

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
ОДЕСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ І. І. МЕЧНИКОВА  
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ, ЕКОНОМІКИ ТА МЕХАНІКИ

*С. А. Щоголев, Арк. О. Кореновський*

## **ОСНОВИ ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ**

**Том 2**

**Частина 2**

**НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК**

ОДЕСА  
ОНУ  
2019

УДК 517(07)  
Щ92

Рекомендовано до друку вченою радою  
ОНУ імені І. І. Мечникова.  
Протокол № 2 від 30.10.2018 р.

**Рецензенти:**

**В. Г. Попов** – доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри вищої математики Одеської національної морської академії;

**А. В. Плотніков** – доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри прикладної, обчислювальної математики і САПР Одеської державної академії будівництва та архітектури;

**Ю. О. Григор'єв** – кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри вищої і прикладної математики Одеського національного морського університету.

**Щоголев С. А.**

Щ92            Основи вищої математики. Т. 2. Ч. 2 : навч. посіб. /  
С. А. Щоголев, Арк. О. Кореновський. – Одеса : Одес. нац. ун-т ім.  
І. І. Мечникова, 2019. – 220 с.  
ISBN 978-617-689-272-4 (двотомник)  
ISBN 978-617-689-343-1 (2-ий том, ч. 2)

Навчальний посібник написано відповідно до програми курсу «Вища математика», що читається студентам 1 курсу спеціальностей «географія», «геологія», «туризм». Викладено основи теорії, представлено основні практичні методи розв'язання задач, розглянуто низка прикладів, у тому числі фізичного змісту, наведено вправи для самостійної роботи.

Для підготовки студентів геолого-географічних спеціальностей.

**УДК 517(07)**

ISBN 978-617-689-272-4 (двотомник)  
ISBN 978-617-689-343-1 (2-ий том, ч. 2)

© Щоголев С. А., Кореновський Арк. О., 2019  
© Одеський національний університет імені І. І. Мечникова, 2019

# Глава 11. Диференціальні рівняння

## 11.1. Основні поняття. Задачі, що приводять до диференціальних рівнянь

**Означення.** Звичайним диференціальним рівнянням (з.д.р)  $n$ -го порядку відносно невідомої функції  $y(x)$  називається рівняння, яке пов'язує незалежну змінну  $x$ , функцію  $y(x)$  та її похідні до  $n$ -го порядку включно.

У загальному випадку це рівняння має вигляд:

$$F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0. \quad (11.1.1)$$

Підкреслимо, що обов'язковим елементом в рівнянні (11.1.1) є тільки  $y^{(n)}(x)$ , вся решта елементів може бути відсутня.

*Приклади*

1.  $x^2(y')^3 - \sin y' = 3$  – з.д.р. 1-го порядку;
2.  $y'' + 2xy' - 3y = \ln x$  – з.д.р. 2-го порядку;
3.  $y^{(5)} = 0$  – з.д.р. 5-го порядку.

А ось, наприклад, рівняння  $x^2 + y^2 = 9$  не є диференціальним.

**Зауваження.** Зустрічаються рівняння відносно невідомої функції, яка залежить не від однієї, а від декількох змінних, і ці рівняння містять частинні похідні від цієї функції за цими змінними. Такі рівняння називається *диференціальними рівнянням з частинними похідними*. Наприклад, таким є рівняння:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t),$$

в якому невідомою є функція  $u(x, t)$ . Надалі, якщо не буде сказано про інше, ми матимемо справу лише зі звичайними диференціальними рівняннями, тому будемо називати їх просто *диференціальними рівняннями*, причому, як незалежну змінну  $x$ , так і функцію  $y(x)$  вважатимемо дійсними.

До диференціальних рівнянь приводять численні задачі природознавства, економіки, техніки. Розглянемо деякі приклади.

*Приклад 1.* Знайти закон розпаду радіоактивної речовини, якщо відомо, що швидкість розпаду в кожен момент часу прямо пропорційна масі речовини.

Нехай  $m(t)$  – маса речовини в момент часу  $t$ . Тоді:

$$\frac{dm(t)}{dt} = -km(t), \quad (11.1.2)$$

де  $k$  – коефіцієнт пропорційності. Знак «мінус» в правій частині рівності вказує на те, що з часом маса зменшується. Рівняння (11.1.2) є диференціальним рівнянням 1-го порядку відносно функції  $m(t)$ .

*Приклад 2.* Матеріальна точка масою  $m$  рухається вздовж осі  $Ox$ , і на неї в кожен момент часу  $t$  діє сила  $F$ , яка пропорційна відхиленню точки від початку координат і напрямлена до початку координат. Знайти рівняння руху точки.

Нехай  $x(t)$  – координата точки в момент часу  $t$ . Тоді миттєве прискорення точки:

$$w(t) = \frac{d^2x(t)}{dt^2}.$$

За другим законом Ньютона маємо:

$$F = mw.$$

Тобто:

$$m \frac{d^2x(t)}{dt^2} = F \left( t, x(t), \frac{dx(t)}{dt} \right).$$

Оскільки за умовою:

$$F = -kx, \quad k > 0,$$

то:

$$m \frac{d^2x(t)}{dt^2} = -kx(t),$$

або:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0, \quad (11.1.3)$$

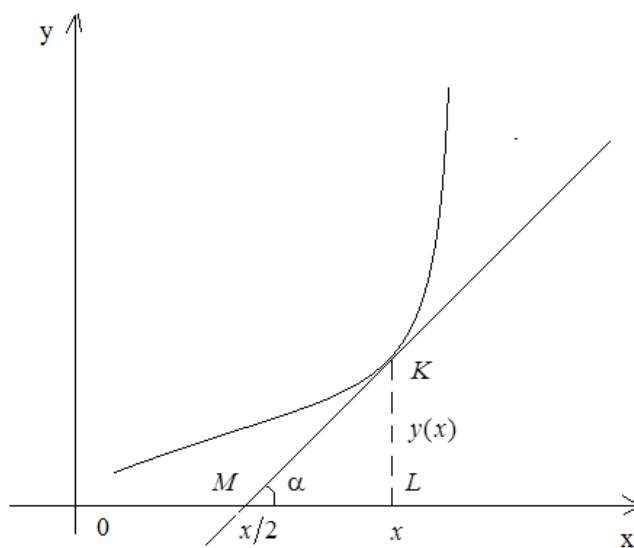
де  $\omega^2 = k/m$ . Рівняння (11.1.3) є диференціальним рівнянням 2-го порядку відносно функції  $x(t)$ .

*Приклад 3.* Скласти диференціальне рівняння кривих, для яких точка перетину будь-якої дотичної з віссю  $Ox$  має абсцису, вдвічі меншу абсциси точки дотику.

Позначимо  $(x, y(x))$  – координати точки дотику. Тоді з прямокутного трикутника  $KLM$  (рис. 11.1) одержимо:

$$|KL| = |ML| \cdot \operatorname{tg} \alpha.$$

Виходячи з геометричного змісту похідної як кутового коефіцієнта дотичної до графіка функції, і, враховуючи умову задачі, звідси дістанемо:



**Рис. 11.1**

$$y(x) = \frac{x}{2} \operatorname{tg} \alpha = \frac{x}{2} y'(x),$$

звідки:

$$y'(x) = \frac{2}{x} y(x). \quad (11.1.4)$$

Рівняння (11.1.4) є диференціальним рівнянням 1-го порядку відносно ординати  $y(x)$  точки дотику.

*Приклад 4.* Деяке підприємство з початковим капіталом  $Q_0$  почало діяльність з метою накопичення капіталу. В силу зміни доходу і повних витрат на виробництво, капітал з часом змінюється. Треба описати динаміку цього процесу.

Нехай  $Q(t)$  – капітал підприємства в момент часу  $t$ . Тоді різниця:

$$\Delta Q = Q(t + \Delta t) - Q(t)$$

дає приріст капіталу за проміжок часу  $\Delta t$ . У загальному випадку цей приріст визначається формулою:

$$\Delta Q = P - U, \quad (11.1.5)$$

де  $P = P(t, \Delta t)$  – доход підприємства, а  $U = U(t, \Delta t)$  – повні витрати підприємства з моменту часу  $t$  до моменту часу  $t + \Delta t$ .

Співвідношення (11.1.5) і є рівнянням накопичення капіталу. Для його розв'язання треба знати функції  $P(t, \Delta t)$  і  $U(t, \Delta t)$ . В простішому випадку можна покласти:

$$P(t, \Delta t) = \alpha Q(t) \Delta t, \quad U(t, \Delta t) = \beta Q(t) \Delta t, \quad (11.1.6)$$

де додатні коефіцієнти  $\alpha$  і  $\beta$  характеризують відповідно інтенсивність зміни доходу і повних витрат виробництва. Підставляючи вирази (11.1.6) у рівняння (11.1.5), дістаємо:

$$\Delta Q = \varepsilon Q(t) \Delta t, \quad (11.1.7)$$

де  $\varepsilon = \alpha - \beta$ . Далі обидві частини рівності (11.1.7) поділимо на  $\Delta t$  і перейдемо до границі, коли  $\Delta t \rightarrow 0$ . Дістанемо:

$$\frac{dQ}{dt} = \varepsilon Q. \quad (11.1.8)$$

Рівняння (11.1.8) є диференціальним рівнянням 1-го порядку, що описує процес накопичення капіталу за умов (11.1.6).

*Приклад 5.* Наведемо приклад використання диференціальних рівнянь в геології. Для вивчення неоднорідностей земної кори з метою розвідки корисних копалин широко використовуються методи електророзвідки. Основна схема полягає в наступному. За допомогою заземлених електродів в землю пропускається електричний струм від батареї. На поверхні землі вимірюються напруги створеного таким чином поля сталого струму. За допомогою спостережень на поверхні визначається підземна структура. Методи визначення підземних структур базуються на математичному розв'язанні відповідних задач. Відомо, що потенціал поля сталого струму  $V(x, y, z)$  в однорідному

середовищі задовольняє рівняння, яке називається рівнянням Лапласа:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \quad (11.1.9)$$

з додатковою умовою:

$$\left. \frac{\partial V}{\partial z} \right|_{z=0} = 0.$$

Рівняння (11.1.9) є диференціальним рівнянням з частинними похідними 2-го порядку. Методи розв'язання таких рівнянь розглядаються у відповідних математичних курсах, наприклад, у курсі рівнянь математичної фізики.

З задачами, що приводять до диференціальних рівнянь, математики зустрілися ще у XVI ст., але систематично почали ними займатися з XVII ст. Дуже велику роль відіграв тут Ісаак Ньютон (1642–1727 рр.), який сформулював задачу розв'язання (або, як кажуть, *інтегрування*) диференціальних рівнянь: за даним рівнянням, що містить *флюксії* (тобто похідні функцій), знайти співвідношення між *флюентами* (тобто самими функціями). Ньютон зінтегрував цілу низку диференціальних рівнянь, що відбито у його «Математичних початках натуральної філософії».

Пізніше диференціальні рівняння викликали до себе інтерес математиків як математичний об'єкт, а не тільки спосіб розв'язання практичних задач. Теорія диференціальних рівнянь почала інтенсивно розвиватися, і зараз є розгалуженою наукою з багатьма розділами, напрямками, теоріями, що перетинаються як між собою, так і з іншими областями математики. Серед вчених, які зробили значний внесок у розвиток теорії диференціальних рівнянь, можна відзначити Л. Ейлера, К. Гаусса, О. Коші, Ж. Лагранжа, А. Пуанкаре, Д. Гільберта, М. В. Остроградського, О. М. Ляпунова, А. М. Колмогорова, Л. С. Понтрягіна, О. О. Андронова, В. І. Арнольда, І. Т. Кігурадзе. Суттєвий внесок зроблено представниками української математичної школи – М. М. Боголюбовим, Ю. О. Митропольським, А. М. Самойленком, І. З. Штокало, О. М. Перестюком, В. Я. Скоробогатьком та іншими.

## 11.2. Диференціальні рівняння 1-го порядку, основні означення

**Означення.** Диференціальним рівнянням 1-го порядку називається рівняння, що пов'язує незалежну змінну  $x$ , невідому функцію  $y(x)$  та її похідну  $y'(x)$ , тобто рівняння вигляду:

$$F(x, y(x), y'(x)) = 0. \quad (11.2.1)$$

Обов'язковим елементом у цьому рівнянні є тільки  $y'(x)$ .

**Зауваження.** Замість похідної невідомої функції диференціальне рівняння може містити диференціали незалежної змінної  $x$  та невідомої функції  $y$ , тобто мати вигляд:

$$\Phi(x, y, dx, dy) = 0. \quad (11.2.2)$$

**Означення.** Диференціальним рівнянням 1-го порядку, розв'язаним відносно похідної, називається рівняння вигляду:

$$y' = f(x, y). \quad (11.2.3)$$

Якщо використати співвідношення:

$$y' = \frac{dy}{dx},$$

то рівняння (11.2.3) можна записати у вигляді (11.2.2):

$$f(x, y)dx - dy = 0. \quad (11.2.4)$$

Більш загальна форма рівняння (11.2.4) – так звана *симетрична* форма:

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0. \quad (11.2.5)$$

У цій формі змінні  $x$  та  $y$  входять рівноправно у тому сенсі, що можна вважати  $y$  функцією від  $x$ , а можна й навпаки – вважати  $x$  функцією від  $y$ . Якщо у рівнянні (11.2.5) обидві частини поділити на функцію  $N(x, y)$  (звичайно, при врахуванні всіх можливих наслідків цього ділення), то одержимо рівняння:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{M(x, y)}{N(x, y)},$$

тобто звели до рівняння вигляду (11.2.3), яке, взагалі кажучи, не є еквівалентним рівнянню (11.2.5).



**Означення.** Розв'язком рівняння (11.2.3) на інтервалі  $(a, b)$  називається будь-яка функція  $y = \varphi(x)$ , що визначена і диференційовна на інтервалі  $(a, b)$ , і при підстановці її до рівняння (11.2.3) вона перетворює його на тотожність:

$$\varphi'(x) \equiv f(x, \varphi(x)), \quad x \in (a, b).$$

*Приклади*

1. Розглянемо рівняння:

$$y' = 2x.$$

Його розв'язком на інтервалі  $(-\infty, +\infty)$  є, наприклад, функція  $y = x^2$ .

2. Розглянемо рівняння:

$$y' = y.$$

Його розв'язком на інтервалі  $(-\infty, +\infty)$  є, наприклад, функція  $y = e^x$ .

3. Розглянемо рівняння:

$$y' = y^2 + 1.$$

Його розв'язком на інтервалі  $(-\pi/2, \pi/2)$  є, наприклад, функція  $y = \operatorname{tg} x$ .

Іноді розв'язок диференціального рівняння вдається дістати лише в неявній формі. Рівняння:

$$\Phi(x, y) = 0 \tag{11.2.6}$$

визначає в *неявній формі* розв'язок рівняння (1.1.3) на інтервалі  $(a, b)$ , якщо:

- 1) воно на інтервалі  $(a, b)$  визначає  $y$  як неявну функцію від  $x$ :  $y = \varphi(x)$ ; тобто  $\Phi(x, \varphi(x)) \equiv 0$  на  $(a, b)$ ;
- 2) ця функція є розв'язком рівняння (11.2.3) на інтервалі  $(a, b)$ .

Поклавши в (11.2.6)  $y = \varphi(x)$ , візьмемо повну похідну від обох частин рівності (11.2.6):

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \cdot f(x, y) = 0. \tag{11.2.7}$$

Ця рівність внаслідок (11.2.6) і рівняння (11.2.3) має виконуватись тотожно на інтервалі  $(a, b)$ . Таким чином, складаючи рівність (11.2.7),

можна перевірити, чи визначає рівняння (11.2.6) розв'язок в неявній формі рівняння (11.2.3).

*Приклад.* Розглянемо диференціальне рівняння:

$$y' = -\frac{x}{y}.$$

Неявна форма його розв'язку наступна:

$$x^2 + y^2 - R^2 = 0, \quad R = \text{const}.$$

Дійсно, диференціюючи обидві частини останньої рівності, дістанемо:

$$2x + 2yy' = 2x + 2y\left(-\frac{x}{y}\right) = 2x - 2x \equiv 0.$$

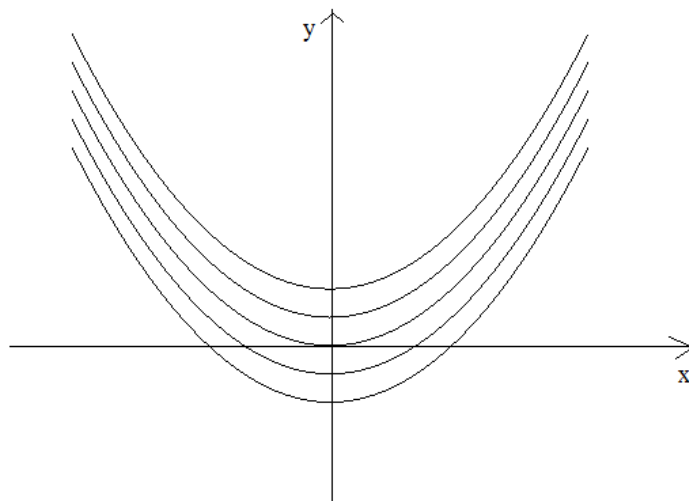
**Означення.** *Інтегральною кривою* диференціального рівняння (11.2.3) називається графік будь-якого його розв'язку.

*Приклади*

1. Розглянемо знову диференціальне рівняння:

$$y' = 2x.$$

Його розв'язками є функції вигляду  $y = x^2 + C$ , де  $C$  – довільна стала. Отже, інтегральними кривими даного диференціального рівняння будуть параболи  $y = x^2 + C$  (рис. 11.2).

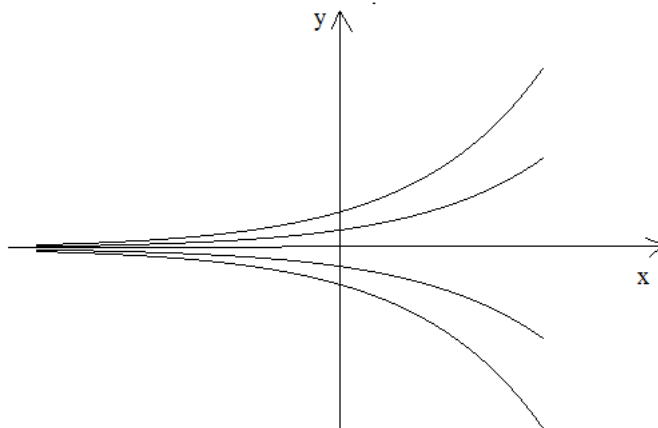


**Рис. 11.2**

2. Розглянемо рівняння:

$$y' = y.$$

Легко перевірити, що його розв'язками є функції  $y = Ce^x$ , де  $C$  – довільна стала (зокрема, й функція  $y = 0$ ). Отже, інтегральними кривими даного рівняння будуть графіки експонент, а також вісь  $Ox$ , яка є графіком функції  $y = 0$  (рис. 11.3).

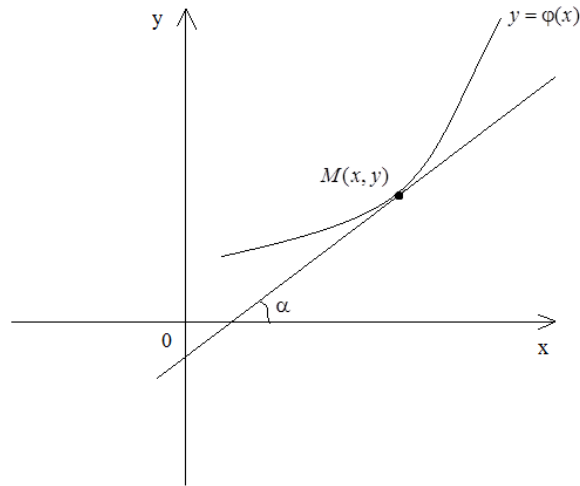


**Рис. 11.3**

Розглянемо питання про геометричний зміст рівняння (11.2.3). Припустимо, що права частина цього рівняння визначена і скінченна у кожній точці деякої області  $G$  зміни  $x$  та  $y$ . Проведемо в кожній точці цієї області відрізок, який з додатним напрямом осі  $Ox$  складає кут, тангенс якого дорівнює значенню функції  $f(x, y)$  в цій точці. Таким чином, у кожній точці області задається деякий напрям, і при цьому кажуть, що права частина рівняння (11.2.3) визначає *поле напрямів*. Тоді рівняння (11.2.3) виражає геометрично той факт, що напрям дотичної у кожній точці  $M(x, y)$  інтегральної кривої  $y = \varphi(x)$  цього рівняння співпадає з напрямом поля в цій точці (рис. 11.4). Тут  $\operatorname{tg} \alpha = f(x, y)$ . Отже з геометричної точки зору інтегрування диференціального рівняння (11.2.3) полягає у знаходженні кривих, дотичні до яких в кожній своїй точці такої кривої збігаються з напрямом поля.

Для побудови поля напрямів диференціального рівняння (11.2.3) зручно виділити геометричні місця точок, у яких дотичні до інтегральних кривих мають сталий напрям. Такі лінії називаються *ізоклінами*. Рівняння ізоклін диференціального рівняння (11.2.3) має вигляд:

$$f(x, y) = k, \tag{11.2.8}$$



**Рис. 11.4**

де  $k$  – довільна стала. Тобто це не що інше, як лінії рівня функції  $f(x, y)$ . Змінюючи в рівнянні (11.2.8) значення  $k$ , дістанемо множину ізоклін в області  $G$ . За допомогою цих ізоклін можна наближено будувати інтегральні криві диференціального рівняння (11.2.3). Такий метод якісного дослідження диференціальних рівнянь називається *методом ізоклін*.

*Приклад.* За допомогою ізоклін наближено побудувати інтегральні криві рівняння

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}. \quad (11.2.9)$$

У точці  $(0,0)$  поле напрямів не визначено. Для точок  $x \neq 0, y = 0$  розглядатимемо «перевернуте» рівняння:

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{y}{x}. \quad (11.2.10)$$

Рівняння ізоклін для рівняння (11.2.9) для всіх точок  $(x, y)$ , відмінних від точки  $(0,0)$  мають вигляд:

$$\frac{x}{y} = -k. \quad (11.2.11)$$

Це рівняння прямих ліній, які проходять через дану точку і початок координат. Розглянемо деякі конкретні значення  $k$ .

- 1)  $k = 0$ . Тоді одержуємо рівняння  $x = 0$  ( $y \neq 0$ ). Це означає, що півпрям, на які початок координат ділить вісь  $Oy$ , є ізоклінами, які інтегральні криві рівняння (11.2.9) перетинають під кутом нахилу дотичної  $\alpha = 0$  або  $\alpha = \pi$ ;
- 2)  $k = 1/\sqrt{3}$ . Тоді одержуємо рівняння  $y = -x\sqrt{3}$ . Це пряма лінія, що проходить через початок координат і точку  $(1, -\sqrt{3})$ . Півпрямі, на які початок координат ділить цю пряму, є ізоклінами, які інтегральні криві рівняння (11.2.9) перетинають під кутом нахилу дотичної  $\alpha = \pi/6$ ;
- 3)  $k = 1$ . Тоді одержуємо рівняння  $y = -x$ . Це пряма лінія, яка проходить через початок координат і точку  $(1, -1)$ . Півпрямі, на які початок координат ділить цю пряму, є ізоклінами, які інтегральні криві рівняння (11.2.9) перетинають під кутом нахилу дотичної  $\alpha = \pi/4$ ;
- 4)  $k = \sqrt{3}$ . Тоді одержуємо рівняння  $y = -x/\sqrt{3}$ . Це пряма лінія, що проходить через початок координат і точку  $(1, -1/\sqrt{3})$ . Півпрямі, на які початок координат ділить цю пряму, є ізоклінами, які інтегральні криві рівняння (11.2.9) перетинають під кутом нахилу дотичної  $\alpha = \pi/3$ ;

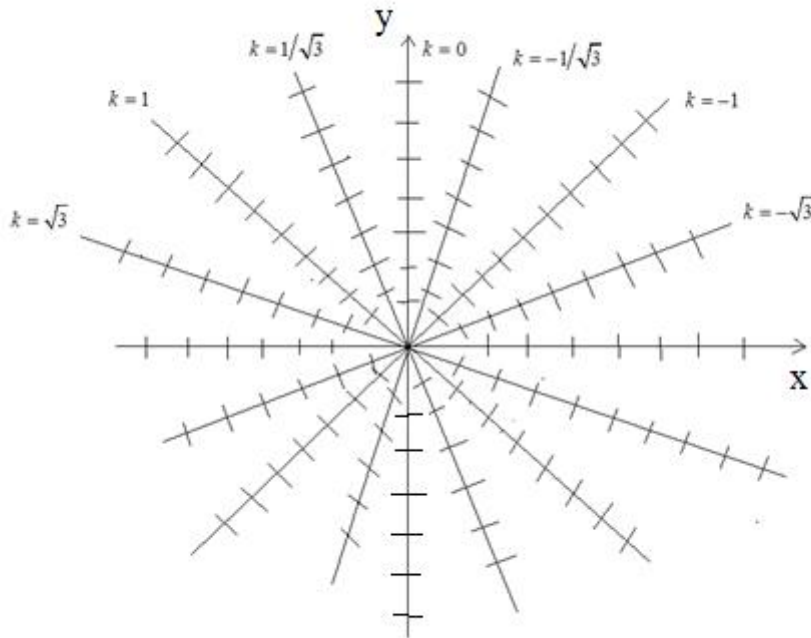
Аналогічно розглядаються відповідні від'ємні значення  $k$ . Півпрямі, на які початок координат ділить вісь  $Ox$ , також є ізоклінами, які інтегральні криві рівняння (11.2.11) перетинають під кутом нахилу дотичної  $\alpha = \pi/2$ . Зобразимо досліджені ізокліни та відповідні напрями.

За допомогою цих ізоклін можна наближено зобразити інтегральні криві рівняння (11.2.9), ними будуть концентричні кола  $x^2 + y^2 = R^2$  (рис. 11.6).

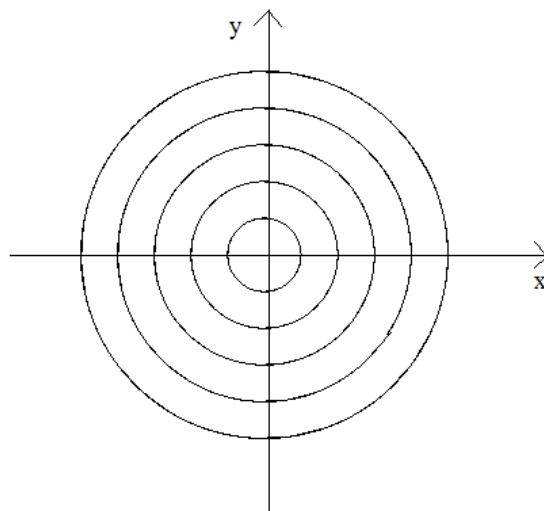
Зосередимось тепер на фізичному змісті рівняння (11.2.3). Нехай деяка матеріальна точка  $M$  рухається вздовж координатної прямої. Позначимо через  $x(t)$  координату цієї точки в момент часу  $t$ . Тоді

$dx(t)/dt$  є миттєвою швидкістю точки в цей момент часу. Розглянемо рівняння:

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t)). \quad (11.2.12)$$



**Рис. 11.5**



**Рис. 11.6**

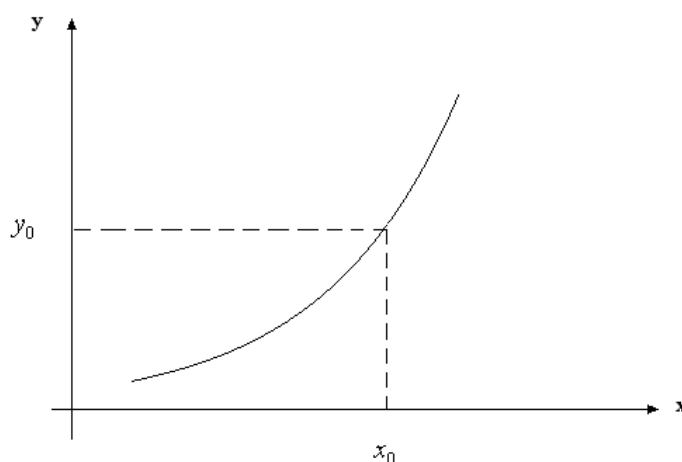
Функція  $f(t, x)$  є відомою. Таким чином, ми можемо сказати, що вона задає миттєву швидкість точки  $M$  в момент часу  $t$ , якщо координата цієї точки в цей момент часу дорівнює  $x(t)$ . Рівняння (11.2.12) за виглядом таке ж саме, як й рівняння (11.2.3) – змінено тільки позначення незалежної змінної та невідомої функції. Оскільки момент часу  $t$  довільний, то рівняння (11.2.12) задає миттєву швидкість у кожен момент часу. У цьому сенсі кажуть, що рівняння (11.2.12) або (11.2.3) задає *поле швидкостей*. У цьому й полягає фізичний зміст рівняння (11.2.3).

**Означення.** *Задачею Коші* (або *початковою задачею*) для диференціального рівняння (11.2.3) називається задача знаходження такого його розв'язку  $y(x)$ , яке при заданому значенні  $x_0$  незалежної змінної набуває заданого значення  $y_0$ , тобто задовольняє *початкову умову*:  $y(x_0) = y_0$ .

Задача Коші для рівняння (11.2.3) записується так:

$$\begin{cases} y' = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0. \end{cases} \quad (11.2.13)$$

З геометричної точки зору задача Коші (11.2.13) означає знайти таку інтегральну криву диференціального рівняння (11.2.3), яка проходить через задану точку з координатами  $(x_0, y_0)$  (рис. 11.7).



**Рис. 11.7**

З фізичної точки зору задача Коші:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(t, x), \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

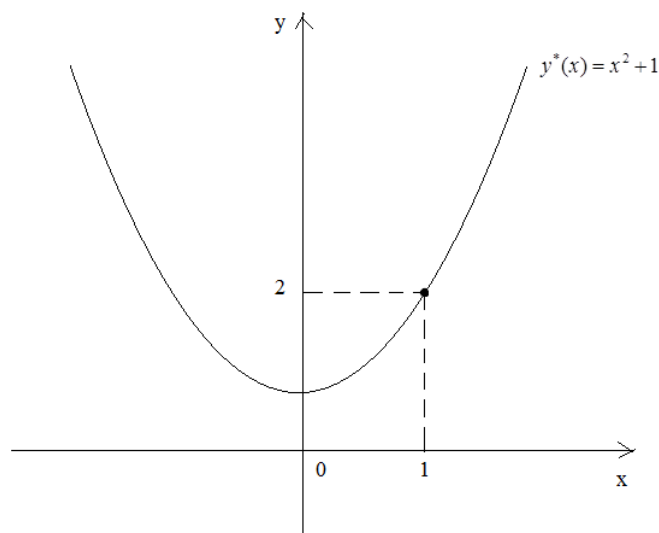
означає: за відомим диференціальним рівнянням руху точки знайти координату точки в довільний момент часу  $t$ , якщо в заданий момент часу  $t_0$  її координата дорівнює  $x_0$ .

### Приклади

1. Розглянемо наступну задачу Коші:

$$\begin{cases} y' = 2x, \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$$

Як ми вже знаємо, всі розв'язки рівняння  $y' = 2x$  задаються формулою  $y = x^2 + C$ , де  $C$  – довільна стала. Підберемо її з умови  $y(x_0) = y_0$ , тоді  $C = y_0 - x_0^2$ . Отже розв'язком даної задачі Коші є функція  $y^*(x) = x^2 + y_0 - x_0^2$ . Наприклад, якщо  $x_0 = 1$ ,  $y_0 = 2$ , то  $y^*(x) = x^2 + 1$  (рис. 11.8).



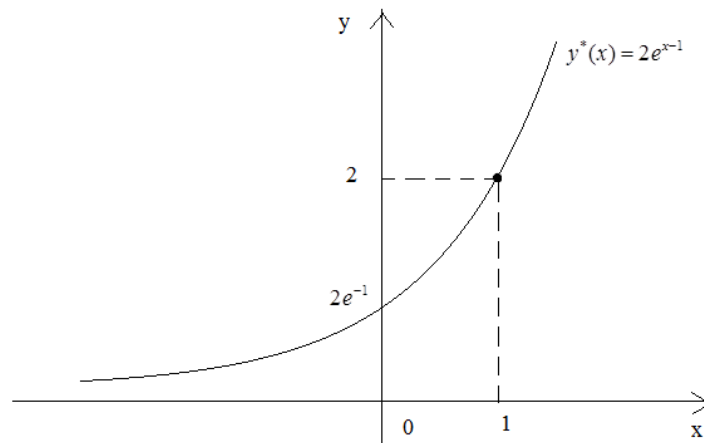
**Рис. 11.8**

2. Розглянемо задачу Коші:

$$\begin{cases} y' = y, \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$$



Розв'язки рівняння  $y' = y$  задаються формулою  $y = Ce^x$ , де  $C$  – довільна стала. Підберемо її з умови  $y(x_0) = y_0$ , тоді  $C = y_0 e^{-x_0}$ . Таким чином, розв'язком даної задачі Коші є функція  $y^*(x) = y_0 e^{x-x_0}$ . Якщо, зокрема,  $x_0 = 1$ ,  $y_0 = 2$ , то  $y^*(x) = 2e^{x-1}$ . Відповідну інтегральну криву зображено на рис. 11.9.



**Рис. 11.9**

Ми бачимо, що розв'язок задачі Коші залежить не тільки від змінної  $x$ , а й від початкових умов  $x_0, y_0$ . Тому цей розв'язок часто записують у вигляді  $y(x, x_0, y_0)$ .

Як ми бачили, диференціальне рівняння може мати безліч розв'язків. Часто ці розв'язки за винятком, може бути, лише деяких вдається об'єднати однією формулою, яка містить довільну сталу. Така формула називається загальним розв'язком диференціального рівняння. Наведемо точне означення.

**Означення.** Загальним розв'язком диференціального рівняння (11.2.3) в деякій області  $D$  називається функція  $y = \varphi(x, C)$ , яка задовольняє наступні умови:

- 1) ця функція є розв'язком диференціального рівняння (11.2.3) при будь-яких значеннях сталої  $C$ ;
- 2) для довільної початкової умови  $y(x_0) = y_0$ , де  $(x_0, y_0) \in D$ , існує таке значення сталої  $C = C_0$ , що  $\varphi(x_0, C_0) = y_0$ ; тобто, інакше кажучи, за

рахунок відповідного вибору сталої  $C$  функція  $y = \varphi(x, C)$  дає можливість розв'язати будь-яку задачу Коші (11.2.13).

Наведене означення означає, що рівняння  $\varphi(x_0, C) = y_0$  має бути розв'язним відносно  $C$  в області  $D$ .

Повертаючись до розглянутих вище прикладів, легко зрозуміти, що загальним розв'язком рівняння  $y' = 2x$  є функція  $y = x^2 + C$ , а загальним розв'язком рівняння  $y' = y$  є функція  $y = Ce^x$ .

**Означення.** Загальним інтегралом диференціального рівняння (11.2.3) в області  $D$  називається співвідношення вигляду:

$$\Phi(x, y) = C, \quad (11.2.14)$$

якщо виконано наступні умови:

1) в області  $D$  існують неперервні частинні похідні  $\frac{\partial \Phi}{\partial x}$  та  $\frac{\partial \Phi}{\partial y}$ ,

причому  $\frac{\partial \Phi}{\partial y} \neq 0$  в  $D$ ;

2) співвідношення (11.2.14) визначає в області  $D$  загальний розв'язок  $y = \varphi(x, C)$  рівняння (11.2.3).

Здиференціюємо співвідношення (11.2.14) за змінною  $x$  і врахуємо рівняння (11.2.3):

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} f(x, y) = 0.$$

Тобто повна похідна функції  $\Phi(x, y)$  вздовж розв'язків рівняння (11.2.3) дорівнює нулю в області  $D$ .

*Приклад.* Покажемо, що для диференціального рівняння:

$$y' = -\frac{x}{y}$$

загальним інтегралом буде співвідношення:

$$x^2 + y^2 = C.$$

Дійсно, знайдемо повну похідну функції  $x^2 + y^2$  вздовж розв'язків даного рівняння:

$$2x + 2yy' = 2x + 2y\left(-\frac{x}{y}\right) = 2x - 2x = 0.$$

**Означення.** Розв'язок рівняння (11.2.3), який одержується з загального розв'язку або з загального інтегралу цього рівняння при конкретних значеннях сталої  $C$  (включаючи значення  $\pm\infty$ ), називається *частинним розв'язком* рівняння (11.2.3).

Зокрема, для рівняння  $y' = 2x$  частинним розв'язком буде, наприклад, функція  $y = x^2 - 3$  (вона одержується з загального розв'язку цього рівняння при  $C = -3$ ), для рівняння  $y' = y$  буде, наприклад, функція  $y = 0,5e^x$  (вона одержується з загального розв'язку цього рівняння при  $C = 0,5$ ), для рівняння  $y' = -x/y$  частинним розв'язком буде, наприклад, функція, що визначається з неявного рівняння  $x^2 + y^2 = 4$  (вона одержується з загального інтеграла цього рівняння при  $C = 4$ ).

**Означення.** Розв'язок рівняння (11.2.3), який не одержується з загального розв'язку (або загального інтегралу) цього рівняння при жодному значення сталої  $C$  (включаючи значення  $\pm\infty$ ), і який проходить в області, де права частина рівняння (11.2.3) неперервна, називається *особливим розв'язком* рівняння (11.2.3).

