sin t\right)'-\\ &-5\left(c_1e^{2t}+c_2e^{3t}\cos t+c_3e^{3t}\sin t\right)\equiv\\ &\equiv c_1e^{2t}+(2c_2-c_3)\,e^{3t}\cos t+(c_2+2c_3)e^{3t}\sin t.\end{aligned}$$

Отже,

$$\begin{cases}x=c_1e^{2t}+c_2e^{3t}\cos t+c_3e^{3t}\sin t\\ y=e^{3t}\left((c_2+c_3)\cos t+(c_3-c_2)\sin t\right)\\ z=c_1e^{2t}+(2c_2-c_3)\,e^{3t}\cos t+(c_2+2c_3)e^{3t}\sin t\end{cases}$$

– загальний розв’язок системи (4.10).

§ 4.2. *Системи звичайних лінійних диференціальних рівнянь. Загальна теорія*

Система лінійних неоднорідних звичайних диференціальних рівнянь (ЛНС) у нормальній формі Коші має вигляд:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_k}{dx} = \sum_{l=1}^{n} p_{kl}(x) y_l + f_k(x), \\ k = \overline{1,n}, \end{cases} \tag{4.16}$$

або у векторній формі:

$$\frac{dy}{dx} = P(x)y + f(x), \tag{4.17}$$

де $y = col(y_1,..., y_n)$, $P(x) = (p_{kl}(x))_1^n$, $f(x) = col(f_1(x),..., f_n(x))$.

Якщо в системі (4.17) $f(x) \equiv 0$, то система

$$\frac{dy}{dx} = P(x)y \tag{4.18}$$

називається лінійною однорідною системою (ЛОС).

Припустимо, що функції p_{kl}, $f_k \in C(I)$, $k,l = \overline{1,n}, I \subseteq R.$.

<u>Означення.</u> *Фундаментальною системою розв'язків* (ФСР) *системи* (4.18) *на проміжку* I *називається* n ЛНЗ *на* I *її розв'язків* $Y_1(x) = \begin{pmatrix} y_{11}(x) \\ \vdots \\ y_{n1}(x) \end{pmatrix}$, …,

$Y_n(x) = \begin{pmatrix} y_{1n}(x) \\ \vdots \\ y_{nn}(x) \end{pmatrix}$, *тобто таких розв'язків, для яких тотожності*

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_{ki}(x) \equiv 0, \ k = \overline{1,n}, x \in I.$$

(α_i - сталі числа), виконуються тільки при $\alpha_i = 0$, $i = \overline{1,n}$.

***<u>Теорема</u>* (про загальний розв'язок ЛОС)**. *Якщо* $Y_1(x),...,Y_n(x)$ — *ФСР лінійної однорідної системи (4.18), то її загальний розв'язок має вигляд:*

$$y = c_1 Y_1(x) + ... + c_n Y_n(x),$$

де c_i — *довільні дійсні сталі, або у скалярному вигляді*

$$y_k = \sum_{i=1}^{n} c_i y_{ki}(x), \ k = \overline{1,n}.$$

***<u>Теорема</u>* (про загальний розв'язок ЛНС)**. *Загальний розв'язок лінійної неоднорідної системи рівнянь (4.16) ((4.17)) дорівнює сумі загального розв'язку відповідної лінійної однорідної системи (4.18)*

$$Y_0(x) = c_1 Y_1(x) + \ldots + c_n Y_n(x)$$

та деякого розв'язку $z(x) = col(z_1(x), \ldots, z_n(x))$ *лінійної неоднорідної системи (4.16), тобто*

$$y = Y_0(x) + z(x) \equiv c_1 Y_1(x) + \ldots + c_n Y_n(x) + z(x),$$

або у скалярному вигляді

$$y_k = \sum_{i=1}^{n} c_i y_{ki}(x) + z_k(x), \ k = \overline{1,n}.$$

Одним з класів лінійних однорідних систем, які можливо розв'язати, є системи зі сталими коефіцієнтами.

§ 4.3. *Лінійні однорідні системи звичайних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами*

Лінійна однорідна система звичайних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами має вигляд

$$\frac{dy}{dx} = Ay, \tag{4.19}$$

де $A = (a_{kl})_{k,l=1}^{n}$ — стала дійсна матриця.

Одним з методів побудови ФСР системи (4.19) є метод Ейлера.

Згідно з методом Ейлера лінійній однорідній системі (4.19) ставиться у відповідність *характеристичне рівняння*

$$\det(A - \lambda E) = 0, \qquad \left(\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \right) \tag{4.20}$$

Його корені називаються характеристичними числами системи (4.19).

Структура ФСР системи (4.19) залежить від значінь її характеристичних чисел. Розрізняють такі випадки:

1. $\lambda = \lambda_1$ — простий дійсний корінь характеристичного рівняння (4.20). Йому відповідає розв'язок системи (4.19) вигляду

$$y = \gamma e^{\lambda_1 x}, \tag{4.21}$$

де γ — властивий вектор матриці A, що відповідає власному значенню λ_1 цієї матриці. Вектор $\gamma = col(\gamma_1, ..., \gamma_n)$ знаходиться з системи лінійних однорідних алгебраїчних рівнянь

$$(A - \lambda_1 E)\gamma = 0. \tag{4.22}$$

Очевидно, що γ — дійсний ненульовий вектор.

2. $\lambda_1 = a + bi$, $b \neq 0$ - простий комплексний корінь характеристичного рівняння (4.20). Тоді $\lambda_2 = a - bi$ також простий комплексний корінь рівняння (4.20). Аналогічним чином, як у п.1, побудуємо розв'язок системи (4.19) у вигляді (4.21), який відповідає кореню $\lambda_1 = a + bi$ (або $\lambda_2 = a - bi$). Власний вектор γ також визначається з системи (4.22). Відокремлюючи у розв'язку (4.21) дійсну та умовну частини, дістаємо два дійсних лінійно незалежних розв'язка системи (4.19). Дійсні розв'язки, відповідні кореневі $\lambda_2 = a - bi$ (або відповідно $\lambda_1 = a + bi$) будуть лінійно залежними зі знайденими.

Отже, двом простим комплексно спряженим кореням $\lambda_{1,2} = a \pm bi$ рівняння (4.20) відповідають два дійсних лінійно незалежних розв'язки системи (4.19).

3. Якщо $\lambda = \lambda_1$ - дійсний корінь характеристичного рівняння кратності $k > 1$, то розглянемо матрицю $A - \lambda_1 E$. Знайдемо її порядок n, ранг r та дефект $def = m = n - r$. Можливі два випадки:

3а) якщо $def(A - \lambda_1 E) = k$, то k ЛНЗ розв'язки системи (4.19), які відповідають кореню $\lambda = \lambda_1$ характеристичного рівняння (4.20), мають вигляд

$$Y_1 = \gamma_1 e^{\lambda_1 x}, ..., Y_k = \gamma_k e^{\lambda_1 x},$$

де γ_i, $i = \overline{1,k},$ — ЛНЗ власні вектори матриці A, які відповідають власному значенню λ_1 та визначаються з системи (4.22).

3б) якщо $def\left(A-\lambda_1 E\right)<k$, то при знаходженні k відповідних ЛНЗ розв'язків системи (4.19) використовують метод невизначених коефіцієнтів. Суть його застосування у даному випадку полягає в наступному.

k ЛНЗ розв'язків ошукаються не явно, а знаходиться k-параметрична сім'я функцій, яка потім і входить до загального розв'язку як блок, що відповідає кореню кратності k. Цей блок ошукується у вигляді

$$Y = P_{k-1}\left(x\right)e^{\lambda_1 x}, \tag{4.23}$$

де $P_{k-1}(x)=col\left(P_{i,k-1}(x)\right), i=\overline{1,n},$, $P_{i,k-1}(x)$ - поліноми степені $k-1$ з невизначеними коефіцієнтами. Для знаходження невизначених коефіцієнтів розв'язок (4.23) підставляють у систему (4.19), при цьому k коефіцієнтів покладають довільними параметрами, а решту виражають через них.

<u>Примітка.</u> Якщо $\lambda_1 = a+bi$, то $\lambda_2 = a-bi$ - також буде коренем характеристичного рівняння, притому тієї ж кратності k. Знайшовши зазначеним у п.3 методом k ЛНЗ комплексних розв'язків, що відповідають кореневі $a+bi$ та відокремлюючи в них дійсні та умовні частини, дістаємо $2k$ ЛНЗ дійсних розв'язки. Розв'язки, відповідні до кореня $a-bi$, будуть ЛЗ з розв'язками, що відповідають кореневі $a+bi$.

Відомо, що різним кореням характеристичного рівняння відповідають ЛНЗ розв'язки системи (4.19). Отже, знайшовши розв'язки, відповідні до всіх коренів характеристичного рівняння (4.20) з урахуванням кратності, дістаємо ФСР системи (4.19). Загальний розв'язок знаходимо за допомогою теореми про загальний розв'язок ЛОС.

<u>Зауваження.</u> У випадку комплексних коренів характеристичного рівняння не має значення, для якого з двох комплексно спряжених коренів проводити дії п. 2) або п. 3).

Лінійні неоднорідні системи зі сталими коефіцієнтами завжди інтегруються, якщо вільні члени $f_i\left(x\right),\ i=\overline{1,n}$, є елементарними функціями. Для цього можна використовувати метод варіації сталих Лагранжа.

<u>Приклад 4.3</u>. *Розв'язати систему рівнянь.*

$$\begin{cases} y_1' = -y_1 + 4y_2, \\ y_2' = y_1 + 2y_2. \end{cases} \tag{4.24}$$

Розв’язання. (4.24) — ЛОС зі сталими коефіцієнтами, яка відповідає матриці $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Розв'яжемо характеристичне рівняння вигляду (4.20):

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 4 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \lambda^2 - \lambda - 6 = 0.$$

Його корені $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 3$ - прості дійсні числа.

а) Знайдемо власний вектор $\gamma = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix}$ матриці A, який відповідає власному значенню $\lambda_1 = -2$, тобто розв’яжемо систему (4.22):

$$(A - \lambda_1 E) = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\gamma = 0, \quad \gamma_1 + 4\gamma_2 = 0.$$

Власний вектор $\gamma = \begin{pmatrix} -4\gamma_2 \\ \gamma_2 \end{pmatrix}$. Обираємо $\gamma_2 = 1$, тоді $\gamma = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$. Отже, знайдено розв’язок $Y_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-2x}$ або в скалярній формі

$$\begin{cases} y_{11} = -4e^{-2x}, \\ y_{21} = e^{-2x}. \end{cases}$$

б) Аналогічно для $\lambda_2 = 3$:

$$\begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\gamma = 0, \quad \gamma_1 = \gamma_2, \quad \gamma = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ та } Y_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3x}.$$

або в скалярній формі $\begin{cases} y_{12} = e^{3x} \\ y_{22} = e^{3x} \end{cases}$.

Згідно з теоремою про загальний розв’язок ЛОС загальний розв’язок системи (4.24) має вигляд

$y = c_1 \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-2x} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3x}$ або в скалярній формі

$$\begin{cases} y_1 = -4c_1 e^{-2x} + c_2 e^{3x}, \\ y_2 = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{3x}, \end{cases}$$

де c_1, c_2 – довільні дійсні сталі.

<u>Приклад 4.4</u>. *Розв'язати систему рівнянь*

$$\begin{cases} y_1' = -7y_1 - 8y_2 \\ y_2' = 4y_1 + y_2. \end{cases} \tag{4.25}$$

<u>Розв'язання.</u> (4.25) — ЛОС зі сталими коефіцієнтами, яка відповідає матриці $A = \begin{pmatrix} -7 & -8 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$. Розв'яжемо характеристичне рівняння вигляду (4.20):

$$\begin{vmatrix} -7-\lambda & -8 \\ 4 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0, \ \lambda^2 + 6\lambda + 25 = 0.$$

Характеристичне рівняння має прості комплексні корені $\lambda_1 = -3+4i$ та $\lambda_2 = -3-4i$. Знайдемо власний вектор матриці A, якій відповідає власному значенню $\lambda_2 = -3-4i$, тобто розв'яжемо систему (4.22):

$$\begin{pmatrix} -4+4i & -8 \\ 4 & 4+4i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} = 0, \ (i-1)\gamma_1 = 2\gamma_2, \text{ звідки } \gamma = \begin{pmatrix} 2 \\ -1+i \end{pmatrix}.$$

Дістали комплексно визначний розв'язок

$$\begin{cases} y_1 = 2e^{(-3-4i)x}, \\ y_2 = (-1+i)e^{(-3-4i)x}, \end{cases}$$

або у скалярній формі

$$\begin{cases} y_1 = 2e^{-3x}(\cos 4x - i\sin 4x), \\ y_2 = e^{-3x}(-1+i)(\cos 4x - i\sin 4x). \end{cases} \tag{4.26}$$

Виділимо у розв'язку (4.26) дійсну (Re) та умовну (Im) частини:

$$\text{Re}: \begin{cases} y_{11} = 2e^{-3x}\cos 4x \\ y_{21} = e^{-3x}(-\cos 4x + \sin 4x), \end{cases} \qquad \text{Im}: \begin{cases} y_{12} = -2e^{-3x}\sin 4x \\ y_{22} = e^{-3x}(\cos 4x + \sin 4x). \end{cases} \tag{4.27}$$

(4.27) – два дійсних ЛНЗ розв'язки, відповідні кореням $\lambda_1 = -3+4i$ та $\lambda_2 = -3-4i$. Отже, загальний розв'язок системи (4.25) має вигляд:

$$\begin{cases} y_1 = 2e^{-3x}(c_1\cos 4x - c_2\sin 4x), \\ y_2 = e^{-3x}[(c_2 - c_1)\cos 4x + (c_1 + c_2)\sin 4x], \end{cases}$$

де c_1, c_2 – довільні дійсні сталі.