*Приклад.* Розглянемо наступне диференціальне рівняння:

$$y' = 2\sqrt{y}.$$

Легко перевірити (зробіть це самостійно), що функція  $y = (x + C)^2$ , де  $x \geq -C$ , визначає загальний розв'язок цього рівняння в області  $-\infty < x < +\infty$ ,  $0 \leq y < +\infty$ . Але розв'язком цього рівняння є також функція  $y = 0$ . Це особливий розв'язок, оскільки його не можна одержати з загального при жодних значеннях сталої  $C$ .

### 11.3. Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними

**Означення.** Диференціальним рівнянням з відокремлюваними змінними (ДРВЗ) називається рівняння наступного вигляду:

$$M(x)N(y)dx + P(x)Q(y)dy = 0. \quad (11.3.1)$$

Зауважимо, що коефіцієнт при кожному з диференціалів  $dx$  і  $dy$  є добутком двох функцій, одна з яких залежить тільки від  $x$ , а інша – тільки від  $y$ .

Сформулюємо алгоритм інтегрування рівняння (11.3.1).

1. Поділити обидві частини рівняння на добуток  $N(y)P(x)$ .

У наслідку вийде:

$$\frac{M(x)}{P(x)}dx + \frac{Q(y)}{N(y)}dy = 0. \quad (11.3.2)$$

Таке рівняння називається рівнянням з відокремленими змінними. Коефіцієнт при диференціалі  $dx$  залежить тільки від  $x$ , а коефіцієнт при диференціалі  $dy$  – тільки від  $y$ .

2. Взяти інтеграл від обох частин рівності (11.3.2). У наслідку одержимо загальний інтеграл рівняння (11.3.1).

$$\int \frac{M(x)}{P(x)}dx + \int \frac{Q(y)}{N(y)}dy = C. \quad (11.3.3)$$

Дійсно, повний диференціал від лівої частини рівності (11.3.3) дорівнює лівій частині рівняння (11.3.2). Тут під символом  $\int f(x)dx$  ми розуміємо не сукупність всіх первісних функцій  $f(x)$ , а якусь певну первісну, наприклад,  $\int_{x_0}^x f(t)dt$ , де  $x_0$  – деяка точка з області задання і неперервності функції  $f(x)$ .

Зауважимо, що при діленні на добуток  $N(y)P(x)$  можуть з'явитися втраченими деякі розв'язки диференціального рівняння. Дійсно, нехай існує така стала  $y = y_0$ , що  $N(y_0) = 0$ . Тоді очевидно  $dy_0 = 0$  (як диференціал сталої), і підстановка значення  $y = y_0$  у рівняння (11.3.1) перетворює його на тотожність, отже  $y = y_0$  є розв'язком цього рівняння. Те ж саме стосується сталої  $x = x_0$  такої, що  $P(x_0) = 0$  (нагадаємо, що змінні  $x$  та  $y$  у рівнянні (11.3.1) входять

рівноправно, тобто можна вважати  $y$  функцією від  $x$ , а можна вважати  $x$  функцією від  $y$ , отже, ми маємо враховувати обидві можливості). Таким чином, після знаходження загального інтегралу (11.3.3) треба знайти корені рівнянь  $N(y) = 0$ ,  $P(x) = 0$  (якщо вони існують) і додати їх до запису загального інтегралу.

Розглянемо приклади.

*Приклад 1.* Знайти загальний інтеграл диференціального рівняння:

$$3e^x \operatorname{tg} y dx + (1 + e^x) \sec^2 y dy = 0.$$

Застосуємо описаний вище алгоритм. Ділимо обидві частини на добуток  $\operatorname{tg} y (1 + e^x)$ . Матимемо:

$$\frac{3e^x dx}{1 + e^x} + \frac{\sec^2 y dy}{\operatorname{tg} y} = 0.$$

Беремо інтеграл від обох частин:

$$\int \frac{3e^x dx}{1 + e^x} = 3 \int \frac{d(1 + e^x)}{1 + e^x} = 3 \ln(1 + e^x) + C = \ln(1 + e^x)^3 + C,$$

$$\int \frac{\sec^2 y}{\operatorname{tg} y} dy = \int \frac{1}{\operatorname{tg} y} \frac{dy}{\cos^2 y} = \int \frac{d(\operatorname{tg} y)}{\operatorname{tg} y} = \ln |\operatorname{tg} y| + C.$$

Отже, загальний інтеграл набуде вигляду:

$$\ln(1 + e^x)^3 + \ln |\operatorname{tg} y| = \ln |C|.$$

Сталу  $C$  ми теж взяли у формі логарифму. Користуючись тим, що сума логарифмів дорівнює логарифму добутку, матимемо:

$$(1 + e^x)^3 \operatorname{tg} y = C. \quad (11.3.4)$$

Це й є загальний інтеграл. Перевіримо тепер, чи не втратили ми розв'язки. Ми ділили на  $(1 + e^x) \operatorname{tg} y$ . Відомо, що  $1 + e^x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ , а  $\operatorname{tg} y = 0$ , якщо  $y = \pi k$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ). Всі ці числа також будуть розв'язками. Щоправда, їх можна одержати з (11.3.4), якщо  $C = 0$ .

*Приклад 2.* Розв'язати задачу Коші:

$$y \ln^3 y + y' \sqrt{x+1} = 0, \quad y \left( -\frac{15}{16} \right) = e.$$

Знайдемо спочатку загальний інтеграл даного диференціального рівняння. Очевидно, що  $y > 0$ ,  $x \geq -1$ . Використовуючи співвідно-

шення  $y' = dy/dx$ , і, помножаючи обидві частини рівняння на  $dx$ , дістанемо:

$$y \ln^3 y dx + \sqrt{x+1} dy = 0.$$

Для відокремлення змінних поділимо обидві частини останньої рівності на  $y \ln^3 y \cdot \sqrt{x+1}$ :

$$\frac{dx}{\sqrt{x+1}} + \frac{dy}{y \ln^3 y} = 0.$$

Беремо інтеграли від обох частин:

$$2\sqrt{x+1} - \frac{1}{2\ln^2 y} = C, \quad (11.3.5)$$

тобто одержали загальний інтеграл. Ще існує розв'язок  $y=1$ , який було втрачено при діленні на  $y \ln^3 y \cdot \sqrt{x+1}$ .

Розв'яжемо тепер задачу Коші. Покладемо у рівності (11.3.5)  $x = -15/16$ ,  $y = e$ . Тоді одержимо:

$$2\sqrt{1 - \frac{15}{16}} - \frac{1}{2\ln^2 e} = C,$$

тобто  $C = 0$ . Таким чином, розв'язок задачі Коші у неявній формі має вигляд:

$$2\sqrt{x+1} - \frac{1}{2\ln^2 y} = 0.$$

*Приклад 3.* Знайти загальний інтеграл диференціального рівняння:

$$y' = \cos(y - x).$$

Покладемо  $z = y - x$ , тоді  $y = z + x$ , і  $y' = z' + 1$ . Отже

$$z' = \cos z - 1,$$

і ми приходимо до рівняння з відокремлюваними змінними. Запишемо  $z'$  у вигляді  $dz/dx$ , множимо обидві частини одержаного рівняння на  $dx$  і ділимо на  $\cos z - 1$ :

$$\frac{dz}{\cos z - 1} - dx = 0.$$

Беремо інтеграли від обох частин. Оскільки:

$$\int \frac{dz}{\cos z - 1} = -\int \frac{dz}{1 - \cos z} = -\int \frac{dz}{2 \sin^2 \frac{z}{2}} = -\int \frac{d\left(\frac{z}{2}\right)}{2 \sin^2 \frac{z}{2}} = \operatorname{ctg} \frac{z}{2},$$

то дістаємо:

$$\operatorname{ctg} \frac{z}{2} - x = C.$$

Крім того, існують розв'язки  $z = 2\pi k$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ), які було втрачено при діленні на  $\cos z - 1$ . Повертаючись до функції  $y$ , остаточно одержуємо загальний інтеграл нашого рівняння:

$$\operatorname{ctg} \frac{y-x}{2} - x = C,$$

а також розв'язки  $y = x + 2\pi k$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ).

*Приклад 4.* Знайти загальний інтеграл диференціального рівняння:

$$y' + \sin(x+y) = \sin(x-y).$$

Перенесемо  $\sin(x+y)$  в праву частину рівняння і застосуємо формулу для різниці синусів двох аргументів. Дістанемо:

$$y' = -2 \cos x \sin y,$$

тобто одержали диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними. Відокремлюючи змінні, дістаємо:

$$\frac{dy}{\sin y} = -2 \cos x dx,$$

після чого беремо інтеграл від обох частин цієї рівності. Одержуємо загальний інтеграл нашого рівняння:

$$\ln \left| \operatorname{tg} \frac{y}{2} \right| + 2 \sin x = C.$$

Крім того, існують розв'язки  $y = \pi k$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ), які було втрачено при діленні на  $\sin y$ .

*Приклад 5.* Знайти загальний інтеграл диференціального рівняння

$$\left(\sqrt{xy} - \sqrt{x}\right) dx + \left(\sqrt{xy} + \sqrt{y}\right) dy = 0.$$

Оскільки  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$ , то  $\sqrt{xy} = \sqrt{x}\sqrt{y}$ , і маємо:

$$\sqrt{x}(\sqrt{y} - 1) dx + \sqrt{y}(\sqrt{x} + 1) dy = 0.$$

Відокремлюємо змінні діленням обох частин на  $(\sqrt{y}-1)(\sqrt{x}+1)$ :

$$\frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt{x}+1} + \frac{\sqrt{y} dy}{\sqrt{y}-1} = 0.$$

Обчислимо інтеграли:

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt{x}+1} &= \left[ \sqrt{x} = t, x = t^2, dx = 2t dt \right] = \int \frac{2t^2 dt}{t+1} = 2 \int \frac{t^2 - 1 + 1}{t+1} dt = \\ &= 2 \int \left( t - 1 + \frac{1}{t+1} \right) dt = t^2 - 2t + 2 \ln |t+1| = x - 2\sqrt{x} + 2 \ln(\sqrt{x}+1), \end{aligned}$$

і аналогічно:

$$\int \frac{\sqrt{y} dy}{\sqrt{y}-1} = y + 2\sqrt{y} + 2 \ln |\sqrt{y}-1|.$$

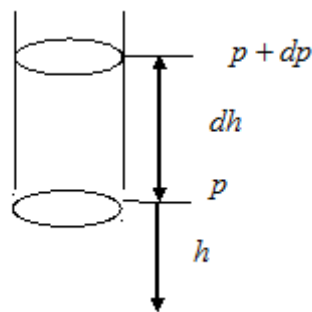
Таким чином, загальний інтеграл даного рівняння має вигляд:

$$y + x + 2(\sqrt{y} - \sqrt{x}) + 2 \ln \left| (\sqrt{x}+1)(\sqrt{y}-1) \right| = C.$$

Крім того, ще існує розв'язок  $y=1$ , який було втрачено при діленні на  $(\sqrt{y}-1)(\sqrt{x}+1)$ .

*Приклад 6. Барометрична формула.*

Виведемо формулу, яка виражає залежність атмосферного тиску від висоти над рівнем моря. Позначимо через  $p = p(h)$  – тиск на висоті  $h$ . Тоді тиск на висоті  $h + dh$  буде  $p + dp$ , до того ж, якщо  $dh > 0$ , то  $dp < 0$ , оскільки тиск падає із збільшенням висоти.



**Рис. 11.10**

Різниця тисків  $p$  і  $p + dp$  дорівнює вазі газу, що заключено в циліндрі з площею основи, яка дорівнює 1, і висотою  $dh$  (рис. 11.10):



$$p - (p + dp) = \rho g dh, \quad (11.3.6)$$

де  $\rho$  – густина газу на висоті  $h$ ,  $g$  – прискорення вільного падіння. Для величини  $\rho$  можна використати формулу:

$$\rho = \frac{Mp}{RT}.$$

Тут  $M$  – середня молекулярна маса газу,  $R$  – універсальна газова стала,  $T$  – температура за шкалою Кельвіна. Підставляючи до (11.3.6), одержуємо:

$$dp = -\frac{Mpg}{RT} dh,$$

тобто одержали диференціальне рівняння з відокремленими змінними. Розділивши обидві частини на  $p$ , матимемо:

$$\frac{dp}{p} = -\frac{Mg}{RT} dh.$$

Беремо інтеграл від обох частин:

$$\int \frac{dp}{p} = -\int \frac{Mg}{RT} dh + \ln |C|.$$

Тобто:

$$\ln |p| = -\frac{Mgh}{RT} + \ln |C|.$$

Або:

$$p = C \exp\left(-\frac{Mgh}{RT}\right).$$

Позначимо як  $p_0$  тиск на поверхні Землі, тобто  $p(0) = p_0$  (початкова умова). Тоді  $C = p_0$ , і остаточно маємо:

$$p = p_0 \exp\left(-\frac{Mgh}{RT}\right). \quad (11.3.7)$$

Формула (11.3.7) й називається *барометричною формулою*. Вона відіграє важливу роль у метеорології, статистичній фізиці та інших галузях знань.

*Приклад 7.* Швидкість вистигання тіла пропорційна різниці температур тіла і навколишнього середовища. Тіло охолодило за 10 хвилин від  $100^\circ\text{C}$  до  $60^\circ\text{C}$ . Температура повітря  $20^\circ\text{C}$ . За який час тіло охолоне до  $25^\circ\text{C}$ ?

Позначимо через  $T(t)$  температуру тіла в момент часу  $t$ . Нехай  $T_0$  – температура навколишнього середовища. Тоді за умовою задачі:

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_0),$$

де  $k$  – коефіцієнт пропорційності. Одержали диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними. Далі відокремлюємо змінні та інтегруємо:

$$\frac{dT}{T - T_0} = k dt,$$

$$\ln |T - T_0| = kt + \ln |C|.$$

Або:

$$T = T_0 + Ce^{kt} = 20^0 + Ce^{kt}.$$

Скористаємось умовами:  $T(0) = 100^0$ ,  $T(10) = 60^0$ . Звідси знаходимо:  $C = 80^0$ ,  $k = -0,1 \ln 2$ . Таким чином:

$$T(t) = 20^0 + 80^0 e^{-0,1 \ln 2 \cdot t} = 20^0 + 80^0 \cdot 2^{-0,1t}.$$

Покладаючи у цій формулі  $T = 25^0$ , знаходимо шуканий час:  $t = 40$  хвилин.

## 11.4. Однорідні диференціальні рівняння

**Означення.** Функція  $z = f(x, y)$  називається *однорідною степеня  $m$* , якщо  $\forall t$  виконано:

$$f(tx, ty) = t^m f(x, y).$$

Наприклад, функція  $z = 2x^2 - 3xy + 5y^2$  є однорідною степеня 2. Дійсно:

$$\begin{aligned} f(tx, ty) &= 2(tx)^2 - 3tx \cdot ty + 5(ty)^2 = 2t^2x^2 - 3t^2xy + 5t^2y^2 = \\ &= t^2(2x^2 - 3xy + 5y^2) = t^2 f(x, y). \end{aligned}$$

Функція  $z = \frac{x+y}{x-y}$  однорідна нульового степеня, оскільки:

$$f(tx, ty) = \frac{tx+ty}{tx-ty} = \frac{t(x+y)}{t(x-y)} = \frac{x+y}{x-y} = t^0 f(x, y).$$

А, наприклад, функція  $z = 4x^2 - y$  не є однорідною (перевірте самостійно).

**Означення.** Диференціальне рівняння вигляду:

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \quad (11.4.1)$$

називається *однорідним*, якщо функції  $M$  і  $N$  однорідні одного й того ж степеня  $m$ .

Наприклад, рівняння:

$$(2x^2y - y^3)dx + (3x^3 + 4xy^2)dy = 0$$

є однорідним, оскільки  $M = 2x^2y - y^3$  і  $N = 3x^3 + 4xy^2$  однорідні степеня 3. А рівняння:

$$(2x^2y - y^3)dx + (3xy + x^2)dy = 0$$

не є однорідним (функція  $M = 2x^2y - y^3$  однорідна степеня 3, а функція  $N = 3xy + x^2$  однорідна степеня 2).

Зауважимо, що рівняння (11.4.1) можна переписати у наступній формі:

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right). \quad (11.4.2)$$

Дійсно, перепишемо рівняння (1.4.1) у вигляді (звичайно, при цьому треба враховувати можливість втрати розв'язків):

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{M(x, y)}{N(x, y)} = -\frac{M\left(x \cdot 1, x \cdot \frac{y}{x}\right)}{N\left(x \cdot 1, x \cdot \frac{y}{x}\right)} = -\frac{x^m M\left(1, \frac{y}{x}\right)}{x^m N\left(1, \frac{y}{x}\right)} = -\frac{M\left(1, \frac{y}{x}\right)}{N\left(1, \frac{y}{x}\right)} = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

З іншого боку рівняння (11.4.2) можна записати так:

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right),$$

або:

$$f\left(\frac{y}{x}\right)dx - dy = 0,$$

тобто одержали вигляд (11.4.1), де  $M = f\left(\frac{y}{x}\right)$ ,  $N = -1$ . Ці функції однорідні нульового степеня.

Суттєвою особливістю рівняння (11.4.2) є те, що його права частина, яка формально є функцією 2-х змінних  $x, y$ , фактично функція

однієї змінної, а саме частки  $\frac{y}{x}$ .

Покажемо, що за допомогою підстановки:

$$y = ux, \quad (11.4.3)$$

де  $u = u(x)$  – нова невідома функція, рівняння (11.4.1) (а отже і рівняння (11.4.2)) можна звести до диференціального рівняння з відокремленими змінними. Дійсно, з (11.4.3) маємо:

$$dy = x du + u dx.$$

Підставляючи до (11.4.1), одержимо:

$$M(x, ux) dx + N(x, ux)(x du + u dx) = 0;$$

$$x^m M(1, u) dx + x^m N(1, u)(x du + u dx) = 0.$$

Скорочуючи на  $x^m$  і перегруповуючи решту членів, одержимо:

$$(M(1, u) + N(1, u)u) dx + xN(1, u) du = 0.$$

Це диференціальне рівняння з відокремленими змінними.

Якщо рівняння записано у формі (11.4.2), то матимемо:

$$y = ux; y' = u'x + u; u'x + u = f(u); u'x = f(u) - u;$$

Легко бачити, що це також диференціальне рівняння з відокремленими змінними.

З'ясуємо геометричну властивість інтегральних кривих однорідного рівняння. Розглядатимемо запис однорідного рівняння у вигляді

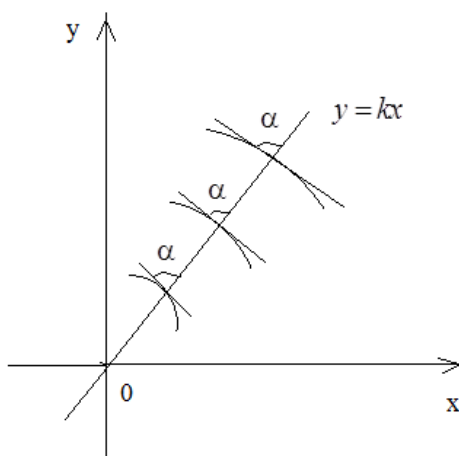
(11.4.2). Помітимо, що якщо  $\frac{y}{x} = k = \text{const}$ , тобто стала величина, то

тоді  $f\left(\frac{y}{x}\right) = f(k)$  також є сталою. Таким чином, права частина рівняння (1.4.2) зберігає стале значення в усіх точках кожної з прямих  $y = kx$ . Отже, напрям поля, що визначається рівнянням (11.4.2), в усіх точках кожної з цих прямих один й той же. Тому всі інтегральні криві цього рівняння перетинають будь-яку пряму, що проходить через початок координат, під одним й тим (сталим для цієї прямої) кутом нахилу дотичної (рис. 11.11).

Перейдемо до розгляду прикладів.

*Приклад 1.* Знайти загальний розв'язок рівняння

$$(y^2 - 2xy) dx + x^2 dy = 0. \quad (11.4.4)$$



**Рис. 11.11**

Це рівняння однорідне, оскільки функції  $M = y^2 - 2xy$ ,  $N = x^2$  однорідні степеня 2. Отже зробимо заміну  $y = ux$ . Тоді  $dy = u dx + x du$ , і матимемо:

$$(u^2 x^2 - 2xux) dx + x^2 (u dx + x du) = 0;$$

$$x^2 (u^2 - 2u) dx + x^2 u dx + x^3 du = 0.$$

Поділимо на  $x^2$ :

$$(u^2 - 2u + u) dx + x du = 0;$$

$$(u^2 - u) dx + x du = 0, \tag{11.4.5}$$

тобто дістали ДРВЗ. Відокремлюємо змінні, поділивши обидві частини на  $x(u^2 - u)$ :

$$\frac{dx}{x} + \frac{du}{u^2 - u} = 0.$$

Інтегруємо:

$$\int \frac{dx}{x} + \int \frac{du}{u(u-1)} = \ln|C|; \quad \ln|x| + \int \frac{du}{u(u-1)} = \ln|C|;$$

$$\ln|x| + \int \left( \frac{1}{u-1} - \frac{1}{u} \right) du = \ln|C|; \quad \ln|x| + \ln|u-1| - \ln|u| = \ln|C|;$$

$$\ln \left| \frac{x(u-1)}{u} \right| = \ln|C| \Rightarrow \frac{x(u-1)}{u} = C,$$

тобто одержали загальний інтеграл рівняння (11.4.5). Крім того, при

діленні на  $x^2(u^2 - u)$ , ми втратили розв'язки  $u = 1$ ,  $u = 0$ . Підставляючи тепер  $u = \frac{y}{x}$ , дістанемо:

$$\frac{x\left(\frac{y}{x}-1\right)}{\frac{y}{x}} = C, \quad \text{або} \quad \frac{x(y-x)}{y} = C, \quad \text{і крім того: } y = 0, y = x.$$

Зауважимо також, що при діленні на  $x^2$  ми втратили розв'язок  $x = 0$  рівняння (11.4.4). Справа в тому, що змінні  $x$  і  $y$  входять до рівняння (11.4.4) рівноправно, тобто можна вважати  $y$  функцією від  $x$ , а можна  $x$  функцією від  $y$ . Отже, остаточно:

$$\frac{x(y-x)}{y} = C, \quad y = x, \quad y = 0, \quad x = 0.$$

*Приклад 2.* Розв'язати задачу Коші:

$$\begin{cases} y' = \frac{y}{x} + \sin^2 \frac{y}{x}, \\ y(1) = \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Помітимо, що права частина нашого рівняння є функцією тільки частки  $\frac{y}{x}$ , отже це рівняння однорідне. Робимо заміну:

$$y = ux; \quad y' = u'x + u; \quad u'x + u = u + \sin^2 u;$$

$$u'x = \sin^2 u$$

тобто дістали ДРВЗ. Відокремлюємо змінні:

$$\frac{du}{dx} x = \sin^2 u; \quad \frac{du}{\sin^2 u} = \frac{dx}{x}.$$

Інтегруємо:

$$\int \frac{du}{\sin^2 u} = \int \frac{dx}{x}; \quad -\text{ctg} u = \ln|x| - C; \quad \ln|x| + \text{ctg} u = C.$$

Крім того, при діленні на  $\sin^2 u$  ми втратили розв'язки  $u = \pi k$ .

Підставляючи тепер в останні співвідношення  $u = \frac{y}{x}$ , одержимо:

$$\ln|x| + \text{ctg} \frac{y}{x} = C; \quad y = \pi kx.$$

Задовольнимо тепер початкову умову, поклавши  $x = 1, y = \frac{\pi}{2}$ :

$$\ln 1 + \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2} = C \Rightarrow C = 0.$$

Отже:

$$\ln |x| + \operatorname{ctg} \frac{y}{x} = 0,$$

і, таким чином, розв'язок задачі Коші має вигляд:

$$y = x \operatorname{arcctg}(-\ln |x|).$$

### 11.5. Диференціальні рівняння, звідні до однорідних

Існують деякі рівняння, які не є однорідними, але за допомогою певної заміни змінних їх можна звести до однорідних. Розглянемо рівняння вигляду:

$$y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{ax + by + c}\right). \quad (11.5.1)$$

Якщо  $c_1 = c = 0$ , то рівняння буде очевидно однорідним (переконайтеся у цьому самостійно). Розглянемо тому випадок, коли хоч би одне з чисел  $c_1$  або  $c$  відмінно від нуля. Виконаємо в рівнянні (11.5.1) заміну обох змінних за формулами:

$$x = \xi + \alpha, \quad y = \eta + \beta, \quad (11.5.2)$$

де  $\xi, \eta$  – нові змінні, а  $\alpha, \beta$  – поки невідомі сталі. Тоді очевидно,

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{d\eta}{d\xi},$$

і рівняння (11.5.1) набуде вигляду:

$$\frac{d\eta}{d\xi} = f\left(\frac{a_1\xi + b_1\eta + a_1\alpha + b_1\beta + c_1}{a\xi + b\eta + a\alpha + b\beta + c}\right).$$

Підберемо сталі  $\alpha, \beta$  з умови:

$$\begin{cases} a_1\alpha + b_1\beta + c_1 = 0, \\ a\alpha + b\beta + c = 0. \end{cases} \quad (11.5.3)$$

Випишемо визначник цієї системи лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a & b \end{vmatrix}.$$

Якщо  $\Delta = 0$ , то тоді  $a_1 = ka$ ,  $b_1 = kb$ , і рівняння (11.5.1) набуває вигляду:

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{k(ax + by) + c_1}{ax + by + c}\right).$$

Введемо нову невідому функцію:

$$z = ax + by.$$

Тоді:

$$\frac{dz}{dx} = a + bf\left(\frac{kz + c_1}{z + c}\right),$$

тобто одержали диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними.

Нехай тепер  $\Delta \neq 0$ . Тоді система (11.5.3) має єдиний розв'язок. Визначаючи  $\alpha$ ,  $\beta$  з цієї системи, одержуємо однорідне рівняння:

$$\frac{d\eta}{d\xi} = f\left(\frac{a_1\xi + b_1\eta}{a\xi + b\eta}\right).$$

Інтегруючи його, і, повертаючись до змінних  $x$ ,  $y$ , одержуємо загальний інтеграл рівняння (11.5.1).

*Приклад 1.* Знайти загальний інтеграл рівняння:

$$(2x + 3y - 5) + (3x + 2y - 5)y' = 0. \quad (11.5.4)$$

Перепишемо це рівняння у вигляді (переконайтеся самостійно, що при цьому розв'язки рівняння не втрачуються):

$$y' = -\frac{2x + 3y - 5}{3x + 2y - 5}.$$

Легко бачити, що це рівняння вигляду (11.5.1). Зробимо зміну змінних:

$$x = \xi + \alpha, \quad y = \eta + \beta.$$

Сталі  $\alpha$ ,  $\beta$  визначимо з наступної системи лінійних алгебраїчних рівнянь:



$$\begin{cases} 2\alpha + 3\beta = 5, \\ 3\alpha + 2\beta = 5. \end{cases}$$

Визначник цієї системи відмінний від нуля, і, розв'язуючи цю систему, дістаємо:  $\alpha = \beta = 1$ . Тоді:

$$x = \xi + 1, \quad y = \eta + 1; \quad \xi = x - 1, \quad \eta = y - 1. \quad (11.5.5)$$

Рівняння (11.5.4) набуває вигляду:

$$\frac{d\eta}{d\xi} = -\frac{2\xi + 3\eta}{3\xi + 2\eta}.$$

Це рівняння однорідне. Поділимо чисельник і знаменник його правої частини на  $\xi$ :

$$\frac{d\eta}{d\xi} = -\frac{2 + 3\frac{\eta}{\xi}}{3 + 2\frac{\eta}{\xi}}.$$

Заміною:

$$\eta = \xi u(\xi), \quad \frac{d\eta}{d\xi} = u + \xi \frac{du}{d\xi}$$

зводимо це рівняння до ДРВЗ:

$$\xi \frac{du}{d\xi} = -\frac{2u^2 + 6u + 2}{2u + 3}.$$

Інтегруючи це рівняння, одержуємо його загальний інтеграл:

$$(u^2 + 3u + 1)\xi^2 = C_0, \quad (11.5.6)$$

Розв'язки:

$$u_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

(вони є коренями квадратного рівняння  $2u^2 + 6u + 2 = 0$ ) одержуються з формули (1.5.6) при  $C_0 = 0$ . Підставляючи у вираз (1.5.6)  $u = \eta/\xi$ , дістаємо:

$$\eta^2 + 3\xi\eta + \xi^2 = C_0.$$

Повертаючись тепер до змінних  $x, y$  за формулами (11.5.5), остаточно одержуємо:

$$y^2 + 3xy + x^2 - 5x - 5y = C,$$

де  $C = C_0 - 5$ . Це й є загальний інтеграл рівняння (11.5.4).

*Приклад 2.* Знайти загальний інтеграл рівняння:

$$(2x + y + 1)dx - (4x + 2y - 3)dy = 0.$$

Перепишемо це рівняння у вигляді (переконайтеся самостійно, що розв'язки при цьому не втрачаються):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x + y + 1}{4x + 2y - 3}.$$

Або:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x + y + 1}{2(2x + y) - 3}.$$

Зробимо заміну змінних:

$$z = 2x + y.$$

Тоді:

$$\frac{dz}{dx} = 5 \frac{z - 1}{2z - 3}.$$

Це рівняння з відокремленими змінними. Інтегруючи його, дістаємо:

$$e^{2z-5x} = C(z-1), \quad z = 1.$$

Повертаючись до змінних  $x, y$ , остаточно одержуємо:

$$e^{2y-x} = C(2x + y - 1), \quad y = 1 - 2x.$$

Іноді рівняння можна звести до однорідного, якщо у ньому виконати заміну  $y = z^m$ , де  $z$  – нова невідома функція, а  $m$  – деяке число, яке поки що невідоме. Воно підбирається з таким розрахунком, щоб одержане рівняння було однорідним. Якщо цього зробити неможливо, то рівняння не зводиться до однорідного таким способом.

*Приклад 3.* Зінтегрувати диференціальне рівняння:

$$2y' + x = 4\sqrt{y}.$$

Зробимо заміну:

$$y = z^m.$$

Тоді рівняння набуває вигляду:

$$2mz^{m-1}z' + x = 4z^{m/2}.$$

Підберемо число  $m$  з умови:  $m-1=1=m/2$  (саме тоді одержане рівняння буде однорідним). Звідси знаходимо  $m=2$ , і, таким чином, наша заміна  $y = z^2$ . Після цієї заміни рівняння відносно  $z$  набуває вигляду:

$$4zz' + x = 4z.$$

Це рівняння однорідне. Робимо в ньому заміну:  $z = xu$ , де  $u$  – нова невідома функція. Тоді  $z' = xu' + u$ , і ми приходимо до рівняння:

$$xu' = -\frac{(2u-1)^2}{4u}.$$

Це рівняння з відокремлюваними змінними. Інтегруючи його, дістаємо:

$$\ln|2u-1| + \ln|x| - \frac{1}{2u-1} = C, \quad u = \frac{1}{2}.$$

Повертаючись до змінної  $z$ , а потім до змінної  $y$ , остаточно одержуємо:

$$\ln|2\sqrt{y}-x| - \frac{x}{2\sqrt{y}-x} = C, \quad 2\sqrt{y} = x.$$

Розглянемо тепер фізичну задачу, що приводить до однорідного рівняння.

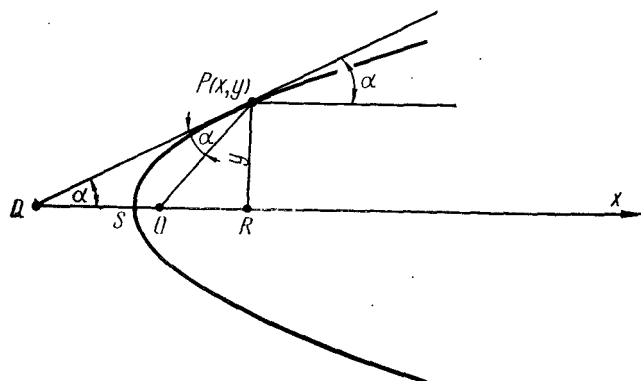
*Задача.* Світлове джерело поміщено в точку  $O$ . Яка має бути форма дзеркала для того, щоб відбиті від нього світлові промені були паралельними осі  $Ox$ ?

Розглянемо криву перерізу поверхні дзеркала площиною  $Oxy$ , і на цій кривій довільну точку  $P(x, y)$  (рис. 11.12). Кут падіння променя дорівнює куту відбиття, тому  $\angle OQP = \alpha$ .

Тоді трикутник  $OPQ$  рівнобедрений. Таким чином,  $|OQ| = |OP| = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

Вважаючи  $y > 0$ , дістанемо:

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \alpha = \frac{|PR|}{|QR|} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2} + x} = \frac{y/x}{\sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} + 1}.$$



**Рис. 11.12**

Це однорідне рівняння, права його частина є функцією від  $y/x$ . Інтегруючи його, дістаємо (перевірте самостійно):

$$\frac{y^2}{x + \sqrt{x^2 + y^2}} = C.$$

Або, розв'язуючи це рівняння відносно  $y^2$ :

$$y^2 = 2Cx + C^2 = 2C \left( x + \frac{C}{2} \right). \quad (11.5.7)$$

За умовою крива має бути симетричною відносно осі  $Ox$ , отже рівняння (11.5.7) буде виконано і при  $y < 0$ . Рівність (11.5.7) показує, що шукана крива є параболою з віссю симетрії  $Ox$ .

Нехай задано відстань від світового джерела  $O$  до центру  $S$  дзеркала:  $|OS| = a$ . Тоді при  $x = -a$  має бути  $y = 0$ , і, таким чином, ми отримуємо початкову умову. Підставляючи ці значення в рівняння (11.5.7), дістаємо  $C = 2a$ , звідси:

$$y^2 = 4a(x + a).$$

Для цієї параболи фокусна відстань  $p/2 = a$ , тобто світове джерело знаходиться в фокусі параболи.

## 11.6. Лінійні диференціальні рівняння 1-го порядку

**Означення.** *Лінійним диференціальним рівнянням 1-го порядку* називається рівняння наступного вигляду:

$$y' = p(x)y + q(x). \quad (11.6.1)$$

Суттєвою його особливістю є те, що  $y$  та  $y'$  входять до нього лише у перших степенях. Лінія, що описується цим рівнянням в системі координат  $(y, y')$ , є прямою. Звідси й назва рівняння (лінійна залежність між  $y$  та  $y'$ ). Функції  $p(x)$  та  $q(x)$  вважаються відомими та неперервними на деякому інтервалі  $(a, b)$  і називаються *коефіцієнтами* рівняння (11.6.1). Якщо, зокрема,  $q(x) \equiv 0$  на  $(a, b)$ , то рівняння називається *однорідним*:

$$y' = p(x)y \quad (11.6.2)$$

(термін «однорідне» тут розуміється в іншому сенсі, ніж в пп. 11.4, 11.5). У протилежному випадку рівняння називається *неоднорідним*.

Існує декілька методів інтегрування рівняння (11.6.1). Розглянемо *метод варіації довільної сталої*, який належить Ж.-Л. Лагранжу.

Зінтегруємо спочатку однорідне рівняння (11.6.2). Це рівняння з відокремлюваними змінними:

$$\frac{dy}{dx} = p(x)y.$$

Після відокремлення змінних та інтегрування, дістаємо:

$$y = Ce^{\int p(x)dx}. \quad (11.6.3)$$

Розв'язок рівняння (11.6.1) шукаємо у такому ж вигляді, як і (11.6.3), тільки замість сталої  $C$  візьмемо поки що невідому диференційовну на  $(a, b)$  функцію  $C(x)$  (звідси й назва методу), тобто:

$$y = C(x)e^{\int p(x)dx}. \quad (11.6.4)$$

Функцію  $C(x)$  підберемо з таким розрахунком, щоб вираз (11.6.4) задовольняв рівняння (11.6.1). Знайдемо:

$$y' = C'(x)e^{\int p(x)dx} + p(x)C(x)e^{\int p(x)dx}.$$

Підставимо в рівняння (11.6.1):

$$C'(x)e^{\int p(x)dx} + p(x)C(x)e^{\int p(x)dx} = p(x)C(x)e^{\int p(x)dx} + q(x).$$

Звідси:

$$C'(x) = q(x)e^{-\int p(x)dx}.$$

Інтегруючи, дістаємо:

$$C(x) = C + \int q(x)e^{-\int p(x)dx} dx,$$

де  $C$  у правій частині рівності – вже справжня довільна стала. Підставивши цей вираз у (11.6.4), одержимо загальний розв'язок рівняння (11.6.1):

$$y = e^{\int p(x)dx} \left( C + \int q(x)e^{-\int p(x)dx} dx \right). \quad (11.6.5)$$

Вираз (11.6.5) містить всі розв'язки рівняння (11.6.1), втрачених розв'язків немає.

Зауважимо, що при інтегруванні лінійних диференціальних рівнянь з конкретними коефіцієнтами, формулою (11.6.5) користуватися недоцільно. Краще у кожному випадку проводити весь алгоритм варіації довільної сталої.

**Зауваження 1.** У формулі (11.6.5) невизначені інтеграли (під котрими розуміються тут деякі первісні підінтегральних функцій) можна замінити визначеними інтегралами зі змінною верхньою межею. Дістанемо:

$$y = e^{\int_{x_0}^x p(\tau)d\tau} \left( C + \int_{x_0}^x q(t)e^{-\int_{x_0}^t p(\tau)d\tau} dt \right), \quad (11.6.6)$$

де  $x_0$  – деяка точка інтервалу  $(a, b)$ . Покладаючи тут  $x = x_0$ , одержимо  $C = y(x_0) = y_0$ . Тобто роль сталої  $C$  відіграє початкове значення шуканої функції  $y(x)$  у точці  $x_0$ . Таким чином, рівність (11.6.6) можна переписати так:

$$y = e^{\int_{x_0}^x p(\tau)d\tau} \left( y_0 + \int_{x_0}^x q(t)e^{-\int_{x_0}^t p(\tau)d\tau} dt \right). \quad (11.6.7)$$

Формула (11.6.7) називається *загальним розв'язком рівняння (11.6.1) в формі Коші*.

**Зауваження 2.** Формула (11.6.7) показує, що якщо коефіцієнти  $p(x)$  та  $q(x)$  рівняння (11.6.1) неперервні в інтервалі  $(a,b)$ , то й розв'язок цього рівняння з будь-якими початковими умовами також буде неперервним і навіть неперервно диференційовним в інтервалі  $(a,b)$ . Для нелінійних рівнянь така властивість, взагалі кажучи, не має місця.

Перейдемо до розгляду прикладів.

*Приклад 1.* Зінтегрувати рівняння:

$$y' + 2xy = 2xe^{-x^2}. \quad (11.6.8)$$

Зінтегруємо спочатку відповідне однорідне рівняння:

$$y' = -2xy;$$

$$\frac{dy}{dx} = -2xy;$$

$$\frac{dy}{y} = -2x dx;$$

$$\ln |y| = -x^2 + \ln |C|;$$

$$y = Ce^{-x^2}.$$

Розв'язок рівняння (11.6.8) шукаємо у вигляді:

$$y = C(x)e^{-x^2}. \quad (11.6.9)$$

Здиференціюємо цей вираз і підставимо до рівняння (11.6.8):

$$y' = C'(x)e^{-x^2} - 2xC(x)e^{-x^2}.$$

$$C'(x)e^{-x^2} - 2xC(x)e^{-x^2} + 2xC(x)e^{-x^2} = 2xe^{-x^2}.$$

Звідси:

$$C'(x) = 2x; \quad C(x) = x^2 + C,$$

де  $C$  – вже справжня довільна стала. Підставивши цей вираз у формулу (11.6.9), одержимо загальний розв'язок рівняння (11.6.8):

$$y = (x^2 + C)e^{-x^2}.$$

*Приклад 2.* Розв'язати задачу Коші:

$$y' - y \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos^3 x}, \quad y(0) = 0.$$

Спочатку знайдемо загальний розв'язок даного диференціального рівняння. Запишемо відповідне однорідне рівняння:

$$y' = y \operatorname{tg} x.$$

Інтегруючи, дістаємо (перевірте самостійно):

$$y = \frac{C}{\cos x}.$$

Загальний розв'язок неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді:

$$y = \frac{C(x)}{\cos x}. \quad (11.6.10)$$

Диференціюючи цей вираз, і, підставляючи в неоднорідне рівняння, одержуємо:

$$C'(x) = \frac{1}{\cos^2 x},$$

звідки дістаємо:

$$C(x) = \operatorname{tg} x + C.$$

Підставивши цей вираз до (1.6.10), одержуємо загальний розв'язок нашого рівняння:

$$y = \frac{\operatorname{tg} x + C}{\cos x} = \frac{C}{\cos x} + \frac{\sin x}{\cos^2 x}.$$

Розв'яжемо тепер задачу Коші. Покладемо у останній формулі  $x = y = 0$ . Тоді одержуємо  $C = 0$ , і таким чином розв'язок  $y^*(x)$  задачі Коші такий:

$$y^*(x) = \frac{\sin x}{\cos^2 x}.$$

*Приклад 3.* Відомо, що між силою струму  $I$  та електрорушійною силою  $E$  у ланцюгу, що має опір  $R$  та самоіндукцію  $L$ , існує залежність:

$$E = RI + L \frac{dI}{dt},$$

$E$ ,  $R$ ,  $L$  вважаються сталими. Знайти  $I = I(t)$  за умови, що  $I(0) = I_0$ .

Перепишемо рівняння у вигляді:



$$\frac{dI}{dt} = -\frac{R}{L}I + \frac{E}{L}.$$

Це лінійне неоднорідне рівняння. Розв'яжемо однорідне рівняння:

$$\frac{dI}{dt} = -\frac{R}{L}I.$$

Дістанемо (перевірте самостійно):

$$I = Ce^{-\frac{R}{L}t}.$$

Загальний розв'язок неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді:

$$I(t) = C(t)e^{-\frac{R}{L}t}.$$

Диференціюючи, і, підставляючи в неоднорідне рівняння, одержуємо:

$$C'(t) = \frac{E}{L}e^{\frac{R}{L}t},$$

звідки дістаємо:

$$C(t) = \frac{E}{R}e^{\frac{R}{L}t} + C,$$

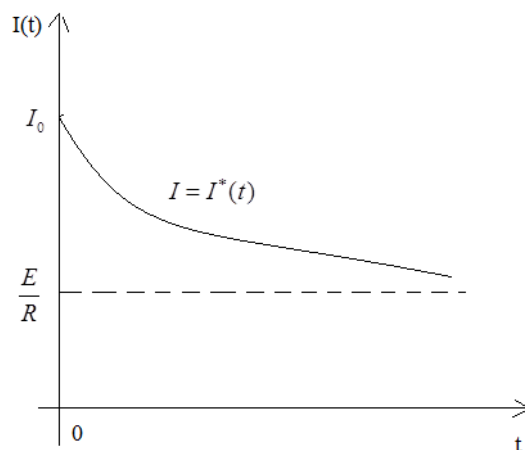
і, підставивши у вираз для  $I(t)$ , одержуємо загальний розв'язок нашого рівняння:

$$I(t) = \frac{E}{R} + Ce^{-\frac{R}{L}t}. \quad (11.6.11)$$

Задовольнимо тепер початкову умову. Покладемо у (11.6.11)  $t = 0$ ,  $I = I_0$ . Одержуємо  $C = I_0 - \frac{E}{R}$ . Підставивши цей вираз у (11.6.11), дістанемо шукану залежність:

$$I^*(t) = \frac{E}{R} + \left( I_0 - \frac{E}{R} \right) e^{-\frac{R}{L}t}.$$

З цієї формули видно, що при  $t \rightarrow +\infty$  сила струму  $I^*(t) \rightarrow \frac{E}{R}$ , тобто стає усталеною (рис. 11.13).  
Деякі рівняння, які не є лінійними, вдається звести до лінійних певною заміною невідомої функції.



**Рис. 11.13**

*Приклад 4.* Зінтегрувати рівняння:

$$y' + \sin y + x \cos y + x = 0.$$

Це рівняння, очевидно, не є лінійним. Перепишемо його у вигляді:

$$y' + 2 \sin \frac{y}{2} \cos \frac{y}{2} + x 2 \cos^2 \frac{y}{2} = 0.$$

Поділимо обидві частини на  $2 \cos^2 \frac{y}{2}$  (при цьому можуть бути втраченими розв'язки  $y = \pi(2k + 1)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ):

$$\frac{y'}{2 \cos^2 \frac{y}{2}} + \operatorname{tg} \frac{y}{2} + x = 0.$$

Зробимо заміну невідомої функції:

$$z = \operatorname{tg} \frac{y}{2}.$$

Тоді  $z' = \frac{y'}{2 \cos^2 \frac{y}{2}}$ , і ми приходимо до рівняння, яке вже є лінійним:

$$z' + z + x = 0.$$

Інтегруючи його, дістаємо (перевірте самостійно):

$$z(x) = C e^{-x} + 1 - x.$$

Повертаючись до функції  $y$ , остаточно одержуємо:

$$y = 2 \operatorname{arctg}(C e^{-x} + 1 - x) + \pi n, \quad y = \pi(2k + 1), \quad k, n \in \mathbb{Z}.$$

Приклад 5. Зінтегрувати рівняння:

$$y' = \frac{y}{3x - y^2}.$$

Це рівняння також не є лінійним. Перепишемо його у вигляді:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{3x - y^2}.$$

А тепер змінимо ролями змінні  $x$  та  $y$ , тобто будемо вважати  $x$  функцією від  $y$ :  $x = x(y)$ . І розглянемо «перевернуте» рівняння (при цьому втрачається розв'язок  $y = 0$ ):

$$\frac{dx}{dy} = \frac{3x - y^2}{y}.$$

Або:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{3x}{y} - y.$$

А це рівняння вже є лінійним. Інтегруючи його, дістаємо (перевірте самостійно):

$$x = Cy^3 + y, \quad y = 0.$$

## 11.7. Диференціальне рівняння Бернуллі

**Означення.** Диференціальним рівнянням Бернуллі називається рівняння наступного вигляду:

$$y' = p(x)y + q(x)y^\alpha. \quad (11.7.1)$$

Коефіцієнти  $p(x)$  та  $q(x)$  припускаються неперервними на проміжку  $(a, b)$ . Число  $\alpha$  припускається відмінним від 0 та 1. Дійсно, при  $\alpha = 0$  одержуємо лінійне неоднорідне рівняння, а при  $\alpha = 1$  – лінійне однорідне рівняння.

Покажемо, що рівняння Бернуллі може бути зведено до лінійного неоднорідного рівняння. Поділимо обидві частини рівняння (11.7.1)

на  $y^\alpha$  (при цьому враховуємо, що у випадку  $\alpha > 0$  ми можемо втратити розв'язок  $y = 0$ ). Одержуємо:

$$y^{-\alpha} y' = p(x) y^{1-\alpha} + q(x).$$

Зробимо заміну невідомої функції:

$$z = y^{1-\alpha}.$$

Тоді:

$$z' = (1-\alpha) y^{-\alpha} y', \quad y^{-\alpha} y' = \frac{z'}{1-\alpha}.$$

Звідси дістаємо:

$$\frac{z'}{1-\alpha} = p(x)z + q(x).$$

Або:

$$z' = (1-\alpha)p(x)z + (1-\alpha)q(x),$$

тобто одержали лінійне неоднорідне рівняння. Інтегруємо його і повертаємось до початкової невідомої функції  $y(x)$  за формулою:

$$y = z^{\frac{1}{1-\alpha}}.$$

*Приклад.* Знайти загальний розв'язок рівняння:

$$y' = y \operatorname{tg} x + y^4 \cos x.$$

Легко бачити, що це рівняння Бернуллі. Помітимо одразу, що воно має тривіальний розв'язок  $y = 0$ . Шукатимемо тепер інші розв'язки. Поділимо обидві частини цього рівняння на  $y^4$ :

$$\frac{y'}{y^4} = \frac{1}{y^3} \operatorname{tg} x + \cos x.$$

Зробимо заміну:

$$z = y^{-3}; \quad z' = -3y^{-4} y'.$$

Дістанемо:

$$-\frac{z'}{3} = z \operatorname{tg} x + \cos x.$$

Або:

$$z' = -3 \operatorname{tg} x - 3 \cos x. \tag{11.7.2}$$

Це лінійне неоднорідне рівняння. Розв'яжемо відповідне однорідне рівняння:

$$z' = -3 \operatorname{tg} x.$$

Його загальним розв'язком є (перевірте самостійно):

$$z = C \cos^3 x.$$

Загальний розв'язок рівняння (1.7.2) згідно з методом варіації довільної сталої шукаємо у вигляді:

$$z(x) = C(x) \cos^3 x.$$

Маємо:

$$z'(x) = C'(x) \cos^3 x - 3C(x) \cos^2 x \sin x.$$

Підставляючи в рівняння (11.7.2), дістаємо:

$$C'(x) = -\frac{3}{\cos^2 x},$$

звідки:

$$C(x) = -3 \operatorname{tg} x + C.$$

Таким чином:

$$z(x) = (-3 \operatorname{tg} x + C) \cos^3 x.$$

Тепер повертаємось до функції  $y(x)$  за формулою:  $y = z^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{z}}$ :

$$y = \frac{1}{\cos x \sqrt[3]{C - 3 \operatorname{tg} x}}, \quad y = 0.$$

## 11.8. Диференціальне рівняння Ріккати

**Означення.** Диференціальним рівнянням Ріккати називається рівняння наступного вигляду:

$$y' = p(x)y^2 + q(x)y + r(x). \quad (11.8.1)$$

Права частина цього рівняння є квадратним тричленом відносно  $y$ , коефіцієнти якого у загальному випадку залежать від  $x$  і припускаються неперервними на проміжку  $(a, b)$ .

У загальному випадку рівняння (11.8.1) не інтегрується навіть у квадратурах. Але в частинних випадках таке інтегрування можливе. Розглянемо деякі такі випадки.

1.  $p, q, r$  є сталими:

$$y' = py^2 + qy + r.$$

Це рівняння з відокремлюваними змінними.

2.  $p(x) \equiv 0$ :

$$y' = q(x)y + r(x).$$

Це лінійне неоднорідне рівняння.

3.  $r(x) \equiv 0$ :

$$y' = p(x)y^2 + q(x)y.$$

Це рівняння Бернуллі.

4. Припустимо, що відомо деякий частинний розв'язок  $y = \varphi(x)$  рівняння (11.8.1). Тоді заміна  $y = z + \varphi(x)$ , де  $z$  – нова невідома функція, зводить рівняння (11.8.1) до рівняння Бернуллі. Дійсно,  $y' = z' + \varphi'(x)$ , і маємо:

$$z' + \varphi'(x) = p(x)(z + \varphi(x))^2 + q(x)(z + \varphi(x)) + r(x).$$

Або:

$$z' + \varphi'(x) = p(x)z^2 + 2p(x)\varphi(x)z + p(x)\varphi^2(x) + q(x)z + q(x)\varphi(x) + r(x).$$

Оскільки:

$$\varphi'(x) = p(x)\varphi^2(x) + q(x)\varphi(x) + r(x),$$

то дістаємо:

$$z' = p(x)z^2 + (2p(x)\varphi(x) + q(x))z,$$

тобто рівняння Бернуллі.

*Приклад.* Знайти загальний розв'язок рівняння:

$$x^2 y' + xy + x^2 y^2 = 4. \tag{11.8.2}$$

Це рівняння Ріккаті. З огляду на вигляд коефіцієнтів цього рів-

няння, шукатимемо його частинний розв'язок у вигляді  $\varphi(x) = \frac{a}{x}$ , де  $a$  – поки що невідома стала. Підставляючи цей вираз у рівняння (11.8.2), одержуємо  $a = 2$ , отже  $\varphi(x) = \frac{2}{x}$ .

У рівнянні (11.8.2) робимо заміну:

$$y = z + \frac{2}{x}.$$

Тоді  $y' = z' - \frac{2}{x^2}$ , і дістаємо:

$$x^2 \left( z' - \frac{2}{x^2} \right) + x \left( z + \frac{2}{x} \right) + x^2 \left( z + \frac{2}{x} \right)^2 = 4.$$

Або, розкриваючи дужки:

$$x^2 z' + 3xz + x^2 z^2 = 0.$$

Це рівняння Бернуллі. Перепишемо його у вигляді:

$$z' = -\frac{3z}{x} - z^2.$$

Враховуючи тривіальний розв'язок  $z = 0$ , поділимо обидві частини на  $-z^2$ :

$$-\frac{z'}{z^2} = \frac{3}{xz} + 1.$$

Робимо заміну:  $u = \frac{1}{z}$ . Тоді  $u' = -\frac{z'}{z^2}$ , і дістаємо:

$$u' = \frac{3u}{x} + 1.$$

Це лінійне неоднорідне рівняння. Інтегруючи його (перевірте самостійно), дістаємо:

$$u = Cx^3 - \frac{x}{2}.$$

Повертаючись до функції  $z$ , маємо:

$$z = \frac{1}{Cx^3 - \frac{x}{2}}, \quad z = 0.$$

Повертаючись до функції  $y$ , остаточно маємо:

$$y = \frac{1}{Cx^3 - \frac{x}{2}} + \frac{2}{x}, \quad y = \frac{2}{x}.$$

## 11.9. Диференціальні рівняння в повних диференціалах

**Означення 9.** Диференціальним рівнянням у повних диференціалах (ДРПД) називається рівняння наступного вигляду:

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0, \quad (11.9.1)$$

якщо його ліва частина є повним диференціалом деякої функції  $U(x, y)$ , тобто:

$$dU = M(x, y)dx + N(x, y)dy.$$

Функції  $M(x, y)$ ,  $N(x, y)$  припускаються неперервними за обома змінними в деякій області. Якщо рівняння (11.9.1) є ДРПД, то воно записується у вигляді:

$$dU(x, y) = 0,$$

і тоді його загальний інтеграл має вигляд:

$$U(x, y) = C. \quad (11.9.2)$$

При розгляді рівнянь такого типу виникає два питання:

- 1) як за виглядом ДР (1.9.1) виявити, чи є воно ДРПД, чи ні?
- 2) якщо воно є ДРПД, то як знайти функцію  $U(x, y)$ ?

Відповідь на перше запитання дається наступною теоремою.

**Теорема.** Для того, щоб рівняння (11.9.1) було ДРПД, необхідно і достатньо, щоб функції  $M(x, y)$ ,  $N(x, y)$  були в заданій області зміни  $x, y$  неперервні, мали неперервні частинні похідні першого порядку відповідно за  $y$  та за  $x$ , і щоб виконувалась тотожність:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}. \quad (11.9.3)$$

**Доведення.**

1. Необхідність. Нехай ДР (11.9.1) є ДРПД. Тоді:



$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = dU(x, y) = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy.$$

Звідси випливає, що:

$$M(x, y) = \frac{\partial U(x, y)}{\partial x}, \quad N(x, y) = \frac{\partial U(x, y)}{\partial y}.$$

Оскільки за умовою теореми функції  $M, N$  мають неперервні частинні похідні відповідно за  $y$  та за  $x$ , то за теоремою Шварца (див. п. 9.12):

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x},$$

тобто:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x},$$

і необхідність доведено.

2. Достатність. Разом з доведенням достатності ми водночас побудуємо і функцію  $U(x, y)$ , а отже і загальний інтеграл (11.9.2).

Нехай виконано умову (11.9.3). Покажемо, що рівняння (11.9.1) є ДРПД, тобто існує функція  $U(x, y)$  така, що:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = M(x, y), \quad \frac{\partial U}{\partial y} = N(x, y).$$

Зінтегрувавши першу з цих рівностей за змінною  $x$  (вважаючи  $y$  сталою), дістанемо:

$$U(x, y) = \int M(x, y) dx + C(y). \tag{11.9.4}$$

Тут “константа”  $C$ , взагалі кажучи, є функцією від  $y$ . Тепер здиференціюємо останню рівність за змінною  $y$ :

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \int M(x, y) dx + C'(y) = N(x, y).$$

Звідси:

$$C'(y) = N(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} \int M(x, y) dx. \tag{11.9.5}$$

Покажемо, що права частина цього рівняння не залежить від змінної  $x$ , для чого здиференціюємо її за  $x$ :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \left( N(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} \int M(x, y) dx \right) = \\ & = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \int \frac{\partial M}{\partial y} dx = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} = 0 \end{aligned}$$

(внаслідок (11.9.3)). Отже відносно  $x$  права частина рівності (11.9.5) є константою, тобто вона залежить тільки від  $y$ . Тоді, інтегруючи рівність (11.9.5) за змінною  $y$ , дістанемо:

$$C(y) = \int \left( N(x, y) - \int \frac{\partial M}{\partial y} dx \right) dy + C,$$

де  $C$  вже справжня довільна стала. Підставляючи цей вираз у рівність (11.9.4), одержуємо функцію  $U(x, y)$  і загальний інтеграл (11.9.2).

*Приклад.* Знайти загальний інтеграл диференціального рівняння:

$$(e^x + y + \sin y) dx + (e^y + x + x \cos y) dy = 0.$$

Переконаємось, що дане рівняння є ДРПД. Маємо:

$$M = e^x + y + \sin y, \quad N = e^y + x + x \cos y,$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 1 + \cos y, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 1 + \cos y,$$

тобто рівність (11.9.3) виконано. Знайдемо функцію  $U(x, y)$ . Виходимо з рівності:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = M(x, y) = e^x + y + \sin y.$$

Інтегруючи за змінною  $x$  (при сталій  $y$ ), дістаємо:

$$U(x, y) = \int (e^x + y + \sin y) dx = e^x + yx + x \sin y + C(y).$$

Здиференціюємо тепер одержану функцію  $U(x, y)$  за змінною  $y$  і дорівнюємо результат до функції  $N(x, y)$ :

$$\frac{\partial U}{\partial y} = x + x \cos y + C'(y) = e^y + x + x \cos y.$$

Звідси:

$$C'(y) = e^y.$$

Інтегруючи, одержуємо:  $C(y) = e^y + C$ .

Таким чином, загальний інтеграл нашого рівняння має вигляд:

$$e^x + ux + x \sin y + e^y = C.$$

### 11.10. Інтегровальний множник

Припустимо тепер, що рівняння (11.9.1) не є ДРПД. В деяких випадках вдається знайти таку функцію  $\mu(x, y)$ , після множення на яку обох частин цього рівняння воно стає ДРПД. Тобто рівняння:

$$\mu(x, y)M(x, y)dx + \mu(x, y)N(x, y)dy = 0 \quad (11.10.1)$$

є ДРПД.

Тоді функція  $\mu(x, y)$  називається *інтегровальним множником* для рівняння (11.9.1).

Якщо рівняння (11.10.1) є ДРПД, то для нього повинна виконуватись умова (11.9.3), яка у даному випадку набуває вигляду:

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x}.$$

Запишемо це рівняння у розгорнутому вигляді:

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} M + \mu \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial \mu}{\partial x} N + \mu \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Або:

$$N \frac{\partial \mu}{\partial x} - M \frac{\partial \mu}{\partial y} = \left( \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) \mu. \quad (11.10.2)$$

Це рівняння з частинними похідними 1-го порядку. І у загальному випадку задача його інтегрування не менш складна, ніж задача інтегрування самого рівняння (11.9.1). Але існують частинні випадки, коли рівняння (11.10.2) вдається зінтегрувати. Розглянемо деякі з них.

1. Припустимо, що функція  $\mu$  залежить тільки від  $x$ :  $\mu = \mu(x)$ .

Тоді  $\frac{\partial \mu}{\partial y} = 0$ , і рівняння (11.10.2) набуває вигляду:

$$N \frac{d\mu}{dx} = \left( \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) \mu.$$

Або:

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} dx.$$

Оскільки ліва частина цього рівняння залежить тільки від  $x$ , то й права його частина має залежати тільки від  $x$ , тобто:

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = \varphi(x).$$

Якщо це виконано, то маємо:

$$\frac{d\mu}{\mu} = \varphi(x) dx,$$

отже функція:

$$\mu(x) = e^{\int \varphi(x) dx}$$

є інтегрувальним множником рівняння (11.9.1).

2. Припустимо тепер, що функція  $\mu$  залежить тільки від  $y$ :

$\mu = \mu(y)$ . Тоді  $\frac{\partial \mu}{\partial x} = 0$ , і рівняння (11.10.2) набуває вигляду:

$$M \frac{d\mu}{dy} = \left( \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) \mu.$$

Або:

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M} dy.$$

Якщо ліва частина цього рівняння залежить тільки від  $y$ , то й права його частина має залежати тільки від  $y$ , тобто:

$$\frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M} = \psi(y).$$

Якщо це виконано, то маємо:

$$\frac{d\mu}{\mu} = \psi(y)dy,$$

отже, функція:

$$\mu(y) = e^{\int \psi(y)dy}$$

є інтегрувальним множником рівняння (1.9.1).

Перейдемо до розгляду прикладів.

*Приклад 1.* Знайдемо інтегрувальний множник лінійного рівняння 1-го порядку:

$$\frac{dy}{dx} = p(x)y + q(x). \quad (11.10.3)$$

Перепишемо його у вигляді:

$$(p(x)y + q(x))dx - dy = 0.$$

Звідси видно, що у даному випадку  $M = p(x)y + q(x)$ ,  $N = -1$ . Обчислимо:

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = \frac{p(x)}{-1} = -p(x),$$

тобто рівняння (11.10.3) має інтегрувальний множник, що залежить тільки від  $x$ . Він має вигляд:

$$\mu(x) = e^{-\int p(x)dx}.$$

Помножимо обидві частини рівняння (11.10.3) на цю функцію:

$$\frac{dy}{dx} e^{-\int p(x)dx} - p(x)y e^{-\int p(x)dx} = q(x)e^{-\int p(x)dx}.$$

Або:

$$\frac{d}{dx} \left( y e^{-\int p(x)dx} \right) = q(x) e^{-\int p(x)dx}.$$

Звідси:

$$y e^{-\int p(x) dx} = \int q(x) e^{-\int p(x) dx} dx + C,$$

$$y = e^{\int p(x) dx} \left( C + \int q(x) e^{-\int p(x) dx} dx \right),$$

тобто прийшли до формули (11.6.5).

*Приклад 2.* Зінтегрувати рівняння:

$$\left(1 + \frac{y}{x^2}\right) dx + \left(\frac{1}{x} + \frac{2y}{x^2}\right) dy = 0. \quad (11.10.4)$$

Маємо:

$$M = 1 + \frac{y}{x^2}, \quad N = \frac{1}{x} + \frac{2y}{x^2}, \quad \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{1}{x^2}, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = -\frac{1}{x^2} - \frac{4y}{x^3},$$

звідки видно, що умову (11.9.3) не виконано, отже, дане рівняння не є ДРПД. Розглянемо вираз:

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = \frac{2}{x},$$

і таким чином, дане рівняння має інтегрувальний множник, який залежить тільки від  $x$ . Він має вигляд:

$$\mu(x) = e^{\int \frac{2}{x} dx} = x^2.$$

Помножимо обидві частини рівняння (11.10.4) на цю функцію.

Дістанемо:

$$(x^2 + y) dx + (x + 2y) dy = 0.$$

Це рівняння вже є ДРПД (перевірте самостійно). Інтегруючи його, дістаємо загальний інтеграл рівняння (11.10.4):

$$\frac{x^3}{3} + xy + y^2 = C.$$

*Приклад 3.* Зінтегрувати рівняння

$$y^2(x - 3y) dx + (1 - 3xy^2) dy = 0. \quad (11.10.5)$$

Маємо:

$$M = xy^2 - 3y^3, \quad N = 1 - 3xy^2, \quad \frac{\partial M}{\partial y} = 2xy - 9y^2, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = -3y^2,$$

звідки видно, що рівняння (11.10.5) не є ДРПД. Розглянемо вираз:

$$\frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M} = -\frac{2}{y},$$

і, таким чином, рівняння (11.10.5) має інтегрувальний множник, який залежить тільки від  $y$ . Він має вигляд:

$$\mu(y) = e^{-\int \frac{2}{y} dy} = \frac{1}{y^2}.$$

Помножимо обидві частини рівняння (11.10.5) на цю функцію. Дістанемо:

$$(x - 3y)dx + \left( \frac{1}{y^2} - 3x \right) dy = 0.$$

Це рівняння вже є ДРПД (перевірте самостійно). Інтегруючи його, дістаємо загальний інтеграл рівняння (11.10.5):

$$\frac{x^2}{2} - 3xy - \frac{1}{y} = C, \quad y \neq 0.$$

### 11.11. Теорема існування та єдиності розв'язку задачі Коші

Диференціальні рівняння, що ми розглядали у попередніх параграфах, припускали можливість знаходження їх загального розв'язку чи загального інтегралу або в елементарних функціях, або в квадратурах, тобто у вигляді інтегралів від елементарних функцій. Але у загальному випадку рівняння вигляду (11.1.3) не вдається зінтегрувати не тільки в елементарних функціях, але навіть у квадратурах. У таких випадках для знаходження розв'язків застосовують наближені методи, які дозволяють знайти, зазвичай, не загальний розв'язок, а деякий частинний, що задовольняє певні додаткові умови. Наприклад, розв'язок задачі Коші. При цьому необхідно бути впевненим у тому, що розв'язок, який ми шукаємо, існує та визначений у деякому інтервалі зміни незалежної змінної.

Відмітимо, що поняття існування математичного об'єкту (зокрема, розв'язку диференціального рівняння), взагалі кажучи, досить складне. Це поняття певною мірою філософське, і воно є предметом досліджень у філософії математики. Різні філософсько-математичні школи надавали різні тлумачення цьому поняттю. Крім того, існування реального процесу чи явища, та розв'язку математичної задачі, що є моделлю цього процесу – далеко не одне й те ж. Математична модель фізичного явища не може бути повністю адекватною самому явищу, оскільки при її складанні, як правило, відкидається багато, на перший погляд, другорядних факторів, які, тем не менш, у деякому сенсі можуть впливати на кінцевий результат. Тому з існування розв'язку фізичної задачі, взагалі кажучи, не випливає існування розв'язку відповідної математичної. Існування розв'язку математичної задачі можна встановити лише суто математичними методами. Може бути і зворотна ситуація, коли розв'язок математичної задачі існує, але фізично він не реалізується, наприклад, у випадку так званих нестійких розв'язків диференціальних рівнянь.

Тут ми розглянемо одну з основних теорем існування та єдиності розв'язку задачі Коші – теорему Пікара.

Розглянемо наступну задачу Коші:

$$\begin{cases} y' = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0. \end{cases} \quad (11.11.1)$$

**Теорема Пікара.** Нехай функцію  $f(x, y)$  визначено в області

$$\Pi = \{ |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b \},$$

де  $a > 0, b > 0$  – задані числа. І нехай в цій області функція  $f(x, y)$  задовольняє наступні умови:

1) функція  $f(x, y)$  неперервна за обома аргументами;

2)  $\forall (x, y) \in \Pi: |f(x, y)| \leq M$ , де  $M = M(a, b) > 0$ ;

3) функція  $f(x, y)$  задовольняє умову Ліпшица за змінною  $y$ ,

тобто існує така стала  $L = L(a, b) > 0$ , що для будь-яких двох точок  $(x, y_1), (x, y_2) \in \Pi$  виконано нерівність:

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L |y_1 - y_2|.$$



Тоді задача Коші (11.11.1) має єдиний розв'язок  $y = y(x)$ , визначений і неперервно диференційовний на відрізку  $|x - x_0| \leq h$ , де

$$h = \min\left(a, \frac{b}{M}\right),$$

причому  $|y(x) - y_0| \leq b$ .

Доведення цієї теореми досить складне, ми його не наводимо. Але зробимо декілька зауважень.

**Зауваження 1 (про продовжуваність розв'язку).** Розв'язок  $y = y(x)$ , який знайдено в теоремі Пікара, визначений та неперервний на проміжку  $|x - x_0| \leq h$ , де  $h = \min\left(a, \frac{b}{M}\right)$ . Якщо  $h < a$ , то цей розв'язок, взагалі кажучи, можна продовжити, тобто можна знайти таку функцію  $y = y^*(x)$ , визначену та неперервно диференційовну на деякому проміжку, що містить всередині себе проміжок  $|x - x_0| \leq h$ , яка є розв'язком задачі Коші (11.11.1) і співпадає з функцією  $y = y(x)$  в усіх точках проміжку  $|x - x_0| \leq h$ .

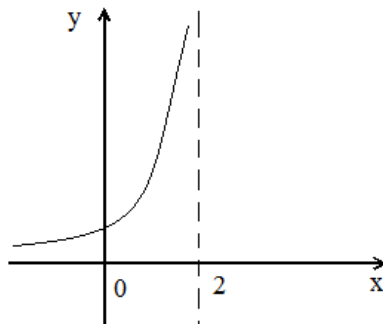
*Приклад.* Розглянемо наступну задачу Коші:

$$\begin{cases} y' = y^2, \\ y(1) = 1. \end{cases}$$

Її розв'язок має вигляд (перевірте самостійно):

$$y = -\frac{1}{x-2}.$$

Цей розв'язок визначений та неперервний на проміжку  $-\infty < x < 2$ , і має вертикальну асимптоту в точці  $x = 2$ . Отже, розв'язок даної задачі Коші не є продовжуваним вправо від точки  $x = 2$  (рис. 11.14)



**Рис. 11.14**

**Зауваження 2.** Умову Ліпшица буде, зокрема, виконано, якщо функція  $f(x, y)$  має в області  $\Pi$  обмежену частинну похідну  $\frac{\partial f}{\partial y}$  (оскільки область  $\Pi$  обмежена і замкнена, то для обмеженості цієї похідної достатньо її неперервності в області  $\Pi$ ), тобто  $\exists L_1 = L_1(a, b)$  таке, що  $\forall (x, y) \in \Pi$  виконано:

$$\left| \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right| \leq L_1.$$

Дійсно, тоді для будь-яких двох точок  $(x, y_1), (x, y_2) \in \Pi$  за формулою скінченних приростів Лагранжа (див. п. 5.13) матимемо:

$$|f(x, y_2) - f(x, y_1)| = \left| \frac{\partial f(x, y_1 + \theta(y_2 - y_1))}{\partial y} (y_2 - y_1) \right| \leq L_1 |y_2 - y_1|,$$

де  $0 < \theta < 1$ . В той же час зауважимо, що виконання умови Ліпшица не передбачає існування частинної похідної  $\frac{\partial f}{\partial y}$ , і таким чином є більш

загальною умовою, ніж обмеженість похідної  $\frac{\partial f}{\partial y}$ . Наприклад, функ-

ція  $f(x, y) = |y|$  в області

$$\Pi = \{-1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}$$

задовольняє умову Ліпшица за змінною  $y$ , але  $\frac{\partial f}{\partial y}$  в цій області не існує.

**Зауваження 3 (про неєдиність розв'язку).** При доведенні теореми Пікара ми суттєво користувалися умовою Ліпшица. Саме ця умова гарантує єдиність розв'язку. Якщо від неї відмовитися, то єдиності розв'язку може і не бути.

*Наприклад.* Розглянемо наступну задачу Коші:

$$\begin{cases} y' = 2\sqrt{y}, \\ y(x_0) = 0. \end{cases}$$

Розглянемо область:

$$\Pi = \{ |x - x_0| \leq a, |y| \leq b \}.$$

Покажемо, що в цій області функція  $f(x, y) = 2\sqrt{y}$  не задовольняє умову Ліпшица. Дійсно, припустимо, що це не так. Тоді існує стала  $L = L(a, b) > 0$  така, що  $\forall y_1, y_2 \in \Pi$  виконано:

$$2|\sqrt{y_2} - \sqrt{y_1}| \leq L|y_2 - y_1|.$$

Покладемо в цій нерівності:  $y_1 = 0, y_2 = \varepsilon > 0$ . Тоді одержимо:

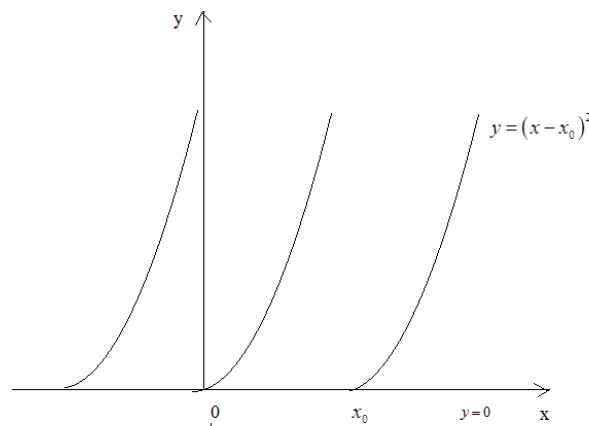
$$\sqrt{\varepsilon} \geq 2/L. \text{ Тепер покладемо: } \varepsilon = \min\left(\frac{1}{L^2}, \frac{b}{2}\right). \text{ Точка } (y_1, y_2) \in \Pi, \text{ і в}$$

той же час  $\sqrt{\varepsilon} \leq \frac{1}{L} < \frac{2}{L}$ , тобто прийшли до протиріччя. Отже, умову Ліпшица дійсно не виконано.

Легко бачити, що задача Коші, що розглядається, має два розв'язки:

$$y_1(x) \equiv 0, \quad y_2(x) = (x - x_0)^2, \quad x \geq x_0.$$

Таким чином, через кожну точку вісі  $Ox$  проходить дві інтегральні криві диференціального рівняння  $y' = 2\sqrt{y}$  (рис. 11.15).



**Рис. 11.15**

## 11.12. Диференціальні рівняння 1-го порядку, не розв'язані відносно похідної. Основні поняття

Нехай функцію  $F$  визначено в області  $G$  простору. Розглянемо диференціальне рівняння 1-го порядку, не розв'язане відносно похідної (або неявне диференціальне рівняння), тобто рівняння вигляду:

$$F(x, y, y') = 0. \quad (11.12.1)$$

**Означення.** Функція  $y = \varphi(x)$  називається розв'язком рівняння (11.12.1) на проміжку  $(a, b)$ , якщо виконано наступні умови:

- 1) функція  $y = \varphi(x)$  неперервно диференційовна на проміжку  $(a, b)$ ;
- 2)  $\forall x \in (a, b): (x, \varphi(x), \varphi'(x)) \in G$ ;
- 3)  $\forall x \in (a, b): F(x, \varphi(x), \varphi'(x)) = 0$ .

Тобто функція  $y = \varphi(x)$  при підстановці її у рівняння (11.12.1) перетворює його на тотожність на проміжку  $(a, b)$ .

Для рівнянь, не розв'язаних відносно похідної, також можна ставити задачу знаходження розв'язку, що задовольняє певні початкові дані. При цьому досить загальною є ситуація, коли фіксованій парі  $(x_0, y_0)$  початкових даних може відповідати декілька значень  $dy/dx = p_0$ , для яких виконується рівність  $F(x_0, y_0, p_0) = 0$ . У зв'язку з цим для однозначного виділення розв'язку потрібно не лише задавати початкову умову  $y(x_0) = y_0$ , а й додатково вибирати конкретне значення його похідної в точці  $x_0$  з декількох можливих.