Приклад 4.5. *Розв'язати систему рівнянь*

$$\begin{cases} \dot{x} = 4x - y - z \\ \dot{y} = x + 2y - z \\ \dot{z} = x - y + 2z \end{cases}, \quad A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}. \tag{4.28}$$

Розв'язання. (4.28) - ЛОС 3-го порядку. Характеристичне рівняння має корені $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 3$.

а) $\lambda_1 = 2$ — простий дійсний корінь. Відповідний до нього власний вектор $\gamma = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{pmatrix}$ знайдемо з системи (4.22):

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{pmatrix} = 0, \text{ тобто } \begin{cases} \gamma_1 = \gamma_3 \\ \gamma_1 = \gamma_2 \end{cases}, \text{ звідки } \gamma = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Знайдено розв'язок $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}$ або $\begin{cases} x = e^{2t}, \\ y = e^{2t}, \\ z = e^{2t}. \end{cases}$

б) $\lambda_2 = 3$ - корінь характеристичного рівняння кратності $k = 2$. Укладемо матрицю $(A - \lambda_2 E) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, її порядок $n=3$, ранг $r=1$ та дефект $def = n - r = 2 = k$. Отже, має місце випадок 3а). Система (4.22) приймає вигляд $\gamma_1 - \gamma_2 - \gamma_3 = 0$, або

$$\gamma_1 = \gamma_2 + \gamma_3. \tag{4.29}$$

З урахуванням (4.29) побудуємо два ЛНЗ власних вектори $\gamma_{\langle 1\rangle}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ і $\gamma_{\langle 2\rangle}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$.

Два ЛНЗ розв'язки системи (4.28): $\begin{pmatrix}x_2\\y_2\\z_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}e^{3t}$, $\begin{pmatrix}x_3\\y_3\\z_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}e^{3t}$. Загальний розв'язок системи (4.28) має вигляд:

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}e^{2t}+c_2\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}e^{3t}+c_3\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}e^{3t},$$

або у скалярній формі

$$\begin{cases}x=c_1\,e^{2t}+(c_2+c_3)e^{3t},\\ y=c_1\,e^{2t}+c_2\,e^{3t},\\ z=c_1\,e^{2t}+c_3\,e^{3t},\end{cases}$$

де c_1, c_2, c_3 – довільні дійсні сталі.

<u>Приклад 4.6.</u> *Розв'язати систему рівнянь*

$$\begin{cases}y_1'=-2y_1-y_2,\\ y_2'=y_1-4y_2.\end{cases} \tag{4.30}$$

<u>Розв'язання.</u> (4.30) — ЛОС зі сталими коефіцієнтами, яка відповідає матриці $A=\begin{pmatrix}-2&-1\\1&-4\end{pmatrix}$. Розв'яжемо характеристичне рівняння вигляду (4.20):

$$\begin{vmatrix}-2-\lambda&-1\\1&-4-\lambda\end{vmatrix}=0,\qquad \lambda^2+6\lambda+9=0.$$

Характеристичне рівняння має корінь $\lambda_1=-3$ кратності $k=2$. Матриця $(A-\lambda_1E)=\begin{pmatrix}1&-1\\1&-1\end{pmatrix}$ має порядок $n=2$, ранг $r=1$ та дефект $def=1<2=k$ (випадок 3б)). Для знаходження загального розв'язку системи (4.30) скористуємося методом невизначених коефіцієнтів. Знайдемо блок (в данному випадку – загальний розв'язок системи), відповідний до кореня $\lambda_1=-3$ кратності 2 у вигляді (4.23):

$$\begin{cases} y_1 = (Ax + B)e^{-3x}, \\ y_2 = (Cx + D)e^{-3x}, \end{cases} \tag{4.31}$$

де A, B, C, D – невизначені коефіцієнти.

Підставимо розв'язок (4.31) в систему (4.30):

$$\begin{cases} (A - 3Ax - 3B)e^{-3x} = (-2Ax - 2B - Cx - D)e^{-3x} \\ (C - 3Cx - 3D)e^{-3x} = (Ax + B - 4Cx - 4D)e^{-3x} \end{cases} \Bigg| : e^{-3x} \neq 0 .$$

Прирівнюємо коефіцієнти при однакових степенях x у кожному рівнянні отриманої системи:

$$\begin{array}{c|l} x^1 & \left.\begin{array}{r} -3A = -2A - C \\ -3C = A - 4C \end{array}\right\} \quad A = C \\ x^0 & \left.\begin{array}{r} A - 3B = -2B - D \\ C - 3D = B - 4D \end{array}\right\} B = D + C \end{array}$$

Два коефіцієнти укладемо довільними параметрами: $C = c_1$, $D = c_2$. Інші виразимо через них: $A = c_1$, $B = c_1 + c_2$. Отже, з урахуванням (4.31) загальний розв'язок системи (4.30) має вигляд:

$$\begin{cases} y_1 = (c_1 x + c_1 + c_2)e^{-3x}, \\ y_2 = (c_1 x + c_2)e^{-3x}, \end{cases}$$

де c_1, c_2 – довільні дійсні сталі.

§ 4.4 Лінійні неоднорідні системи звичайних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами

Лінійна неоднорідна система рівнянь зі сталими коефіцієнтами у векторній формі має вигляд

$$\frac{dy}{dx} = Ay + f(x), \tag{4.32}$$

де $A = (a_{kl})_{k,l=1}^{n}$— стала дійсна матриця, $f = f(x)$ – відома n-мірна функція, задана на деякому проміжку.

Лінійна неоднорідна система рівнянь (4.32) зі сталими коефіцієнтами у скалярній формі має вигляд

$$\begin{cases} \dfrac{dy_k}{dx} = \sum\limits_{l=1}^{n} a_{kl} y_l + f_k(x), \\ k = \overline{1,n}, \end{cases} \tag{4.33}$$

Згідно з теоремою про загальний розв'язок ЛНС спочатку знаходимо загальний розв'язок відповідної ЛОС. Якщо $f(x)$ — елементарна функція, то система (4.32) інтегрується за допомогою методу варіації сталих Лагранжа, тому що відповідна ЛОС (4.19) має ФСР, що складається з елементарних функцій.

Згідно з методом варіації сталих Лагранжа загальний розв'язок ЛНС (4.32) ошукається у векторній формі у вигляді

$$y(x) = c_1(x) \cdot y_1(x) + \dots + c_n(x) \cdot y_n(x), \tag{4.34}$$

де $y_1(x), \dots, y_n(x)$ — ФСР відповідної лінійної однорідної системи (4.19),

$c_1(x), \dots, c_n(x)$ — поки невідомі диференційовані функції на деякому проміжку.

(4.34) у скалярній формі має вигляд

$$y_k = \sum_{i=1}^{n} c_i(x) y_{ki}(x), \; k = \overline{1,n}. \tag{4.35}$$

Для знаходження функцій $c_k(x), k = \overline{1;n}$, (4.34) підставляють до системи (4.32) (або (4.35) підставляють до системи (4.33)). Доведено, що (4.34) дає загальний розв'язок ЛНС (4.32), якщо функції $c_k(x), k = \overline{1;n}$, задовольняють системі рівнянь

$$\begin{cases} c_1'(x) \cdot y_{11}(x) + \dots + c_n'(x) \cdot y_{1n}(x) = f_1(x), \\ c_1'(x) \cdot y_{21}(x) + \dots + c_n'(x) \cdot y_{2n}(x) = f_2(x), \\ \dots \\ c_1'(x) \cdot y_{n1}(x) + \dots + c_n'(x) \cdot y_{nn}(x) = f_n(x). \end{cases} \tag{4.36}$$

<u>Приклад 4.7</u>. *Розв'язати систему рівнянь*

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x - y + \dfrac{2}{\sin t} \\ \dot{y} = 5x - 2y \quad . \end{cases} \tag{4.37}$$

Розв'язання. (4.37) — ЛНС 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами. Розв'яжемо її методом Лагранжа. Для цього спочатку розв'яжемо відповідну ЛОС:

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x - y \\ \dot{y} = 5x - 2y. \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \tag{4.38}$$

Характеристичне рівняння системи (4.38) $\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 5 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0$, $\lambda^2 + 1 = 0$ має корені $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$.

Знайдемо власний вектор матриці A, якій відповідає власному значенню $\lambda_1 = i$:

$$\begin{pmatrix} 2-i & -1 \\ 5 & -2-i \end{pmatrix} \gamma = 0 \quad \Rightarrow \gamma = \begin{pmatrix} 1 \\ 2-i \end{pmatrix}.$$

Комплексно визначний розв'язок ЛОС (4.38) має вигляд

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2-i \end{pmatrix} e^{it}, \qquad \begin{cases} x = \cos t + i \sin t \\ y = (2-i)(\cos t + i \sin t) \end{cases}$$

Виділимо у цьому розв'язку дійсну (Re) та умовну (Im) частини:

$$\text{Re}: \begin{cases} x_1 = \cos t \\ y_1 = 2\cos t + \sin t, \end{cases} \qquad \text{Im}: \begin{cases} x_2 = \sin t \\ y_2 = 2\sin t - \cos t. \end{cases}$$

Загальний розв'язок ЛОС (4.38) має вигляд:

$$\begin{cases} x_0 = c_1 \cos t + c_2 \sin t, \\ y_0 = c_1 (2\cos t + \sin t) + c_2 (2\sin t - \cos t), \end{cases}$$

де c_1, c_2 – довільні дійсні сталі.

Загальний розв'язок ЛНС (4.37), згідно до методу Лагранжа (формули (4.34) - (4.35)), будемо шукати у вигляді:

$$\begin{cases} x = c_1(t) \cos t + c_2(t) \sin t, \\ y = c_1(t)(2\cos t + \sin t) + c_2(t)(2\sin t - \cos t). \end{cases}$$

При цьому функції $c_i'(t)$, $i = 1; 2$, повинні задовольняти системі вигляду (4.36):

$$
\begin{cases} c_1'(t)\cos t + c_2'(t)\sin t = \dfrac{2}{\sin t} \\ c_1'(t)(2\cos t + \sin t) + c_2'(t)(2\sin t - \cos t) = 0, \end{cases} \qquad (4.39)
$$

Система (4.39) – лінійна неоднорідна алгебраїчна система відносно невідомих функцій $c_i'(t)$, $i = 1; 2$. Розв'яжемо її, користуючись правилом Крамера:

$$
\Delta = \begin{vmatrix} \cos t & \sin t \\ 2\cos t + \sin t & 2\sin t - \cos t \end{vmatrix} = -1,
$$

$$
\Delta_1 = \begin{vmatrix} \dfrac{2}{\sin t} & \sin t \\ 0 & 2\sin t - \cos t \end{vmatrix} = 4 - 2\frac{\cos t}{\sin t},
$$

$$
\Delta_2 = \begin{vmatrix} \cos t & \dfrac{2}{\sin t} \\ 2\cos t + \sin t & 0 \end{vmatrix} = -4\frac{\cos t}{\sin t} - 2 .
$$

$$
c_1'(t) = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 2\frac{\cos t}{\sin t} - 4 \qquad c_2'(t) = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 2 + 4\frac{\cos t}{\sin t},
$$

$$
c_1(t) = 2\ln|\sin t| - 4t + c_1, \; c_2(t) = 2t + 4\ln|\sin t| + c_2 .
$$

Остаточно, загальний розв'язок системи (4.37) має вигляд:

$$
\begin{cases} x = c_1\cos t + c_2\sin t + 2(\cos t + 2\sin t)\cdot\ln|\sin t| + 2t\cdot(\sin t - 2\cos t), \\ y = c_1(2\cos t + \sin t) + c_2(2\sin t - \cos t) + 10\sin t\ln|\sin t| - 10t\cos t, \end{cases}
$$

де c_1, c_2 – довільні дійсні сталі.

Контрольні запитання до тем розділу 4

1. Який вигляд має система звичайних диференціальних рівнянь у нормальній формі Коші у скалярній формі?
2. Який вигляд має система звичайних диференціальних рівнянь у нормальній формі Коші у векторній формі?
3. Що називається розв'язком системи звичайних диференціальних рівнянь у нормальній формі Коші у скалярній формі?
4. Що називається розв'язком системи звичайних диференціальних рівнянь у нормальній формі Коші у векторній формі?

5. Метод виключення розв’язування систем звичайних диференціальних рівнянь у нормальній формі Коші.
6. У якому сенсі рівносильні система звичайних диференціальних рівнянь у нормальній формі Коші та відповідне до неї звичайне диференціальне рівняння n–го порядку?
7. Який вигляд має система звичайних лінійних диференціальних рівнянь у нормальній формі Коші у скалярній формі?
8. Який вигляд має система звичайних лінійних диференціальних рівнянь у нормальній формі Коші у векторній формі?
9. Яка система звичайних лінійних диференціальних рівнянь називається лінійною однорідною системою?
10. Яка система звичайних лінійних диференціальних рівнянь називається лінійною неоднорідною системою?
11. Які вектор-функції називаються лінійно незалежними на даному проміжку?
12. Що називається фундаментальною системою розв’язків або базисом на даному проміжку системи звичайних лінійних однорідних диференціальних рівнянь?
13. Сформулювати теорему про загальний розв’язок системи звичайних лінійних однорідних диференціальних рівнянь.
14. Сформулювати теорему про загальний розв’язок системи звичайних лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь.
15. Яка система звичайних лінійних однорідних диференціальних рівнянь називається лінійною однорідною системою зі сталими коефіцієнтами?
16. Метод Ейлера розв’язування систем звичайних лінійних однорідних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами.
17. Яке алгебраїчне рівняння називається характеристичним рівнянням для системи звичайних лінійних однорідних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами?
18. Дати означення характеристичних чисел для системи звичайних лінійних однорідних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами.
19. Побудова елементів фундаментальної системи розв’язків системи звичайних лінійних однорідних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами у випадку простих дійсних коренів характеристичного рівняння.
20. Побудова елементів фундаментальної системи розв’язків системи звичайних лінійних однорідних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами у випадку простих комплексних коренів характеристичного рівняння.

21. Побудова елементів фундаментальної системи розв'язків системи звичайних лінійних однорідних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами у випадку кратних дійсних коренів характеристичного рівняння, коли дефект відповідної матриці дорівнює кратності характеристичного числа.
22. Побудова елементів фундаментальної системи розв'язків системи звичайних лінійних однорідних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами у випадку кратних дійсних коренів характеристичного рівняння, коли дефект відповідної матриці менше, ніж кратність характеристичного числа.
23. Побудова елементів фундаментальної системи розв'язків системи звичайних лінійних однорідних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами у випадку кратних комплексних коренів характеристичного рівняння.
24. Який вигляд має система звичайних лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами у нормальній формі Коші у скалярній формі?
25. Який вигляд має система звичайних лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами у нормальній формі Коші у векторній формі?
26. Метод варіації довільних сталих Лагранжа знаходження загального розв'язку системи звичайних лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь.

Завдання для підсумкового контролю

Варіант 1

1. Розв’язати рівняння: $e^{x+3y}dy = xdx$.
2. Розв’язати рівняння: $\left(xy + x^3y\right)y' = 1 + y^2$.
3. Розв’язати рівняння: $y - xy' = \dfrac{x}{\cos\frac{y}{x}}$.
4. Розв’язати задачу Коші: $\begin{cases} \left(x^2+1\right)y' + 4xy = 3, \\ y(0) = 0. \end{cases}$
5. Розв’язати рівняння: $y' + y = x\sqrt{y}$.
6. Знайти рівняння кривих, які мають наступну властивість: площа трикутника, утвореного дотичною до кривої та перпендикуляром, проведеним з точки дотику на вісь абсцис, і віссю абсцис, є величиною сталою, що дорівнює b^2.
7. Розв’язати рівняння: $\dfrac{1}{x}dy - \dfrac{y}{x^2}dx = 0$.
8. Розв’язати задачу Коші: $\begin{cases} y''' = \sin x, \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 0. \end{cases}$
9. Розв’язати рівняння: $\left(1 - x^2\right)y'' - xy' = 2$.
10. Розв’язати задачу Коші: $\begin{cases} y'' = y'e^y, \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 1. \end{cases}$
11. Розв’язати рівняння: $y'' + 4y = 0$.
12. Розв’язати рівняння: $y'' - 10y' + 25y = 0$.
13. Розв’язати рівняння: $y^{(4)} + 3y''' + 2y'' = 0$.
14. Розв’язати задачу Коші: $\begin{cases} y''' - 7y'' + 6y' = 0, \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 30. \end{cases}$
15. Розв’язати рівняння: $y'' + y' = 2x + 1$.
16. Розв’язати рівняння: $y'' - 8y' + 17y = 10e^{2x}$.
17. Розв’язати задачу Коші: $\begin{cases} y'' - 2y' + y = -12\cos 2x - 9\sin 2x, \\ y(0) = -2, \quad y'(0) = 0. \end{cases}$
18. Розв’язати рівняння: $y'' - y = \dfrac{e^x}{e^x + 1}$.
19. Розв’язати систему рівнянь: $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + 4y. \end{cases}$

Варіант 2

1. Розв'язати рівняння: $y'\sin x = y\ln y$.
2. Розв'язати рівняння: $\dfrac{y'}{7^{y-x}} = 3$.
3. Розв'язати рівняння: $\left(y^2 - 3x^2\right)dy + 2xydx = 0$.
4. Розв'язати задачу Коші: $\begin{cases} y' + y\,\mathrm{tg}\,x = \dfrac{1}{\cos x}, \\ y(0) = 0. \end{cases}$
5. Розв'язати рівняння: $ydx + 2xdy = \dfrac{2y\sqrt{x}}{\cos^2 y}dy$.
6. Записати рівняння кривої, якщо відомо, що точка перетину будь-якої дотичної до кривої з віссю абсцис однаково віддалена від точки дотику та від початку координат.
7. Розв'язати рівняння: $\dfrac{x}{x^2 + y^2}dy = \dfrac{y}{x^2 + y^2}dx$.
8. Розв'язати задачу Коші: $\begin{cases} y''' = \dfrac{1}{x}, \\ y(1) = \dfrac{1}{4}, \quad y'(1) = 0, \quad y''(1) = 0. \end{cases}$
9. Розв'язати рівняння: $2xy'\,y'' = (y')^2 - 1$.
10. Розв'язати задачу Коші: $\begin{cases} (y')^2 + 2yy'' = 0, \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 1. \end{cases}$
11. Розв'язати рівняння: $y'' - y' - 2y = 0$.
12. Розв'язати рівняння: $y'' + 9y = 0$.
13. Розв'язати рівняння: $y^{(4)} + 4y''' + 4y'' = 0$.
14. Розв'язати задачу Коші: $\begin{cases} y^{(5)} - 9y''' = 0, \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = -1, \quad y''(0) = 0, \quad y'''(0) = 0, \quad y^{(4)}(0) = 0. \end{cases}$
15. Розв'язати рівняння: $y'' - 2y' + 5y = 10e^{-x}\cos 2x$.
16. Розв'язати рівняння: $y'' + y' - 6y = (6x + 1)e^{3x}$.
17. Розв'язати задачу Коші $\begin{cases} y'' - 6y' + 9y = 9x^2 - 39x + 65, \\ y(0) = -1, \quad y'(0) = 1. \end{cases}$
18. Розв'язати рівняння: $y'' + 4y = \dfrac{1}{\cos 2x}$.
19. Розв'язати систему рівнянь: $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -4x + y. \end{cases}$

Варіант 3

1. Розв’язати рівняння: $y' = (2x-1)\operatorname{ctg} y$.
2. Розв’язати рівняння: $y - xy' = 2(1 + x^2 y')$.
3. Розв’язати рівняння: $(x+2y)dx - xdy = 0$.
4. Розв’язати задачу Коші $\begin{cases} (1-x)(y'+y) = e^{-x}, \\ y(0) = 0. \end{cases}$
5. Розв’язати рівняння: $y' + 2y = y^2 e^x$.
6. Знайти рівняння кривих, що мають наступну властивість: площа трапеції, обмеженої вісями координат, дотичною до кривої та перпендикуляром, проведеним із точки дотику на вісь абсцис, є величиною сталою, що дорівнює $3a^2$.
7. Розв’язати рівняння: $(2x - y + 1)dx + (2y - x - 1)dy = 0$.
8. Розв’язати задачу Коші: $\begin{cases} y'' = \dfrac{1}{\cos^2 x}, \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = \dfrac{3}{5}. \end{cases}$
9. Розв’язати рівняння: $x^3 y'' + x^2 y' = 1$.
10. Розв’язати задачу Коші: $\begin{cases} y''y + (y')^2 = 0, \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 1. \end{cases}$
11. Розв’язати рівняння: $y'' - 4y' = 0$.
12. Розв’язати рівняння: $y'' - 4y' + 13y = 0$.
13. Розв’язати рівняння: $y^{(4)} - 3y''' + 2y'' = 0$.
14. Розв’язати задачу Коші $\begin{cases} y''' - y'' = 0, \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = -1. \end{cases}$
15. Розв’язати рівняння: $y'' - 2y' - 8y = 12\sin 2x - 36\cos 2x$.
16. Розв’язати рівняння: $y'' - 7y' + 12y = 3e^{4x}$.
17. Розв’язати задачу Коші: $\begin{cases} y'' + 2y' + 2y = 2x^2 + 8x + 6, \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 4. \end{cases}$
18. Розв’язати рівняння: $y'' - 4y' + 5y = \dfrac{e^{2x}}{\cos x}$.
19. Розв’язати систему рівнянь: $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x + 8y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y. \end{cases}$

Варіант 4

1. Розв’язати рівняння: $\dfrac{\operatorname{tg} y}{\cos^2 x}dy + \dfrac{\operatorname{tg} x}{\cos^2 y}dx = 0$.
2. Розв’язати рівняння: $y - xy' = 1 + x^2 y'$.
3. Розв’язати рівняння: $(x - y)dx + (x + y)dy = 0$.
4. Розв’язати задачу Коші: $\begin{cases} xy' - 2y = 2x^4, \\ y(1) = 0. \end{cases}$
5. Розв’язати рівняння: $y' = y^4 \cos x + y tgx$.
6. Знайти рівняння кривої, коли відомо, що відстань від будь-якої дотичної до початку координат дорівнює абсцисі точки дотику.
7. Розв’язати рівняння: $\left(x + \dfrac{y}{x^2 + y^2}\right)dx + \left(y - \dfrac{x}{x^2 + y^2}\right)dy = 0.$
8. Розв’язати задачу Коші: $\begin{cases} y''' = \dfrac{1}{x^3}, \\ y(1) = 0, \quad y'(1) = 5, \quad y''(1) = 1. \end{cases}$
9. Розв’язати рівняння: $y'' + y' tgx = \sin 2x$.
10. Розв’язати задачу Коші: $\begin{cases} y'' + 2y\left(y'\right)^3 = 0, \\ y(0) = 2, \quad y'(0) = \dfrac{1}{3}. \end{cases}$
11. Розв’язати рівняння: $y'' - 5y' + 6y = 0$.
12. Розв’язати рівняння: $y'' + 3y' = 0$.
13. Розв’язати рівняння: $y^{(4)} + 2y''' + 5y'' = 0$.
14. Розв’язати задачу Коші: $\begin{cases} y''' - 4y' = 0, \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 2, \quad y''(0) = 4. \end{cases}$
15. Розв’язати рівняння: $y'' - 12y' + 36y = 14e^{6x}$.
16. Розв’язати рівняння: $y'' - 2y' = 6 + 12x - 24x^2$.
17. Розв’язати задачу Коші: $\begin{cases} y'' - 6y' + 25y = 9\sin 4x - 24\cos 4x, \\ y(0) = 2, \quad y'(0) = -2. \end{cases}$
18. Розв’язати рівняння: $y''' + y' = \dfrac{\sin x}{\cos^2 x}$.
19. Розв’язати систему рівнянь: $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -2x - 3y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x. \end{cases}$