**Теорема (існування та єдиності розв'язку задачі Коші для рівняння (11.12.1)).** Нехай  $G$  – область простору  $(x, y, p)$ , і точка  $(x_0, y_0, p_0) \in G$ . І нехай виконано наступні умови:

- 1) функція  $F(x, y, p)$  неперервна в області  $G$ ;
- 2)  $F(x_0, y_0, p_0) = 0$ ;
- 3)  $\partial F / \partial y, \partial F / \partial p$  неперервні у деякому околі точки  $(x_0, y_0, p_0)$ ;
- 4) у точці  $(x_0, y_0, p_0)$  виконано:  $\partial F / \partial p \neq 0$ .

Тоді на деякому інтервалі, що містить точку  $x_0$ , існує єдиний розв'язок  $y = \varphi(x)$  рівняння (11.12.1), що задовольняє умови:

$$\varphi(x_0) = y_0, \quad \varphi'(x_0) = p_0.$$

Доведення цієї теореми ми тут не наводимо.

Будемо казати, що рівняння:

$$\Phi(x, y) = 0 \quad (11.12.2)$$

визначає в неявній формі розв'язок рівняння (11.12.1), якщо воно визначає  $y$  як неявну функцію від  $x$ , і ця функція є розв'язком рівняння (11.12.1):

$$y'_x = -\frac{\partial\Phi/\partial x}{\partial\Phi/\partial y} \quad (\text{якщо } \partial\Phi/\partial y \neq 0).$$

Тоді:

$$F\left(x, y, -\frac{\partial\Phi/\partial x}{\partial\Phi/\partial y}\right) = 0.$$

Будемо казати, що рівняння:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t) \quad (11.12.3)$$

визначають розв'язок рівняння (11.12.1) в параметричній формі на проміжку  $(t_0, t_1)$ , якщо функції  $x = \varphi(t)$ ,  $y = \psi(t)$  диференційовні на  $(t_0, t_1)$ ,  $\varphi'(t) \neq 0$  на  $(t_0, t_1)$ , і в цьому проміжку справджується тотожність:

$$F\left(\varphi(t), \psi(t), \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right) \equiv 0. \quad (11.12.4)$$

Криву на площині  $Oxy$ , що відповідає розв'язку, будемо називати *інтегральною кривою* рівняння (11.12.1).

Припустимо, що рівняння (11.12.1) можна розв'язати відносно похідної:

$$y' = f_k(x, y), \quad k = 1, 2, \dots, m, \quad (11.12.5)$$

де дійсні функції  $f_k(x, y)$  визначені в деякій області  $D$  площини  $Oxy$ , і припустимо, що кожне з рівнянь (11.12.5) має в області  $D$  загальний інтеграл:

$$\psi_k(x, y) = C \quad (k = 1, 2, \dots, m). \quad (11.12.6)$$

Сукупність цих загальних інтегралів будемо називати *загальним інтегралом* рівняння (11.12.1) в області  $D$ .

Іноді замість рівностей (11.12.6) пишуть:

$$(\psi_1(x, y) - C)(\psi_2(x, y) - C) \cdots (\psi_m(x, y) - C) = 0. \quad (11.12.7)$$

*Приклад.* Зінтегрувати рівняння:

$$x^2 (y')^2 - 3xy' + 2 = 0.$$

Покладаючи  $xu' = p$ , одержуємо:

$$p^2 - 3p + 2 = 0,$$

звідки  $p_1 = 1$ ,  $p_2 = 2$ . Таким чином, наше рівняння розпадається на два рівняння:

$$1) \quad xy' = 1; \quad y' = 1/x; \quad y = \ln |x| + C;$$

$$2) \quad xy' = 2; \quad y' = 2/x; \quad y = 2\ln |x| + C.$$

Або:

$$\ln |x| - y = C, \quad 2\ln |x| - y = C.$$

Або:

$$(\ln |x| - y - C)(2\ln |x| - y - C) = 0.$$

### 11.13. Метод введення параметру

Іноді вдається одержати розв'язки рівняння, не розв'язаного відносно похідної, в параметричній формі. Особливо легко це вдається, коли рівняння можна розв'язати або відносно  $y$  або відносно  $x$ .

1. Випадок, коли рівняння розв'язне відносно  $y$

Припустимо, що рівняння (11.12.1) можна записати у вигляді:

$$y = f(x, y'). \quad (11.13.1)$$

Прийmemo  $y'$  в якості параметру, який позначимо через  $p$ , тобто:

$$y' = p.$$

Тоді:

$$\frac{dy}{dx} = p, \quad dy = p dx, \quad (11.13.2)$$

а рівняння (11.13.1) набуде вигляду:

$$y = f(x, p). \quad (11.13.3)$$

Візьmemo від обох частин рівності (11.13.3) повний диференціал:

$$dy = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial p} dp.$$

Або, враховуючи рівність (11.13.2):

$$p dx = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial p} dp.$$

Або:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} - p\right)dx + \frac{\partial f}{\partial p}dp = 0,$$

тобто ми одержали диференціальне рівняння вигляду:

$$M(x, p)dx + N(x, p)dp = 0. \quad (11.13.4)$$

Припустимо, що нам вдалося знайти загальний розв'язок цього рівняння:

$$x = \varphi(p, C).$$

Тоді, підставляючи цей розв'язок у рівність (11.13.3), дістаємо розв'язок рівняння (11.13.1) в параметричній формі:

$$x = \varphi(p, C), \quad y = f(\varphi(p, C), p).$$

Якщо, зокрема, рівняння  $x = \varphi(p, C)$  вдається розв'язати відносно  $p$  (або знайти залежність  $p$  від  $x$  безпосередньо з рівняння (11.13.4)):  $p = \omega(x, C)$ , то загальний розв'язок рівняння (11.13.1) може бути одержано в явній формі:

$$y = f(x, \omega(x, C)).$$

*Приклад 1.* Зінтегрувати рівняння:

$$y = (y')^2 - xy' + \frac{x^2}{2}.$$

Це рівняння розв'язане відносно  $y$ . Покладаємо:

$$y' = p, \quad dy = p dx.$$

Тоді:

$$y = p^2 - xp + \frac{x^2}{2}. \quad (11.13.5)$$

Візьмемо повний диференціал від обох частин рівності (11.13.5):

$$dy = (x - p)dx + (2p - x)dp.$$

Або:

$$p dx = (x - p)dx + (2p - x)dp.$$

Або:

$$(x - 2p)(dx - dp) = 0.$$

Таким чином, рівняння розпадається на два окремих рівняння:

$$1) \quad p = \frac{x}{2}.$$

Підставляючи до (11.13.5), одержуємо:

$$y = \frac{x^2}{4}.$$

$$2) dx = dp.$$

Звідси одержуємо:

$$p = x + C,$$

і також підставляючи в (2.2.5), дістаємо:

$$y = (x + C)^2 - x(x + C) + \frac{x^2}{4} = \frac{x^2}{2} + Cx + C^2.$$

*Приклад 2.* Зінтегрувати рівняння:

$$y = x + y' - \ln y'.$$

Знову маємо рівняння, розв'язане відносно  $y$ . Покладаємо:

$$y' = p, \quad dy = p dx.$$

Тоді:

$$y = x + p - \ln p. \tag{11.13.6}$$

$$dy = p dx = dx + \left(1 - \frac{1}{p}\right) dp.$$

Або:

$$(1 - p) \left( dx - \frac{dp}{p} \right) = 0.$$

Рівняння розпадається на два окремих рівняння:

$$1) p = 1.$$

Підставляючи до (11.13.6), дістаємо:

$$y = x + 1.$$

$$2) dx = \frac{dp}{p}.$$

Тоді:

$$x = \ln p + C.$$

Підставляючи до (11.13.6), дістаємо загальний розв'язок нашого рівняння в параметричній формі:

$$x = \ln p + C, \quad y = p + C.$$

Виразимо  $p$  через  $x$ :  $p = e^{x-C}$ . Тоді загальний розв'язок нашого рівняння одержується в явному вигляді:

$$y = e^{x-C} + C.$$

**2. Випадок, коли рівняння розв'язне відносно  $x$**

Припустимо тепер, що рівняння (11.12.1) може бути записано у вигляді:

$$x = g(y, y'). \tag{11.13.7}$$



Знову приймаємо:

$$y' = p, \quad dy = p dx, \quad dx = \frac{dy}{p}.$$

Тоді:

$$x = g(y, p). \quad (11.13.8)$$

Беремо повний диференціал від обох частин рівності (11.13.8):

$$dx = \frac{\partial g}{\partial y} dy + \frac{\partial g}{\partial p} dp.$$

Або:

$$\frac{dy}{p} = \frac{\partial g}{\partial y} dy + \frac{\partial g}{\partial p} dp.$$

Або:

$$\left( \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{1}{p} \right) dy + \frac{\partial g}{\partial p} dp = 0.$$

Таким чином, ми прийшли до рівняння вигляду:

$$Y(y, p) dy + P(y, p) dp = 0.$$

Припустимо, що вдалося знайти загальний розв'язок цього рівняння:

$$y = \psi(p, C).$$

Підставляючи в (11.13.8), дістаємо загальний розв'язок рівняння (11.13.7) в параметричній формі:

$$x = g(\psi(p, C), p), \quad y = \psi(p, C).$$

*Приклад 3.* Зінтегрувати рівняння:

$$2xy' - y = y' \ln(y y').$$

Розв'яжемо це рівняння відносно  $x$ :

$$x = \frac{\ln(y y')}{2} + \frac{y}{2y'}$$

(зрозуміло, що тут  $y' \neq 0$ ). Вводимо параметр:

$$y' = p, \quad dy = p dx, \quad dx = \frac{dy}{p}.$$

Тоді:

$$x = \frac{\ln(y p)}{2} + \frac{y}{2p}. \quad (11.13.9)$$

Беремо повний диференціал від обох частин рівності (11.13.9):

$$dx = \frac{dy}{p} = \left( \frac{1}{2y} + \frac{1}{2p} \right) dy + \left( \frac{1}{2p} - \frac{y}{2p^2} \right) dp.$$

Або:

$$\left( \frac{1}{2y} - \frac{1}{2p} \right) dy + \left( \frac{1}{2p} - \frac{y}{2p^2} \right) dp = 0. \quad (11.13.10)$$

Одразу можна знайти один частинний розв'язок цього рівняння:

$$y = p.$$

Підставляючи в (11.13.9), одержуємо:

$$x = \ln p + \frac{1}{2}, \quad y = p.$$

Або, виражаючи  $p$  через  $x$ :

$$y = e^{x-1/2}.$$

Врахувавши цей розв'язок, далі з (11.13.10) маємо:

$$\frac{dy}{dp} = -\frac{y}{p}.$$

Звідси  $y = C/p$ , і, підставляючи в (11.13.9), дістаємо загальний розв'язок нашого рівняння в параметричній формі:

$$x = \frac{\ln C}{2} + \frac{C}{2p^2}, \quad y = \frac{C}{p}.$$

## 11.14. Рівняння Лагранжа і Клеро

**Означення.** Рівнянням Лагранжа називається рівняння наступного вигляду:

$$y = \varphi(y')x + \psi(y'). \quad (11.14.1)$$

Тобто в цьому рівнянні  $y$  є лінійною функцією від  $x$  з коефіцієнтами, що залежать від  $y'$ .

Оскільки це рівняння розв'язане відносно  $y$ , то ми можемо застосувати метод введення параметру. Покладаємо:

$$y' = p, \quad dy = p dx.$$

Тоді рівняння (11.14.1) набуває вигляду:

$$y = \varphi(p)x + \psi(p). \quad (11.14.2)$$

Беремо повний диференціал від обох частин рівності (11.14.2):

$$dy = p dx = \varphi(p) dx + (\varphi'(p)x + \psi'(p)) dp.$$

Або:

$$(\varphi(p) - p)dx + (\varphi'(p)x + \psi'(p))dp = 0. \quad (11.14.3)$$

У припущенні, що  $\varphi(p) - p \neq 0$  (випадок, коли  $\varphi(p) - p = 0$  розглянемо нижче), поділимо обидві частини рівняння (11.14.3) на вираз  $(\varphi(p) - p)dp$ :

$$\frac{dx}{dp} = \frac{\varphi'(p)}{p - \varphi(p)}x + \frac{\psi'(p)}{p - \varphi(p)}. \quad (11.14.4)$$

Одержали лінійне неоднорідне рівняння відносно  $x$  як функції змінної  $p$ . Загальний розв'язок цього рівняння має вигляд:

$$x = A(p)C + B(p),$$

де  $A(p), B(p)$  – відомі функції. Підставляючи цей вираз у рівність (11.14.2), дістаємо загальний розв'язок рівняння (11.14.1) в параметричній формі:

$$\begin{cases} x = A(p)C + B(p), \\ y = A_1(p)x + B_1(p), \end{cases}$$

де

$$A_1(p) = A(p)\varphi(p), \quad B_1(p) = B(p)\varphi(p) + \psi(p).$$

Розглянемо тепер випадок, коли:

$$\varphi(p) - p = 0. \quad (11.14.5)$$

Припустимо, що рівняння (11.14.5) має корені  $p = p_j$  ( $j = 1, 2, \dots$ ). Оскільки тоді  $dp = dp_j = 0$ , то ці корені є розв'язками рівняння (11.14.3), і при діленні на  $\varphi(p) - p$  їх може бути втрачено. Підставимо ці корені у рівняння (11.14.2). Тоді, враховуючи те, що  $\varphi(p_j) = p_j$ , одержуємо наступні розв'язки рівняння (11.14.1):

$$y = p_j x + \psi(p_j) \quad (j = 1, 2, \dots).$$

*Приклад 1.* Зінтегрувати рівняння:

$$y = 2xy' + (y')^2. \quad (11.14.6)$$

Це рівняння Лагранжа. Покладаємо:

$$y' = p, \quad dy = p dx.$$

Рівняння (11.14.6) набуває вигляду:

$$y = 2xp + p^2. \quad (11.14.7)$$

Беремо повний диференціал від обох частин рівності (11.14.7):

$$y = p dx = 2p dx + (2x + 2p) dp.$$

Або:

$$pdx + (2x + 2p)dp = 0. \quad (11.14.8)$$

Поділимо обидві частини цього рівняння на  $pdp$  (випадок  $p = 0$  розглянемо нижче). Дістанемо:

$$\frac{dx}{dp} = -\frac{2}{p}x - 2.$$

Це лінійне неоднорідне рівняння. Його загальний розв'язок має вигляд (перевірте самостійно):

$$x = \frac{C}{p^2} - \frac{2}{3}p.$$

Підставляючи цей вираз у рівність (11.14.7), одержуємо загальний розв'язок рівняння (11.14.6) в параметричній формі:

$$x = \frac{C}{p^2} - \frac{2}{3}p, \quad y = \frac{2C}{p} - \frac{p^2}{3}.$$

Розглянемо тепер випадок  $p = 0$ . Ця функція є розв'язком рівняння (11.14.8). Підставляючи її у рівність (11.14.7), одержуємо ще один розв'язок рівняння (11.14.6):  $y = 0$ .

Розглянемо тепер випадок, коли в рівнянні Лагранжа (11.14.1)  $\varphi(y') = y'$ . Тоді рівняння Лагранжа набуває вигляду:

$$y = y'x + \psi(y'). \quad (11.14.9)$$

Рівняння (11.14.9) називається *рівнянням Клеро*. Природно припустити, що  $\psi(y')$  є нелінійною функцією від  $y'$ , інакше рівняння (11.14.9) вироджується в рівняння з відокремлюваними змінними (перевірте самостійно).

Також, як і при інтегруванні рівняння Лагранжа, покладаємо  $y' = p$ . Тоді:

$$y = px + \psi(p), \quad (11.14.10)$$

$$dy = p dx = p dx + (x + \psi'(p)) dp,$$

або:

$$(x + \psi'(p)) dp = 0. \quad (11.14.11)$$

Рівняння (11.14.11) розпадається на два окремих рівняння:

$$1) \quad dp = 0.$$

Тоді  $p = C$ , і, підставляючи в рівність (11.14.10), дістаємо загальний розв'язок рівняння Клеро:

$$y = Cx + \psi(C).$$

Це є сім'я прямих. Помітимо, що цей загальний розв'язок одержується прямо з самого рівняння Клеро (11.14.9) формальною заміною в ньому  $y'$  на  $C$ .

$$2) \quad x = -\psi'(p).$$

Підставляючи цей вираз у рівність (11.14.10), дістаємо ще один розв'язок рівняння Клеро, який записано у параметричній формі:

$$x = -\psi'(p), \quad y = -p\psi'(p) + \psi(p).$$

*Приклад 2.* Зінтегрувати рівняння:

$$y = y'x - \sin y'.$$

Це рівняння Клеро. Покладаємо  $y' = p$ . Тоді:

$$y = px - \sin p,$$

$$dy = pdx = pdx + (x - \cos p)dp,$$

$$(x - \cos p)dp = 0.$$

Останнє рівняння розпадається на два окремих рівняння:

1)  $dp = 0$ . Тоді  $p = C$ , і загальний розв'язок нашого рівняння має вигляд:

$$y = Cx - \sin C.$$

2)  $x = \cos p$ . Дістаємо ще один розв'язок нашого рівняння, записаний в параметричній формі:

$$x = \cos p, \quad y = p \cos p - \sin p.$$

## 11.15. Диференціальні рівняння вищих порядків. Загальні питання

Розглянемо диференціальне рівняння  $n$ -го порядку:

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0. \quad (11.15.1)$$

**Означення.** Функція  $y = \varphi(x)$ , яка визначена та  $n$  разів диференційовна на проміжку  $(\alpha, \beta)$ , називається *розв'язком* рівняння (11.15.1) на цьому проміжку, якщо при підстановці її до рівняння (11.15.1) вона перетворює його на тотожність на цьому проміжку, тобто:

$$F(x, \varphi(x), \varphi'(x), \varphi''(x), \dots, \varphi^{(n)}(x)) \equiv 0, \quad x \in (\alpha, \beta).$$

Якщо рівняння (11.15.1) може бути записано у вигляді

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}), \quad (11.15.2)$$

то будемо називати його *диференціальним рівнянням  $n$ -го порядку*,

розв'язаним відносно старшої похідної. У подальшому, якщо не буде оговорено інше, будемо розглядати саме такі рівняння.

**Означення.** Інтегральною кривою рівняння (11.15.2) називається графік будь-якого його розв'язку.

**Означення.** Задачею Коші для рівняння (11.15.2) називається задача знаходження такого його розв'язку, що задовольняє початкові умови:

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0, \quad y''(x_0) = y''_0, \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}, \quad (11.15.3)$$

де  $x_0$  – задана точка проміжку  $(\alpha, \beta)$ , а  $y_0, y'_0, y''_0, \dots, y_0^{(n-1)}$  – задані числа.

На відміну від рівняння 1-го порядку, в точці  $x_0$  задається не тільки значення шуканої функції, але і значення її похідних до  $(n-1)$ -го порядку включно. Таким чином, кількість умов задачі Коші співпадає з порядком рівняння.

Крім того, характерною особливістю є те, що значення функції та її похідних ми задаємо при одному й тому ж значенні незалежної змінної. Це обумовлено, зокрема, потребами теоретичної механіки, де необхідно визначити весь рух за його станом в деякий момент часу, а також задачами геометричного характеру. Тем не менш, існують інші типи задач – такі, в яких умови на розв'язок задаються в різних точках. Такі задачі називаються *граничними*, вони вивчаються в більш детальних математичних курсах.

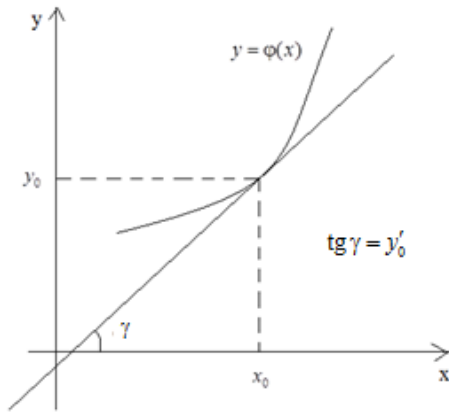
Розглянемо окремо випадок рівняння 2-го порядку:

$$y'' = f(x, y, y'). \quad (11.15.4)$$

Задача Коші для цього рівняння полягає в тому, щоб знайти його розв'язок, що задовольняє умови:  $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0$ . Зазвичай її записують у вигляді:

$$\begin{cases} y'' = f(x, y, y'), \\ y(x_0) = y_0, \\ y'(x_0) = y'_0. \end{cases} \quad (11.15.5)$$

Геометричний зміст задачі (11.15.5) полягає в тому, щоб знайти таку інтегральну криву рівняння (11.15.4), яка проходить через задану точку  $(x_0, y_0)$ , та її кутовий коефіцієнт дотичної в цій точці дорівнює  $y'_0$  (рис. 11.16).



**Рис. 11.16**

Зосередимось тепер на механічному змісті задачі (11.15.5). Розглянемо прямолінійний рух матеріальної точки  $M$  по осі  $Ox$ . Позначимо як  $x(t)$  координату точки  $M$  в момент часу  $t$ . Тоді  $dx/dt$ ,  $d^2x/dt^2$  виражають відповідно швидкість та прискорення точки в момент часу  $t$ . Припустимо, що рух точки здійснюється під дією сили  $f$ , яка у загальному випадку залежить від часу  $t$ , координати  $x(t)$  точки та миттєвої швидкості  $dx(t)/dt$  точки. Тобто  $f = f(t, x(t), dx(t)/dt)$ . Припустимо також, що маса точки дорівнює одиниці. Тоді згідно з другим законом Ньютона матимемо диференціальне рівняння 2-го порядку:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right), \quad (11.15.6)$$

що визначає рух точки вздовж прямої.

Задача Коші:

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} = f\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right), \\ x(t_0) = x_0, \\ \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=t_0} = v_0 \end{cases} \quad (11.15.7)$$

для рівняння (11.15.6) полягає в тому, щоб серед всіх рухів, що визначаються рівнянням (11.15.6), знайти такий, при якому точка, що рухається, в заданий початковий момент часу  $t_0$  мала б задану координату  $x_0$  та задану миттєву швидкість  $v_0$ .

Сформулюємо теорему існування та єдиності розв'язку задачі Коші для рівняння (11.15.2), тобто задачі (11.15.2), (11.15.3).

**Теорема.** Нехай рівняння (11.15.2) задовольняє в області

$$\Pi = \left\{ |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b, |y' - y'_0| \leq b, \dots, |y^{(n-1)} - y_0^{(n-1)}| \leq b \right\}$$

( $a, b > 0$ ) наступні умови:

1) функція  $f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$  неперервна за всіма аргументами;

2) функція  $f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$  обмежена сталою  $M = M(a, b)$ ,

тобто:

$$\left| f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \right| \leq M;$$

3) виконано умову Ліпшица, тобто існує стала  $L = L(a, b)$  така, що для будь-яких  $(\bar{y}, \bar{y}', \dots, \bar{y}^{(n-1)})$ ,  $(\bar{\bar{y}}, \bar{\bar{y}}', \dots, \bar{\bar{y}}^{(n-1)}) \in \Pi$  виконано:

$$\left| f(x, \bar{y}, \bar{y}', \dots, \bar{y}^{(n-1)}) - f(x, \bar{\bar{y}}, \bar{\bar{y}}', \dots, \bar{\bar{y}}^{(n-1)}) \right| \leq L \left( |\bar{y} - \bar{\bar{y}}| + |\bar{y}' - \bar{\bar{y}}'| + \dots + |\bar{y}^{(n-1)} - \bar{\bar{y}}^{(n-1)}| \right).$$

Тоді існує єдиний розв'язок  $y = y(x)$  задачі Коші (3.1.2), (3.1.3), який визначений та неперервний разом зі своїми похідними до  $n$ -го порядку включно в проміжку  $|x - x_0| \leq h$ , де:

$$h = \min \left( a, \frac{b}{\max_{\Pi} \left( M, |y'|, \dots, |y^{(n-1)}| \right)} \right).$$

Доведення цієї теореми ми тут не наводимо.

**Означення.** Функція вигляду:

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n),$$

де  $C_1, C_2, \dots, C_n$  – довільні сталі, називається загальним розв'язком рівняння (11.15.2) в області  $D$ , якщо виконано наступні умови:

1) при будь-яких значеннях сталих  $C_1, C_2, \dots, C_n$  ця функція є розв'язком рівняння (11.15.2);

2) за рахунок відповідного обрання значень сталих  $C_1, C_2, \dots, C_n$  ця функція дозволяє розв'язати будь-яку задачу Коші (11.15.2), (11.15.3) з області  $D$ .



## 11.16. Диференціальні рівняння вищих порядків, що припускають зниження порядку

I. Рівняння, що не містить явно невідомої функції та її декількох послідовних перших похідних

Розглянемо рівняння вигляду:

$$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots, y^{(n)}) = 0. \quad (11.16.1)$$

Тобто рівняння не містить невідомої функції та її похідних до порядку  $(k-1)$  включно. А похідна  $k$ -го порядку від невідомої функції до цього рівняння входить обов'язково.

Введемо нову невідому функцію  $z$ , поклавши:

$$z = y^{(k)}. \quad (11.16.2)$$

Тоді рівняння (11.16.1) набуде вигляду:

$$F(x, z, z', \dots, z^{(n-k)}) = 0. \quad (11.16.3)$$

Це рівняння  $(n-k)$ -го порядку. Тобто ми знизили порядок рівняння на  $k$  одиниць.

Розглянемо, зокрема, *рівняння 2-го порядку, що не містить явно невідомої функції  $y$* :

$$F(x, y', y'') = 0. \quad (11.16.4)$$

Введемо заміну:

$$z = y'.$$

Тоді  $z' = y''$ , і ми приходимо до рівняння 1-го порядку:

$$F(x, z, z') = 0. \quad (11.16.5)$$

Припустимо, що нам вдалося знайти загальний розв'язок рівняння (11.16.5):

$$z = z(x, C_1).$$

Тоді загальний розв'язок рівняння (11.16.4) запишеться у вигляді:

$$y = \int z(x, C_1) dx + C_2.$$

*Приклад 1.* Зінтегрувати рівняння:

$$2xy'y'' = (y')^2 - 1.$$

Вводимо заміну:  $z = y'$ . Тоді  $z' = y''$ , і ми одержуємо рівняння:

$$2xzz' = z^2 - 1.$$

Це рівняння 1-го порядку з відокремленими змінними. Його загальний розв'язок має вигляд (перевірте самостійно):

$$z = \pm \sqrt{C_1 x + 1}$$

(розв'язки  $z = \pm 1$  одержуються з цієї формули при  $C_1 = 0$ ). Повертаючись до функції  $y$ , маємо:

а) при  $C_1 \neq 0$ :

$$y = \pm \int \sqrt{C_1 x + 1} dx = \pm \frac{1}{C_1} \cdot \frac{2(C_1 x + 1)^{3/2}}{3} + C_2;$$

б) при  $C_1 = 0$ :

$$y = \pm x + C.$$

*Приклад 2.* Зінтегрувати рівняння:

$$(y'')^3 + xy'' = 2y'.$$

Вводимо заміну:  $z = y'$ . Тоді  $z' = y''$ , і ми одержуємо рівняння:

$$(z')^3 + xz' = 2z.$$

А це рівняння 1-го порядку, не розв'язане відносно похідної. Але воно розв'язне відносно  $z$ . Запишемо його у вигляді:

$$z = \frac{1}{2} \left( (z')^3 + xz' \right).$$

Застосовуємо метод введення параметру. Покладаємо:

$$z' = p, \quad dz = p dx,$$

тоді рівняння набуває вигляду:

$$z = \frac{1}{2} (p^3 + xp). \quad (11.16.6)$$

Беремо повний диференціал від обох частин:

$$dz = \frac{1}{2} p dx + \frac{1}{2} (3p^2 + x) dp.$$

Або, враховуючи рівність  $dz = p dx$ , і, помножуючи обидві частини на 2:

$$(3p^2 + x) dp - \frac{1}{2} p dx = 0.$$

Якщо  $p = 0$ , то з рівності (11.16.6) отримуємо  $z = 0$ , отже  $y = C$ . Нехай тепер  $p \neq 0$ . Тоді приходимо до лінійного неоднорідного рівняння 1-го порядку:

$$\frac{dx}{dp} = \frac{x}{p} + 3p.$$

Його загальний розв'язок:

$$x(p) = C_1 p + 3p^2.$$

Підставляючи в (11.16.6), дістаємо:

$$z(p) = \frac{1}{2}(C_1 p^2 + 4p^3).$$

Як тепер знайти розв'язок  $y = y(x)$  початкового рівняння? Якщо функцію  $y(x)$  задано в параметричній формі  $x = x(p)$ ,  $y = y(p)$ , то:

$$y'_x = \frac{y'_p}{x'_p},$$

звідки:

$$y'_p = x'_p y'_x.$$

А оскільки  $y'_x = z = z(p)$ , то:

$$y'_p = z x'_p = \frac{1}{2}(C_1 p^2 + 4p^3)(C_1 + 6p) = \frac{C_1^2}{2} p^2 + 5C_1 p^3 + 12p^4.$$

Звідси знаходимо:

$$\begin{cases} x = C_1 p + 3p^2, \\ y = \frac{C_1^2}{6} p^3 + \frac{5}{4} C_1 p^4 + \frac{12}{5} p^5 + C_2, \\ y = C. \end{cases}$$

## II. Рівняння, що не містить явно незалежної змінної

Розглянемо рівняння вигляду:

$$F(y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0. \quad (11.16.7)$$

Тобто явно змінна  $x$  до цього рівняння не входить. Для інтегрування рівнянь такого типу застосовується наступний метод. Введемо нову невідому функцію  $p(y)$  за формулою:

$$y' = p(y). \quad (11.16.8)$$

Інакше кажучи, ми тепер вважаємо  $y$  незалежною змінною, а  $y'$  – невідомою функцією цієї змінної. Тоді матимемо:

$$y''_{xx} = \frac{d}{dx} \left( \frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{dx} (p(y)) = \frac{dp}{dy} \frac{dy}{dx} = p'_y p; \quad (11.16.9)$$

$$\begin{aligned} y'''_{xxx} &= \frac{d}{dx} \left( \frac{d^2 y}{dx^2} \right) = \frac{d}{dx} (p'_y p) = \frac{d}{dx} \left( \frac{dp}{dy} \right) p + \frac{dp}{dy} \frac{d}{dx} (p(y)) = \\ &= \frac{d^2 p}{dy^2} p^2 + \left( \frac{dp}{dy} \right)^2 p = p''_{yy} p^2 + (p'_y)^2 p. \end{aligned}$$

Отже, бачимо, що похідні за змінною  $x$  від функції  $y(x)$  виражаються через похідні порядку на одиницю меншим за змінною  $y$  від функції  $p(y)$ . Таким чином, порядок рівняння знижується на одиницю.

Розглянемо, зокрема, рівняння 2-го порядку, що не містить явно незалежної змінної  $x$ :

$$F(y, y', y'') = 0. \quad (11.16.10)$$

Вводячи підстановку (11.16.8), і, користуючись формулою (11.16.9), одержуємо рівняння 1-го порядку:

$$F(y, p, p'p) = 0.$$

Припустимо, що нам вдалося знайти його загальний розв'язок:

$$p = p(y, C_1).$$

Повертаючись до функції  $y$ , дістаємо:

$$\frac{dy}{dx} = p(y, C_1).$$

Це рівняння 1-го порядку з відокремлюваними змінними. Відокремлюючи змінні та інтегруючи, дістаємо загальний інтеграл рівняння (11.16.10):

$$x = \int \frac{dy}{p(y, C_1)} + C_2 \quad (11.16.11)$$

(звичайно, тут треба врахувати можливість втрати розв'язків).

Характерною особливістю формули (11.16.11) є те, що розв'язок отримується у вигляді залежності  $x$  від  $y$ , а не  $y$  від  $x$ .

*Приклад 3.* Зінтегрувати рівняння:

$$2yy'' = y^2 + (y')^2.$$

Рівняння не містить явно змінної  $x$ . Помітимо одразу, що розв'язком цього рівняння є функція  $y = 0$ . Надалі вважаємо, що  $y \neq 0$ . Вважаючи незалежною змінною  $y$ , а  $y' = p(y)$ , з урахуванням формули (11.16.9) маємо:

$$2yp'p = y^2 + p^2.$$

Або:

$$y(p^2)' = y^2 + p^2.$$

Покладемо:

$$u(y) = p^2.$$

Тоді приходимо до лінійного диференціального рівняння 1-го порядку:

$$u' = \frac{u}{y} + y.$$

Його загальний розв'язок має вигляд:

$$u = C_1 y + y^2.$$

Отже:

$$p = \pm \sqrt{C_1 y + y^2}.$$

Або:

$$y' = \pm \sqrt{C_1 y + y^2}.$$

Прийшли до рівняння з відокремлюваними змінними. Відокремлюючи змінні та інтегруючи, дістаємо:

$$x = \pm \ln \left| y + \frac{C_1}{2} + \sqrt{C_1 y + y^2} \right| + C_2, \quad y = 0.$$

III. Рівняння, однорідне відносно невідомої функції та її похідних  
Розглянемо рівняння:

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0, \quad (11.16.12)$$

де функція  $F$  є однорідною відносно  $y, y', y'', \dots, y^{(n)}$ , тобто для будь-якого  $k$  справджується тотожність:

$$F(x, ky, ky', ky'', \dots, ky^{(n)}) = k^m F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}).$$

Інакше кажучи, рівняння (11.16.12) не змінюється при одночасній заміні змінних  $y, y', y'', \dots, y^{(n)}$  відповідно на  $ky, ky', ky'', \dots, ky^{(n)}$ .

У цьому випадку порядок рівняння знижується за допомогою підстановки:

$$y' = uz, \quad (11.16.13)$$

де  $z$  – нова невідома функція.

*Приклад 4.* Зінтегрувати рівняння:

$$xyy'' + x(y')^2 - yy' = 0. \quad (11.16.14)$$

Легко переконатися, що це рівняння є однорідним. Помітимо, що будь-яка стала є його розв'язком, тобто сім'я розв'язків  $y = C$  знаходиться одразу. Далі робимо заміну  $y' = uz$ . Тоді  $y'' = y(z^2 + z')$ , і, підставляючи в рівняння (11.16.14), дістаємо:

$$xy^2(z^2 + z') + xy^2z^2 - y^2z = 0.$$

Скорочуючи на  $y^2$  (розв'язок  $y = 0$  вже враховано), одержуємо:

$$2xz^2 + xz' - z = 0.$$

Або:

$$z' = \frac{z}{x} - 2z^2.$$

Це рівняння Бернуллі. Інтегруючи його, дістаємо:

$$z = \frac{x}{x^2 + C_1}, \quad z = 0.$$

Повертаючись до функції  $y$ , одержуємо рівняння з відокремленими змінними:

$$y' = \frac{yx}{x^2 + C_1}.$$

Інтегруючи його, остаточно отримуємо загальний розв'язок рівняння (11.16.14):

$$y = C_2 \sqrt{x^2 + C_1}, \quad y = C.$$

Розглянемо лінійне рівняння 2-го порядку:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \quad (11.16.15)$$

де функції  $p(x)$ ,  $q(x)$  неперервні на інтервалі  $(\alpha, \beta)$ . У загальному випадку рівняння (11.16.15) не інтегрується навіть у квадратурах. Але легко бачити, що воно також є однорідним у вказаному сенсі. Враховуючи його очевидний розв'язок  $y = 0$ , і, покладаючи  $y' = yz$ , отже  $y'' = y(z^2 + z')$ , дістаємо:

$$z' = -q(x) - p(x)z - z^2. \quad (11.16.16)$$

Це рівняння Ріккаті. Тобто від рівняння 2-го порядку, але лінійного, ми прийшли до рівняння 1-го порядку, але нелінійного (яке теж у загальному випадку в квадратурах не інтегрується). В одному сенсі виграли, в іншому програли. Але якщо ми зможемо знайти загальний розв'язок рівняння (11.16.16), то ми зможемо знайти й загальний розв'язок рівняння (11.16.15).

#### IV. Рівняння, ліва частина якого є повною похідною

Припустимо, що ліва частина рівняння:

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (11.16.17)$$

є повною похідною за змінною  $x$  від деякої функції  $\Phi(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ , тобто:

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = \frac{d}{dx} \Phi(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}).$$

Тоді рівняння (11.16.17) набуває вигляду:

$$\frac{d}{dx} \Phi(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) = 0,$$

і отже:

$$\Phi(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) = C_1,$$

тобто порядок рівняння знизився на одиницю.

*Приклад 5.* Зінтегрувати рівняння:

$$yy'' = y'(y' + 1). \quad (11.16.18)$$

Поділимо обидві частини рівняння на  $y(y' + 1)$  (розв'язки, що при цьому втрачаються, дослідимо пізніше):

$$\frac{y''}{y' + 1} = \frac{y'}{y}.$$

Або:

$$(\ln(y' + 1))' = (\ln y)'$$

Обидві частини рівняння є повними похідними. Отже:

$$\ln(y' + 1) = \ln y + \ln C_1 = \ln C_1 y.$$

Таким чином:

$$y' + 1 = C_1 y.$$

Це рівняння 1-го порядку з відокремлюваними змінними. Інтегруючи його, дістаємо:

$$y = \frac{1 + C_2 e^{C_1 x}}{C_1}.$$

Це й є загальний розв'язок рівняння (11.16.18). Крім того, при діленні на  $y(y' + 1)$  ми втратили розв'язки  $y = 0$  та  $y = C - x$ . Отже, остаточно:

$$y = \frac{1 + C_2 e^{C_1 x}}{C_1}, \quad y = C - x, \quad y = 0.$$

## 11.17. Лінійні диференціальні рівняння $n$ -го порядку.

### Основні поняття

**Означення.** Лінійним диференціальним рівнянням  $n$ -ого порядку називається рівняння наступного вигляду:

$$y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + p_{n-2}(x)y^{(n-2)} + \dots + p_1(x)y' + p_0(x)y = f(x). \quad (11.17.1)$$

Функції  $p_0(x), \dots, p_{n-1}(x)$  називаються *коефіцієнтами* рівняння (11.17.1), а функція  $f(x)$  – *правою частиною* або *вільним членом* цього рівняння.