Варіант 5

1. Розв’язати рівняння: $\left(1+e^{x}\right)ydy-e^{y}dx=0$.
2. Розв’язати рівняння: $(x+4)dy-xydx=0$.
3. Розв’язати рівняння: $\left(y^{2}-2xy\right)dx+x^{2}dy=0$,
4. Розв’язати задачу Коші: $\begin{cases} y'=2x\left(x^{2}+y\right), \\ y(0)=0. \end{cases}$
5. Розв’язати рівняння: $xydy=\left(y^{2}+x\right)dx$.
6. Знайти рівняння кривих, для яких сума катетів трикутника, утвореного дотичною та перпендикуляром, проведеним із точки дотику на вісь абсцис, і віссю абсцис, є величиною сталою, що дорівнює *a*.
7. Розв’язати рівняння: $\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^{2}-y^{2}}}-1\right)dx-\dfrac{y}{\sqrt{x^{2}-y^{2}}}dy=0$.
8. Розв’язати задачу Коші: $\begin{cases} y''=4\cos 2x, \\ y(0)=1, \quad y'(0)=3. \end{cases}$
9. Розв’язати рівняння: $y''x\ln x=y'$.
10. Розв’язати задачу Коші: $\begin{cases} y''\operatorname{tg} y=2\left(y'\right)^{2}, \\ y(1)=\dfrac{\pi}{2}, \quad y'(1)=2. \end{cases}$
11. Розв’язати рівняння: $y''-2y'+10y=0$.
12. Розв’язати рівняння: $y''+y'-2y=0$.
13. Розв’язати рівняння: $y^{(4)}-2y'''=0$.
14. Розв’язати задачу Коші : $\begin{cases} y'''+y'=0, \\ y(0)=0, \quad y'(0)=1, \quad y''(0)=1. \end{cases}$
15. Розв’язати рівняння: $y''-3y'+2y=(34-12x)e^{-x}$.
16. Розв’язати рівняння: $y''-6y'+34y=18\cos 5x+60\sin 5x$.
17. Розв’язати задачу Коші: $\begin{cases} y''-14y'+53y=53x^{3}-42x^{2}+59x-14, \\ y(0)=0, \quad y'(0)=7. \end{cases}$
18. Розв’язати рівняння: $y''+9y=\dfrac{1}{\sin 3x}$.
19. Розв’язати систему рівнянь: $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=x-y, \\ \dfrac{dy}{dt}=-4x+4y. \end{cases}$

Варіант 6

1. Розв'язати рівняння: $\left(3+y^2\right)dx = \dfrac{e^x}{x}ydy$.
2. Розв'язати рівняння: $y' + y + y^2 = 0$.
3. Розв'язати рівняння: $y^2 + x^2y' = xyy'$.
4. Розв'язати задачу Коші: $\begin{cases} y' - y = e^x, \\ y(0) = 1. \end{cases}$
5. Розв'язати рівняння: $xy' + 2y + x^5y^3e^x = 0$.
6. Знайти рівняння кривих, коли відомо, що точка перетину будь-якої дотичної до кривої з віссю абсцис має абсцису, яка дорівнює 2/3 абсциси точки дотику.
7. Розв'язати рівняння: $\dfrac{2x\left(1-e^y\right)}{\left(1+x^2\right)^2}dx + \dfrac{e^y}{1+x^2}dy = 0$.
8. Розв'язати задачу Коші: $\begin{cases} y'' = \dfrac{1}{1+x^2}, \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 0. \end{cases}$
9. Розв'язати рівняння: $xy'' - y' = x^2e^x$.
10. Розв'язати задачу Коші: $\begin{cases} 2y''y = \left(y'\right)^2, \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 1. \end{cases}$
11. Розв'язати рівняння: $y'' - 4y = 0$.
12. Розв'язати рівняння: $y'' + 2y' + 17y = 0$.
13. Розв'язати рівняння: $y^{(4)} - y''' - 12y'' = 0$.
14. Розв'язати задачу Коші: $\begin{cases} y''' - y' = 0, \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 2, \quad y''(0) = 4. \end{cases}$
15. Розв'язати рівняння: $y'' + 6y' + 10y = 51e^{-x}$.
16. Розв'язати рівняння: $y'' - 2y' = (4x+4)e^{2x}$.
17. Розв'язати задачу Коші: $\begin{cases} y'' + 6y = e^x\left(\cos 4x - 8\sin 4x\right), \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 5. \end{cases}$
18. Розв'язати рівняння: $y'' + 2y' + y = xe^x + \dfrac{1}{xe^x}$.
19. Розв'язати систему рівнянь: $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -2x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -3x + 2y. \end{cases}$

Варіант 7

1. Розв’язати рівняння: $\sin y \cdot \cos x dy = \sin x \cdot \cos y dx$.
2. Розв’язати рівняння: $y^2 \ln x dx - (y-1) x dy = 0$.
3. Розв’язати рівняння: $xy' - y = \operatorname{tg} \dfrac{y}{x}$.
4. Розв’язати задачу Коші: $\begin{cases} xy' + y + xe^{-x^2} = 0, \\ y(1) = \dfrac{1}{2e}. \end{cases}$
5. Розв’язати рівняння: $y' x^3 \sin y = xy' - 2y$.
6. Знайти рівняння кривих, які мають наступну властивість: довжина відрізка осі абсцис між дотичною та нормаллю, проведеними із будь-якої точки кривої, дорівнює $2l$.
7. Розв’язати рівняння: $\dfrac{2x}{y^3} dx + \dfrac{y^2 - 3x^2}{y^4} dy = 0$.
8. Розв’язати задачу Коші: $\begin{cases} xy''' = 2, \\ y(1) = \dfrac{1}{2}, \quad y'(1) = 0, \quad y''(1) = 0. \end{cases}$
9. Розв’язати рівняння: $y'' x \ln x = 2y'$.
10. Розв’язати задачу Коші: $\begin{cases} y'' y - (y')^2 = y^4, \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 1. \end{cases}$
11. Розв’язати рівняння: $y'' + y' - 6y = 0$.
12. Розв’язати рівняння: $y'' + 9y' = 0$.
13. Розв’язати рівняння: $y^{(4)} - 4y''' + 20y'' = 0$.
14. Розв’язати задачу Коші: $\begin{cases} y^{(4)} + 2y''' - 2y' - y = 0, \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 0, \quad y'''(0) = 8. \end{cases}$
15. Розв’язати рівняння: $y'' + y = 2\cos x - (4x + 4)\sin x$.
16. Розв’язати рівняння: $y'' + 2y' + y = 4x^3 + 24x^2 + 22x - 4$.
17. Розв’язати задачу Коші: $\begin{cases} y'' - 4y' + 20y = 16xe^{2x}, \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 2. \end{cases}$
18. Розв’язати рівняння: $y'' + 2y' + 2y = \dfrac{e^{-x}}{\cos x}$.
19. Розв’язати систему рівнянь: $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 6x - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + 2y. \end{cases}$

Варіант 8

1. Розв’язати рівняння: $y' = (1+2y)\operatorname{tg} x$.
2. Розв’язати рівняння: $(x + xy^2)dy + ydx - y^2 dx = 0$.
3. Розв’язати рівняння: $xy = y' - xe^{\frac{y}{x}}$.
4. Розв’язати задачу Коші: $\begin{cases} \cos(y)dx = (x + 2\cos y)\sin(y)dy, \\ y(0) = \dfrac{\pi}{4}. \end{cases}$
5. Розв’язати рівняння: $(2x^2 y \ln y - x)y' = y$.
6. Знайти рівняння кривої, що проходить через точку $A(2,4)$ і має наступну властивість: довжина відрізка, який дотична відсікає на осі абсцис, проведеної в будь-якій точці кривої, дорівнює кубу абсциси точки дотику.
7. Розв’язати рівняння: $\left(1 - e^{\frac{x}{y}}\right)dx + e^{\frac{x}{y}}\left(1 - \dfrac{x}{y}\right)dy = 0$.
8. Розв’язати задачу Коші: $\begin{cases} y''' = e^{2x}, \\ y(0) = \dfrac{9}{8}, \quad y'(0) = \dfrac{1}{4}, \quad y''(0) = -\dfrac{1}{2}. \end{cases}$
9. Розв’язати рівняння: $x^2 y'' + xy' = 1$.
10. Розв’язати задачу Коші: $\begin{cases} 2y''y^3 + 1 = 0, \\ y(0) = 0{,}5, \quad y'(0) = \sqrt{2}. \end{cases}$
11. Розв’язати рівняння: $y'' - 49y = 0$.
12. Розв’язати рівняння: $y'' - 4y' + 5y = 0$.
13. Розв’язати рівняння: $y^{(4)} + 2y''' - 3y'' = 0$.
14. Розв’язати задачу Коші: $\begin{cases} y''' + y'' - 5y' + 3y = 0, \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = -14. \end{cases}$
15. Розв’язати рівняння: $y'' + 6y' + 10y = 74e^{3x}$.
16. Розв’язати рівняння: $y'' - 4y' = 8 - 16x$.
17. Розв’язати задачу Коші: $\begin{cases} y'' - 12y' + 36y = 32\cos 2x + 24\sin 2x, \\ y(0) = 2, \quad y'(0) = 4. \end{cases}$
18. Розв’язати рівняння: $y'' - 2y' + 2y = \dfrac{e^{-x}}{\sin^2 x}$.
19. Розв’язати систему рівнянь: $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -6x - 3y. \end{cases}$

Варіант 9

1. Розв’язати рівняння: $\left(\sin(x+y)+\sin(x-y)\right)dx+\dfrac{dy}{\cos y}=0$.
2. Розв’язати рівняння: $y'+2y-y^2=0$.
3. Розв’язати рівняння: $xy'-y=(x+y)\ln\dfrac{x+y}{x}$.
4. Розв’язати задачу Коші: $\begin{cases} x^2y'+xy+1=0, \\ y(1)=0. \end{cases}$
5. Розв’язати рівняння: $2y'-\dfrac{x}{y}=\dfrac{xy}{x^2-1}$.
6. Знайти рівняння кривої, що проходить через точку $A(1,5)$ і має наступну властивість: довжина відрізка, який відсікає будь-яка дотична на осі ординат, дорівнює потроєній абсцисі точки дотику.
7. Розв’язати рівняння: $x\left(2x^2+y^2\right)dx+\left(yx^2+2y^3\right)dy=0$.
8. Розв’язати задачу Коші: $\begin{cases} y'''=\cos^2 x, \\ y(0)=1, \quad y'(0)=-\dfrac{1}{8}, \quad y''(0)=0. \end{cases}$
9. Розв’язати рівняння: $y''=-\dfrac{x}{y}$.
10. Розв’язати задачу Коші: $\begin{cases} y''=1-\left(y'\right)^2, \\ y(0)=0, \quad y'(0)=0. \end{cases}$
11. Розв’язати рівняння: $y''-3y'+2y=3\cos x+19\sin x$.
12. Розв’язати рівняння: $y''+7y'=0$.
13. Розв’язати рівняння: $y''-5y'+4y=0$.
14. Розв’язати задачу Коші: $\begin{cases} y'''+y''=0, \\ y(0)=0, \quad y'(0)=1, \quad y''(0)=-1. \end{cases}$
15. Розв’язати рівняння: $y^{(5)}+16y'''=0$.
16. Розв’язати рівняння: $y''-2y'+y=4e^x$.
17. Розв’язати задачу Коші: $\begin{cases} y''+y=x^3-4x^2+7x-10, \\ y(0)=2, \quad y'(0)=3. \end{cases}$
18. Розв’язати рівняння: $y''+2y'+2y=e^{-x}\operatorname{ctg} x$.
19. Розв’язати систему рівнянь: $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=y, \\ \dfrac{dy}{dt}=x. \end{cases}$

Варіант 10

1. Розв'язати рівняння: $\left(1+e^{x}\right)yy'=e^{x}$.
2. Розв'язати рівняння: $\left(x^{2}+x\right)ydx+\left(y^{2}+1\right)dy=0$.
3. Розв'язати рівняння: $xy'=y\cos\left(\ln\frac{y}{x}\right)$.
4. Розв'язати задачу Коші: $\begin{cases} xy'+y=4x^{3}+3x^{2}, \\ y(1)=2. \end{cases}$
5. Розв'язати рівняння: $xy'-2x^{2}\sqrt{y}=4y$.
6. Знайти рівняння кривої, що проходить через точку $A(1,2)$ і має наступну властивість: відношення ординати будь-якої її точки до абсциси цієї точки пропорційне кутовому коефіцієнту дотичної до кривої у тій же точці. Коефіцієнт пропорційності дорівнює 3.
7. Розв'язати рівняння: $\left(3x^{2}+6xy^{2}\right)dx+\left(6x^{2}y+4y^{3}\right)dy=0$.
8. Розв'язати задачу Коші: $\begin{cases} y''=\frac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}, \\ y(0)=2, \quad y'(0)=3. \end{cases}$
9. Розв'язати рівняння: $xy''=y'$.
10. Розв'язати задачу Коші: $\begin{cases} \left(y''\right)^{2}=y', \\ y(0)=\frac{2}{3}, \quad y'(0)=1. \end{cases}$
11. Розв'язати рівняння: $y''-6y'+8y=0$.
12. Розв'язати рівняння: $y''+4y'+5y=0$.
13. Розв'язати рівняння: $y^{(5)}+5y^{(4)}=0$.
14. Розв'язати задачу Коші: $\begin{cases} y'''-5y''+8y'-4y=0, \\ y(0)=1, \quad y'(0)=-1, \quad y''(0)=0. \end{cases}$
15. Розв'язати рівняння: $y''+6y'+9y=\left(48x+8\right)e^{x}$.
16. Розв'язати рівняння: $y''-8y'+20y=16\left(\sin 2x-\cos 2x\right)$.
17. Розв'язати задачу Коші: $\begin{cases} y''-y=\left(14-6x\right)e^{-x}, \\ y(0)=0, \quad y'(0)=-1. \end{cases}$
18. Розв'язати рівняння: $y''-2y'+2y=\frac{e^{x}}{\sin x}$.
19. Розв'язати систему рівнянь: $\begin{cases} \frac{dx}{dt}=-x-2y, \\ \frac{dy}{dt}=3x+4y. \end{cases}$

.