Вважатимемо, що коефіцієнти рівняння (11.17.1) та його права частина визначено на деякому інтервалі  $(\alpha, \beta)$ . Нехай  $x_0$  – довільна точка цього інтервалу. Задамо в цій точці початкові умови для рівняння (11.17.1):

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0, \quad y''(x_0) = y''_0, \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}, \quad (11.17.2)$$

де  $y_0, y'_0, y''_0, \dots, y_0^{(n-1)}$  – довільні числа.

**Теорема.** *Нехай коефіцієнти рівняння (11.17.1) та його права частина неперервні на інтервалі  $(\alpha, \beta)$ . Тоді задача Коші (11.17.1), (11.17.2) має єдиний розв'язок, який визначений та  $n$  разів диференційований на всьому інтервалі  $(\alpha, \beta)$ .*

Доведення цієї теореми ми тут не наводимо.

Існує строга послідовна теорія рівнянь вигляду (11.17.1). Ми обмежимося викладенням її основ тільки для рівнянь 2-го порядку, тобто рівнянь вигляду:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x), \quad (11.17.3)$$

де  $p(x), q(x), f(x)$  – неперервні на інтервалі  $(\alpha, \beta)$  функції.

Якщо  $f(x) \equiv 0$  на інтервалі  $(\alpha, \beta)$ , то рівняння (11.17.3) називається *однорідним*:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0. \quad (11.17.4)$$

У протилежному випадку рівняння (11.17.3) називається *неоднорідним*.



## 11.18. Властивості розв'язків лінійного однорідного рівняння 2-ого порядку

Тут ми розглянемо важливі властивості розв'язків лінійного однорідного рівняння 2-го порядку:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0. \quad (11.18.1)$$

**Теорема.** Нехай  $y_1(x), y_2(x)$  – розв'язки рівняння (11.18.1). Тоді їх лінійна комбінація:

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x), \quad (11.18.2)$$

де  $C_1, C_2$  – довільні сталі, також є розв'язком рівняння (11.18.1).

**Доведення.** Підставимо вираз (11.18.2) в ліву частину рівняння (11.18.1):

$$\begin{aligned} & (C_1 y_1 + C_2 y_2)'' + p(x)(C_1 y_1 + C_2 y_2)' + q(x)(C_1 y_1 + C_2 y_2) = \\ & = C_1 (y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1) + C_2 (y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2) = 0 \end{aligned}$$

(вирази в обох дужках дорівнюють нулю, оскільки  $y_1(x), y_2(x)$  – розв'язки рівняння (11.18.1)), тобто  $y(x)$  є розв'язком рівняння (11.18.1), що й треба було довести.

Виникає питання: чи буде лінійна комбінація 2-х розв'язків рівняння (11.18.1):

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x),$$

де  $C_1, C_2$  – довільні сталі, давати загальний розв'язок рівняння (11.18.1)? Щоб відповісти на це питання, введемо наступне означення.

**Означення.** Функції  $y_1(x), y_2(x)$  називаються *лінійно залежними (ЛЗ)* на інтервалі  $(\alpha, \beta)$ , якщо існують такі константи  $C_1, C_2$ , з яких хоч би одна не дорівнює нулю, що  $\forall x \in (\alpha, \beta)$  виконано:

$$C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) = 0. \quad (11.18.3)$$

Якщо рівність (11.18.3)  $\forall x \in (\alpha, \beta)$  можлива тільки тоді, коли  $C_1 = C_2 = 0$ , то функції  $y_1(x), y_2(x)$  називаються *лінійно незалежними (ЛНЗ)* на інтервалі  $(\alpha, \beta)$ .

Припустимо, що функції  $y_1(x)$ ,  $y_2(x)$  ЛЗ на  $(\alpha, \beta)$ . Тоді існує пара сталих  $C_1, C_2$ , з яких хоча б одна відмінна від нуля, така, що на проміжку  $(\alpha, \beta)$  виконано тотожність:

$$C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) \equiv 0. \quad (11.18.4)$$

Припустимо для визначеності, що  $C_2 \neq 0$ . Тоді тотожність (11.18.4) можна переписати так:

$$y_2(x) \equiv -\frac{C_1}{C_2} y_1(x), \quad x \in (\alpha, \beta).$$

Позначивши  $k = -\frac{C_1}{C_2}$ , одержуємо:

$$y_2(x) = k y_1(x),$$

тобто функції  $y_1(x), y_2(x)$  мають бути пропорційними на проміжку  $(\alpha, \beta)$ . Або, якщо переписати так:

$$\frac{y_2(x)}{y_1(x)} = k,$$

то можна сказати, що відношення функцій  $y_1(x), y_2(x)$  у випадку їх лінійної залежності має бути сталою величиною (тут ми маємо на увазі, що це відношення визначено в усіх точках проміжку  $(\alpha, \beta)$ ). Легко довести й обернене твердження: якщо відношення функцій  $y_1(x), y_2(x)$  на проміжку  $(\alpha, \beta)$  є сталою величиною, то ці функції є лінійно залежними на проміжку  $(\alpha, \beta)$ . Відповідно, функції  $y_1(x), y_2(x)$  будуть лінійно незалежними на проміжку  $(\alpha, \beta)$  тоді і тільки тоді, коли їх відношення не є сталим на цьому проміжку.

Наприклад, функції  $y_1(x) = e^x$ ,  $y_2(x) = -2e^x$  лінійно залежні на проміжку  $(-\infty, +\infty)$ , їх відношення є сталою величиною. А функції  $y_1 = \cos x$ ,  $y_2 = \sin x$  – лінійно незалежні на проміжку  $(-\infty, +\infty)$ , оскільки:

$$\frac{y_2}{y_1} = \operatorname{tg} x$$

не є сталою на  $(-\infty, +\infty)$ . Функції  $y_1 = x^n$ ,  $y_2 = x^m$  ( $n, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ,  $n \neq m$ ) ЛНЗ на будь-якому інтервалі  $(\alpha, \beta)$ . Дійсно:

$$\frac{y_2(x)}{y_1(x)} = \frac{x^m}{x^n} = x^{m-n} \neq \operatorname{const}.$$

Нехай функції  $y_1(x)$ ,  $y_2(x)$  диференційовні в інтервалі  $(\alpha, \beta)$ .

**Означення.** *Визначником Вронського (або вронскіаном) диференційовних функцій  $y_1(x)$ ,  $y_2(x)$  називається визначник:*

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x).$$

Назва за ім'ям польського математика Юзефа Вронського (1778–1853 рр.).

**Теорема.** *Якщо диференційовні на інтервалі  $(\alpha, \beta)$  функції  $y_1(x)$ ,  $y_2(x)$  – ЛЗ на інтервалі  $(\alpha, \beta)$ , то їх визначник Вронського тожможно дорівнює нулю на  $(\alpha, \beta)$ .*

**Доведення.** Дійсно, оскільки  $y_1(x)$ ,  $y_2(x)$  – ЛЗ на  $(\alpha, \beta)$ , то існують такі константи  $C_1, C_2$ , з яких хоча б одна не дорівнює нулю, такі, що  $\forall x \in (\alpha, \beta): C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) = 0$ . Припускаючи для визначеності, що  $C_2 \neq 0$ , одержуємо:

$$y_2(x) = -\frac{C_1}{C_2} y_1(x).$$

Складемо визначник Вронського:

$$\begin{aligned} W(x) &= \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1(x) & -\frac{C_1}{C_2} y_1(x) \\ y_1'(x) & -\frac{C_1}{C_2} y_1'(x) \end{vmatrix} = \\ &= -\frac{C_1}{C_2} y_1'(x) y_1(x) + \frac{C_1}{C_2} y_1(x) y_1'(x) \equiv 0, \end{aligned}$$

що й треба було довести.

**Зауваження.** Обернене твердження до цієї теореми несправедливе, тобто з того, що визначник Вронського двох функцій

$y_1(x), y_2(x)$  тотожно дорівнює нулю на інтервалі  $(\alpha, \beta)$ , взагалі кажучи, не впливає їх лінійна залежність на цьому інтервалі.

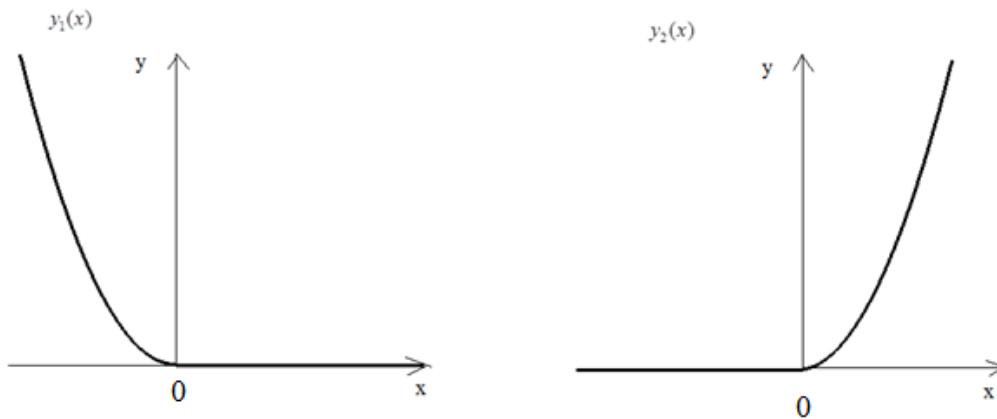
*Приклад.* Нехай задано дві функції:

$$y_1(x) = \begin{cases} 0, & x \geq 0, \\ x^2, & x < 0, \end{cases} \quad y_2(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Графіки цих функцій наведено на рис. 11.17.

Маємо:

$$y_1'(x) = \begin{cases} 0, & x \geq 0, \\ 2x, & x < 0, \end{cases} \quad y_2'(x) = \begin{cases} 2x, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$



**Рис. 11.17**

Отже, визначник Вронського цих функцій дорівнює нулю  $\forall x \in (-\infty, +\infty)$ . Тем не менш, ці функції лінійно незалежні на проміжку  $(-\infty, +\infty)$ , оскільки  $y_1/y_2 = 0$  при  $x > 0$ , і  $y_1/y_2$  не існує при  $x < 0$ .

**Наслідок.** Якщо вронскіан  $W(x)$  функцій  $y_1(x), y_2(x)$  відмінний від нуля хоча б в одній точці інтервалу  $(\alpha, \beta)$ , то функції  $y_1(x), y_2(x)$  лінійно незалежні на цьому інтервалі.

Знову ж таки, обернене твердження для цього наслідку несправедливе, що показується тим самим вищенаведеним прикладом.

Таким чином, рівність нулю визначника Вронського є тільки необхідною умовою ЛЗ функцій  $y_1(x), y_2(x)$ , але не достатньою. Але

якщо підпорядкувати ці функції деяким додатковим властивостям, то означена умова може стати і достатньою.

**Теорема.** Якщо функції  $y_1(x), y_2(x)$  – ЛНЗ розв’язки на інтервалі  $(\alpha, \beta)$  лінійного однорідного рівняння (11.18.1), причому коефіцієнти  $p(x), q(x)$  цього рівняння неперервні на інтервалі  $(\alpha, \beta)$ , то визначник Вронського цих розв’язків не дорівнює нулю у жодній точці інтервалу  $(\alpha, \beta)$ .

**Доведення.** Припустимо протилежне, тобто припустимо, що  $\exists x_0 \in (\alpha, \beta)$  таке, що  $W(x_0) = 0$ . Складемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) = 0, \\ C_1 y_1'(x_0) + C_2 y_2'(x_0) = 0, \end{cases}$$

де  $C_1, C_2$  – невідомі. Оскільки визначник цієї системи  $W(x_0) = 0$ , то система має ненульовий розв’язок  $(C_1, C_2)$ . Хоч би одне з цих чисел не дорівнює нулю. Розглянемо:

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x),$$

де  $C_1, C_2$  – той самий ненульовий розв’язок. Ця функція є розв’язком рівняння (11.18.1), як лінійна комбінація його розв’язків. Крім того:

$$y(x_0) = C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) = 0,$$

$$y'(x_0) = C_1 y_1'(x_0) + C_2 y_2'(x_0) = 0,$$

тобто ця функція задовольняє початкові умови:  $y(x_0) = y'(x_0) = 0$ .

Але ті самі початкові умови задовольняє розв’язок  $y \equiv 0$  рівняння (11.18.1). А на підставі теореми існування та єдиності розв’язку задачі Коші (див. п. 11.17) дістаємо, що  $y(x) = 0 \quad \forall x \in (\alpha, \beta)$ , тобто існують числа  $C_1, C_2$ , з яких хоча б одне не нуль, а у той же час  $C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) = 0 \quad \forall x \in (\alpha, \beta)$ . А це означає, що  $y_1(x), y_2(x)$  – ЛЗ на  $(\alpha, \beta)$ , що суперечить умові теореми. Отже,  $W(x) \neq 0 \quad \forall x \in (\alpha, \beta)$ .

З останніх двох теорем випливає, що для того, щоб розв’язки  $y_1(x), y_2(x)$  лінійного однорідного рівняння (11.18.1) були ЛНЗ на інтервалі  $(\alpha, \beta)$ , необхідно і достатньо, щоб визначник Вронського цих розв’язків не перетворювався на нуль у жодній точці цього інтервалу. Дійсно, якщо розв’язки  $y_1(x), y_2(x)$  лінійно незалежні на інтер-

валі  $(\alpha, \beta)$ , то  $W(x) \neq 0 \quad \forall x \in (\alpha, \beta)$ . З іншого боку, якщо  $W(x) \neq 0 \quad \forall x \in (\alpha, \beta)$ , то розв'язки  $y_1(x), y_2(x)$  лінійно незалежні на інтервалі  $(\alpha, \beta)$ , оскільки, якби вони були лінійно залежними, то  $W(x) = 0 \quad \forall x \in (\alpha, \beta)$ .

Для встановлення лінійної незалежності двох розв'язків рівняння (11.18.1), достатньо перекоонатися в тому, що їх вронскіан не перетворюється на нуль хоча б в одній точці інтервалу  $(\alpha, \beta)$ . Це випливає з наступних властивостей вронскіана розв'язків рівняння (11.18.1).

1. *Якщо вронскіан двох розв'язків рівняння (11.18.1) дорівнює нулю хоча б в одній точці інтервалу  $(\alpha, \beta)$ , в якому всі коефіцієнти рівняння (11.18.1) неперервні, то він дорівнює нулю в усіх точках цього інтервалу.*

Дійсно, якщо існує  $x_0 \in (\alpha, \beta)$  таке, що  $W(x_0) = 0$ , то за попередньою теоремою розв'язки  $y_1(x), y_2(x)$  лінійно залежні на інтервалі  $(\alpha, \beta)$ , а тоді  $W(x) = 0 \quad \forall x \in (\alpha, \beta)$ .

2. *Якщо вронскіан двох розв'язків рівняння (11.18.1) відмінний від нуля хоча б в одній точці  $x_0 \in (\alpha, \beta)$ , то він відмінний від нуля в усіх точках цього інтервалу.*

Дійсно, припустимо, що існує  $x_1 \in (\alpha, \beta)$  таке, що  $W(x_1) = 0$ . Тоді за попередньою властивістю  $W(x) = 0 \quad \forall x \in (\alpha, \beta)$ , у тому числі  $W(x_0) = 0$ , що суперечить умові.

Таким чином, для лінійної незалежності двох розв'язків рівняння (11.18.1) з неперервними на інтервалі  $(\alpha, \beta)$  коефіцієнтами, необхідно і достатньо, щоб їх вронскіан був відмінний від нуля хоча б в одній точці інтервалу  $(\alpha, \beta)$ .

### **11.19. Фундаментальна система розв'язків лінійного однорідного рівняння 2-го порядку**

**Означення.** Кажуть, що розв'язки  $y_1(x), y_2(x)$  рівняння (11.18.1) утворюють фундаментальну систему розв'язків (ФСР) рівняння

(11.18.1) на інтервалі  $(\alpha, \beta)$ , якщо ці розв'язки визначені та лінійно незалежні на інтервалі  $(\alpha, \beta)$ .

З викладеного у п. 11.18 випливає, що для того, щоб система розв'язків  $y_1(x), y_2(x)$  рівняння (11.18.1) була фундаментальною, необхідно і достатньо, щоб вронскіан цієї системи розв'язків був відмінний від нуля хоча б в одній точці інтервалу  $(\alpha, \beta)$ .

*Приклад.* Покажемо, що функції  $y_1 = \frac{\cos x}{\sqrt{x}}$ ,  $y_2 = \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$  утворюють

ФСР рівняння Бесселя:

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{1}{4x^2}\right)y = 0 \quad (11.19.1)$$

в будь-якому інтервалі, що не містить точку  $x = 0$ . Дійсно, безпосередньо можна перевірити, що функції  $y_1(x), y_2(x)$  є розв'язками рівняння (11.19.1) (зробіть це самостійно). Відношення цих функцій  $y_1/y_2 = \operatorname{ctg} x$  не є сталим, отже ці функції лінійно незалежні. З цього випливає, що вони дійсно утворюють ФСР рівняння (11.19.1).

**Зауваження.** В лінійній незалежності функцій  $y_1(x), y_2(x)$  ми тепер можемо переконатися ще й за допомогою вронскіана цих функцій. Дійсно:

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\cos x}{\sqrt{x}} & \frac{\sin x}{\sqrt{x}} \\ -\frac{\sin x}{\sqrt{x}} - \frac{\cos x}{2\sqrt{x^3}} & \frac{\cos x}{\sqrt{x}} - \frac{\sin x}{2\sqrt{x^3}} \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{x}} \neq 0.$$

**Теорема (про існування ФСР).** Якщо коефіцієнти рівняння (11.18.1) неперервні на інтервалі  $(\alpha, \beta)$ , то існує ФСР цього рівняння, визначених і неперервних на цьому інтервалі.

**Доведення.** Оберемо точку  $x_0 \in (\alpha, \beta)$  та побудуємо розв'язок  $y_1(x)$  рівняння (11.18.1), що задовольняє початкові умови:

$$y_1(x_0) = 1, \quad y_1'(x_0) = 0. \quad (11.19.2)$$

Далі побудуємо розв'язок  $y_2(x)$ , що задовольняє початкові умови:

$$y_2(x_0) = 0, \quad y_2'(x_0) = 1. \quad (11.19.3)$$

Оскільки коефіцієнти рівняння (11.18.1) за умовою неперервні на інтервалі  $(\alpha, \beta)$ , то згідно з теоремою існування та єдиності (див. п. 11.17) ці розв'язки існують і визначаються єдиним чином.

Обчислимо визначник Вронського цих розв'язків у точці  $x_0$ :

$$W(x_0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Отже,  $y_1(x), y_2(x)$  – ФСР рівняння (11.18.1). Теорему доведено.

**Зауваження.** ФСР рівняння (11.18.1) не є єдиною. Існує безліч ФСР цього рівняння. Дійсно, помноживши всі функції  $y_1(x), y_2(x)$  на будь-яку сталу  $k \neq 0$ , ми знову одержимо ФСР того ж рівняння.

### 11.20. Структура загального розв'язку лінійного однорідного рівняння 2-го порядку

**Теорема.** Якщо  $y_1(x), y_2(x)$  – ФСР рівняння (11.18.1), коефіцієнти якого визначені на інтервалі  $(\alpha, \beta)$ , то формула:

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x), \quad (11.20.1)$$

де  $C_1, C_2$  – довільні сталі, дає загальний розв'язок рівняння (11.18.1).

**Доведення.** Функція (11.20.1) є розв'язком рівняння (11.18.1) як лінійна комбінація його розв'язків. Покажемо, що за рахунок обрання сталих  $C_1, C_2$  можна задовольнити будь-які початкові умови для рівняння (11.18.1). Оберемо довільне  $x_0 \in (\alpha, \beta)$  і довільні  $y_0, y'_0$  і розглянемо початкові умови:

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0. \quad (11.20.2)$$

Підставимо вираз (11.20.1) в початкові умови (11.20.2). Дістанемо систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно сталих  $C_1, C_2$ :

$$\begin{cases} y(x_0) = C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) = y_0, \\ y'(x_0) = C_1 y_1'(x_0) + C_2 y_2'(x_0) = y'_0. \end{cases} \quad (11.20.3)$$



Визначником цієї системи є визначник Вронського ФСР  $y_1(x), y_2(x)$ , обчислений в точці  $x_0$ , отже він відмінний від нуля. Тому система (11.20.3) має єдиний розв'язок  $C_1 = C_{10}, C_2 = C_{20}$ . Таким чином, розв'язок

$$\tilde{y} = C_{10}y_1 + C_{20}y_2$$

задовольняє початкові умови (11.20.2). Теорему доведено.

Наприклад, загальний розв'язок рівняння Бесселя (11.19.1) в будь-якому інтервалі, що не містить точку  $x = 0$ , дається формулою:

$$y = C_1 \frac{\cos x}{\sqrt{x}} + C_2 \frac{\sin x}{\sqrt{x}}.$$

**Теорема.** *Рівняння (11.18.1) не може мати більше, ніж 2 лінійно незалежні розв'язки.*

**Доведення.** Припустимо протилежне. Нехай рівняння (11.18.1) має 3 лінійно незалежні частинні розв'язки  $y_1(x), y_2(x), y_3(x)$ . Розглянемо розв'язки  $y_1(x), y_2(x)$ . Вони теж мають бути лінійно незалежними (в протилежному випадку розв'язки  $y_1(x), y_2(x), y_3(x)$  також будуть лінійно залежними). Отже, розв'язки  $y_1(x), y_2(x)$  утворюють ФСР рівняння (11.18.1), а тоді розв'язок  $y_3(x)$ , виражається формулою:

$$y_3(x) = C_{10}y_1(x) + C_{20}y_2(x).$$

А це означає, що розв'язки  $y_1(x), y_2(x), y_3(x)$  лінійно залежні. Теорему доведено.

## 11.21. Структура загального розв'язку лінійного неоднорідного рівняння 2-го порядку

Розглянемо тепер лінійне неоднорідне рівняння 2-го порядку:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x), \quad (11.21.1)$$

де  $p(x), q(x), f(x)$  – неперервні на інтервалі  $(\alpha, \beta)$  функції.

А також відповідне йому лінійне однорідне рівняння:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0. \quad (11.21.2)$$

**Теорема.** Загальний розв'язок рівняння (11.21.1) є сумою загального розв'язку відповідного однорідного рівняння (11.21.2) і будь-якого частинного розв'язку рівняння (11.21.1).

Тобто:

$$y(x) = \bar{y}(x) + z(x), \quad (11.21.3)$$

де  $y(x)$  – загальний розв'язок рівняння (11.21.1),  $\bar{y}(x)$  – загальний розв'язок рівняння (11.21.2),  $z(x)$  – частинний розв'язок рівняння (11.21.1).

**Доведення.** Покажемо спочатку, що функція, що визначається рівністю (11.21.3), є розв'язком рівняння (11.21.1). Дійсно, підставимо вираз (11.21.3) у рівняння (11.21.1):

$$\begin{aligned} & \bar{y}''(x) + z''(x) + p(x)(\bar{y}'(x) + z'(x)) + q(x)(\bar{y}(x) + z(x)) =, \\ & = \bar{y}''(x) + p(x)\bar{y}'(x) + q(x)\bar{y}(x) + z''(x) + p(x)z'(x) + q(x)z(x) = \\ & = 0 + f(x) = f(x). \end{aligned}$$

Нехай  $y_1(x), y_2(x)$  – ФСР рівняння (11.21.2) на інтервалі  $(\alpha, \beta)$ .

Тоді:

$$\bar{y}(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x),$$

де  $C_1, C_2$  – довільні сталі. Підставляючи цей вираз до рівності (11.21.3), дістанемо:

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + z(x). \quad (11.21.4)$$

Задамо довільні початкові умови:

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0, \quad (11.21.5)$$

де  $x_0$  – довільна точка інтервалу  $(\alpha, \beta)$ . Покажемо, що за рахунок відповідного обрання значень сталих  $C_1, C_2$  можна ці умови задовольнити. Дійсно, підставимо вираз (11.21.4) в умови (11.21.5). Дістанемо систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно сталих  $C_1, C_2$ :

$$\begin{cases} C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) + z(x_0) = y_0, \\ C_1 y_1'(x_0) + C_2 y_2'(x_0) + z'(x_0) = y'_0. \end{cases}$$

Або:

$$\begin{cases} C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) = y_0 - z(x_0), \\ C_1 y_1'(x_0) + C_2 y_2'(x_0) = y_0' - z'(x_0). \end{cases} \quad (11.21.6)$$

Визначником системи (11.21.6) є визначник Вронського ФСР  $y_1(x)$ ,  $y_2(x)$ , обчислений в точці  $x_0$ , тому він відмінний від нуля, і, отже, система (11.21.6) має єдиний розв'язок  $C_1 = C_{10}$ ,  $C_2 = C_{20}$ . Підставляючи цей розв'язок у формулу (11.21.4), дістаємо шуканий розв'язок задачі Коші (11.21.1), (11.21.5).

Теорему доведено.

*Приклад.* Знайти загальний розв'язок рівняння:

$$y'' + y = x. \quad (11.21.7)$$

Функції  $y_1 = \cos x$ ,  $y_2 = \sin x$  утворюють ФСР однорідного рівняння:

$$y'' + y = 0$$

на інтервалі  $(-\infty, +\infty)$  – перевірте самостійно. Легко також перевірити, що функція  $z = x$  є частинним розв'язком рівняння (11.21.7). Отже, загальний розв'язок цього рівняння має вигляд:

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + x.$$

**Теорема (принцип суперпозиції).** *Нехай права частина рівняння (11.21.1) є сумою двох доданків  $f_1(x)$ ,  $f_2(x)$ , неперервних в інтервалі  $(\alpha, \beta)$ , тобто рівняння має вигляд:*

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f_1(x) + f_2(x). \quad (11.21.8)$$

*Нехай  $z_1$  – частинний розв'язок рівняння:*

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f_1(x),$$

*а  $z_2$  – частинний розв'язок рівняння:*

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f_2(x).$$

*Тоді функція  $z_1 + z_2$  є частинним розв'язком рівняння (11.21.8).*

**Доведення.** Маємо:

$$\begin{aligned} (z_1(x) + z_2(x))'' + p(x)(z_1(x) + z_2(x))' + q(x)(z_1(x) + z_2(x)) &= \\ = z_1''(x) + p(x)z_1'(x) + q(x)z_1(x) + z_2''(x) + p(x)z_2'(x) + q(x)z_2(x) &= \end{aligned}$$

$$= f_1(x) + f_2(x),$$

з чого й випливає твердження теореми.

Принцип суперпозиції справджується саме для лінійних рівнянь. Для нелінійних рівнянь його не виконано. З фізичної точки зору він означає, що підсумковий результат дії на лінійну систему декількох незалежних один від одного факторів дорівнює сумі результатів дій кожного фактору окремо.

### 11.22. Метод варіації довільних сталих

Покажемо, що якщо відомо ФСР  $y_1(x)$ ,  $y_2(x)$  лінійного однорідного рівняння (11.21.2) на інтервалі  $(\alpha, \beta)$ , в якому коефіцієнти рівняння (11.21.1) і функція  $f(x)$  неперервні, то загальний розв'язок рівняння (11.21.1) можна знайти в квадратурах, тобто у вигляді інтегралів від відомих функцій.

Загальний розв'язок рівняння (11.21.2) має вигляд:

$$\bar{y}(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x).$$

Шукатимемо загальний розв'язок рівняння (11.21.1) у такому ж вигляді. Але замість довільних сталих  $C_1$ ,  $C_2$  візьмемо деякі, поки що невідомі функції  $C_1(x)$ ,  $C_2(x)$ . Тобто покладемо:

$$y(x) = C_1(x) y_1(x) + C_2(x) y_2(x). \quad (11.22.1)$$

Здиференціюємо вираз (11.22.1):

$$y'(x) = C_1'(x) y_1(x) + C_2'(x) y_2(x) + C_1(x) y_1'(x) + C_2(x) y_2'(x).$$

Покладемо:

$$C_1'(x) y_1(x) + C_2'(x) y_2(x) = 0.$$

Тоді:

$$y'(x) = C_1(x) y_1'(x) + C_2(x) y_2'(x).$$

Цей вираз знову здиференціюємо. Дістанемо:

$$y''(x) = C_1(x) y_1''(x) + C_2(x) y_2''(x) + C_1'(x) y_1'(x) + C_2'(x) y_2'(x).$$

Підставимо вирази для  $y(x)$ ,  $y'(x)$ ,  $y''(x)$  у рівняння (11.21.1):

$$\begin{aligned}
& y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = \\
& = C_1(x)y_1''(x) + C_2(x)y_2''(x) + C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) + \\
& + p(x)(C_1(x)y_1'(x) + C_2(x)y_2'(x)) + q(x)(C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x)) = f(x).
\end{aligned}$$

Або, розкриваючи дужки і перегруповуючи доданки, дістаємо:

$$\begin{aligned}
& C_1(x)(y_1''(x) + p(x)y_1'(x) + q(x)y_1(x)) + \\
& + C_2(x)(y_2''(x) + p(x)y_2'(x) + q(x)y_2(x)) + C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) = f(x).
\end{aligned}$$

Вирази у дужках дорівнюють нулю, оскільки  $y_1(x)$ ,  $y_2(x)$  – розв’язки лінійного однорідного рівняння (11.21.2). Тому остання рівність набуде вигляду:

$$C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) = f(x).$$

Таким чином, для визначення функцій  $C_1(x)$ ,  $C_2(x)$  дістаємо наступну систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) = 0, \\ C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) = f(x). \end{cases} \quad (11.22.2)$$

Система (11.22.2) в той же час є системою лінійних алгебраїчних рівнянь відносно функцій  $C_1'(x)$ ,  $C_2'(x)$ . Визначником цієї системи є визначник Вронського ФСР  $y_1(x)$ ,  $y_2(x)$ , отже він відмінний від нуля в інтервалі  $(\alpha, \beta)$ , і тому ця система має єдиний розв’язок:

$$C_1'(x) = \varphi_1(x), \quad C_2'(x) = \varphi_2(x).$$

Звідси:

$$C_1(x) = \int \varphi_1(x) dx + C_1, \quad C_2(x) = \int \varphi_2(x) dx + C_2, \quad (11.22.3)$$

де  $C_1, C_2$  – вже справжні довільні сталі. Підставляючи вирази (11.22.3) у вираз (11.22.1), дістанемо:

$$\begin{aligned}
y & = \left( \int \varphi_1(x) dx + C_1 \right) y_1 + \left( \int \varphi_2(x) dx + C_2 \right) y_2 = \\
& = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + y_1(x) \int \varphi_1(x) dx + y_2(x) \int \varphi_2(x) dx. \quad (11.22.4)
\end{aligned}$$

Покладемо тут  $C_1 = C_2 = 0$ . Тоді одержимо частинний розв’язок рівняння (11.21.1):

$$z(x) = y_1(x) \int \varphi_1(x) dx + y_2(x) \int \varphi_2(x) dx.$$

Таким чином, вираз (11.22.4) можна записати у вигляді (11.21.3), отже розв'язок, що визначається формулою (11.22.4), є загальним розв'язком рівняння (11.21.1) на інтервалі  $(\alpha, \beta)$ .

*Приклад.* Знайти загальний розв'язок рівняння:

$$y'' + \frac{2}{x}y' + y = \frac{1}{x}. \quad (11.22.5)$$

Функції  $y_1 = \frac{\cos x}{x}$ ,  $y_2 = \frac{\sin x}{x}$  утворюють ФСР однорідного рівняння:

$$y'' + \frac{2}{x}y' + y = 0 \quad (11.22.6)$$

в будь-якому інтервалі, що не містить точку  $x = 0$  (перевірте самостійно). Тому загальний розв'язок рівняння (11.22.6) має вигляд:

$$\bar{y} = C_1 \frac{\cos x}{x} + C_2 \frac{\sin x}{x},$$

де  $C_1, C_2$  – довільні сталі. Загальний розв'язок рівняння (11.22.5) шукаємо у вигляді:

$$y = C_1(x) \frac{\cos x}{x} + C_2(x) \frac{\sin x}{x}. \quad (11.22.7)$$

Система (11.22.2) у даному випадку має вигляд:

$$\begin{cases} C_1'(x) \frac{\cos x}{x} + C_2'(x) \frac{\sin x}{x} = 0, \\ -C_1'(x) \left( \frac{\sin x}{x} + \frac{\cos x}{x^2} \right) + C_2'(x) \left( \frac{\cos x}{x} - \frac{\sin x}{x^2} \right) = \frac{1}{x}. \end{cases}$$

Розв'язуючи цю систему, дістаємо:

$$C_1'(x) = -\sin x, \quad C_2'(x) = \cos x.$$

Звідси:

$$C_1(x) = \cos x + C_1, \quad C_2(x) = \sin x + C_2.$$

Підставляючи ці вирази у формулу (11.22.7), дістаємо загальний розв'язок рівняння (11.22.5):

$$y = (\cos x + C_1) \frac{\cos x}{x} + (\sin x + C_2) \frac{\sin x}{x} = C_1 \frac{\cos x}{x} + C_2 \frac{\sin x}{x} + \frac{1}{x}.$$

### 11.23. Лінійне однорідне рівняння 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами. Попередні зауваження

Як ми встановили, загальний розв'язок лінійного однорідного диференціального рівняння 2-го порядку (11.21.2) на інтервалі  $(\alpha, \beta)$  є лінійною комбінацією розв'язків, що утворюють його ФСР на цьому інтервалі. Але, на жаль, у загальному випадку ці розв'язки точно знайти не вдається не тільки в елементарних функціях, але навіть у квадратурах, тобто, у вигляді інтегралів від відомих функцій (ми можемо стверджувати у випадку неперервності коефіцієнтів рівняння (11.21.2) тільки існування цих розв'язків). Це вдається лише в окремих частинних випадках. Навіть для порівняно простого рівняння (рівняння Ейрі):

$$y'' + xy = 0$$

не вдається знайти ФСР хоча б у квадратурах.

Тем не менш, існує клас лінійних однорідних диференціальних рівнянь, для яких ми можемо знайти ФСР (отже, побудувати загальний розв'язок), і навіть в елементарних функціях. Це клас лінійних однорідних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами. Знову ж, обмежуємось лише лінійними рівняннями 2-го порядку. Отже, розглянемо рівняння:

$$y'' + py' + qy = 0, \tag{11.23.1}$$

де коефіцієнти  $p, q$  – сталі дійсні числа.

Введемо поняття комплекснозначного розв'язку рівняння (11.23.1). Нехай задано комплекснозначну функцію дійсної змінної  $x$  (про комплексні числа див. пп. 1.7 – 1.13):

$$y(x) = u(x) + iv(x),$$

де  $u(x), v(x)$  – дійсні функції змінної  $x$ . Припустимо, що  $u(x), v(x)$  мають похідні до 2-го порядку включно. Тоді функція  $y(x)$  також має похідні тих же порядків, причому:

$$y^{(k)}(x) = u^{(k)}(x) + iv^{(k)}(x), \quad k = 1, 2.$$

Якщо функція  $y(x)$  задовольняє рівняння (11.23.1) в інтервалі  $(\alpha, \beta)$ , то будемо казати, що ця функція є *комплекснозначним розв'язком* рівняння (11.23.1) в інтервалі  $(\alpha, \beta)$ . В цьому випадку маємо:

$$(u + iv)'' + p(u + iv)' + q(u + iv) = u'' + pu' + qu + i(v'' + pv' + qv) = 0,$$

звідки випливає, що  $u'' + pu' + qu = 0$ ,  $v'' + pv' + qv = 0$ , тобто дійсні функції  $u(x), v(x)$  також є розв'язками рівняння (11.23.1) в інтервалі  $(\alpha, \beta)$ .

Таким чином, якщо комплекснозначна функція  $y(x)$  є розв'язком рівняння (11.23.1) в інтервалі  $(\alpha, \beta)$ , то її дійсна та уявна частини є дійсними розв'язками цього рівняння в інтервалі  $(\alpha, \beta)$ .

*Приклад.* Нескладно перевірити, що функція  $e^{ix} = \cos x + i \sin x$  (доведення цієї формули буде надано в п. 12.17) є комплекснозначним розв'язком рівняння  $y'' + y = 0$ . Отже, функції  $\cos x$  і  $\sin x$  – дійсні розв'язки цього рівняння.

Для розшукування ФСР рівняння (11.23.1) застосуємо *метод Ейлера*, який полягає в наступному. Шукатимемо частинний розв'язок цього рівняння у вигляді:

$$y = e^{\lambda x}, \tag{11.23.2}$$

де  $\lambda$  – деяке, поки що невідоме сталe число.