Варіант 11

1. Розв'язати рівняння: $\sin x \operatorname{tg} y dx - \dfrac{dy}{\sin x} = 0$.
2. Розв'язати рівняння: $\left(xy^3 + x\right)dx + \left(x^2y^2 - y^2\right)dy = 0$.
3. Розв'язати рівняння: $\left(y + \sqrt{xy}\right)dx = xdy$.
4. Розв'язати задачу Коші: $\begin{cases} (2x+y)\,dy = ydx + 4\ln(y)dy, \\ y(0) = 1. \end{cases}$,
5. Розв'язати рівняння: $xy^2y' = x^2 + y^3$.
6. Знайти рівняння кривої, що проходить через точку $A(2,-1)$, якщо кутовий коефіцієнт дотичної у будь-якій її точці є пропорційним до квадрату ординати точки дотику. Коефіцієнт пропорційності дорівнює 6.
7. Розв'язати рівняння: $\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \dfrac{1}{y}\right)dx + \left(\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} - \dfrac{x}{y^2}\right)dy = 0$.
8. Розв'язати задачу Коші: $\begin{cases} y'' = \dfrac{1}{\sin^2 2x}, \\ y(\frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{4}, \quad y'(\frac{\pi}{4}) = 1. \end{cases}$
9. Розв'язати рівняння: $y'' = y' + x$.
10. Розв'язати задачу Коші: $\begin{cases} 2y''y - (y')^2 = 1, \\ y(0) = 2, \quad y'(0) = 1. \end{cases}$
11. Розв'язати рівняння: $4y'' - 8y' + 3y = 0$.
12. Розв'язати рівняння: $y'' - 3y' = 0$.
13. Розв'язати рівняння: $y^{(5)} - 2y^{(4)} + 10y''' = 0$.
14. Розв'язати задачу Коші: $\begin{cases} y''' + 3y'' + 2y' = 0, \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 2. \end{cases}$
15. Розв'язати рівняння: $y'' + 5y' = 72e^{2x}$.
16. Розв'язати рівняння: $y'' - 6y' + 13y = 34e^{-3x}\sin 2x$.
17. Розв'язати задачу Коші: $\begin{cases} y'' + 8y' + 16y = 16x^2 - 16x + 66, \\ y(0) = 3, \quad y'(0) = 0. \end{cases}$
18. Розв'язати рівняння: $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x^2}$.
19. Розв'язати систему рівнянь: $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -2x, \\ \dfrac{dy}{dt} = y. \end{cases}$

Варіант 12

1. Розв’язати рівняння: $3e^x \sin y dx + \left(1 - e^x\right)\cos y dy = 0$.
2. Розв’язати рівняння: $\left(1 + y^2\right)dx - \left(y + x^2 y\right)dy = 0$.
3. Розв’язати рівняння: $xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y$.
4. Розв’язати задачу Коші: $\begin{cases} y' = \dfrac{y}{3x - y^2}, \\ y(0) = 1. \end{cases}$
5. Розв’язати рівняння: $xy^2 y' = x^2 + y^3$.
6. Знайти рівняння кривої, що проходить через точку $A(1,2)$, якщо добуток кутового коефіцієнту дотичної у будь-якій її точці і суми координат точки дотику удвічі більше, ніж ордината цієї точки.
7. Розв’язати рівняння: $\left(3x^2 tgy - \dfrac{2y^3}{x^3}\right)dx + \left(\dfrac{x^3}{\cos^2 y} + \dfrac{3y^2}{x^2}\right)dy = 0.$
8. Розв’язати задачу Коші: $\begin{cases} y'' = x + \sin x, \\ y(0) = -3, \quad y'(0) = 0. \end{cases}$
9. Розв’язати рівняння: $xy'' = y' + x^2$.
10. Розв’язати задачу Коші: $\begin{cases} y'' = 2 - y \\ y(0) = 2, \quad y'(0) = 2 \end{cases}$
11. Розв’язати рівняння: $y'' + 4y' + 20y = 0$.
12. Розв’язати рівняння: $y'' - 3y' - 10y = 0$.
13. Розв’язати рівняння: $y^{(5)} - 16y''' = 0$.
14. Розв’язати задачу Коші: $\begin{cases} y''' + 3y'' + 3y' + y = 0, \\ y(0) = -1, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 1. \end{cases}$
15. Розв’язати рівняння: $y'' - 5y' - 6y = 3\cos x + 19\sin x$.
16. Розв’язати рівняння: $y'' + 2y' - 3y = \left(12x^2 + 6x - 4\right)e^x$.
17. Розв’язати задачу Коші: $\begin{cases} y'' + 10y' + 34y = -9e^{-5x}, \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 6. \end{cases}$
18. Розв’язати рівняння: $y'' + y = \operatorname{tg} x$.
19. Розв’язати систему рівнянь: $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x + 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x + 6y. \end{cases}$

Варіант 13

1. Розв’язати рівняння: $y' = \dfrac{e^{2x}}{\ln y}$.
2. Розв’язати рівняння: $y' = 2xy + x$.
3. Розв’язати рівняння: $y = x\left(y' - e^{\frac{y}{x}}\right)$.
4. Розв’язати задачу Коші: $\begin{cases} (1-2xy)\,y' = y(y-1), \\ y(0) = 1. \end{cases}$
5. Розв’язати рівняння: $y'x + y = -xy^2$.
6. Знайти рівняння кривої, що проходить через точку $A(0,-2)$, якщо кутовий коефіцієнт дотичної у будь-якій її точці утричі більше, ніж ордината цієї точки.
7. Розв’язати рівняння: $\left(2x + \dfrac{x^2+y^2}{x^2+y}\right)dx = \dfrac{x^2+y^2}{xy^2}\,dy$.
8. Розв’язати задачу Коші: $\begin{cases} y'' = \operatorname{arctg} x, \\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0. \end{cases}$
9. Розв’язати рівняння: $xy'' = y' \ln \dfrac{y'}{x}$.
10. Розв’язати задачу Коші: $\begin{cases} y'' = \dfrac{1}{y^3}, \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 0. \end{cases}$
11. Розв’язати рівняння: $9y'' + 6y' + y = 0$.
12. Розв’язати рівняння: $y'' - 4y' - 21y = 0$.
13. Розв’язати рівняння: $y'' + y = 0$.
14. Розв’язати задачу Коші: $\begin{cases} y''' - 2y'' + 9y' - 18y = 0, \\ y(0) = -2,5, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 0. \end{cases}$
15. Розв’язати рівняння: $y'' - 8y' + 12y = 36x^4 - 96x^3 + 24x^2 + 16x - 2$.
16. Розв’язати рівняння: $y'' + 4y' + 4y = 6e^{-2x}$.
17. Розв’язати задачу Коші: $\begin{cases} y'' - 6y' + 25y = (32x - 12)\sin 3x - 36x\cos 3x, \\ y(0) = 4, \quad y'(0) = 0. \end{cases}$
18. Розв’язати рівняння: $y'' + 4y = \operatorname{ctg} 2x$
19. Розв’язати систему рівнянь: $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 8x - 3y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x + y. \end{cases}$

Варіант 14

1. Розв’язати рівняння: $3^{x^2+y}dy + xdx = 0$.
2. Розв’язати рівняння: $y - xy' = 3\left(1 + x^2 y'\right)$.
3. Розв’язати рівняння: $y' = \dfrac{y}{x} - 1$.
4. Розв’язати задачу Коші: $x\left(y' - y\right) = e^x, \quad y(1) = 0$.
5. Розв’язати рівняння: $y' - xy = -y^3 e^{-x^2}$.
6. Знайти рівняння кривої, яка має наступну властивість: довжина перпендикуляру, проведеного з початку координат до дотичної, дорівнює абсцисі точки дотику.
7. Розв’язати рівняння: $\left(x + \dfrac{\sin 2x}{y}\right)dx + \left(y - \dfrac{\sin^2 x}{y^2}\right)dy = 0$.
8. Розв’язати задачу Коші: $\begin{cases} y'' = tgx\dfrac{1}{\cos^2 x}, \\ y(0) = \dfrac{1}{2}, \quad y'(0) = 0. \end{cases}$
9. Розв’язати рівняння: $xy'' + y' = \ln x$.
10. Розв’язати задачу Коші: $\begin{cases} yy'' - 2\left(y'\right)^2 = 0, \\ y\left(0\right) = 1, \quad y'(0) = 2. \end{cases}$
11. Розв’язати рівняння: $2y'' + 3y' + y = 0$.
12. Розв’язати рівняння: $y'' + 4y' + 8y = 0$.
13. Розв’язати рівняння: $y'' - 6y' + 9y = 0$.
14. Розв’язати задачу Коші: $\begin{cases} y''' + 9y' = 0, \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 9, \quad y''(0) = -18. \end{cases}$
15. Розв’язати рівняння: $y'' + 8y' + 25y = 18e^{5x}$.
16. Розв’язати рівняння: $y'' + 3y' = 10 - 6x$.
17. Розв’язати задачу Коші: $\begin{cases} y'' + 25y = e^x\left(\cos 5x - 10\sin 5x\right), \\ y(0) = 3 \quad y'(0) = -4. \end{cases}$
18. Розв’язати рівняння: $y'' + y = \operatorname{ctg} x$.
19. Розв’язати систему рівнянь: $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 3y. \end{cases}$

Варіант 15

1. Розв'язати рівняння: $\left(\cos(x-2y)+\cos(x+2y)\right)y' = \dfrac{1}{\cos x}$.
2. Розв'язати рівняння: $2xyy' = 1 - x^2$.
3. Розв'язати рівняння: $y'x + x + y = 0$.
4. Розв'язати задачу Коші: $\begin{cases} y = x\left(y' - x\cos x\right), \\ y(\frac{\pi}{2}) = 0. \end{cases}$
5. Розв'язати рівняння: $xy' - 2\sqrt{x^3 y} = y$.
6. Знайти рівняння кривої, якщо кутовий коефіцієнт дотичної у будь-якої її точці в n разів більше, ніж кутовий коефіцієнт прямої, яка з'єднує цю точку з початком координат.
7. Розв'язати рівняння: $\left(3x^2 - 2x - y\right)dx + \left(2y - x + 3y^2\right)dy = 0$.
8. Розв'язати задачу Коші: $\begin{cases} y''' = e^{\frac{x}{2}} + 1, \\ y(0) = 8, \quad y'(0) = 5, \quad y''(0) = 2. \end{cases}$
9. Розв'язати рівняння: $y'' \operatorname{tg} x = y' + 1$.
10. Розв'язати задачу Коші: $\begin{cases} y'' = y' + \left(y'\right)^2, \\ y\left(0\right) = 0, \quad y'(0) = 1. \end{cases}$
11. Розв'язати рівняння: $y'' - 10y' + 21y = 0$.
12. Розв'язати рівняння: $y'' - 2y' + 2y = 0$.
13. Розв'язати рівняння: $y'' + 4y' = 0$.
14. Розв'язати задачу Коші: $\begin{cases} y''' - 13y'' + 12y' = 0, \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 1, \quad y''(0) = 133. \end{cases}$
15. Розв'язати рівняння: $y'' - 9y' + 20y = 126e^{-2x}$.
16. Розв'язати рівняння: $y'' + 10y' + 25y = 40 + 52x - 240x^2 - 200x^3$.
17. Розв'язати задачу Коші: $\begin{cases} y'' + 2y' + 5y = -8e^{-x}\sin 2x, \\ y(0) = 2, \quad y'(0) = 6. \end{cases}$
18. Розв'язати рівняння: $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x}$.
19. Розв'язати систему рівнянь: $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + 3y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 5x + 4y. \end{cases}$