Підставляючи вираз (11.23.2) у ліву частину рівняння (11.23.1), дістанемо:

$$\lambda^2 e^{\lambda x} + p\lambda e^{\lambda x} + q e^{\lambda x} = 0.$$

Скорочуючи на  $e^{\lambda x}$ , одержуємо:

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0. \tag{11.23.3}$$

Отже, функція (11.23.2) буде розв'язком диференціального рівняння (11.23.1) тоді і тільки тоді, коли число  $\lambda$  буде коренем квадратного рівняння (11.23.3). Це рівняння називається *характеристичним рівнянням* для диференціального рівняння (11.23.1). Легко бачити, що характеристичне рівняння (11.23.3) одержується з диференціального рівняння (11.23.1) формальною заміною:  $y'' \rightarrow \lambda^2$ ,  $y' \rightarrow \lambda$ ,  $y \rightarrow 1$ . Як і



для будь-якого квадратного рівняння з дійсними коефіцієнтами, характер його коренів залежить від знаку дискримінанту:

$$d = p^2 - 4q.$$

Розглянемо три можливі випадки.

1.  $d > 0$ . У цьому випадку рівняння (11.23.3) має два дійсні різні кореня  $\lambda_1, \lambda_2$  ( $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ). Тоді функції  $y_1 = e^{\lambda_1 x}$ ,  $y_2 = e^{\lambda_2 x}$  будуть розв'язками рівняння (11.23.1). Покажемо, що ці розв'язки ЛНЗ на інтервалі  $(-\infty, +\infty)$ . Складемо визначник Вронського цих функцій:

$$\begin{aligned} W(x) &= \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} \end{vmatrix} = \\ &= \lambda_2 e^{\lambda_1 x} e^{\lambda_2 x} - \lambda_1 e^{\lambda_1 x} e^{\lambda_2 x} = (\lambda_2 - \lambda_1) e^{(\lambda_1 + \lambda_2)x} \neq 0, \end{aligned}$$

оскільки  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ,  $e^{(\lambda_1 + \lambda_2)x} > 0 \quad \forall x \in (-\infty, +\infty)$ . Отже, ці розв'язки дійсно ЛНЗ на  $(-\infty, +\infty)$ , і, таким чином, загальний розв'язок рівняння (11.23.1) у цьому випадку має вигляд:

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}. \quad (11.23.4)$$

2.  $d = 0$ . Тоді рівняння (11.23.3) має два співпадаючі дійсні кореня  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ . Покажемо, що у цьому випадку ЛНЗ розв'язками ДР (11.23.1) будуть функції:

$$y_1 = e^{\lambda x}, \quad y_2 = x e^{\lambda x}.$$

Те, що функція  $y_1$  буде розв'язком нашого рівняння, ми вже встановили. Залишається показати, що розв'язком буде також функція  $y_2$ . Помітимо, що  $2\lambda + p = 0$  і розглянемо:

$$\begin{aligned} y_2' &= e^{\lambda x} (1 + \lambda x), \quad y_2'' = e^{\lambda x} (\lambda^2 x + 2\lambda); \\ y_2'' + p y_2' + q y_2 &= e^{\lambda x} (\lambda^2 x + 2\lambda + p + p\lambda x + qx) = \\ &= e^{\lambda x} (x(\lambda^2 + p\lambda + q) + (2\lambda + p)) = 0, \end{aligned}$$

що й треба було довести. Покажемо, що знайдені розв'язки ЛНЗ на інтервалі  $(-\infty, +\infty)$ . Складемо визначник Вронського:

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{\lambda x} & x e^{\lambda x} \\ \lambda e^{\lambda x} & (1 + \lambda x) e^{\lambda x} \end{vmatrix} = (1 + \lambda x) e^{2\lambda x} - x \lambda e^{2\lambda x} = e^{2\lambda x} > 0.$$

Отже,  $y_1, y_2$  – ЛНЗ на інтервалі  $(-\infty, +\infty)$ , і, таким чином, загальний розв’язок рівняння (11.23.1) у цьому випадку має вигляд:

$$y = C_1 e^{\lambda x} + C_2 x e^{\lambda x}. \quad (11.23.5)$$

3.  $d < 0$ . Тоді квадратне рівняння (11.23.3) має два комплексно-спряжені кореня:

$$\lambda_1 = \alpha - i\beta, \quad \lambda_2 = \alpha + i\beta, \quad \beta > 0.$$

Покажемо, що у цьому випадку дійсними ЛНЗ на інтервалі  $(-\infty, +\infty)$  розв’язками рівняння (11.23.1) будуть функції:

$$y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x, \quad y_2 = e^{\alpha x} \sin \beta x.$$

Скористаємось формулами Ейлера (доведення цих формул буде надано в п. 12.17):

$$\cos \beta x = \frac{e^{i\beta x} + e^{-i\beta x}}{2}, \quad \sin \beta x = \frac{e^{i\beta x} - e^{-i\beta x}}{2i}.$$

Звідси:

$$y_1 = e^{\alpha x} \frac{e^{i\beta x} + e^{-i\beta x}}{2} = \frac{1}{2} e^{(\alpha+i\beta)x} + \frac{1}{2} e^{(\alpha-i\beta)x}.$$

Але функції  $e^{(\alpha+i\beta)x}$ ,  $e^{(\alpha-i\beta)x}$  є комплекснозначними розв’язками рівняння (11.23.1), отже, і функція  $y_1$  також є розв’язком ДР (11.23.1) як лінійна комбінація його розв’язків. Аналогічно і функція  $y_2$  є розв’язком рівняння (11.23.1). Покажемо, що ці розв’язки ЛНЗ на інтервалі  $(-\infty, +\infty)$ . Складемо визначник Вронського:

$$\begin{aligned} W(x) &= \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{\alpha x} \cos \beta x & e^{\alpha x} \sin \beta x \\ \alpha e^{\alpha x} \cos \beta x - \beta e^{\alpha x} \sin \beta x & \alpha e^{\alpha x} \sin \beta x + \beta e^{\alpha x} \cos \beta x \end{vmatrix} = \\ &= e^{2\alpha x} (\alpha \cos \beta x \sin \beta x + \beta \cos^2 \beta x - \alpha \cos \beta x \sin \beta x + \beta \sin^2 \beta x) = \beta e^{2\alpha x} > 0. \end{aligned}$$

Отже, дані розв’язки дійсно ЛНЗ на інтервалі  $(-\infty, +\infty)$ , і, таким чином, у цьому випадку загальний розв’язок рівняння (11.23.1) має вигляд:

$$y = C_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + C_2 e^{\alpha x} \sin \beta x. \quad (11.23.6)$$

Перейдемо тепер до конкретних прикладів.

*Приклад 1.* Знайти загальний розв’язок рівняння:

$$y'' - 5y' + 6y = 0.$$

Складемо характеристичне рівняння:

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0.$$

Його корені  $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3$ , тобто два дійсних різних кореня ( $d > 0$ ).

Згідно з формулою (11.23.4):

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}.$$

*Приклад 2.* Знайти загальний розв'язок рівняння:

$$y'' + y' - 5y = 0.$$

Складемо характеристичне рівняння:

$$\lambda^2 + \lambda - 5 = 0.$$

Його корені:

$$\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{21}}{2}.$$

Таким чином, знову два різних дійсних кореня. Отже загальний розв'язок має вигляд:

$$y = C_1 e^{\left(-\frac{1-\sqrt{21}}{2}\right)x} + C_2 e^{\left(-\frac{1+\sqrt{21}}{2}\right)x}.$$

*Приклад 3.* Розв'язати задачу Коші:

$$y'' - 2y' = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2.$$

Знайдемо спочатку загальний розв'язок. Складемо характеристичне рівняння:

$$\lambda^2 - 2\lambda = 0.$$

Його корені  $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2$ , тобто два різних дійсних кореня. Таким чином, загальний розв'язок має вигляд:

$$y = C_1 e^{0 \cdot x} + C_2 e^{2x} = C_1 + C_2 e^{2x}.$$

Розв'яжемо тепер задачу Коші:

$$y(0) = C_1 + C_2 = 1; \quad y'(0) = 2C_2 = 2.$$

Звідси:  $C_1 = 0, C_2 = 1$ , і, таким чином, розв'язок задачі Коші:

$$y = e^{2x}.$$

*Приклад 4.* Знайти загальний розв'язок рівняння:

$$y'' + 6y' + 9y = 0.$$

Складемо характеристичне рівняння:

$$\lambda^2 + 6\lambda + 9 = 0.$$

Його корені  $\lambda_1 = \lambda_2 = -3$ , тобто два дійсних рівних кореня ( $d = 0$ ).

Згідно з формулою (11.23.5):

$$y = C_1 e^{-3x} + C_2 x e^{-3x}.$$

*Приклад 5.* Знайти загальний розв'язок рівняння:

$$y'' + 2y' + 5y = 0.$$

Характеристичне рівняння має вигляд:

$$\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0.$$

Дискримінант  $d = -16$  цього рівняння від'ємний, отже, рівняння має два комплексно спряжені кореня:

$$\lambda_1 = -1 - 2i, \quad \lambda_2 = -1 + 2i.$$

Таким чином, маємо випадок 3, де  $\alpha = -1$ ,  $\beta = 2$ . Згідно з формулою (11.23.6), загальний розв'язок має вигляд:

$$y = C_1 e^{-x} \cos 2x + C_2 e^{-x} \sin 2x.$$

### **11.24. Лінійне неоднорідне рівняння 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами і спеціальним виглядом правої частини**

Перейдемо тепер до питання про побудову загального розв'язку лінійного неоднорідного рівняння вигляду:

$$y'' + py' + qy = f(x). \quad (11.24.1)$$

В п. 11.21 ми довели теорему про те, що загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння дорівнює сумі загального розв'язку відповідного однорідного рівняння і будь-якого частинного розв'язку неоднорідного рівняння. Загальний розв'язок однорідного рівняння (зі сталими коефіцієнтами) ми вже навчилися будувати, і тепер треба розглянути питання про побудову частинного розв'язку неоднорідного рівняння. За допомогою методу варіації довільних сталих (див. п. 11.22) можна цей частинний розв'язок побудувати для будь-якої неперервної правої частини  $f(x)$ . Але, як ми бачили, цей метод вимагає обчислення інтегралів, а ці інтеграли можуть бути достатньо складними. І в деяких випадках доцільніше користуватися іншим методом.

Припустимо, що  $f(x)$  не будь-яка неперервна функція загального вигляду, а має так званий спеціальний вигляд. Розглянемо два таких можливих вигляди.

$$I. f(x) = e^{ax} P_n(x), \quad (11.24.2)$$

де  $a$  – деяке число, яке називається *контрольним*, а  $P_n(x)$  – многочлен степеня  $n$ , тобто функція вигляду:

$$P_n(x) = p_n x^n + p_{n-1} x^{n-1} + \dots + p_1 x + p_0.$$

Вигляд частинного розв'язку залежатиме від контрольного числа.  
*a.* Розглянемо дві можливі ситуації.

1. Число не є коренем характеристичного рівняння (11.23.3),  
 тобто:

$$a^2 + pa + q \neq 0.$$

Тоді частинний розв'язок шукається у вигляді:

$$z(x) = e^{ax} Q_n(x), \quad (11.24.3)$$

де  $Q_n(x)$  – многочлен степеня  $n$  з поки що невизначеними коефіцієнтами. Коефіцієнти цього многочлена визначаються після підстановки  $z(x)$  до неоднорідного рівняння і зрівняння коефіцієнтів при однакових степенях  $x$  у лівій і правій частинах.

2. Число  $a$  є коренем характеристичного рівняння кратності  $r$  ( $r = 1, 2$ ), тобто:

$$a^2 + pa + q = 0,$$

і, якщо  $r = 2$ , то  $2a + p = 0$ . Тоді частинний розв'язок шукаємо у вигляді:

$$z(x) = x^r e^{ax} Q_n^*(x), \quad (11.24.4)$$

де  $Q_n^*(x)$  – також многочлен  $n$ -ого степеня з невизначеними коефіцієнтами.

$$\text{II. } f(x) = e^{ax} (P_n(x) \cos bx + Q_m(x) \sin bx). \quad (11.24.5)$$

Тут  $P_n(x)$  – многочлен степеня  $n$ , а  $Q_m(x)$  – многочлен степеня  $m$  (взагалі кажучи,  $m \neq n$ ).

У цьому випадку *контрольним* називається число  $a + ib$ . Знову розглянемо дві можливі ситуації:

1. Контрольне число не є коренем характеристичного рівняння. Тоді частинний розв'язок шукаємо у вигляді:

$$z(x) = e^{ax} (R_k(x) \cos bx + S_k(x) \sin bx), \quad (11.24.6)$$

де  $R_k(x), S_k(x)$  – многочлени степеня  $k = \max(n, m)$  з невизначеними коефіцієнтами.

2. Контрольне число  $a + ib$  є коренем характеристичного рівняння. Тоді його кратність  $r = 1$ , оскільки другий корінь рівняння буде комплексно спряженим:  $a - ib$ . У цьому випадку частинний розв'язок шукаємо у вигляді:

$$z(x) = xe^{ax} \left( R_k^*(x) \cos bx + S_k^*(x) \sin bx \right), \quad (11.24.7)$$

де  $R_k^*(x), S_k^*(x)$  – також многочлени степеня  $k$  з невизначеними коефіцієнтами.

Переходимо до розгляду конкретних прикладів.

*Приклад 1.* Побудувати загальний розв'язок рівняння:

$$y'' + 2y' - 3y = e^{4x} (3x^2 - 2x + 4).$$

Спочатку побудуємо загальний розв'язок однорідного рівняння:

$$y'' + 2y' - 3y = 0.$$

Складемо характеристичне рівняння:

$$\lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0.$$

Його корені  $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$  (перевірте самостійно), тобто два різних дійсних кореня. Отже, загальний розв'язок однорідного рівняння має вигляд:

$$\bar{y}(x) = C_1 e^x + C_2 e^{2x}.$$

Побудуємо тепер частинний розв'язок неоднорідного рівняння. Контрольне число  $a = 4$  у даному випадку не є коренем характеристичного рівняння. Многочлен  $P_2(x) = 3x^2 - 2x + 4$  є многочленом степеня  $n = 2$ . Отже, частинний розв'язок відповідно з формулою (11.24.3), шукаємо у вигляді:

$$z(x) = e^{4x} (Ax^2 + Bx + C),$$

де  $A, B, C$  – поки що невідомі коефіцієнти. Підставимо цей вираз у наше диференціальне рівняння, для чого спочатку знайдемо:

$$z'(x) = 4e^{4x} (Ax^2 + Bx + C) + e^{4x} (2Ax + B),$$

$$z''(x) = 16e^{4x} (Ax^2 + Bx + C) + 8e^{4x} (2Ax + B) + 2Ae^{4x}.$$

Далі:

$$\begin{aligned} z'' + 2z' - 3z &= 16e^{4x} (Ax^2 + Bx + C) + 8e^{4x} (2Ax + B) + 2Ae^{4x} + \\ &+ 8e^{4x} (Ax^2 + Bx + C) + 2e^{4x} (2Ax + B) - 3e^{4x} (Ax^2 + Bx + C) = e^{4x} (3x^2 - 2x + 4) \end{aligned}$$

Скоротивши на  $e^{4x}$ , зрівняємо коефіцієнти при однакових степенях  $x$  у лівій і правій частинах, для чого складемо наступну таблицьку:

$$\begin{array}{l|l} x^2 & 16A + 8A - 3A = 3, \\ x & 16B + 16A + 8B + 4A - 3B = -2, \\ 1 & 16C + 8B + 2A + 8C + 2B - 3C = 4. \end{array}$$

У наслідку одержали систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно  $A, B, C$ , яку перепишемо у вигляді:

$$\begin{cases} 21A = 3, \\ 20A + 21B = -2, \\ 2A + 10B + 21C = 4. \end{cases}$$

Розв'язуючи її, дістаємо:

$$A = \frac{3}{21} = \frac{1}{7}, \quad B = -\frac{102}{441} = -\frac{34}{147}, \quad C = \frac{2658}{9261} = \frac{886}{3087}$$

Таким чином, загальний розв'язок нашого рівняння має вигляд:

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + e^{4x} \left( \frac{1}{7} x^2 - \frac{34}{147} x + \frac{886}{3087} \right).$$

*Приклад 2.* Розв'язати задачу Коші:

$$y'' + 3y' = 2x^3, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -2.$$

Будуємо загальний розв'язок однорідного рівняння:

$$y'' + 3y' = 0.$$

Характеристичне рівняння має вигляд:

$$\lambda^2 + 3\lambda = 0.$$

Його корені:  $\lambda_1 = -3$ ,  $\lambda_2 = 0$ , отже,

$$\bar{y}(x) = C_1 + C_2 e^{-3x}.$$

Далі будуємо частинний розв'язок неоднорідного рівняння. У даному випадку контрольне число  $a = 0$ , оскільки  $2x^3 = 1 \cdot 2x^3 = e^{0 \cdot x} \cdot 2x^3$ , і це число є коренем характеристичного рівняння кратності  $r = 1$ , отже згідно з формулою (11.24.4) маємо:

$$z(x) = x(Ax^3 + Bx^2 + Cx + D) = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx.$$

Звернемо увагу, що, незважаючи на те, що у правій частині нашого рівняння стоїть одночлен  $2x^3$ , частинний розв'язок повинен містити многочлен 3-го степеня загального вигляду  $Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$ .

Далі знаходимо:

$$z'(x) = 4Ax^3 + 3Bx^2 + 2Cx + D, \quad z''(x) = 12Ax^2 + 6Bx + 2C.$$

Підставляючи в неоднорідне рівняння, одержуємо:

$$12Ax^2 + 6Bx + 2C + 12Ax^3 + 9Bx^2 + 6Cx + 3D = 2x^3.$$

Зрівняємо коефіцієнти при однакових степенях  $x$  у лівій і правій частинах:

$$\begin{array}{l|l} x^3 & 12A = 2, \\ x^2 & 12A + 9B = 0, \\ x & 6B + 6C = 0, \\ 1 & 2C + 3D = 0. \end{array}$$

Розв'язуючи останню систему, дістаємо:

$$A = \frac{1}{6}, \quad B = -\frac{2}{9}, \quad C = \frac{2}{9}, \quad D = -\frac{4}{27}.$$

Таким чином, загальний розв'язок має вигляд:

$$y(x) = C_1 + C_2 e^{-3x} + \frac{1}{6}x^4 - \frac{2}{9}x^3 + \frac{2}{9}x^2 - \frac{4}{27}x.$$

Розв'яжемо задачу Коші. Маємо:

$$y'(x) = -3C_2 e^{-3x} + \frac{2}{3}x^3 - \frac{2}{3}x^2 + \frac{4}{9}x - \frac{4}{27},$$

$$y(0) = C_1 + C_2 = 1, \quad y'(0) = -3C_2 - \frac{4}{27} = -2.$$

Звідси:  $C_1 = \frac{31}{81}$ ,  $C_2 = \frac{50}{81}$ . Таким чином, розв'язок задачі Коші:

$$y^*(x) = \frac{31}{81} + \frac{50}{81}e^{-3x} + \frac{1}{6}x^4 - \frac{2}{9}x^3 + \frac{2}{9}x^2 - \frac{4}{27}x.$$

*Приклад 3.* Побудувати загальний розв'язок рівняння:

$$y'' - 2y' + y = 3x \cos x.$$

Будуємо загальний розв'язок однорідного рівняння:

$$y'' - 2y' + y = 0.$$

Характеристичне рівняння має вигляд:

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0.$$

Його корені дійсні співпадаючі  $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ , отже,

$$\bar{y}(x) = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x}.$$

Будуємо частинний розв'язок неоднорідного рівняння. У даному випадку контрольне число  $a + ib = 3 + i$ , і воно не є коренем характеристичного рівняння. Отже, згідно з формулою (11.24.6) маємо:

$$z(x) = e^{3x} \left( (Ax + B) \cos x + (Cx + D) \sin x \right).$$

Звернемо увагу, що, незважаючи на те, що права частина нашого рівняння містить тільки  $\cos x$ , частинний розв'язок містить як  $\cos x$ , так і  $\sin x$ . Далі знаходимо:

$$z'(x) = 3e^{3x} \left( (Ax + B) \cos x + (Cx + D) \sin x \right) +$$



$$\begin{aligned}
& +e^{3x} \left( A \cos x - (Ax + B) \sin x + C \sin x + (Cx + D) \cos x \right), \\
z''(x) &= 9e^{3x} \left( (Ax + B) \cos x + (Cx + D) \sin x \right) + \\
& + 6e^{3x} \left( A \cos x - (Ax + B) \sin x + C \sin x + (Cx + D) \cos x \right) + \\
& + e^{3x} \left( -2A \sin x - (Ax + B) \cos x + 2C \cos x - (Cx + D) \sin x \right).
\end{aligned}$$

Підставляємо в неоднорідне рівняння (одразу ж скорочуючи на  $e^{3x}$ ):

$$\begin{aligned}
& (Ax + B) \cos x + (Cx + D) \sin x + \\
& + 6(A \cos x - (Ax + B) \sin x + C \sin x + (Cx + D) \cos x) - \\
& - 6((Ax + B) \cos x + (Cx + D) \sin x) - \\
& - 2(A \cos x - (Ax + B) \sin x + C \sin x + (Cx + B) \cos x) + \\
& + (Ax + B) \cos x + (Cx + D) \sin x = x \cos x.
\end{aligned}$$

Далі зрівняємо коефіцієнти при  $x \cos x$ ,  $x \sin x$ ,  $\cos x$ ,  $\sin x$ :

$$\begin{array}{l|l}
x \cos x & A + 6C - 6A - 2C + A = 1, \\
x \sin x & C - 6A - 6C + 2A + C = 0, \\
\cos x & B + 6A + 6D - 6B - 2A - 2D + B = 0, \\
\sin x & D - 6B + 6C - 6D + 2B - 2C + D = 0.
\end{array}$$

Перепишемо одержану таким чином систему у вигляді:

$$\begin{cases}
-4A + 4C = 1, \\
-4A - 4C = 0, \\
4A - 4B + 4D = 0, \\
-4B + 4C - 4D = 0.
\end{cases}$$

Розв'язуючи її, дістаємо:

$$A = -\frac{1}{8}, \quad B = 0, \quad C = \frac{1}{8}, \quad D = \frac{1}{8}.$$

Таким чином, загальний розв'язок нашого рівняння має вигляд:

$$y = C_1 e^x + C_2 x e^x + e^{3x} \left( -\frac{1}{8} x \cos x + \frac{1}{8} x \sin x + \frac{1}{8} \sin x \right).$$

### 11.25. Застосування лінійних диференціальних рівнянь 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами до дослідження коливних явищ

Розглянемо рух матеріальної точки масою  $\mu > 0$  вздовж осі  $Ox$  під дією сили  $-bx$ , що напрямлена до початку координат, сили опору середовища  $-a \frac{dx}{dt}$  ( $a \geq 0, b > 0$ ) та зовнішньої сили  $F(t)$ , направленої по осі  $Ox$ . Тоді на підставі 2-го закону Ньютона одержимо диференціальне рівняння руху точки:

$$\mu \frac{d^2 x}{dt^2} = -a \frac{dx}{dt} - bx + F(t). \quad (11.25.1)$$

Перепишемо його у вигляді:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega^2 x = f(t), \quad (11.25.2)$$

де  $\beta = \frac{a}{2\mu} \geq 0$ ,  $\omega^2 = \frac{b}{\mu} > 0$ ,  $f(t) = \frac{1}{\mu} F(t)$ .

#### I. Вільні коливання без наявності опору середовища

Розглянемо випадок, коли  $\beta = 0$ ,  $f(t) \equiv 0$ . Тоді рівняння (11.25.2) набуває вигляду:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x = 0. \quad (11.25.3)$$

Його характеристичне рівняння:

$$\lambda^2 + \omega^2 = 0 \quad (11.25.4)$$

має суто уявні корені  $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$  (для визначеності вважаємо  $\omega > 0$ ), отже, загальний розв'язок рівняння (11.25.3) має вигляд:

$$x = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t.$$

Введемо замість сталих  $C_1, C_2$  нові довільні сталі  $A, \varphi$  за формулами:

$$C_1 = A \sin \varphi, \quad C_2 = A \cos \varphi.$$

Тоді вираз (11.25.4) запишеться у вигляді:

$$x = A \sin \varphi \cos \omega t + A \cos \varphi \sin \omega t = A \sin(\omega t + \varphi). \quad (11.25.5)$$

Формулою (11.25.5) описуються *гармонічні коливання*. Величина  $T = 2\pi/\omega$  називається періодом коливань,  $A$  – амплітудою коливань, вираз  $\omega t + \varphi$  – фазою коливань,  $\varphi$  – початковою фазою коливань. Диференціюючи вираз (11.25.5) за  $t$ , дістаємо вираз для миттєвої швидкості руху точки:

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = A\omega \cos(\omega t + \varphi) = A\omega \sin\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right), \quad (11.25.6)$$

тобто швидкість також змінюється за гармонічним законом, причому випереджає координату за фазою на величину  $\pi/2$ .

Амплітуда і початкова фаза визначаються з початкових умов:

$$x|_{t=0} = x_0, \quad \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=0} = x'_0.$$

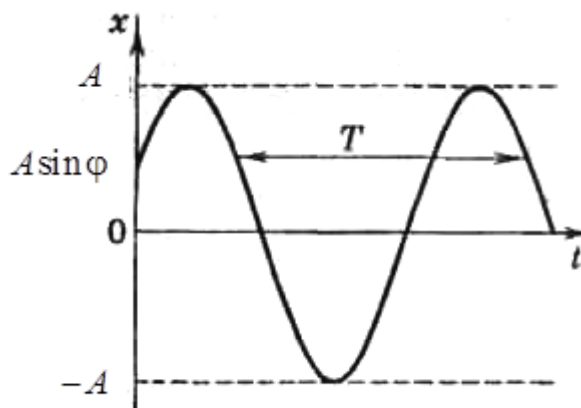
Підставляючи ці початкові умови в формули (11.25.5), (11.25.6), дістаємо:

$$x_0 = A \sin \varphi, \quad x'_0 = A\omega \cos \varphi,$$

звідки:

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{(x'_0)^2}{\omega^2}}, \quad \varphi = \arctg \frac{\omega x_0}{x'_0}.$$

Графік функції (11.25.5) наведено на рис. 11.18.



**Рис. 11.18**

Число коливань  $\tilde{\omega}$  за одиницю часу називається *частотою коливань*. Справедливе співвідношення:

$$\tilde{\omega} = \frac{1}{T}.$$

Звідси випливає, що:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\tilde{\omega}.$$

Величину  $\omega$  називають *круговою* або *циклічною* частотою.

## II. Вимушені коливання без наявності опору середовища

Розглянемо тепер випадок коли в рівнянні (11.25.2)  $\beta = 0$ , а  $f(t)$  відмінна від тотожного нуля. Рівняння набуває вигляду:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2x = f(t). \quad (11.25.7)$$

Припустимо, що  $f(t) = M \sin(\sigma t + \delta)$ , де  $M > 0$ ,  $\sigma > 0$ ,  $\delta$  – сталі. Тобто маємо рівняння:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2x = M \sin(\sigma t + \delta). \quad (11.25.8)$$

З фізичної точки зору це означає, що зовнішня сила  $F(t) = M\mu \sin(\sigma t + \delta)$  змінюється за гармонічним законом з амплітудою  $M\mu$ , циклічною частотою  $\sigma$  та початковою фазою  $\delta$ .

Знайдемо загальний розв'язок рівняння (11.25.8). Розв'язок відповідного однорідного рівняння дається формулою (11.25.5). Побудуємо частинний розв'язок рівняння (11.25.8). Його права частина має вигляд (11.24.5), причому  $m = 0$ , а контрольне число  $a + ib = i\sigma$ . Таким чином, структура частинного розв'язку залежатиме від того, чи буде  $i\sigma$  коренем характеристичного рівняння (11.25.4). А оскільки його коренями є числа  $\pm i\omega$  ( $\omega > 0$ ), то доведеться розрізнити два випадки: 1)  $\sigma \neq \omega$ ; 2)  $\sigma = \omega$ .

Розглянемо 1-й випадок:  $\sigma \neq \omega$ . З фізичної точки зору це означає, що циклічна частота  $\sigma$  зовнішньої сили не співпадає з циклічною частотою  $\omega$  власних коливань системи. В теорії коливань такий випадок називається *нерезонансним*. Згідно з формулою (11.24.6) частинний розв'язок рівняння (11.25.8) треба шукати у вигляді:

$$z(t) = K_1 \sin(\sigma t + \delta) + K_2 \cos(\sigma t + \delta), \quad (11.25.9)$$

де  $K_1, K_2$  – невизначені коефіцієнти. Підставляючи вираз (11.25.9) у

рівняння (11.25.8), і, зрівнюючи коефіцієнти при  $\sin(\sigma t + \delta)$  і  $\cos(\sigma t + \delta)$  в лівій і правій частинах, дістаємо:

$$K_1 = \frac{M}{\omega^2 - \sigma^2}, \quad K_2 = 0.$$

Таким чином, частинний розв'язок запишеться у вигляді:

$$z(t) = \frac{M}{\omega^2 - \sigma^2} \sin(\sigma t + \delta),$$

а загальний розв'язок рівняння (11.25.8):

$$x(t) = A \sin(\omega t + \varphi) + \frac{M}{\omega^2 - \sigma^2} \sin(\sigma t + \delta). \quad (11.25.10)$$

З формули (11.25.10) видно, що всі рухи, що визначаються рівнянням (11.25.8) у нерезонансному випадку є обмеженими. Але при близьких між собою  $\omega$  і  $\sigma$  амплітуда коливань може стати дуже великою, а якщо  $\sigma \rightarrow \omega$ , то ця амплітуда прямуватиме до нескінченності. Права частина формули (11.25.10) є результатом накладання вільних (або власних) коливань на коливання, що відбуваються з частотою зовнішньої сили, і які називаються *вимушеними коливаннями*.

Розглянемо 2-й випадок:  $\sigma = \omega$ . Тобто циклічна частота зовнішньої сили співпадає з циклічною частотою власних коливань. Такий випадок називається *резонансним*. Формула (11.25.10) тоді втрачає зміст, оскільки амплітуда  $\frac{M}{\omega^2 - \sigma^2}$  перетвориться на нескінченність.

Розв'язок треба шукати в іншому вигляді. Контрольне число  $i\sigma$  є коренем характеристичного рівняння кратності 1. Згідно з формулою (11.24.7) частинний розв'язок рівняння (11.25.8) шукаємо у вигляді:

$$z(t) = t(K_1 \sin(\omega t + \delta) + K_2 \cos(\omega t + \delta)) \quad (11.25.11)$$

(тут враховано, що  $\sigma = \omega$ ). Підставимо вираз (11.25.11) у рівняння (11.25.8). Доданки, що містять  $t \sin(\omega t + \delta)$ ,  $t \cos(\omega t + \delta)$ , взаємно знищуються, і, зрівнюючи коефіцієнти при  $\sin(\omega t + \delta)$ ,  $\cos(\omega t + \delta)$ , маємо:

$$K_1 = 0, \quad K_2 = -\frac{M}{2\omega}.$$

Таким чином,

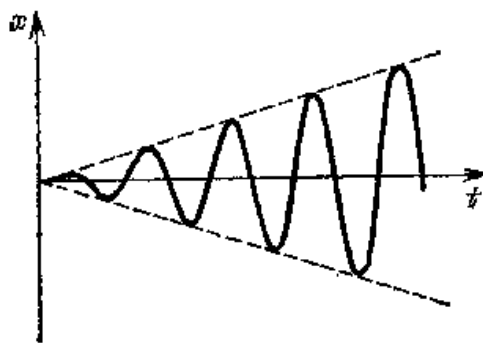
$$z(t) = -\frac{Mt}{2\omega} \cos(\omega t + \delta),$$

і загальний розв'язок рівняння (11.25.8) запишеться у вигляді:

$$x(t) = A \sin(\omega t + \varphi) - \frac{Mt}{2\omega} \cos(\omega t + \delta). \quad (11.25.12)$$

З формули (11.25.12) видно, що за рахунок множника  $\frac{Mt}{2\omega}$  рухи, що визначаються рівнянням (11.25.8) у резонансному випадку є необмеженими. Якщо коефіцієнт  $-\frac{Mt}{2\omega}$  умовно прийняти за амплітуду коливань, то можна сказати, що коливання відбуваються зі зростаючою за часом амплітудою. Зокрема, для випадку, коли  $\delta = 0$ ,  $x(0) = 0$ ,  $\dot{x}(0) = 0$ , характер коливань показано на рис. 11.19.

Явище резонансу, що супроводжується коливаннями зростаючої амплітуди, може бути причиною зруйнування конструкцій або створювати в них небезпечні напруги.



**Рис. 11.19**

### III. Вільні коливання за наявності опору середовища

Нехай тепер у рівнянні (5.6.2)  $\beta > 0$ ,  $f(t) \equiv 0$ . Тоді це рівняння набуває вигляду:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0. \quad (11.25.13)$$

Характеристичне рівняння:

$$\lambda^2 + 2\beta\lambda + \omega^2 = 0 \quad (11.25.14)$$

має корені:

$$\lambda_1 = -\beta - \sqrt{\beta^2 - \omega^2}, \quad \lambda_2 = -\beta + \sqrt{\beta^2 - \omega^2}.$$

Розглянемо 3 випадки.

1).  $\beta < \omega$ . Позначимо:  $\nu = \sqrt{\omega^2 - \beta^2}$ . Тоді корені  $\lambda_1, \lambda_2$  перепишуться у вигляді:

$$\lambda_1 = -\beta - i\nu, \quad \lambda_2 = -\beta + i\nu,$$

тобто маємо пару комплексно спряжених характеристичних чисел. Загальний розв'язок рівняння (11.25.13) запишеться у вигляді:

$$x = C_1 e^{-\beta t} \cos \nu t + C_2 e^{-\beta t} \sin \nu t.$$

Покладаючи  $C_1 = A \sin \varphi$ ,  $C_2 = A \cos \varphi$ , перепишемо цей вираз у вигляді:

$$x = A e^{-\beta t} \sin(\nu t + \varphi). \quad (11.25.15)$$

Коливання, що описуються формулою (11.25.15), не є гармонічними, оскільки їх амплітуда  $a(t) = A e^{-\beta t}$  не є сталою, а змінюється з часом. Оскільки  $\beta > 0$ , то  $a(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow +\infty$ , а отже,  $y \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow +\infty$ , тобто ми маємо справу зі згасаючими коливаннями. Швидкість згасання характеризується величиною  $\beta$ , яка називається *коефіцієнтом згасання*. Згасаючі коливання не є і періодичним процесом. Тому терміни «амплітуда», «період», які використовувалися при дослідженні гармонічних коливань, в цій ситуації, строго кажучи, не мають змісту. Проте такі терміни застосовують, уточнивши їх зміст. Під *амплітудою* стосовно до згасаючих коливань розуміють змінну величину  $a(t) = A e^{-\beta t}$ . За *період*  $T$  таких коливань приймають час, протягом якого система двічі проходить через положення  $x = 0$  в одному й тому ж напрямі. Цей період визначається формулою:

$$T = \frac{2\pi}{\nu}.$$

Характер коливань, що визначаються формулою (11.25.15), показано на рис. 11.20. Період  $T$ , очевидно, дорівнює відстані між точками двох сусідніх максимумів.

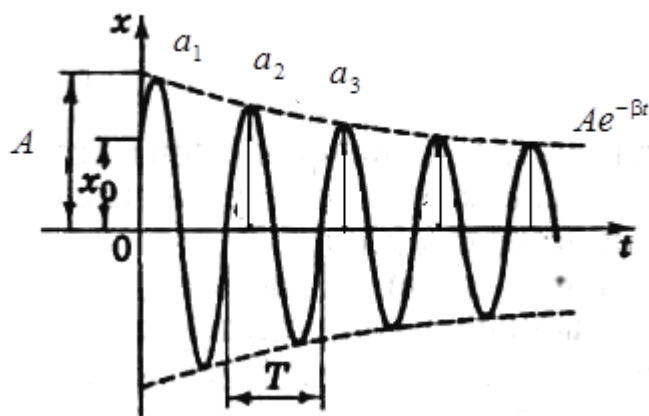


Рис. 11.20

2).  $\beta = \omega$ . Тоді характеристичне рівняння (11.25.14) має дійсні кратні корені  $\lambda_1 = \lambda_2 = -\beta$ , і загальний розв'язок рівняння (11.25.13) запишеться у вигляді:

$$x = e^{-\beta t} (C_1 t + C_2),$$

тобто процес, очевидно, аперіодичний.

3).  $\beta > \omega$ . Тоді корені  $\lambda_1, \lambda_2$  рівняння (11.25.14) дійсні та різні. Загальний розв'язок рівняння (11.25.13) має вигляд:

$$x = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t},$$

і процес також аперіодичний.