Варіант 16

1. Розв’язати рівняння: $y' = e^{x^2} x\left(1 + y^2\right)$.
2. Розв’язати рівняння: $\left(x^2 - 1\right)y' - xy = 0$.
3. Розв’язати рівняння: $ydx + \left(2\sqrt{xy} - x\right)dy = 0$.
4. Розв’язати задачу Коші: $\left(xy' - 1\right)\ln x = 2y, \quad y(e) = 0$.
5. Розв’язати рівняння: $y' + xy = y^3 x^3$.
6. Знайти рівняння кривої, яка має наступну властивість: відрізок дотичної до кривої, обмежений осями координат, ділиться в точці дотику навпіл.
7. Розв’язати рівняння: $\dfrac{xdx + ydy}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \dfrac{xdy - ydx}{x^2} = 0$.
8. Розв’язати задачу Коші: $\begin{cases} y'' = \dfrac{x}{e^{2x}}, \\ y(0) = \dfrac{1}{4}, \quad y'(0) = -\dfrac{1}{4}. \end{cases}$
9. Розв’язати рівняння: $y'' + 2x\left(y'\right)^2 = 0$
10. Розв’язати задачу Коші: $\begin{cases} y'' + \dfrac{2}{1-y}\left(y'\right)^2 = 0, \\ y\left(0\right) = 0, \quad y'(0) = 1. \end{cases}$
11. Розв’язати рівняння: $y'' + 6y' = 0$.
12. Розв’язати рівняння: $y'' + 10y' + 29y = 0$.
13. Розв’язати рівняння: $y'' - 8y' + 7y = 0$.
14. Розв’язати задачу Коші: $\begin{cases} y^{(4)} - 5y'' + 4y = 0, \\ y(0) = -2, \quad y'(0) = 1, \quad y''(0) = 2, \quad y'''(0) = 0. \end{cases}$
15. Розв’язати рівняння: $y'' + 36y = 36 - 36x^3 + 66x$.
16. Розв’язати рівняння: $y'' + 4y' + 20y = 4\cos 4x - 52\sin 4x$.
17. Розв’язати задачу Коші: $\begin{cases} y'' - 10y' + 25y = e^{5x}\sin 2x, \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 0. \end{cases}$
18. Розв’язати рівняння: $y'' + 2y' + y = \dfrac{e^{-x}}{x}$.
19. Розв’язати систему рівнянь: $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + 6y. \end{cases}$

Варіант 17

1. Розв'язати рівняння: $\operatorname{ctg} x \cdot \cos^2 y dx + \sin^2 x \cdot \operatorname{tg} y dy = 0$.
2. Розв'язати рівняння: $\left(y^2 x + y^2\right) dy + x dx = 0$.
3. Розв'язати рівняння: $x dy - y dx = \sqrt{x^2 + y^2}\, dx$.
4. Розв'язати задачу Коші: $\begin{cases} \left(2e^y - x\right) y' = 1, \\ y(0) = 0. \end{cases}$
5. Розв'язати рівняння: $y' = \dfrac{x}{y} e^{2x} + y$.
6. Знайти рівняння кривої, якщо довжина відрізка, що відсікається на осі ординат нормаллю, яка проведена у будь-якій точці кривої, дорівнює відстані від цієї точки до початку координат.
7. Розв'язати рівняння: $\left(3x^2 y + y^3\right) dx + \left(x^3 + 3xy^2\right) dy = 0$.
8. Розв'язати задачу Коші: $\begin{cases} y'' = \sin^2 3x, \\ y(0) = -\dfrac{\pi^2}{16}, \quad y'(0) = 0. \end{cases}$
9. Розв'язати рівняння: $2xy'y'' = \left(y'\right)^2 + 1$.
10. Розв'язати задачу Коші: $\begin{cases} y''\left(1 + y\right) = 5\left(y'\right)^2, \\ y\left(0\right) = 0, \quad y'(0) = 1. \end{cases}$
11. Розв'язати рівняння: $y'' + 25y = 0$.
12. Розв'язати рівняння: $y'' + 6y' + 9y = 0$.
13. Розв'язати рівняння: $y'' + 2y' + 2y = 0$.
14. Розв'язати задачу Коші: $\begin{cases} y^{(4)} - 10y'' + 9y = 0, \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 8, \quad y'''(0) = 24. \end{cases}$
15. Розв'язати рівняння: $y'' + y = -4\cos x - 2\sin x$.
16. Розв'язати рівняння: $y'' + 4y' + 5y = 5 + 5x^2 - 32x$.
17. Розв'язати задачу Коші: $\begin{cases} y'' + y' - 12y = \left(16x + 22\right) e^{4x}, \\ y(0) = 3, \quad y'(0) = 5. \end{cases}$
18. Розв'язати рівняння: $y'' + y = \dfrac{1}{\cos x}$.
19. Розв'язати систему рівнянь: $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 5x + 4y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x + 5y. \end{cases}$

Варіант 18

1. Розв’язати рівняння: $\sin x \cdot y' = y\cos x + 2\cos x$.
2. Розв’язати рівняння: $\left(1+x^3\right)y^3dx - \left(y^2-1\right)x^3dy = 0$.
3. Розв’язати рівняння: $\left(4x^2+3xy+y^2\right)dx + \left(4y^2+3xy+x^2\right)dy = 0$.
4. Розв’язати задачу Коші: $\begin{cases} xy' + y\left(x+1\right) = 3x^2e^{-x}, \\ y(1) = 0. \end{cases}$
5. Розв’язати рівняння: $xy' + y = -y^2x$.
6. Знайти рівняння кривої, для якої добуток абсциси якої-небудь її точки і довжини відрізка, що відсікається нормаллю у цій точці на осі ординат, удвічі більший, ніж квадрат відстані від цієї точки до початку координат.
7. Розв’язати рівняння: $y\left(x^2+y^2+1\right)dy + x\left(x^2-y^2-1\right)dx = 0$.
8. Розв’язати задачу Коші: $\begin{cases} y''' = x\sin x, \\ y(0)=0, \quad y'(0)=0, \quad y''(0)=0. \end{cases}$
9. Розв’язати рівняння: $y'' - \dfrac{y'}{x-1} = x\left(x-1\right)$.
10. Розв’язати задачу Коші: $\begin{cases} y''\left(2y+3\right) - 5\left(y'\right)^2 = 0, \\ y\left(0\right)=0, \quad y'(0)=3. \end{cases}$
11. Розв’язати рівняння: $y'' - 3y' = 0$.
12. Розв’язати рівняння: $y'' - 7y' - 8y = 0$.
13. Розв’язати рівняння: $y'' + 4y' + 13y = 0$.
14. Розв’язати задачу Коші: $\begin{cases} y''' - y'' + y' - y = 0, \\ y(0)=0, \quad y'(0)=1, \quad y''(0)=0. \end{cases}$
15. Розв’язати рівняння: $y'' + 2y' - 24y = 6\cos 3x - 33\sin 3x$.
16. Розв’язати рівняння: $y'' + 2y' + y = \left(12x-10\right)e^{-x}$.
17. Розв’язати задачу Коші: $\begin{cases} y'' - 2y' + 5y = 5x^2 + 6x - 12, \\ y(0)=0, \quad y'(0)=2. \end{cases}$
18. Розв’язати рівняння: $y'' + y = \dfrac{1}{\sin x}$.
19. Розв’язати систему рівнянь: $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x + 3y. \end{cases}$

Варіант 19

1. Розв'язати рівняння: $1+(1+y')e^{y}=0$.
2. Розв'язати рівняння: $xy'-y=y^2$.
3. Розв'язати рівняння: $(x-y)ydx-x^2dy=0$.
4. Розв'язати задачу Коші: $\begin{cases}\left(x+y^2\right)dy=ydx,\\ y(0)=1.\end{cases}$
5. Розв'язати рівняння: $x(x-1)y'+y^3=xy$.
6. Знайти рівняння кривої, для якої трикутник, утворений віссю ординат, дотичною і радіусом-вектором точки дотику, є рівнобедрений.
7. Розв'язати рівняння: $\left(\sin y+y\sin x+\dfrac{1}{x}\right)dx+\left(x\cos y-\cos x+\dfrac{1}{y}\right)dy=0$.
8. Розв'язати задачу Коші: $\begin{cases}y'''\sin^4 x=\sin 2x,\\ y(\frac{\pi}{2})=\frac{\pi}{2},\quad y'(\frac{\pi}{2})=1,\quad y''(\frac{\pi}{2})=-1.\end{cases}$
9. Розв'язати рівняння: $y''+y'\operatorname{tg}x=\dfrac{1}{\cos x}$.
10. Розв'язати задачу Коші: $\begin{cases}2y''=\sqrt{1+\left(y'\right)^2},\\ y(0)=1,\quad y'(0)=0.\end{cases}$
11. Розв'язати рівняння: $y''-3y'-4y=0$.
12. Розв'язати рівняння: $y''+6y'+13y=0$.
13. Розв'язати рівняння: $y''+2y'=0$.
14. Розв'язати задачу Коші : $\begin{cases}y'''-3y''+3y'-y=0,\\ y(0)=0,\quad y'(0)=0,\quad y''(0)=4.\end{cases}$
15. Розв'язати рівняння: $y''+6y'+13y=-75\sin 2x$.
16. Розв'язати рівняння: $y''-4y=(-24x-10)e^{2x}$.
17. Розв'язати задачу Коші: $\begin{cases}y''+8y'+16y=16x^3+24x^2-10x+8,\\ y(0)=1,\quad y'(0)=3.\end{cases}$
18. Розв'язати рівняння: $y''+4y=\dfrac{1}{\sin 2x}$.
19. Розв'язати систему рівнянь: $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=x+4y,\\ \dfrac{dy}{dt}=x+y.\end{cases}$

Варіант 20

1. Розв’язати рівняння: $y'\operatorname{ctg} x + y = 2$.
2. Розв’язати рівняння: $\sqrt{y^2+1}dx = xydy$.
3. Розв’язати рівняння: $xy + y^2 = \left(2x^2 + xy\right)y'$,
4. Розв’язати задачу Коші: $\begin{cases} \left(\sin^2 y + x\operatorname{ctg} y\right)y' = 1, \\ y(0) = \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$
5. Розв’язати рівняння: $2x^3yy' + 3x^2y^2 + 1 = 0$.
6. Знайти рівняння кривої, що проходить через точку $A(2,0)$ і має наступну властивість: відрізок дотичної між точкою дотику і віссю ординат має сталу довжину, яка дорівнює 2.
7. Розв’язати рівняння: $\dfrac{y + \sin x \cos^2 yx}{\cos^2 yx}dx + \left(\dfrac{x}{\cos^2 yx} - \sin y\right)dy = 0$.
8. Розв’язати задачу Коші: $\begin{cases} y'' = \cos x + e^{-x}, \\ y(0) = e^{-\pi}, \quad y'(0) = 1. \end{cases}$
9. Розв’язати рівняння: $y'' - 2y'\operatorname{ctg} x = \sin^3 x$.
10. Розв’язати задачу Коші: $\begin{cases} 2\left(y'\right)^2 = \left(y-1\right)y'', \\ y\left(0\right) = 2, \quad y'(0) = 2. \end{cases}$
11. Розв’язати рівняння: $y'' + 25y' = 0$.
12. Розв’язати рівняння: $y'' - 10y' + 16y = 0$.
13. Розв’язати рівняння: $y'' - 8y' + 16y = 0$.
14. Розв’язати задачу Коші: $\begin{cases} y''' - y'' + 4y' - 4y = 0, \\ y(0) = -1, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = -6. \end{cases}$
15. Розв’язати рівняння: $y'' + 5y' = 39\cos 3x - 105\sin 3x$.
16. Розв’язати рівняння: $y'' + 6y' + 9y = 72e^{3x}$.
17. Розв’язати задачу Коші: $\begin{cases} y'' - 2y' + 37y = 36e^{x}\cos 6x, \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 6. \end{cases}$
18. Розв’язати рівняння: $y'' + 4y = \operatorname{tg} 2x$.
19. Розв’язати систему рівнянь: $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x - 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x + 8y. \end{cases}$

Варіант 21

1. Розв'язати рівняння: $\dfrac{e^{-x^2}dy}{x}+\dfrac{dx}{\cos^2 y}=0$.
2. Розв'язати рівняння: $y'-xy^2=2xy$.
3. Розв'язати рівняння: $\left(x^2-2xy\right)y'=xy-y^2$.
4. Розв'язати задачу Коші: $\begin{cases}(1+x)\,y'+y=x^3+x^2,\\ y(0)=0.\end{cases}$
5. Розв'язати рівняння: $\dfrac{dx}{x}=\left(\dfrac{1}{y}-2x\right)dy$.
6. Знайти рівняння кривої, для якої всі дотичні проходять через початок координат.
7. Розв'язати рівняння: $\left(3x^2-y\cos(xy)+y\right)dx+\left(x-x\cos(xy)\right)dy=0$.
8. Розв'язати задачу Коші: $\begin{cases}y''=\sin^3 x,\\ y(\frac{\pi}{2})=-\frac{7}{9},\quad y'(\frac{\pi}{2})=0.\end{cases}$
9. Розв'язати рівняння: $y''+4y'=2x^2$
10. Розв'язати задачу Коші: $\begin{cases}1+\left(y'\right)^2=yy'',\\ y(0)=1,\quad y'(0)=0.\end{cases}$
11. Розв'язати рівняння: $y''-3y'-18y=0$.
12. Розв'язати рівняння: $y''-6y'=0$.
13. Розв'язати рівняння: $y''+2y'+5y=0$.
14. Розв'язати задачу Коші: $\begin{cases}y^{(4)}-2y'''+y''=0,\\ y(0)=0,\quad y'(0)=0,\quad y''(0)=1,\quad y'''(0)=2.\end{cases}$
15. Розв'язати рівняння: $y''-4y'+29y=104\sin 5x$.
16. Розв'язати рівняння: $y''+16y=80e^{2x}$.
17. Розв'язати задачу Коші: $\begin{cases}y''-8y'=16+48x^2-128x^3,\\ y(0)=-1,\quad y'(0)=14.\end{cases}$
18. Розв'язати рівняння: $y''+4y'+4y=\dfrac{e^{-2x}}{x^3}$.
19. Розв'язати систему рівнянь: $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=x+4y,\\ \dfrac{dy}{dt}=2x+3y.\end{cases}$