#### IV. Вимушені коливання за наявності опору середовища

Розглянемо тепер рівняння (11.25.2) за умови, що  $\beta > 0$ , а  $f(t) = M \sin(\sigma t + \delta)$ , де  $M > 0$ ,  $\sigma > 0$ ,  $\delta$  – сталі:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega^2 x = M \sin(\sigma t + \delta). \quad (11.25.16)$$

Частинний розв'язок рівняння (11.25.16) шукатимемо у вигляді:

$$x = U \sin(\sigma t + \delta) + V \cos(\sigma t + \delta),$$

(11.25.17) де  $U, V$  – поки не визначені сталі. Підстановка виразу (5.6.17) у рівняння (11.25.16) приводить до системи лінійних алгебраїчних рівнянь відносно  $U, V$ :



$$\begin{cases} (\omega^2 - \sigma^2)U - 2\beta\sigma V = M, \\ 2\beta\sigma U + (\omega^2 - \sigma^2)V = 0. \end{cases} \quad (11.25.18)$$

Визначник  $\Delta = (\omega^2 - \sigma^2)^2 + 4\beta^2\sigma^2$  системи (5.6.18) додатний, оскільки  $\beta > 0$ ,  $\sigma > 0$ , отже, система (11.25.18) має єдиний розв'язок:

$$U = \frac{(\omega^2 - \sigma^2)M}{(\omega^2 - \sigma^2)^2 + 4\beta^2\sigma^2}, \quad V = -\frac{2\beta\sigma M}{(\omega^2 - \sigma^2)^2 + 4\beta^2\sigma^2}.$$

Підставляючи ці значення у вираз (11.25.17), дістаємо:

$$\begin{aligned} x &= U \sin \psi + V \cos \psi = \sqrt{U^2 + V^2} \left( \frac{U}{\sqrt{U^2 + V^2}} \sin \psi + \frac{V}{\sqrt{U^2 + V^2}} \cos \psi \right) = \\ &= \sqrt{U^2 + V^2} (\sin \psi \cos \gamma + \cos \psi \sin \gamma) = \sqrt{U^2 + V^2} \sin(\psi + \gamma) = \\ &= \frac{M}{\sqrt{(\omega^2 - \sigma^2)^2 + 4\beta^2\sigma^2}} \sin(\psi + \gamma), \end{aligned} \quad (11.25.19)$$

де позначено:  $\psi = \sigma t + \delta$ ,  $\gamma$  – допоміжний кут,  $\operatorname{tg} \gamma = -\frac{2\beta\sigma}{\omega^2 - \sigma^2}$ .

З виразу (11.25.19) видно, що амплітуда  $\frac{M}{\sqrt{(\omega^2 - \sigma^2)^2 + 4\beta^2\sigma^2}}$  не

може прямувати до нескінченності при  $\sigma \rightarrow \omega$  (як у випадку II), оскільки  $\beta > 0$ ,  $\sigma > 0$ . Тобто явище резонансу в тому сенсі, що розглядалося раніше, тут відсутнє (заважає опір середовища, який характеризується параметром  $\beta$ ). Але при малих  $\beta$  і близьких між собою  $\omega$  і  $\sigma$  амплітуда коливань все ж може стати дуже великою. Тобто явища, близькі до резонансних, можливі і тут. Якщо  $\beta < \omega/\sqrt{2}$ , то нескладно перевірити, що при  $\sigma = \sqrt{\omega^2 - 2\beta^2}$  досягається максимум амплітуди, який дорівнює:

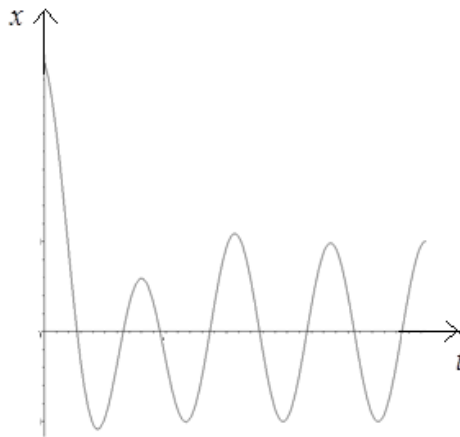
$$A_{\max} = \frac{M}{2\beta\sqrt{\omega^2 - \beta^2}}.$$

При  $\beta \rightarrow 0$  цей максимум, очевидно, прямує до нескінченності.

Загальний розв'язок рівняння (11.25.16) має вигляд:

$$x = Ae^{-\beta t} \sin(\nu t + \varphi) + \frac{M}{\sqrt{(\omega^2 - \sigma^2)^2 + 4\beta^2 \sigma^2}} \sin(\sigma t + \delta + \gamma), \quad (11.25.20)$$

де величини  $A, \nu, \varphi$  мають той самий зміст, що й у випадку III. Таким чином, реальні коливання мають дві складові, одна з яких визначається власними коливаннями системи, а друга – зовнішньою силою. Перший з двох доданків у виразі (11.25.20) відіграє помітну роль тільки в початковій стадії процесу (тобто при невеликих  $t$ ) при так званому *усталенні коливань*. З перебігом часу внаслідок множника  $e^{-\beta t}$  роль цього першого доданку зменшується, і при достатньо великих  $t$  ним можна знехтувати. Характер коливань, що виникають, показано на рис. 11.21.



**Рис. 11.21**

### **11.26. Системи двох лінійних диференціальних рівнянь 1-го порядку зі сталими коефіцієнтами**

Багато задач природознавства та інших галузей знань приводять до так званих систем диференціальних рівнянь, де невідомими є вже не одна, а декілька функцій. Наприклад, у задачах ґрунтознавства зустрічається система:

$$\frac{dC}{dt} = L(t) - (k_1(t) + k_2(t))C, \quad \frac{dH}{dt} = k_2(t)C - k_3(t)H,$$

де невідомими є функції  $C(t), H(t)$ , а  $L(t), k_1(t), k_2(t), k_3(t)$  – деякі відомі функції. У загальному випадку задача розв'язання системи диференціальних рівнянь значно складніша, ніж задача розв'язання одного окремого диференціального рівняння. Тут ми познайомимося лише з деякими основними поняттями відповідної математичної теорії і розглянемо питання інтегрування системи двох лінійних диференціальних рівнянь 1-го порядку зі сталими коефіцієнтами.

**Означення.** Системою диференціальних рівнянь 1-го порядку відносно невідомих функцій  $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$  називається сукупність співвідношень вигляду:

$$\begin{cases} F_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y_1', y_2', \dots, y_n') = 0, \\ F_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y_1', y_2', \dots, y_n') = 0, \\ \dots \\ F_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y_1', y_2', \dots, y_n') = 0. \end{cases} \quad (11.26.1)$$

**Означення.** Нормальною системою диференціальних рівнянь 1-го порядку відносно невідомих функцій  $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$  називається система диференціальних рівнянь вигляду:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ \frac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ \dots \\ \frac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n). \end{cases} \quad (11.26.2)$$

Або у скороченому запису:

$$\frac{dy_j}{dx} = f_j(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (11.26.2')$$

Тобто, нормальна система – це система, розв'язана відносно похідних невідомих функцій.

Число рівнянь, що входить до системи (11.26.2), називається *порядком* цієї системи. Система (11.26.2) є системою  $n$ -го порядку (не слід путати порядок системи та порядок рівнянь, що входять до цієї системи). Надалі розглядатиме тільки нормальні системи.

**Означення.** *Лінійною системою* називається система вигляду:

$$\frac{dy_j}{dx} = \sum_{k=1}^n p_{jk}(x)y_k + f_j(x), \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (11.26.3)$$

Праві частини цієї системи лінійні відносно невідомих функцій.

**Означення.** *Автономною системою* називається система вигляду:

$$\frac{dy_j}{dx} = f_j(y_1, y_2, \dots, y_n), \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (11.26.4)$$

Праві частини цієї системи не залежать явно від незалежної змінної  $x$ . Автономні системи мають низку властивостей, характерних саме для таких систем.

**Означення.** *Розв'язком* системи (11.26.2) в інтервалі  $(\alpha, \beta)$  називається сукупність визначених та диференційовних в інтервалі  $(\alpha, \beta)$  функцій:

$$y_1 = \varphi_1(x), \quad y_2 = \varphi_2(x), \dots, \quad y_n = \varphi_n(x),$$

таких, що вона перетворює системи (11.26.2) в тотожності в інтервалі  $(\alpha, \beta)$ , тобто:

$$\frac{d\varphi_j(x)}{dx} \equiv f_j(x, \varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)), \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad x \in (\alpha, \beta).$$

*Приклад 1.* Для системи:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = 5y_1 + 4y_2, \\ \frac{dy_2}{dx} = 4y_1 + 5y_2 \end{cases}$$

розв'язком в інтервалі  $(-\infty, +\infty)$  буде сукупність функцій  $y_1 = e^x$ ,  $y_2 = -e^x$ .

Процес знаходження розв'язків системи (11.26.2) називається *інтегруванням* цієї системи. Повне інтегрування системи (11.26.2) полягає в знаходженні всіх розв'язків цієї системи.

**Означення.** *Задачею Коші* для системи (11.26.2) називається задача знаходження такого її розв'язку  $y_1 = \varphi_1(x), y_2 = \varphi_2(x), \dots, y_n = \varphi_n(x)$ , який задовольняє умови:  $\varphi_j(x_0) = y_{j0}$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ), де  $x_0, y_{10}, \dots, y_{n0}$  – задані числа (*початкові умови*). Записується задача Коші для системи (11.26.2) наступним чином:

$$\begin{cases} \frac{dy_j}{dx} = f_j(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ y_j(x_0) = y_{j0}, \\ j = 1, 2, \dots, n. \end{cases} \quad (11.26.5)$$

*Приклад 2.* Для задачі Коші:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = y_2, & \frac{dy_2}{dx} = -y_1 + x, \\ y_1(0) = 0, & y_2(0) = 1 \end{cases}$$

розв'язком є пара функцій  $y_1 = x, y_2 = 1$ .

**Теорема (існування та єдиності розв'язку задачі Коші).** *Нехай праві частини системи (11.26.2) визначено в області:*

$$\Pi = \{ |x - x_0| \leq a, |y_1 - y_{10}| \leq b, \dots, |y_n - y_{n0}| \leq b \}$$

*і задовольняють в цій області наступні умови:*

1) *функції  $f_j(x, y_1, \dots, y_n)$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ) неперервні за всіма аргументами;*

2)  *$|f_j(x, y_1, \dots, y_n)| \leq M$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ),  $M = M(a, b) > 0$ ;*

3) *виконано умову Ліпшица, тобто існує стала  $L = L(a, b) > 0$  така, що для будь-яких точок  $(x, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n), (x, \bar{\bar{y}}_1, \dots, \bar{\bar{y}}_n) \in \Pi$  справедлива нерівність:*

$$|f_j(x, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n) - f_j(x, \bar{\bar{y}}_1, \dots, \bar{\bar{y}}_n)| \leq L \sum_{k=1}^n |\bar{y}_k - \bar{\bar{y}}_k| \quad (j = 1, 2, \dots, n).$$

*Тоді задача Коші (11.26.5) має єдиний розв'язок, визначений та неперервно диференційований на проміжку  $|x - x_0| \leq h$ , де:*

$$h = \min\left(a, \frac{b}{M}\right),$$

$i$  не виходить при цих значеннях  $x$  з області  $\Pi$ .

Доведення цієї теореми ми тут не наводимо.

**Означення 2.** Сукупність  $n$  функцій:

$$y_j = \varphi_j(x, C_1, C_2, \dots, C_n), \quad j = 1, 2, \dots, n$$

(11.26.6) називається загальним розв'язком системи (11.26.2) в області  $D$  зміни  $(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$ , такої, де забезпечено існування та єдиність розв'язку задачі Коші, якщо виконано наступні дві умови.

1. Функції (11.26.6) тотожно задовольняють всі рівняння системи (11.26.2).

2. За рахунок відповідного вибору сталих  $C_1, C_2, \dots, C_n$  з формул (11.26.6) можна одержати розв'язок будь-якої задачі Коші в області  $D$ .

*Приклад.* Розглянемо систему:

$$\frac{dy_1}{dx} = 5y_1 + 4y_2, \quad \frac{dy_2}{dx} = 4y_1 + 5y_2. \quad (11.26.7)$$

Легко переконатися, що загальний розв'язок системи (11.26.7) в усьому просторі  $(x, y_1, y_2)$  дається формулами:

$$y_1 = C_1 e^x + C_2 e^{9x}, \quad y_2 = -C_1 e^x + C_2 e^{9x}. \quad (11.26.8)$$

Дійсно, безпосередньо перевіряємо, що ці функції при будь-яких значеннях сталих  $C_1, C_2$  утворюють розв'язок системи (11.26.7). Далі, розв'язуючи рівності (11.26.8) відносно сталих  $C_1, C_2$ , дістанемо:

$$C_1 = \frac{1}{2}(y_1 - y_2)e^{-x}, \quad C_2 = \frac{1}{2}(y_1 + y_2)e^{-9x}. \quad (11.26.9)$$

Підставляючи сюди замість  $(x, y_1, y_2)$  початкові умови  $x = x_0, y_1 = y_{10}, y_2 = y_{20}$ , дістанемо відповідні значення сталих:

$$C_{10} = \frac{1}{2}(y_{10} - y_{20})e^{-x_0}, \quad C_{20} = \frac{1}{2}(y_{10} + y_{20})e^{-9x_0}.$$

Підставляючи ці значення до формул (11.26.8), одержуємо розв'язок задачі Коші:

$$y_1^* = \frac{1}{2}(y_{10} - y_{20})e^{x-x_0} + \frac{1}{2}(y_{10} + y_{20})e^{-9(x-x_0)},$$

$$y_2^* = -\frac{1}{2}(y_{10} - y_{20})e^{x-x_0} + \frac{1}{2}(y_{10} + y_{20})e^{-9(x-x_0)}.$$

**Означення.** Розв'язок системи (11.26.2), який одержується з загального її розв'язку при конкретних значеннях сталих  $C_1, C_2, \dots, C_n$  (включаючи  $\pm\infty$ ), називається *частинним розв'язком* цієї системи.

Наприклад, частинним розв'язком системи (11.26.7) буде:

$$\tilde{y}_1 = 2e^x - 3e^{9x}, \quad \tilde{y}_2 = -2e^x - 3e^{9x}$$

(він одержується з загального при  $C_1 = 2, C_2 = -3$ ). Розв'язок задачі Коші (11.26.5) також є частинним розв'язком системи (11.26.2).

Розглянемо лінійну систему диференціальних рівнянь:

$$\frac{dy_j}{dx} = \sum_{k=1}^n p_{jk}(x)y_k + f_j(x), \quad j=1,2,\dots,n. \quad (11.26.8)$$

Праві частини цієї системи лінійні відносно невідомих функцій  $y_1, y_2, \dots, y_n$ . Функції  $p_{jk}(x)$  ( $j, k=1,2,\dots,n$ ) називаються коефіцієнтами системи (11.26.8), а функції  $f_j(x)$  ( $j=1,2,\dots,n$ ) – її вільними членами.

**Теорема (існування та єдиності розв'язку задачі Коші для системи (11.26.8)).** Нехай в системі (11.26.8) коефіцієнти  $p_{jk}(x)$  ( $j, k=1,2,\dots,n$ ) і вільні члени  $f_j(x)$  ( $j=1,2,\dots,n$ ) неперервні на інтервалі  $(\alpha, \beta)$ . Тоді існує єдиний розв'язок цієї системи, що задовольняє початкові умови:

$$y_1(x_0) = y_{10}, y_2(x_0) = y_{20}, \dots, y_n(x_0) = y_{n0},$$

де  $x = x_0$  – будь-яка точка інтервалу  $(\alpha, \beta)$ , а  $y_{10}, y_{20}, \dots, y_{n0}$  – будь-які задані числа. Цей розв'язок є визначеним і неперервно диференційовним на всьому інтервалі  $(\alpha, \beta)$ .

Доведення цієї теореми ми не наводимо.

Якщо всі функції  $f_j(x) \equiv 0$  ( $j=1,2,\dots,n$ ) в інтервалі  $(\alpha, \beta)$ , то система (11.26.8) називається *однорідною*. Тобто однорідною називається система:

$$\frac{dy_j}{dx} = \sum_{k=1}^n p_{jk}(x)y_k, \quad j=1,2,\dots,n. \quad (11.26.9)$$

Якщо в системі (11.26.8) не всі функції  $f_j(x)$  є тотожними нулями, то така система називається *неоднорідною*.

В теорії диференціальних рівнянь існує строга послідовна теорія систем вигляду (11.26.8), (11.26.9). В цій теорії встановлюється вигляд загального розв'язку цих систем. Ми не маємо можливості викласти тут основи цієї теорії (вона викладається в більш детальних курсах вищої математики та диференціальних рівнянь). І тому ми лише покажемо, як можна побудувати загальний розв'язок лінійної неоднорідної системи 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + f_1(x), \\ \frac{dy_2}{dx} = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + f_2(x). \end{cases} \quad (11.26.10)$$

Тут  $a_{jk}$  – сталі дійсні числа, а  $f_j(x)$  – неперервні на інтервалі  $(\alpha, \beta)$  дійсні функції.

Розглянемо два можливі випадки.

1.  $a_{12} = 0$ . Тоді система (11.26.10) набуває вигляду:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = a_{11}y_1 + f_1(x), \\ \frac{dy_2}{dx} = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + f_2(x). \end{cases} \quad (11.26.11)$$

Перше з рівнянь цієї системи є лінійним неоднорідним рівнянням 1-го порядку. Його загальний розв'язок має вигляд:

$$y_1(x, C_1) = e^{a_{11}(x-x_0)} \left( C_1 + \int_{x_0}^x f_1(t) e^{-a_{11}(t-x_0)} dt \right), \quad (11.26.12)$$

де  $x_0$  – довільна точка інтервалу  $(\alpha, \beta)$ . Підставляючи знайдену таким чином функцію  $y_1(x, C_1)$  в праву частину 2-го рівняння системи (11.26.11), відносно функції  $y_2$  також одержуємо лінійне диференціальне рівняння 1-го порядку:



$$\frac{dy_2}{dx} = a_{22}y_2 + a_{21}y_1(x, C_1) + f_2(x). \quad (11.26.13)$$

Його загальний розв'язок має вигляд:

$$y_2(x, C_1, C_2) = e^{a_{22}(x-x_0)} \left( C_2 + \int_{x_0}^x (a_{21}y_1(t, C_1) + f_2(t)) e^{-a_{22}(t-x_0)} dt \right). \quad (11.26.14)$$

Можна показати, що сукупність виразів (11.26.12), (11.26.14) дають загальний розв'язок системи (11.26.11).

2.  $a_{12} \neq 0$ . З першого рівняння системи (11.26.10) виразимо функцію  $y_2$ :

$$y_2 = \frac{1}{a_{12}} \left( \frac{dy_1}{dx} - a_{11}y_1 - f_1(x) \right). \quad (11.26.15)$$

Візьмемо похідну від обох частин 1-го рівняння системи (11.26.10):

$$\frac{d^2 y_1}{dx^2} = a_{11} \frac{dy_1}{dx} + a_{12} \frac{dy_2}{dx} + \frac{df_1(x)}{dx}.$$

Замість  $\frac{dy_2}{dx}$  підставимо вираз з 2-го рівняння системи (11.26.10), причому  $y_2$  замінимо виразом (11.26.15). Розкриваючи дужки, і, зводячі подібні члени, одержимо рівняння, що містить лише одну невідому функцію  $y_1$ :

$$\frac{d^2 y_1}{dx^2} - (a_{11} + a_{22}) \frac{dy_1}{dx} + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})y_1 = a_{12}f_2(x) - a_{22}f_1(x) + \frac{df_1(x)}{dx}.$$

Це лінійне неоднорідне диференціальне рівняння 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами. Користуючись теорією, викладеною в пп. 11.21–11.24, побудуємо його загальний розв'язок  $y_1(x, C_1, C_2)$ . Підставляючи цей розв'язок в праву частину рівності (11.26.15), знайдемо функцію  $y_2(x, C_1, C_2)$  і, таким чином, дістанемо загальний розв'язок системи (11.26.10).

*Приклад 1.* Знайти загальний розв'язок системи:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = 2y_1 - e^{2x}, \\ \frac{dy_2}{dx} = y_1 + y_2 + 3e^{2x}. \end{cases} \quad (11.26.16)$$

Перше рівняння цієї системи не містить функції  $y_2$ , і є лінійним неоднорідним диференціальним рівнянням 1-го порядку відносно функції  $y_1$ , тобто маємо справу з випадком 1. Інтегруючи це рівняння (див. п. 11.6), дістаємо його загальний розв'язок:

$$y_1(x, C_1) = (C_1 - x)e^{2x}.$$

Підставляючи цей розв'язок у друге рівняння системи (11.26.16), одержуємо лінійне неоднорідне диференціальне рівняння 1-го порядку відносно функції  $y_2$ :

$$\frac{dy_2}{dx} = y_2 + (C_1 + 3 - x)e^{2x}.$$

Інтегруючи це рівняння, одержуємо:

$$y_2(x, C_1, C_2) = (C_1 + 4 - x)e^{2x} + C_2e^x.$$

Таким чином, загальний розв'язок системи (11.26.16) має вигляд:

$$y_1 = (C_1 - x)e^{2x}, \quad y_2 = (C_1 + 4 - x)e^{2x} + C_2e^x.$$

*Приклад 2.* Знайти загальний розв'язок системи:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = 2y_1 - 3y_2, \\ \frac{dy_2}{dx} = y_1 - 2y_2 + 2\sin x. \end{cases} \quad (11.26.17)$$

Тут  $a_{12} = -3 \neq 0$ , тобто маємо справу з випадком 2. Виразимо з 1-го рівняння  $y_2$ :

$$y_2 = \frac{2}{3}y_1 - \frac{1}{3}\frac{dy_1}{dx}. \quad (11.26.18)$$

Візьмемо похідну від обох частин 1-го рівняння системи (11.26.17):

$$\frac{d^2 y_1}{dx^2} = 2\frac{dy_1}{dx} - 3\frac{dy_2}{dx}.$$

Підставимо сюди вираз для  $\frac{dy_2}{dx}$  з 2-го рівняння системи (11.26.17):

$$\frac{d^2 y_1}{dx^2} = 2 \frac{dy_1}{dx} - 3(y_1 - 2y_2 + 2\sin x) = 2 \frac{dy_1}{dx} - 3y_1 + 6y_2 - 6\sin x.$$

Замість  $y_2$  підставимо вираз (11.26.18):

$$\frac{d^2 y_1}{dx^2} = 2 \frac{dy_1}{dx} - 3y_1 + 6 \left( \frac{2}{3} y_1 - \frac{1}{3} \frac{dy_1}{dx} \right) - 6\sin x = y_1 - 6\sin x.$$

Таким чином, прийшли до лінійного неоднорідного диференціального рівняння 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами і спеціальним виглядом правої частини:

$$\frac{d^2 y_1}{dx^2} - y_1 = -6\sin x.$$

Інтегруючи це рівняння (див. п. 11.24), дістаємо:

$$y_1 = C_1 e^{-x} + C_2 e^x + 3\sin x,$$

Звідки:

$$\frac{dy_1}{dx} = -C_1 e^{-x} + C_2 e^x + 3\cos x.$$

Підставляючи ці вирази у формулу (11.26.18), одержуємо загальний розв'язок системи (11.26.17):

$$y_1 = C_1 e^{-x} + C_2 e^x + 3\sin x, \quad y_2 = C_1 e^{-x} + \frac{1}{3} C_2 e^x + 2\sin x - \cos x.$$

### ***Контрольні запитання до глави 11***

1. Що називається звичайним диференціальним рівнянням  $n$ -го порядку? Наведіть приклади задач, що приводять до диференціальних рівнянь.
2. Що називається диференціальним рівнянням 1-го порядку, розв'язаним відносно похідної? У чому полягає його геометричний зміст? У чому полягає його фізичний зміст?

3. Що називається розв'язком звичайного диференціального рівняння 1-го порядку на заданому інтервалі?
4. Що називається інтегральною кривою звичайного диференціального рівняння 1-го порядку?
5. Що таке ізокліни? Як за допомогою ізоклін можна наближено будувати інтегральні криві диференціального рівняння 1-го порядку?
5. Що таке задача Коші для звичайного диференціального рівняння 1-го порядку? У чому полягає її геометричний зміст?
6. Що називається загальним розв'язком звичайного диференціального рівняння 1-го порядку? Що називається загальним інтегралом диференціального рівняння 1-го порядку?
7. Що називається частинним розв'язком звичайного диференціального рівняння 1-го порядку? Чи є розв'язок задачі Коші для цього рівняння його частинним розв'язком?
8. Яке диференціальне рівняння називається диференціальним рівнянням з відокремлюваними змінними? У чому полягає алгоритм його інтегрування?
9. Яке диференціальне рівняння називається однорідним? У чому полягає алгоритм його інтегрування?
10. Які диференціальні рівняння можна звести до однорідних?
11. Яке диференціальне рівняння називається лінійним: У чому полягає метод варіації довільної сталої його інтегрування?
12. Яке диференціальне рівняння називається рівнянням Бернуллі? Яким чином його можна звести до лінійного рівняння?
13. Яке диференціальне рівняння називається рівнянням Ріккаті? В яких випадках воно є інтегровним?
14. Яке рівняння називається диференціальним рівнянням в повних диференціалах? Яка необхідна і достатня умова того, щоб диференціальне рівняння вигляду  $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$  було рівнянням в повних диференціалах?
15. Що таке інтегрувальний множник? В яких випадках його вдається явно знайти?

16. Сформулюйте теорему Пікара існування та єдиності розв'язку задачі Коші для рівняння  $y' = f(x, y)$ .
17. Який загальний вигляд має диференціальне рівняння 1-го порядку, не розв'язане відносно похідної? Яку функцію називають розв'язком такого рівняння?
18. Що таке неявна форма розв'язку диференціального рівняння 1-го порядку, не розв'язаного відносно похідної?
19. Що таке параметрична форма диференціального рівняння 1-го порядку, не розв'язаного відносно похідної?
20. Що розуміється під загальним інтегралом диференціального рівняння 1-го порядку, не розв'язаного відносно похідної?
21. У чому полягає метод введення параметру для рівняння  $y = f(x, y')$ ?
22. У чому полягає метод введення параметру для рівняння  $x = f(y, y')$ ?
23. Який вигляд має рівняння Лагранжа? До якого рівняння його можна звести методом введення параметру?
24. Який вигляд має рівняння Клеро? Яка особливість запису його загального розв'язку?
25. Яка функція називається розв'язком диференціального рівняння  $n$ -го порядку на заданому проміжку?
26. Як ставиться задача Коші для диференціального рівняння  $n$ -го порядку?
27. У чому полягає геометричний та фізичний зміст задачі Коші для диференціального рівняння 2-го порядку?
28. Яким чином можна знизити порядок рівняння  $F(x, y', y'') = 0$ ?
29. Яким чином можна знизити порядок рівняння  $F(y, y', y'') = 0$ ?
30. Як можна знизити порядок рівняння, однорідного відносно невідомої функції та її похідних?
31. Як можна знизити порядок рівняння, обидві частини якого є повними похідними?
32. Яке рівняння називається лінійним диференціальним рівнянням  $n$ -ого порядку? Як формулюється теорема існування та єдиності розв'язку задачі Коші для такого рівняння?

33. В якому випадку лінійне диференціальне рівняння 2-ого порядку називається однорідним? В якому – неоднорідним?
34. Які основні властивості розв'язків лінійного однорідного диференціального рівняння 2-ого порядку (ЛОДР-2)?
35. Які функції називаються лінійно залежними на заданому проміжку? Які називаються лінійно незалежними?
36. Що таке визначник Вронського (вронскіан) системи двох функцій?
37. У чому полягає необхідна умова лінійної залежності двох функцій на проміжку? Чи є ця умова достатньою?
38. У чому полягає достатня умова лінійної незалежності двох функцій на проміжку? Чи є ця умова необхідною?
39. У чому полягає необхідна і достатня умова лінійної незалежності на інтервалі  $(\alpha, \beta)$  двох розв'язків ЛОДР-2 з неперервними на інтервалі  $(\alpha, \beta)$  коефіцієнтами?
40. Які основні властивості вронскіана двох розв'язків ЛОДР-2 з неперервними на інтервалі  $(\alpha, \beta)$  коефіцієнтами?
41. Що називається фундаментальною системою розв'язків (ФСР) ЛОДР-2?
42. У чому полягає достатня умова існування ФСР ЛОДР-2?
43. Чи визначається ФСР ЛОДР-2 єдиним чином?
44. Яка структура загального розв'язку ЛОДР-2?
45. Чи може ЛОДР-2 мати більше, ніж два, лінійно незалежні розв'язки?
46. Яка структура загального розв'язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння  $n$ -го порядку?
47. У чому полягає принцип суперпозиції для лінійних диференціальних рівнянь. Чи виконано цей принцип для нелінійних рівнянь?
48. У чому полягає метод варіації довільних сталих побудови загального розв'язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння 2-го порядку?
49. Яке рівняння називається ЛОДР-2 зі сталими коефіцієнтами?
50. Що називається комплексозначним розв'язком ЛОДР-2? Що можна сказати про дійсну та уявну частини цього розв'язку?
51. Що називається характеристичним рівнянням для ЛОДР-2 зі сталими коефіцієнтами?

52. Який вигляд має загальний розв'язок ЛОДР-2 зі сталими коефіцієнтами у випадку різних дійсних коренів характеристичного рівняння?
53. Який вигляд має загальний розв'язок ЛОДР-2 зі сталими коефіцієнтами у випадку двох співпадаючих коренів характеристичного рівняння?
54. Який вигляд має загальний розв'язок ЛОДР-2 зі сталими коефіцієнтами у випадку комплексних коренів характеристичного рівняння?
55. Яке рівняння називається лінійним неоднорідним диференціальним рівнянням 2-го порядку (ЛНДР-2) зі сталими коефіцієнтами і спеціальним виглядом правої частини?
56. Як будується частинний розв'язок ЛНДР-2 зі сталими коефіцієнтами і правою частиною вигляду  $P_n(x)e^{ax}$ , де  $P_n(x)$  – многочлен степеня  $n$ ? Які випадки тут треба розрізняти?
57. Як будується частинний розв'язок ЛНДР-2 зі сталими коефіцієнтами і правою частиною вигляду  $e^{ax}(P_n(x)\cos bx + Q_m(x)\sin bx)$ , де  $P_n(x)$  – многочлен степеня  $n$ , а  $Q_m(x)$  – многочлен степеня  $m$ ? Які випадки тут треба розрізняти?
58. Яке диференціальне рівняння описує вільні коливання точки без урахування опору середовища? Який характер коливань у цьому випадку? Що таке амплітуда, частота, фаза і початкова фаза коливань?
59. Яке диференціальне рівняння описує вимушені коливання точки без урахування опору середовища? Як розрізняються нерезонансний та резонансний випадки? Який характер коливань в кожному з цих випадків?
60. Яке диференціальне рівняння описує вільні коливання точки з урахуванням опору середовища? Який характер коливань у цьому випадку?
61. Яке диференціальне рівняння описує вимушені коливання точки з урахуванням опору середовища? Який характер коливань у цьому випадку?
62. Що таке система  $n$  диференціальних рівнянь 1-го порядку? Що таке нормальна система?

63. Яка система диференціальних рівнянь називається лінійною?
64. Що називається розв'язком нормальної системи диференціальних рівнянь в інтервалі  $(\alpha, \beta)$ ?
65. Що називається задачею Коші для нормальної системи диференціальних рівнянь?
66. Що називається загальним розв'язком нормальної системи диференціальних рівнянь?
67. Як побудувати загальний розв'язок системи двох лінійних диференціальних рівнянь 1-го порядку зі сталими коефіцієнтами?

### *Вправи для самостійного розв'язання*

**11.1.** Розв'язати наступні задачі для диференціальних рівнянь з відокремлюваними змінними.

Знайти загальний інтеграл рівняння.

- 1)  $(e^{x+y} - e^{x-y})y' = x$ ; 2)  $y' = e^{x+y} + 4e^{x-y}$ ; 3)  $y' = 2 \sin(y + 2x)$ ;  
 4)  $y' - \cos(y - x) = \cos(x + y)$ ; 5)  $\left(\frac{ds}{dt} + 1\right) \cos s = 1$ ;  
 6)  $yy' \sqrt{4 - x^2} + \sqrt{y^2 + 1} = 0$ .

Знайти загальний розв'язок рівняння та розв'язок задачі Коші.

- 7)  $y' - 3y = 5x + 1, y(0) = -8/9$ ;  
 8)  $3ydx - xdy = dx + 2dy, x_0 = -1, y_0 = -2/3$ ;  
 9)  $t^3 \frac{dx}{dt} + x^2 = 1, x \rightarrow 3$ , якщо  $t \rightarrow +\infty$ .  
 10)  $y' = \sqrt{y - 2x + 4}, y(1) = 2$ ;  
 11)  $(\sqrt{zx} + 2\sqrt{x})dz - z(x + 1)dx = 0, x_0 = 0, y_0 = 0$ ;

**11.2.** Розв'язати наступні задачі для однорідних диференціальних рівнянь



Знайти загальний інтеграл рівняння.

1)  $xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y$ ; 2)  $xy' - y = 2\sqrt{4x^2 + y^2}$ ; 3)  $xy' - y = x \operatorname{tg}^2 \frac{y}{x}$ ;

4)  $xy' = \frac{x^2 + 4xy - y^2}{2x - 2y}$ ; 5)  $xy' = \frac{2y^2 - 3xy - 3x^2}{xy - 5x^2}$ ;

6)  $(x - y - \sqrt{xy})dx - xdy = 0$ ;

7)  $xy' = xe^{\frac{y}{x}} + y + x$ ; 8)  $3x^5 y dx + (y^6 - x^6) dy = 0$ ;

9)  $xy' - y = (x + y) \ln \left( \frac{x + y}{x} \right)$ .

Знайти загальний розв'язок або загальний інтеграл рівняння та розв'язок задачі Коші.

10)  $3y' = \frac{y^2}{x^2} - 4\frac{y}{x} + 12$ ,  $y(1) = 2$ ; 11)  $xy' = y - y \ln^2 \frac{y}{x}$ ,  $y(1) = 1$ ;

12)  $xy' = \frac{4y^3 - 2x^2 y}{3y^2 - x^2}$ ,  $y(1) = 2$ ; 13)  $y^2 + x^2 y' = xy y'$ ,  $y(1) = -1$ .

**11.3.** Наступні рівняння звести до однорідних або до рівнянь з відокремлюваними змінними і знайти загальний розв'язок або загальний інтеграл.