Варіант 22

1. Розв'язати рівняння: $e^x \sin y dx + \operatorname{tg} y dy = 0$.
2. Розв'язати рівняння: $2x^2 yy' + y^2 = 2$.
3. Розв'язати рівняння: $\left(2\sqrt{xy} - y\right)dx + xdy = 0$.
4. Розв'язати задачу Коші: $\begin{cases} xy' - 2y + x^2 = 0, \\ y(1) = 0. \end{cases}$
5. Розв'язати рівняння: $y' + x \cdot \sqrt[3]{y} = 3y$.
6. Знайти рівняння кривої, яка має наступну властивість: площа трикутника, утвореного дотичною, віссю абсцис і відрізком від початку координат до точки дотику, є величиною сталою, яка дорівнює a^2.
7. Розв'язати рівняння: $\left(12x^3 - e^{\frac{x}{y}} \dfrac{1}{y}\right)dx + \left(16y + \dfrac{x}{y^2} e^{\frac{x}{y}}\right)dy = 0$.
8. Розв'язати задачу Коші: $\begin{cases} y''' = \sqrt{x} - \sin 2x, \\ y(0) = -\dfrac{1}{8}, \quad y'(0) = \dfrac{1}{8}\cos 2, \quad y''(0) = 1. \end{cases}$
9. Розв'язати рівняння: $xy'' - y' = 2x^2 e^x$.
10. Розв'язати задачу Коші: $\begin{cases} y'' + y\left(y'\right)^3 = 0, \\ y\left(0\right) = 1, \quad y'(0) = 2 \end{cases}$
11. Розв'язати рівняння: $y'' - 6y' + 13y = 0$.
12. Розв'язати рівняння: $y'' - 2y' - 15y = 0$.
13. Розв'язати рівняння: $y'' - 8y' = 0$.
14. Розв'язати задачу Коші: $\begin{cases} y^{(4)} - y = 0, \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 0, \quad y'''(0) = -4. \end{cases}$
15. Розв'язати рівняння: $y'' - 4y' + 5y = \left(24\sin x + 8\cos x\right)e^{-2x}$.
16. Розв'язати рівняння: $y'' + 4y' = 15e^x$.
17. Розв'язати задачу Коші: $\begin{cases} y'' + 12y' + 36y = 72x^3 - 18, \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 0. \end{cases}$
18. Розв'язати рівняння: $y'' - 4y' + 4y = \dfrac{e^{2x}}{x^3}$.
19. Розв'язати систему рівнянь: $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 7x + 3y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 5y. \end{cases}$

Варіант 23

1. Розв'язати рівняння: $\left(1+e^{3y}\right)xdx = e^{3y}dy$.
2. Розв'язати рівняння: $y' = \dfrac{1+y^2}{1+x^2}$.
3. Розв'язати рівняння: $xy' + y\left(\ln\dfrac{y}{x} - 1\right) = 0$.
4. Розв'язати задачу Коші: $\begin{cases} xy' + y = \sin x, \\ y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{2}{\pi}. \end{cases}$
5. Розв'язати рівняння: $xy' + y = y^2 \ln x$.
6. Знайти рівняння кривої, яка має наступну властивість: точка перетину будь-якої дотичної з віссю абсцис має абсцису, удвічі меншу, ніж абсциса точки дотику.
7. Розв'язати рівняння: $\left(\dfrac{y}{2\sqrt{xy}} + 2xy\sin x^2 y + 4\right)dx + \left(\dfrac{x}{2\sqrt{xy}} + x^2 \sin x^2 y\right)dy = 0$.
8. Розв'язати задачу Коші: $\begin{cases} y'' = \dfrac{1}{\cos^2 \dfrac{x}{2}}, \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 1. \end{cases}$
9. Розв'язати рівняння: $x(y''+1) + y' = 0$.
10. Розв'язати задачу Коші: $\begin{cases} yy'' - (y')^2 = 0, \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 2. \end{cases}$
11. Розв'язати рівняння: $y'' + 2y' + y = 0$.
12. Розв'язати рівняння: $y'' + 6y' + 25y = 0$.
13. Розв'язати рівняння: $y'' - 4y' = 0$.
14. Розв'язати задачу Коші: $\begin{cases} y^{(4)} - 16y = 0, \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 0, \quad y'''(0) = -8. \end{cases}$
15. Розв'язати рівняння: $y'' + 16y = 8\cos 4x$.
16. Розв'язати рівняння: $y'' + y' - 2y = 9\cos x - 7\sin x$.
17. Розв'язати задачу Коші: $\begin{cases} y'' + 3y' = (40x+58)e^{2x}, \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 2. \end{cases}$
18. Розв'язати рівняння: $y'' + 2y' + y = 3e^{-x}\sqrt{x+1}$.
19. Розв'язати систему рівнянь: $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + 4y. \end{cases}$

Варіант 24

1. Розв’язати рівняння: $(\sin(2x+y)-\sin(2x-y))dx = \dfrac{dy}{\sin y}$.
2. Розв’язати рівняння: $y'\sqrt{1+y^2} = \dfrac{x^2}{y}$.
3. Розв’язати рівняння: $\left(x^2+y^2\right)dx + 2xydy = 0$.
4. Розв’язати задачу Коші: $\begin{cases} \left(x^2-1\right)y' - xy = x^3 - x, \\ y(\sqrt{2}) = 1. \end{cases}$
5. Розв’язати рівняння: $xdx = \left(\dfrac{x^2}{y} - y^3\right)dy$.
6. Знайти рівняння кривої, кожна дотична до якої перетинає пряму ***y =1*** у точці з абсцисою, яка удвічі більша, ніж абсциса точки дотику.
7. Розв’язати рівняння: $y3^{xy}\ln 3dx + \left(x3^{xy}\ln 3 - 3\right)dy = 0$.
8. Розв’язати задачу Коші: $\begin{cases} y'' = 2\sin x\cos^2 x, \\ y(0) = -\dfrac{5}{9}, \quad y'(0) = -\dfrac{2}{3}. \end{cases}$
9. Розв’язати рівняння: $y'' + 4y' = \cos 2x$.
10. Розв’язати задачу Коші: $\begin{cases} yy'' - \left(y'\right)^2 = y^2\ln y, \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 1. \end{cases}$
11. Розв’язати рівняння: $y'' + 10y' = 0$.
12. Розв’язати рівняння: $y'' - 6y' + 8y = 0$.
13. Розв’язати рівняння: $4y'' + 4y' + y = 0$.
14. Розв’язати задачу Коші: $\begin{cases} y''' + y'' - 4y' - 4y = 0, \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 12. \end{cases}$
15. Розв’язати рівняння: $y'' + 9y = 9x^4 + 12x^2 - 27$.
16. Розв’язати рівняння: $y'' + 2y' + y = (18x+8)e^{-x}$.
17. Розв’язати задачу Коші: $\begin{cases} y'' - 9y' + 18y = 26\cos x - 8\sin x, \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 2. \end{cases}$
18. Розв’язати рівняння: $y'' + y = -\mathrm{ctg}^2 x$.
19. Розв’язати систему рівнянь: $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + 8y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 4y. \end{cases}$

Варіант 25

1. Розв’язати рівняння: $\cos y dx = 2\sqrt{1+x^2}dy + \cos y\sqrt{1+x^2}dy$.
2. Розв’язати рівняння: $(y+1)y' = \dfrac{y}{\sqrt{1-x^2}} + xy$.
3. Розв’язати рівняння: $(y^2 - 2xy)dx - x^2 dy = 0$.
4. Розв’язати задачу Коші: $\begin{cases} (1-x^2)y' + xy = 1, \\ y(0) = 1. \end{cases}$
5. Розв’язати рівняння: $y' + 2xy = 2y^3x^3$.
6. Знайти рівняння кривої, яка має наступну властивість: якщо через будь-яку її точку провести прямі, які паралельні осям координат, до перетину з цими осями, то площа утвореного прямокутника ділиться кривою на дві частини, причому площа однієї з них удвічі більша площі другої.
7. Розв’язати рівняння: $\left(\dfrac{1}{x-y} + 3x^2y^7\right)dx + \left(7x^3y^6 - \dfrac{1}{x-y}\right)dy = 0$.
8. Розв’язати задачу Коші: $\begin{cases} y'' = 2\cos x \sin^2 x, \\ y(0) = \dfrac{1}{9}, \quad y'(0) = 1. \end{cases}$
9. Розв’язати рівняння: $y'' + y' = \sin x$.
10. Розв’язати задачу Коші: $\begin{cases} y''(1-\ln y)y + (y')^2(1+\ln y) = 0, \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 1. \end{cases}$
11. Розв’язати рівняння: $y'' + 5y = 0$.
12. Розв’язати рівняння: $9y'' - 6y' + y = 0$.
13. Розв’язати рівняння: $y'' + 6y' + 8y = 0$.
14. Розв’язати задачу Коші: $\begin{cases} y''' + 2y'' + 9y' + 18y = 0, \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = -3, \quad y''(0) = -9. \end{cases}$
15. Розв’язати рівняння: $y'' - 12y' + 40y = 2e^{6x}$.
16. Розв’язати рівняння: $y'' - 14y' + 49y = 144\sin 7x$.
17. Розв’язати задачу Коші: $\begin{cases} y'' + 8y' = 18x + 60x^2 - 32x^3, \\ y(0) = 5, \quad y'(0) = 2. \end{cases}$
18. Розв’язати рівняння: $y'' - y' = e^{2x}\cos e^x$.
19. Розв’язати систему рівнянь: $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 5x + 8y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + 3y. \end{cases}$

Варіант 26

1. Розв’язати рівняння: $y'\sqrt{1-x^2}-\cos^2 y=0$.
2. Розв’язати рівняння: $\left(x^2+1\right)y'+y\sqrt{1+x^2}=xy$.
3. Розв’язати рівняння: $\left(x+2y\right)dx+xdy=0$.
4. Розв’язати задачу Коші: $\begin{cases} y'\,\mathrm{ctg}(x)-y=2\cos^2(x)\,\mathrm{ctg}(x), \\ y(0)=0. \end{cases}$
5. Розв’язати рівняння: $y'+y=\dfrac{x}{y^2}$.
6. Знайти рівняння кривої, якщо дотична до неї відсікає на осі ординат відрізок, довжина якого дорівнює $\dfrac{1}{n}$-й суми координат точки дотику.
7. Розв’язати рівняння: $\left(\dfrac{2y}{x^3}+y\cos(xy)\right)dx+\left(\dfrac{1}{x^2}+x\cos(xy)\right)dy=0$.
8. Розв’язати задачу Коші: $\begin{cases} y''=2\sin(x)\cos^2(x)-\sin^3(x), \\ y(0)=0, \quad y'(0)=1. \end{cases}$
9. Розв’язати рівняння: $x^2y''=\left(y'\right)^2$.
10. Розв’язати задачу Коші: $\begin{cases} y''\left(1+y\right)=\left(y'\right)^2+y', \\ y\left(0\right)=2, \quad y'(0)=2. \end{cases}$
11. Розв’язати рівняння: $y''+6y'+10y=0$.
12. Розв’язати рівняння: $y''-4y'+4y=0$.
13. Розв’язати рівняння: $y''-5y'+4y=0$.
14. Розв’язати задачу Коші: $\begin{cases} y^{(5)}-6y^{(4)}+9y'''=0, \\ y(0)=0, \quad y'(0)=0, \quad y''(0)=0, \quad y'''(0)=0, \quad y^{(4)}(0)=27. \end{cases}$
15. Розв’язати рівняння: $y''+4y'=\left(2\sin 2x+24\cos 2x\right)e^x$.
16. Розв’язати рівняння: $y''+9y=10e^{3x}$.
17. Розв’язати задачу Коші: $\begin{cases} y''-3y'+2y=-7\cos x-\sin x, \\ y(0)=2, \quad y'(0)=7. \end{cases}$
18. Розв’язати рівняння: $y''-y'=e^{2x}\sin e^x$.
19. Розв’язати систему рівнянь: $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=3x+y, \\ \dfrac{dy}{dt}=8x+y. \end{cases}$

Варіант 27

1. Розв'язати рівняння: $e^x \operatorname{tg} y dx = \dfrac{(1-e^x)dy}{\cos^2 y}$.
2. Розв'язати рівняння: $xyy' = \dfrac{1+x^2}{1-y^2}$.
3. Розв'язати рівняння: $(2x-y)dx + (x+y)dy = 0$.
4. Розв'язати задачу Коші: $\begin{cases} x^2 y' = 2xy + 3, \\ y(1) = -1. \end{cases}$
5. Розв'язати рівняння: $y' - ytgx + y^2 \cos x = 0$.
6. Знайти рівняння кривих, для яких довжина відрізка, що відсікається нормаллю у точці ***M(x, y)*** на осі абсцис, дорівнює ***y^2/x***.
7. Розв'язати рівняння: $\left(\dfrac{y}{\sqrt{1-x^2y^2}} - 2x\right)dx + \dfrac{xdy}{\sqrt{1-x^2y^2}}dy = 0$.
8. Розв'язати задачу Коші: $\begin{cases} y'' = 2\cos(x)\sin^2(x) - \cos^3(x), \\ y(0) = \dfrac{2}{3}, \quad y'(0) = 2. \end{cases}$
9. Розв'язати рівняння: $2xy'y'' = (y')^2 - 4$.
10. Розв'язати задачу Коші: $\begin{cases} y'' = \dfrac{y'}{\sqrt{y}}, \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 2. \end{cases}$
11. Розв'язати рівняння: $y'' - y = 0$.
12. Розв'язати рівняння: $4y'' + 8y' - 5y = 0$.
13. Розв'язати рівняння: $y'' - 6y' + 10y = 0$.
14. Розв'язати задачу Коші: $\begin{cases} y''' + 2y'' + y' = 0, \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 2, \quad y''(0) = -3. \end{cases}$
15. Розв'язати рівняння: $y'' + 2y' + y = 6e^{-x}$.
16. Розв'язати рівняння: $4y'' - 4y' + y = -25\cos x$.
17. Розв'язати задачу Коші: $\begin{cases} y'' + 2y' = 6x^2 + 2x + 1, \\ y(0) = 2, \quad y'(0) = 2. \end{cases}$
18. Розв'язати рівняння: $y'' + y = \operatorname{tg}^2 x$.
19. Розв'язати систему рівнянь: $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 5y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x - 3y. \end{cases}$

Варіант 28

1. Розв’язати рівняння: $y' + \sin(x+y) = \sin(x-y)$.
2. Розв’язати рівняння: $(xy - x)^2 dy + y(1-x)dx = 0$.
3. Розв’язати рівняння: $2x^3 y' = y(2x^2 - y^2)$.
4. Розв’язати задачу Коші: $\begin{cases} y' + 2xy = xe^{-x^2}, \\ y(0) = 0. \end{cases}$
5. Розв’язати рівняння: $y' + \dfrac{2y}{x} = \dfrac{2\sqrt{y}}{\cos^2 x}$.
6. **Знайти рівняння кривих, для яких довжина відрізка, що відсікається дотичною на осі ординат, дорівнює квадрату абсциси точки дотику.**
7. Розв’язати рівняння: $(5x^4 y^4 + 28x^6)dx + (4x^5 y^3 - 3y^2)dy = 0$.
8. Розв’язати задачу Коші: $\begin{cases} y'' = x - \ln x, \\ y(1) = -\dfrac{5}{12}, \quad y'(1) = \dfrac{3}{2}. \end{cases}$
9. Розв’язати рівняння: $y'' x \ln x = y'$.
10. Розв’язати задачу Коші: $\begin{cases} 1 + (y')^2 = y'', \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 0. \end{cases}$
11. Розв’язати рівняння: $y'' + 8y' + 25y = 0$.
12. Розв’язати рівняння: $y'' + 9y' = 0$.
13. Розв’язати рівняння: $9y'' + 3y' - 2y = 0$.
14. Розв’язати задачу Коші: $\begin{cases} y''' - y'' - y' + y = 0, \\ y(0) = -1, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 1. \end{cases}$
15. Розв’язати рівняння: $y'' + 2y' + 37y = 37x^2 - 33x + 74$.
16. Розв’язати рівняння: $3y'' - 5y' - 2y = 6\cos 2x + 38\sin 2x$.
17. Розв’язати задачу Коші: $\begin{cases} y'' + 2y' = 6x^2 + 2x + 1, \\ y(0) = 2, \quad y'(0) = 2. \end{cases}$
18. Розв’язати рівняння: $y'' + y = \dfrac{2}{\sin^2 x}$.
19. Розв’язати систему рівнянь: $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -5x + 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x - 6y. \end{cases}$

Варіант 29

1. Розв'язати рівняння: $\cos^3 y \cdot y' - \cos(2x+y) = \cos(2x-y)$.
2. Розв'язати рівняння: $(x^2y-y)^2 y' = x^2y - y + x^2 - 1$.
3. Розв'язати рівняння: $x^2y' = y(x+y)$.
4. Розв'язати задачу Коші: $\begin{cases} y' - 3x^2y = x^2e^{x^3}, \\ y(0) = 0. \end{cases}$
5. Розв'язати рівняння: $y' - y + y^2\cos x = 0$.
6. Знайти рівняння кривих, для яких довжина відрізка, що відсікається нормаллю у точці ***M(x, y)*** на осі ординат, дорівнює ***x^2/y*.**
7. Розв'язати рівняння: $\left(2xe^{x^2+y^2} + 2\right)dx + \left(2ye^{x^2+y^2} - 3\right)dy = 0$.
8. Розв'язати задачу Коші: $\begin{cases} y'' = \dfrac{1}{x^2}, \\ y(1) = 3, \quad y'(1) = 1. \end{cases}$
9. Розв'язати рівняння: $y''ctgx + y' = 2$.
10. Розв'язати задачу Коші: $\begin{cases} yy'' - 2yy'\ln y = (y')^2, \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 1. \end{cases}$
11. Розв'язати рівняння: $6y'' + 7y' - 3y = 0$.
12. Розв'язати рівняння: $y'' + 16y = 0$.
13. Розв'язати рівняння: $4y'' - 4y' + y = 0$.
14. Розв'язати задачу Коші: $\begin{cases} y^{(4)} + 5y'' + 4y = 0, \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 4, \quad y''(0) = -1, \quad y'''(0) = -16. \end{cases}$
15. Розв'язати рівняння: $6y'' - y' - y = 3e^{2x}$.
16. Розв'язати рівняння: $y'' + 4y' + 29y = 26e^{-x}$.
17. Розв'язати задачу Коші: $\begin{cases} y'' + 5y' + 6y = 52\sin 2x, \\ y(0) = -2, \quad y'(0) = -2. \end{cases}$
18. Розв'язати рівняння: $y'' + 2y' + 5y = \dfrac{e^{-x}}{\sin 2x}$.
19. Розв'язати систему рівнянь: $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 6x + 3y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -8x - 5y. \end{cases}$

.

Варіант 30

1. Розв’язати рівняння: $3^{y^2-x^2}=\dfrac{yy'}{x}$.
2. Розв’язати рівняння: $\sqrt{1-y^2}\,dx+y\sqrt{1-x^2}\,dy=0$.
3. Розв’язати рівняння: $y'=\dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{y}$.
4. Розв’язати задачу Коші: $\begin{cases} xy'+y=\ln x+1, \\ y(1)=0. \end{cases}$
5. Розв’язати рівняння: $y'=x\sqrt{y}+\dfrac{xy}{x^2-1}$.
6. Крива у точці з ординатою 2 утворює з віссю ординат кут 45°. Будь-яка її дотична відсікає на осі абсцис відрізок, довжина якого дорівнює квадрату ординати точки дотику. Знайти рівняння даної кривої.
7. Розв’язати рівняння: $\left(3y^3\cos 3x+7\right)dx+\left(3y^2\sin 3x-2y\right)dy=0$.
8. Розв’язати задачу Коші: $\begin{cases} y'''=\cos 4x, \\ y(0)=2, \quad y'(0)=\dfrac{15}{16}, \quad y''(0)=0. \end{cases}$
9. Розв’язати рівняння: $\left(1+x^2\right)y''=2xy$.
10. Розв’язати задачу Коші: $\begin{cases} y''=\dfrac{1}{\sqrt{y}}, \\ y(0)=0, \quad y'(0)=0. \end{cases}$
11. Розв’язати рівняння: $9y''-6y'+y=0$.
12. Розв’язати рівняння: $y''+12y'+37y=0$.
13. Розв’язати рівняння: $y''-2y'=0$.
14. Розв’язати задачу Коші: $\begin{cases} y^{(4)}+10y''+9y=0, \\ y(0)=1, \quad y'(0)=3, \quad y''(0)=-9, \quad y'''(0)=-27. \end{cases}$
15. Розв’язати рівняння: $2y''+7y'+3y=222\sin 3x$.
16. Розв’язати рівняння: $4y''+3y'-y=11\cos x-7\sin x$.
17. Розв’язати задачу Коші: $\begin{cases} y''-4y=8e^{2x}, \\ y(0)=1, \quad y'(0)=-8. \end{cases}$
18. Розв’язати рівняння: $y''+9y=\dfrac{1}{\cos 3x}$.
19. Розв’язати систему рівнянь: $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=4x-8y, \\ \dfrac{dy}{dt}=-8x+4y. \end{cases}$

Список використаної літератури

1. Арнольд В. И. Обыкновенные дифференциальные уравнения – М. : Наука, 1984. – 271 с.
2. Арнольд В.И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений – М. : Наука, 1978. – 304 с.
3. Еругин Н. П. Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений. – Минск : «Наука и техника», 1972. – 663 с.
4. Матвеев Н. М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. – М. : Высш. шк. – 1967. – 564 с.
5. Петровский И. Г. Лекций по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. – М. : Изд-во МГУ, 1984. – 296 с.
6. Понтрягин Л. С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М. : Наука, 1974. – 331 с.
7. Сансоне Дж. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Т. 1. – М. : ИЛ, 1953. – 346 с.
8. Сансоне Дж. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Т. 2. – М. : ИЛ, 1954. – 415 с.
9. Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений. – М. : ГОНТИ, 1952. – 468 с.
10. Тихонов А. Н., Васильева А. Б., Свешников А. Г. Дифференциальные уравнения. – М. : Наука, 1985. – 231 с.
11. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М. : «Мир», 1970. – 720 с.
12. Эльсгольц Л. Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. – М. : Наука, 1965. – 424 с.
13. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М. : Наука, 1976. – 576 с.
14. Филиппов А. Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. – М. : Наука, 1986. – 128 с.
15. Матвеев Н. М. Сборник задач и упражнений по общему курсу дифференциальных уравнений. – Минск : Высш. шк., 1987. – 320 с.
16. Самойленко А. М., Кривошея С. А., Перестюк Н. А. Дифференциальные уравнения: примеры и задачи. – К. : Вища школа, 1984. – 408 с.
17. Перестюк М. О. , Свіщук М. Я. Збірник задач з диференціальних рівнянь. Навчальний посібник. – К. : «ТВіМС», 2004. – 222 с.
18. Самкова Г. Є., Тингаев О. А., Шарай Н. В. Методичні вказівки до самостійної роботи за курсом "Звичайні диференціальні рівняння першого порядку". МОНУ. ОНУ ім. І. І. Мечникова. ІМЕМ. Одеса,

"Студія «Негоціант»", 2003, – 35 с. (2,03 умовн. друк. арк.).
19. Самкова Г. Є., Тингаев О. А., Шарай Н. В. Методичні вказівки до самостійної роботи за курсом "Диференціальні рівняння вищих порядків. Системи рівнянь. Лінійні рівняння 1-го порядку у частинних похідних". МОНУ. ОНУ ім. І.І. Мечникова. ІМЕМ. Одеса, "Студія «Негоціант»", 2003, – 48 с. (2,79 умовн. друк. арк.).
20. Самкова Г. Є., Шарай Н. В. Методичний посібник для студентів 2 курсу "Звичайні диференціальні рівняння першого порядку". МОНМСУ. ОНУ ім. І. І. Мечникова. ІМЕМ. Одеса, "Одеський національний університет", 2011, – 38 с. (2,3 умов.-друк. арк.).

Навчальне видання

Самкова Галина Євгенівна
Шарай Наталія Вікторівна
Мойсєєнок Олексій Павлович

Звичайні диференціальні рівняння та системи звичайних диференціальних рівнянь

НАВЧАЛЬНО-МЕТОДИЧНИЙ ПОСІБНИК

За редакцією авторів

Підп. до друку 29.11.2019. Формат 60×84/16.
Ум.-друк. арк. 6,51. Тираж 50 пр.
Зам. № 2021.

Видавець і виготовлювач
Одеський національний університет імені І. І. Мечникова
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 4215 від 22.11.2011 р.
Україна, 65082, м. Одеса, вул. Єлісаветинська, 12
Тел. (048) 723-28-39. E-mail: druk@onu.edu.ua