1)  $(x - 2y + 9)y' = 6y - 3x + 1$ ; 2)  $(2y - 6x - 9)dy = (3x - y - 3)^2 dx$ ;

3)  $y' = \frac{2x + 5y + 1}{x - 2y - 4}$ ; 4)  $y' = \frac{y - 1}{x + 3} + \cos^2 \frac{3y + x}{x + 3}$ ;

5)  $y' + 6 \left( \frac{y + 2}{y - 3x + 5} \right)^2 = 0$ ;

6)  $(12x + y + 34)dx - (x - 3y + 9)dy = 0$ ; 7)  $y'(4y - 3x - 2) + x - y = 0$ ;

$$8) y'(5x - 2y + 4) = 8x - 5y + 10; \quad 9) y'(x + 3y + 11) + 2 = 4y + 18x;$$

$$10) y'\sqrt{x+7} = \sqrt{2y-x+1}; \quad 11) y' = \frac{y+2}{x+1} + \operatorname{tg}\left(\frac{y-2x}{x+1}\right).$$

**11.4.** Знайти загальний розв'язок лінійного рівняння, або звідного до нього. Де вказано, розв'язати задачу Коші.

$$1) y' + y \operatorname{tg} x = \sin(2x); \quad 2) (xy' + y)\sqrt{4-x^2} = 1, \quad y(-1) = \pi/6;$$

$$3) 2y' + \frac{xy}{(1-x^2)} = x, \quad y(0) = 2/3;$$

$$4) 2dy = \left( \sin x + y \sin \frac{x}{2} \right) dx, \quad x_0 = \pi, \quad y_0 = 2;$$

$$5) (y'-1)x^2 = (2x-1)y; \quad 6) (x+y\sqrt{y})y' = y, \quad x_0 = 2, \quad y_0 = 1;$$

$$7) y'(\ln y + 1 - x) = y;$$

$$8) (x + \cos y)dy = \operatorname{tg} y dx;$$

$$9) (xy-1)dy + (y^2 + 4y)dx = 0, \quad x_0 = 1, \quad y_0 = -1;$$

$$10) (y - 2xe^y)y' = e^y, \quad x_0 = -1, \quad y_0 = 0.$$

**11.5.** Знайти загальний розв'язок рівняння Бернуллі, де вказано, розв'язати задачу Коші.

$$1) y' - 3y = y^2 e^{-x}, \quad y(0) = -2; \quad 2) 2xy' = y(1 + y^2 \cos^2 x); \quad 3)$$

$$xy' + 4\left(e^{-x^2} \sqrt{y} + y\right) = 0;$$

$$4) (xy' + y^2) \ln x = 2y, \quad y(e) = 1; \quad 5)$$

$$3xy' = y + \frac{3x^2}{y^2(x^2 + 9)}, \quad y(3) = \sqrt[3]{0,75\pi};$$

$$6) 2xy(1-x^2y^2)dy + dx = 0, \quad x_0 = \sqrt{2}, y_0 = 0; \quad 7)$$

$$2x \cos y dx + (x^2 \sin y - 1) dy = 0;$$

$$8) 2xy'(ctg y + 2y\sqrt{x} \sin y) + 1 = 0; \quad 9) (1-t^2)(tdx + 2xdt) = x^2t dt$$

$$10) 3t^2 y dt = (t^3 + 2y \ln y + y) dy, \quad t_0 = \sqrt[3]{0,25}, y_0 = 1.$$

**11.6.** Знайти загальний розв'язок наступних рівнянь Ріккаті.

$$1) y' - 2y \sin x + \cos x = y^2 + \sin^2 x;$$

$$2) y' + 2y(1 - 2e^{-x}) + e^{-x} = 2(y^2 + e^{-2x});$$

$$3) xy' + y(1 - 2 \ln^2 x) = y^2 \ln x + \ln^3 x - \ln x - 1;$$

$$4) x^2 y' + xy(8x^4 + 3) = 2x^4(x^2 y^2 + 4) + 4;$$

$$5) 3xy' + 2y(1+x^2) + x(x^2 + y^2) + 5x = 0;$$

$$6) xy' + y = (x+y)^2 - 2x.$$

**11.7.** Перевірити, що наступні рівняння є рівняннями в повних диференціалах і знайти їх загальний інтеграл, де вказано розв'язати задачу Коші.

$$1) (2xy^2 + \cos x)dx + (2x^2y + \cos y)dy = 0;$$

$$2) 3x(x - 2y^3)dx + y^2(5y^2 - 9x^2)dy = 0;$$

$$3) \left( \frac{x}{y^2} + e^{x-y} \right) y' = \frac{1}{y} + e^{x-y}, \quad y(1) = 1;$$

$$4) \left( \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x+y}} \right) dx + \left( \frac{1}{\sqrt{y}} + \frac{1}{\sqrt{x+y}} \right) dy = 0, \quad x_0 = y_0 = 0;$$

$$5) \frac{x(2 + 3xy^2)}{y^3} dx + \frac{2y^2 + 3x^2}{y^4} dy = 0;$$

$$6) \left(2y + \sqrt{1-x^2}\right)y' = \frac{1+xy}{\sqrt{1-x^2}}, \quad y(0) = -1;$$

$$7) \frac{(2x-y)dx + (x+2y)dy}{x^2 + y^2} = 0; \quad x_0 = 1, \quad y_0 = 0;$$

$$8) \frac{xy \cos(xy) + 2}{x} dx + \frac{xy \cos(xy) + 1}{y} dy = 0;$$

$$9) \left( \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{1}{1+x^2} \right) dx + \left( \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{1}{1+y^2} \right) dy = 0;$$

$$10) \frac{1}{y} \left( \cos \frac{x}{y} + 2xy \right) dx = \frac{1}{y^3} \left( xy \cos \frac{x}{y} + 2 \right) dy, \quad x_0 = 0, \quad y_0 = -1.$$

**11.8.** Знайти інтегральний множник і зінтегрувати рівняння.

$$1) 3x^2 dx + (x^3 - e^{-y}) dy = 0; \quad 2) (x^2 + 3y^2) dx = 2xy dy;$$

$$3) y \sin \frac{y}{x} dx = x \left( \sin \frac{y}{x} + 2xy \right) dy; \quad 4) (1-y) dx + \left( y - \frac{x}{y} \right) dy = 0;$$

$$5) (y + e^{x/y}) dx + \left( y - \frac{x}{y} e^{x/y} \right) dy = 0; \quad 6) (3y^2 - 2x^2) dx + \left( 3xy - \frac{y}{x} \right) dy = 0;$$

$$7) \cos y dy = (\sin y + e^x \sin x) dx;$$

$$8) y \sin(2x) dx + (y^2 + \cos y \cdot \cos^2 x) dy = 0;$$

$$9) \left( 3x - 4y - \frac{2y^2}{x} \right) dx + \left( \frac{y^2}{x} - 4y - 2x \right) dy = 0; \quad 10)$$

$$y dx + \left( 2x - \frac{\sqrt{x}}{y^2} \right) dy = 0.$$

**11.9.** Зінтегрувати рівняння, розв'язавши його відносно  $y'$ .

$$1) (y')^2 - 2yy' = y^2(e^{2x} - 1); \quad 2) (y')^2 - 2xy' - 8x^2 = 0;$$

$$3) (y')^2 - yy' + e^x = 0; \quad 4) (y')^2 - 4xy' + 2y + 2x^2 = 0;$$

$$5) x(y - xy')^2 = x(y')^2 - 2yy'; \quad 6) (xy' + 3y)^2 = 7x.$$

**11.10.** Зінтегрувати рівняння методом введення параметру.

$$1) y = (y')^2 e^{y'}; \quad 2) y = 2xy' + y^2 (y')^3;$$

$$3) y = (y')^2 - x(1 - y'); \quad 4) y = x(y')^3 + \sqrt{(y')^2 - 1};$$

$$5) y = (1 - 3y')e^{3y'}; \quad 6) y = y'(1 + y' \cos y');$$

$$7) y = \ln(1 + (y')^2); \quad 8) y = (y')^2 + 2(y')^3.$$

**11.11.** Зінтегрувати рівняння методом введення параметру.

$$1) x = y' \sqrt{1 - (y')^2}; \quad 2) x y y' + 3(y')^3 = 2y^2;$$

$$3) x = \ln y' + \sin y'; \quad 4) x = \frac{y}{y'} \ln y - \frac{(y')^2}{y^2};$$

$$5) xy' = \sqrt{1 + (y')^2}; \quad 6) x((y')^2 - 1) = 2y';$$

$$7) y'(x - \ln y') = 1; \quad 8) y' = e^{\frac{xy'+1}{y}}.$$

**11.12.** Зінтегрувати рівняння Лагранжа.

$$1) y = \ln y' - x(y')^2; \quad 2) 2xy' - y = \ln y';$$

$$3) y = x(y')^2 - \frac{1}{y'}; \quad 4) y = x(y')^3 + \sqrt{(y')^2 - 1}.$$

**11.13.** Зінтегрувати рівняння Клеро.

1)  $y = xy' + x(y')^2$ ; 2)  $y = xy' + 2\sqrt{1+(y')^2}$ ;

3)  $y = xy' - \frac{1}{y'}$ ; 4)  $y + xy' = 4\sqrt{y'}$ .

**11.14.** Зінтегрувати рівняння 2-го порядку, що припускають зниження порядку.

1)  $(1-x^2)y'' = 2(xy'+1)$ ; 2)  $xy'' - y' = x^2e^x$ ; 3)  $xy'' = y' \ln \frac{y'}{x}$

4)  $y'' = \sqrt{1-(y')^2}$ ; 5)  $y'' = 2(y-1)y'$ ; 6)  $yy'' = 2(y')^2$ .

**11.15.** Знизити порядок рівняння, користуючись їх однорідністю, та зінтегрувати рівняння.

1)  $x^2yy'' + (x^2 + 2)(y')^2$ ; 2)  $e^x(yy'' - (y')^2) = y^2(x + e^x)$ ;

3)  $xyy'' = y'(y + y')$ ; 4)  $x^2yy'' = (y - xy')^2$ .

**11.16.** Звести рівняння до вигляду, коли обидві його частини є повними похідними, та зінтегрувати рівняння.

1)  $yy''' + 3y'y'' = 0$ ; 2)  $yy'' + (y')^2 = 1$ ; 3)  $xy'' = 2yy' - y'$ ;

4)  $y'y''' = 2(y'')^2$ ; 5)  $5(y''')^2 - 3y''y^{(iv)} = 0$ ; 6)  $y'' = xy' + y + 1$ .

**11.17.** Знайти загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння зі сталими коефіцієнтами, де вказано початкові умови, розв'язати задачу Коші.

1)  $y'' - 4y' + 3y = 0$ ,  $y(0) = 6$ ,  $y'(0) = 10$ ; 2)  $3y'' - 2y' - 8y = 0$ ;

3)  $y'' + y' - 3y = 0$ ; 4)  $y'' - 8y' + 25y = 0$ ,  $y(-1) = 0$ ,  $y'(-1) = -1$ ;

5)  $(y'' + 2y' + y)(y' + y) = 0$ ; 6)  $(y'' + 2y' - 3y)(y'' + 3y' - 4y) = 0$ .

**11.18.** Знайти загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння зі сталими коефіцієнтами і спеціальним виглядом правої частини. Де вказано початкові умови, розв'язати задачу Коші.

1)  $y'' - 2y' + 1 = e^{2x}$ ; 2)  $(y' - 6y)'' = 11y + 11 - 12y'$ ;

3)  $4(y' - y)' = x - y$ ; 4)  $y'' + y = 2(1 - x)$ ,  $y(0) = 2$ ,  $y'(0) = -2$ ;

5)  $y'' + y' + y + 1 = \sin x + x + x^2$ ; 6)  $y'' - 4y' + 4y = 2x + e^{2x}$ ;

**11.19.** Знайти загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння, і знайти вигляд частинного розв'язку неоднорідного рівняння зі сталими коефіцієнтами і спеціальним виглядом правої частини. Числових значень коефіцієнтів не треба знаходити.

1)  $y'' - 2y' + 2y = e^x + x \cos x$ ; 2)  $y'' + 6y' + 10y = 3xe^{-3x} - 2e^{3x} \cos x$ ;

3)  $y'' + 9y = (2x^2 - x + 1) \cos 3x - x \sin 3x$ ; 4)  $y'' - 4y' + 5y = e^{2x} \sin^2 x$ ;

**11.20.** Знайти загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння методом варіації довільних сталих.

1)  $y'' + 2y' + 2y = \frac{e^{-x}}{\sin x}$ ; 2)  $y'' - y' = \frac{1}{e^x + 1}$ ; 3)  $y'' + 4y = 2 \operatorname{tg} x$ .

**11.21.** Знайти загальний розв'язок системи диференціальних рівнянь:

$$1) \begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = 2y_1 + y_2 + e^{2x}, \\ \frac{dy_2}{dx} = -y_1 + 2y_2 - 3e^{2x}; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = 2y_1 - 3(\sin 3x - \cos 3x), \\ \frac{dy_2}{dx} = 4y_2 - y_1 + 3(\cos 3x - \sin 3x). \end{cases}$$

## Глава 12. Теорія рядів

### 12.1. Поняття числового ряду. Збіжність числового ряду

Є така жартівлива задача: “Летіла гуска, за нею половина гуски, за нею чверть гуски, за нею восьма частина гуски і тощо до нескінченності, тобто за кожною частиною гуски летить її половина. Скільки всього летіло гусок?” Спробуємо її розв’язати. Оскільки за кожною частиною гуски летить її половина, то для розв’язання задачі треба знайти суму:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \dots$$

Особливість цієї суми полягає у тому, що вона містить нескінченну кількість доданків. Що розуміти під такою сумою? Чи взагалі існує вона? Розглянемо ще один приклад, вже не жартівливий, а який зустрічається в науках про Землю. Нехай є деякий резервуар, в якому послідовно накопичуються опади. Припустимо, що з самого початку в резервуарі вже є деяка кількість  $a$  м<sup>3</sup> опадів. І за кожний наступний рік у резервуарі відкладається ще  $d$  м<sup>3</sup> опадів. Після 5 років сукупна кількість опадів буде  $a + 5d$  м<sup>3</sup>, після  $n$  років –  $a + nd$  м<sup>3</sup>. Якщо спробувати скласти всі ці величини, припустивши, що  $n$  необмежено зростає, то у нас вийде:

$$a + (a + d) + (a + 2d) + \dots + (a + nd) + \dots$$

Легко зрозуміти, що скінченного значення цієї суми не існує.

Суми з нескінченною кількістю доданків іноді викликають, внаслідок їх неправильного розуміння, цікаві парадокси. Розглянемо наступний приклад. Чому дорівнює сума:

$$s = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots ?$$

З одного боку:

$$s = (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \dots = 0 + 0 + 0 + \dots = 0.$$

З другого:

$$s = 1 - (1 - 1) - (1 - 1) - (1 - 1) - \dots = 1 - 0 - 0 - 0 - \dots = 1.$$

З третього:

$$s = 1 - (1 - 1 + 1 - 1 + \dots) = 1 - s, \text{ звідки } s = \frac{1}{2}, \text{ і таким чином:}$$



$$0 = 1 = \frac{1}{2}.$$

Наведені приклади свідчать про те, що суми з нескінченною кількістю доданків мають властивості, які суттєво відрізняються від звичайних скінченних сум. Разом з тим суми такого типу мають дуже важливе значення як для самої математики, так і для її застосувань. Тому метою даної глави буде оволодіння теорією таких сум або, як їх називають, рядів, і вміння застосувати їх до розв'язання практичних задач.

Перейдемо тепер до точних математичних означень і формулювань.

**Означення.** Нехай задано послідовність чисел:

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots \quad (12.1.1)$$

Формальний вираз вигляду:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots \quad (12.1.2)$$

називається *числовим рядом*, а самі числа (12.1.1) – *членами* цього ряду. Вираз  $a_n$  називається *загальним членом ряду*. Це формула, яка задає залежність члена ряду від його номера.

Замість виразу (12.1.2) часто використовують символ:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n .$$

**Означення.** Суми:

$$A_1 = a_1, \quad A_2 = a_1 + a_2, \quad \dots, \quad A_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

називаються *частковими сумами* ряду (12.1.2).

Легко помітити, що ці суми, у свою чергу, утворюють числову послідовність  $\{A_n\}$ .

**Означення.** Якщо існує скінченна границя:

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n, \quad (12.1.3)$$

то ряд (12.1.2) називається *збіжним*, а число  $A$  сумою ряду. Якщо  $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n$  не існує, або є нескінченним, то ряд (12.1.2) називається *розбіжним*.

Таким чином, питання про збіжність ряду (12.1.2) за означенням рівносильно питанню про існування скінченної границі (12.1.3). І навпаки, яку б послідовність  $\{x_n\}$  ми б ні взяли, питання про на-

явність у неї скінченної границі може бути зведено до питання про збіжність ряду:

$$x_1 + (x_2 - x_1) + (x_3 - x_2) + \dots + (x_n - x_{n-1}) + \dots,$$

для якого частковими сумами є як раз елементи послідовності  $\{x_n\}$ .

*Приклади*

1. Розглянемо ряд, з яким ми вже мали справу:

$$1 - 1 + 1 - 1 + \dots + (-1)^{n-1} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}. \quad (12.1.4)$$

Складемо частинні суми:

$$A_1 = 1, \quad A_2 = 1 - 1 = 0, \quad A_3 = 1 - 1 + 1 = 1, \quad A_4 = 1 - 1 + 1 - 1 = 0, \\ \dots, A_{2m} = 0, \quad A_{2m+1} = 1, \dots$$

тобто ці суми утворюють послідовність:

$$1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots, \frac{1 + (-1)^{n-1}}{2}, \dots$$

Легко встановити (див. п. 4.1), що ця послідовність не має границі (ані скінченної, ані нескінченної), отже ряд (12.1.4) є розбіжним. Таким чином, коли ми намагалися знайти його суму, ми “шукали чорну кішку у темній кімнаті, коли її там нема”.

2. Розглянемо суму геометричної прогресії:

$$1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}.$$

Бачимо, що ряд (12.1.4) отримується з цього ряду при  $q = -1$ , і, як ми довели, у цьому випадку він розбігається. Нехай тепер  $q = 1$ . Тоді маємо ряд:

$$1 + 1 + 1 + 1 + \dots + 1 + \dots$$

Очевидно, що його часткові суми:

$$A_1 = 1, \quad A_2 = 2, \quad \dots, \quad A_n = n, \dots, \quad \text{і тому } \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty,$$

отже, ряд розбіжний.

Нехай  $|q| > 1$ . Тоді, використовуючи формулу суми  $n$  перших членів геометричної прогресії, матимемо:

$$A_n = 1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1} = \frac{1 - q^n}{1 - q}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \frac{1}{1 - q} \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - q^n).$$

Оскільки при  $|q| > 1$ :  $\lim_{n \rightarrow \infty} |q|^n = \infty$ , то скінченної границі для  $\{A_n\}$  не існує, і ряд розбіжний. Якщо  $|q| < 1$ , то  $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$ , і

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \frac{1}{1-q}, \text{ отже ряд збіжний, та його сума дорівнює } \frac{1}{1-q}.$$

Помітимо, що у жартівливій задачі про гусок, яку розглянуто на початку параграфу, виникає саме такий ряд при  $q = \frac{1}{2}$ , отже, внаслідок

$$\text{цього "летіло"} \quad \frac{1}{1-1/2} = \frac{1}{1/2} = 2 \text{ гуски.}$$

3. Розглянемо ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}.$$

Складемо  $n$ -у часткову суму цього ряду:

$$A_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{(n-2)(n-1)} + \frac{1}{(n-1)n} + \frac{1}{n(n+1)}.$$

Подамо її у вигляді:

$$\begin{aligned} A_n &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots \\ &\dots + \left(\frac{1}{n-2} - \frac{1}{n-1}\right) + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \\ &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n-2} - \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

Тепер знайдемо:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1.$$

Отже, ряд збіжний, та його сума дорівнює 1.

## 12.2. Властивості збіжних числових рядів

Збіжні числові ряди підпорядковуються наступним властивостям.

Розглянемо ряд, що отримано з ряду (12.1.2) відкиданням від нього перших  $m$  членів:

$$a_{m+1} + a_{m+2} + \dots + a_{m+k} + \dots = \sum_{n=m+1}^{\infty} a_n. \quad (12.2.1)$$

Цей ряд називається *залишком* ряду (12.1.2) після  $m$ -го члена і позначається  $R_m$ .

**Властивість 1.** *Якщо збігається ряд (12.1.2), то збігається й будь-який з його залишків, і навпаки – із збіжності залишку (12.2.1) випливає збіжність ряду (12.1.2).*

**Доведення.** Позначимо через  $A'_k$   $k$ -у часткову суму ряду (12.2.1):

$$A'_k = a_{m+1} + a_{m+2} + \dots + a_{m+k}.$$

Тоді маємо:

$$A'_k = A_{m+k} - A_m. \quad (12.2.2)$$

Якщо ряд (1.1.2) збігається, то  $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A$ , і  $\lim_{k \rightarrow \infty} A_{m+k} = A$ , отже, існує  $\lim_{k \rightarrow \infty} A'_k = A - A_m$ , звідки випливає, що ряд (12.2.1) збігається. Якщо тепер припустимо, що ряд (12.2.1) збігається, то існує  $\lim_{k \rightarrow \infty} A'_k = A'$ . Покладемо у рівності (12.2.2)  $n = m + k$ , тоді  $k = n - m$ , і з співвідношення (12.2.2) одержуємо:  $A_n = A_m + A'_{n-m}$ . Оскільки ряд (12.2.1) збігається, то існує  $\lim_{n \rightarrow \infty} A'_{n-m} = A'$ , і звідси випливає, що існує  $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A_m + A'$ , тобто ряд (12.1.2) збіжний. Властивість 1 доведено.

Інакше кажучи, відкидання скінченного числа початкових членів ряду не впливає на його збіжність (але впливає на його суму).

**Властивість 2.** *Якщо ряд (12.1.2) збігається, то  $\lim_{m \rightarrow \infty} R_m = 0$ .*

**Доведення.** Маємо:  $A = A_m + R_m$ , отже  $R_m = A - A_m$ . Оскільки  $A = \lim_{m \rightarrow \infty} A_m$ , то:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} R_m = \lim_{m \rightarrow \infty} (A - A_m) = A - \lim_{m \rightarrow \infty} A_m = A - A = 0.$$

**Властивість 3.** *Якщо всі члени збіжного ряду помножити на одне й те ж число  $c$ , то збіжність ряду не порушиться, а його сума помножиться на число  $c$ .*

**Доведення.** Помножимо всі члени збіжного ряду (12.1.2) на число  $c$ . Одержимо новий ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$ . Позначимо  $\bar{A}_n$  його часткову суму з номером  $n$ , тобто,  $\bar{A}_n = \sum_{k=1}^n ca_k$ . Якщо  $A_n = \sum_{k=1}^n a_k$  – часткова сума з номером  $n$  ряду (12.1.2), то  $\bar{A}_n = cA_n$ . Отже,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{A}_n = \lim_{n \rightarrow \infty} cA_n = c \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = cA,$$

де  $A$  – сума ряду (12.1.2).

**Властивість 4.** Якщо ряди:

$$(A): \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{і} \quad (B): \sum_{n=1}^{\infty} b_n,$$

збігаються, та їх суми відповідно дорівнюють  $A$  і  $B$ , то ряди  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n)$  теж збігаються, та їх суми дорівнюють  $A \pm B$ .

**Доведення.** Нехай  $A_n$  і  $B_n$  – часткові суми відповідно рядів (A) і (B). Позначимо  $C_n$  – часткову суму ряду  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ . Тоді  $C_n = A_n + B_n$ , отже,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (A_n + B_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n + \lim_{n \rightarrow \infty} B_n = A + B.$$

Аналогічно розглядається ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n)$ .

**Властивість 5.** Якщо ряд (12.1.2) збігається, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

**Доведення.** Оскільки ряд (12.1.2) збігається, то існує  $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A$ .

Запишемо загальний член ряду (12.1.2) у вигляді:

$$a_n = A_n - A_{n-1}.$$

Тоді  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n - \lim_{n \rightarrow \infty} A_{n-1} = A - A = 0$ , що й треба було довести.

Таким чином, загальний член будь-якого збіжного ряду прямує до нуля при прямуванні його номера до нескінченності.

**Наслідок.** Якщо  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$ , то ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  – розбіжний.

Цей наслідок дає достатню умову розбіжності ряду.

*Приклади*

1. Дослідити на збіжність ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n}.$$

Розглянемо:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{n} \right) = 1 \neq 0,$$

отже, ряд розбіжний.

2. Дослідити на збіжність ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin n\alpha, \quad \alpha \neq m\pi \quad (m \in \mathbb{Z}).$$

Покажемо, що величина  $\sin n\alpha$  не прямує до нуля при  $n \rightarrow \infty$ . Дійсно, припустимо, що  $\sin n\alpha \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ . Тоді  $\sin(n+1)\alpha \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ , тобто  $\sin n\alpha \cdot \cos \alpha + \cos n\alpha \cdot \sin \alpha \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ , звідки випливає, що  $\cos n\alpha \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ , оскільки  $\sin \alpha \neq 0$ . А це неможливо, оскільки  $\sin^2 n\alpha + \cos^2 n\alpha = 1$ . Таким чином, даний ряд є розбіжним.

**Зауваження.** Обернене твердження несправедливе, тобто з того, що загальний член ряду прямує до нуля при  $n \rightarrow \infty$ , не випливає збіжність ряду. У якості прикладу розглянемо ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \dots$$

Очевидно, що  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$ . Покажемо, що, тим не менш, цей ряд розбіжний. Розглянемо його часткову суму:

$$A_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}}_{n \text{ разів}} = \frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n},$$

Звідки  $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} = \infty$ , отже, ряд розбіжний.

### 12.3. Ознаки збіжності знакододатних рядів. Ознаки порівняння

**Означення.** Ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  називається *знакододатним*, якщо  $\forall n$  виконано  $a_n \geq 0$ .

З точки зору збіжності знакододатними можна вважати також ряди, які містять скінченну кількість від'ємних членів, оскільки, якщо їх відкинути, то збіжність ряду не порушиться. Звичайно, що при цьому зміниться сума ряду.

Якщо ряд є знакододатним, то для його часткових сум виконано:  $A_{n+1} = A_n + a_{n+1} \geq A_n$ . Тобто послідовність  $\{A_n\}$  є неспадною. А звідси на підставі теореми про існування границі монотонної та обмеженої послідовності (див. п. 4.8) впливає наступне твердження.

**Теорема 1.** *Знакододатний ряд буде збіжним тоді і тільки тоді, коли послідовність  $\{A_n\}$  обмежена зверху.*

Всі ознаки збіжності знакододатних рядів фактично ґрунтуються на цій теоремі. Але її безпосереднє використання для дослідження рядів на збіжність далеко не завжди просте. Тому на практиці, як правило, використовуються інші ознаки збіжності рядів.

**Теорема 2 (ознака порівняння).** *Нехай задано два знакододатних ряди:*

$$(A): \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad \text{і} \quad (B): \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

*Якщо  $\forall n$  виконано*

$$a_n \leq b_n,$$

*то із збіжності ряду (B) випливає збіжність ряду (A).*

**Доведення.** Позначимо через  $A_n, B_n$  відповідно часткові суми рядів (A) і (B), тобто:

$$A_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n, \quad B_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n.$$

Внаслідок умови теореми виконано:  $A_n \leq B_n$ . Оскільки ряд (B) збіжний, то існує  $\lim_{n \rightarrow \infty} B_n = B$ , а із знакододатності рядів (A), (B) випливає, що  $B_n \leq B$ , тобто частинні суми обох рядів обмежені зверху. На підставі попередньої теореми звідси випливає збіжність ряду (A).

**Наслідок.** Якщо ряд  $(A)$  розбіжний, то розбіжний і ряд  $(B)$ .

Дійсно, якби ряд  $(B)$  збігався, то збігався б і ряд  $(A)$ , що суперечить умові.

Ряд  $(B)$  називається *мажорантою* для ряду  $(A)$ , а ряд  $(A)$  *мінорантою* для ряду  $(B)$ . Тому попереднє твердження формулюють іноді так:

*Зі збіжності мажоранти випливає збіжність міноранти, а з розбіжності міноранти випливає розбіжність мажоранти.*

**Зауваження.** Доведена теорема справедлива і тоді, коли нерівність  $a_n \leq b_n$  виконується не для всіх  $n$ , а лише починаючи з деякого номера  $N$ .

Ця теорема носить назву *ознаки порівняння*. На практиці її використовують частіше в іншій формі.

**Теорема 3 (ознака порівняння у граничній формі).** Якщо існує границя:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = K,$$

і  $0 < K < +\infty$ , то ряди  $(A)$  і  $(B)$  збігаються, або розбігаються одночасно.

**Доведення.** Нехай, наприклад, ряд  $(B)$  збіжний. Тоді, згідно з означенням границі послідовності (див. п. 4.1) маємо:  $\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon : \forall n > N$  виконано:

$$\left| \frac{a_n}{b_n} - K \right| < \varepsilon,$$

або:

$$-\varepsilon < \frac{a_n}{b_n} - K < \varepsilon, \tag{12.3.1}$$

$$K - \varepsilon < \frac{a_n}{b_n} < K + \varepsilon, \text{ звідки } a_n < (K + \varepsilon)b_n.$$

Внаслідок властивості 3 збіжних рядів ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} (K + \varepsilon)b_n$  збіжний, а тоді на підставі теореми 2 збіжний і ряд  $(A)$ .



Якщо збігається ряд  $(A)$ , то збігається ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{K - \varepsilon}$ , а оскільки з

(12.3.1) випливає, що  $b_n < \frac{a_n}{K - \varepsilon}$ , то за теоремою 2 збігається ряд  $(B)$ .

Розбіжність водночас рядів  $(A)$ ,  $(B)$  доведіть самостійно.

Розглянемо приклади використання ознак порівняння.

*Приклад 1.* Дослідити на збіжність ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}.$$

Очевидно, що для  $n \geq 1$ :  $\frac{1}{n2^n} \leq \frac{1}{2^n}$ . Ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$  збіжний, як геометрична прогресія із знаменником  $1/2$ , отже, і наш ряд теж збіжний.

*Приклад 2.* Дослідити на збіжність ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt[4]{n}}.$$

Порівняємо цей ряд з розбіжним рядом  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ , використовуючи ознаку порівняння у граничній формі.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt[4]{n}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n} + \sqrt[4]{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{\sqrt[4]{n}}{\sqrt{n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{\sqrt[4]{n}}} = 1,$$

отже, даний ряд теж розбіжний.

## 12.4. Ознаки збіжності знакододатних рядів.

### Ознака Даламбера та радикальна ознака Коші

**Теорема (ознака Даламбера).** Нехай для ряду  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ,  $a_n > 0$ , існує границя:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l.$$

Тоді

- 1) якщо  $l < 1$ , то ряд збіжний,
- 2) якщо  $l > 1$ , або  $l = \infty$ , то ряд розбіжний,
- 3) якщо  $l = 1$ , то ряд може як збігатися, так і розбігатися (так званий сумнівний випадок).

**Доведення.** Розглянемо спочатку випадок  $l < 1$ . З умови теореми та з означення границі послідовності випливає, що:

$\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n > N$  виконано:

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} - l \right| < \varepsilon.$$

Або:

$$l - \varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < l + \varepsilon. \quad (12.4.1)$$

Оберемо  $\varepsilon$  настільки малим, щоб  $l + \varepsilon < q < 1$ . Тоді, починаючи з  $n = N + 1$ , буде виконано нерівність:

$\frac{a_{n+1}}{a_n} < q$ , або  $a_{n+1} < qa_n$ , тобто фактично серія нерівностей:

$$a_{N+2} < qa_{N+1},$$

$$a_{N+3} < qa_{N+2} < q^2 a_{N+1},$$

$$a_{N+4} < qa_{N+3} < q^3 a_{N+1},$$

...

$$a_{N+k} < qa_{N+k-1} < q^{k-1} a_{N+1}$$

...

Таким чином, для ряду:

$$a_{N+1} + a_{N+2} + \dots + a_{N+k} + \dots \quad (12.4.2)$$

мажорантою буде ряд:

$$a_{N+1} + qa_{N+1} + q^2 a_{N+1} + \dots + q^{k-1} a_{N+1} + \dots,$$

який є збіжним, як геометрична прогресія із знаменником  $q \in (0, 1)$ . Отже збіжний і ряд (12.4.2), який отримано з нашого ряду відкиданням  $N$  перших членів. З цього випливає, що наш ряд теж збіжний.

Нехай тепер  $l > 1$ . Оберемо в нерівності (12.4.1)  $\varepsilon$  настільки малим, щоб  $l - \varepsilon > q > 1$ . Тоді, починаючи з  $n = N + 1$ , буде виконано нерівність:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > q, \text{ або } a_{n+1} > qa_n.$$

Оскільки  $q > 1$ , то послідовність  $\{a_n\}$  зростаюча, і оскільки  $a_n > 0$ , то  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$ , тобто не виконано необхідну умову збіжності ряду, і таким чином, ряд розбіжний.

Розбіжним він буде і тоді, коли  $l = \infty$  (доведіть самостійно).

Теорему доведено.

*Приклади*

Дослідити на збіжність ряди.

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

Застосуємо ознаку Даламбера. Маємо:

$$a_n = \frac{a^n}{n!}, \quad a_{n+1} = \frac{a^{n+1}}{(n+1)!},$$

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{a^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a}{n+1} = 0 < 1,$$

Отже, ряд збіжний.

$$2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 6 \cdots (4n-2)}{4 \cdot 7 \cdots (3n+1)} = \frac{2}{4} + \frac{2 \cdot 6}{4 \cdot 7} + \frac{2 \cdot 6 \cdot 10}{4 \cdot 7 \cdot 10} + \dots$$

Також застосуємо ознаку Даламбера. Маємо:

$$a_n = \frac{2 \cdot 6 \cdots (4n-2)}{4 \cdot 7 \cdots (3n+1)}, \quad a_{n+1} = \frac{2 \cdot 6 \cdots (4n-2)(4n+2)}{4 \cdot 7 \cdots (3n+1)(3n+4)},$$

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot 6 \cdots (4n-2)(4n+2)}{4 \cdot 7 \cdots (3n+1)(3n+4)} \cdot \frac{4 \cdot 7 \cdots (3n+1)}{2 \cdot 6 \cdots (4n-2)} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n+2}{3n+4} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 + \frac{2}{n}}{3 + \frac{4}{n}} = \frac{4}{3} > 1,$$

Отже, ряд розбіжний.

Як видно з розглянутих прикладів, ознаку Даламбера зручно використовувати тоді, коли загальний член ряду містить певні добутки, зокрема, факторіали.

**Теорема (радикальна ознака Коші).** Нехай для ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad a_n > 0 \quad \text{існує границя:}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = l.$$

Тоді:

- 1) якщо  $l < 1$ , то ряд збіжний,
- 2) якщо  $l > 1$ , або  $l = \infty$ , то ряд розбіжний,
- 3) якщо  $l = 1$ , то ряд може як збігатися, так і розбігатися.

**Доведення.** Розглянемо спочатку випадок  $l < 1$ . Тоді  $\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n > N$  виконано:

$$\left| \sqrt[n]{a_n} - l \right| < \varepsilon,$$

тобто:

$$l - \varepsilon < \sqrt[n]{a_n} < l + \varepsilon.$$

Оберемо  $\varepsilon$  настільки малим, щоб  $l + \varepsilon < q < 1$ . Тоді, починаючи з  $n = N + 1$ , буде виконано:

$$\sqrt[n]{a_n} < q,$$

або:

$$a_n < q^n.$$

Таким чином, для ряду:

$$a_{N+1} + a_{N+2} + \dots + a_{N+k} + \dots$$

мажорантою буде ряд:

$$q^{N+1} + q^{N+2} + \dots + q^{N+k} + \dots,$$

який збіжний, як геометрична прогресія зі знаменником  $q \in (0,1)$ . Звідси випливає, що збіжний і наш ряд.

Нехай тепер  $l > 1$ . Тоді, починаючи з  $n = N + 1$ , буде виконано:

$$\sqrt[n]{a_n} > l - \varepsilon.$$

Оберемо  $\varepsilon$  так, щоб  $l - \varepsilon > 1$ . Тоді  $\sqrt[n]{a_n} > 1$  або  $a_n > 1$ , і таким чином, загальний член ряду не прямує до нуля, отже, ряд розбіжний.

Теорему доведено.

*Приклади.* Дослідити на збіжність ряди:

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{n}{3n+1} \right)^n$$

Застосуємо радикальну ознаку Коші. Матимемо:

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{3n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3 + \frac{1}{n}} = \frac{1}{3} < 1,$$

Отже, ряд збіжний.

$$2. \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{n+1}{n} \right)^n$$

Також застосуємо радикальну ознаку Коші. Маємо:

$$a_n = \left( \frac{n+1}{n} \right)^n, \quad \sqrt[n]{a_n} = \frac{n+1}{n}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{n} \right) = 1,$$

і ознака Коші не дає відповіді на питання про збіжність ряду. Спробуємо підійти до цього питання з іншого боку. Розглянемо границю загального члена ряду:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n = e \neq 0.$$

Таким чином, не виконано необхідну умову збіжності числового ряду, отже, ряд розбіжний.

Радикальну ознаку Коші, як правило, зручно використовувати в тих випадках, коли загальний член ряду містить номер члена ряду в показнику степеня.

## 12.5. Ознаки збіжності знакододатних рядів

### Інтегральна ознака Коші–Маклорена

**Теорема (інтегральна ознака Коші–Маклорена).** Нехай для

ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  виконано наступні умови:

$$1) a_n > 0; a_1 > a_2 > a_3 > \dots > a_n > a_{n+1} > \dots;$$

2) існує така функція  $y = f(x)$ , яка задовольняє умови:

а) ця функція визначена, неперервна, додатна і спадна на півінтервалі  $[1, +\infty)$ ,

б)  $f(k) = a_k, k = 1, 2, 3, \dots$

Тоді, якщо збігається невластний інтеграл

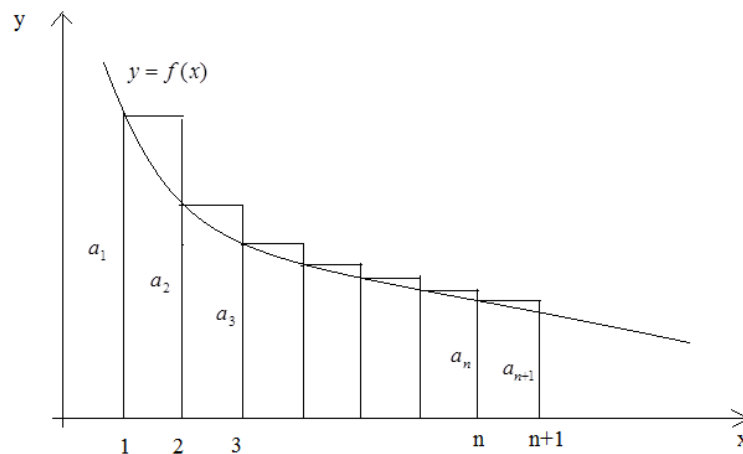
$$\int_1^{+\infty} f(x) dx, \quad (12.5.1)$$

то збігається і ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ , і навпаки, а якщо інтеграл (12.5.1) розбігається,

то розбігається і ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ , і навпаки.

Тобто ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  збігається або розбігається водночас з невластним інтегралом 1-го роду (12.5.1).

**Доведення.** Зобразимо члени ряду геометрично, відкладаючи по осі абсцис номери  $1, 2, 3, \dots, n, n+1, \dots$ , а по осі ординат відповідні значення членів ряду (рис. 12.1).

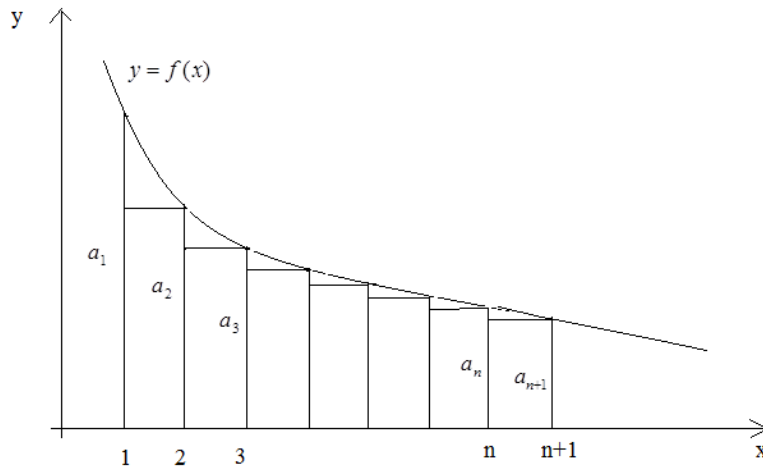


**Рис. 12.1**

Легко помітити, що сума площ побудованих на рис. 12.1 прямокутників дорівнює  $a_1 + a_2 + \dots + a_n = A_n$ , а площа криволінійної трапеції, обмеженої графіком функції  $y = f(x)$ , віссю  $Ox$  і вертикальними прямими  $x = 1, x = n + 1$ , менша за цю суму, тобто:

$$\int_1^{n+1} f(x) dx < A_n.$$

Побудуємо тепер прямокутники іншим чином (рис. 12.2):



**Рис. 12.2**

Сума площ цих прямокутників дорівнює  $a_2 + a_3 + \dots + a_{n+1} = A_{n+1} - a_1$ , і цього разу та ж сама площа криволінійної трапеції більша за цю суму, тобто:

$$A_{n+1} - a_1 < \int_1^{n+1} f(x) dx.$$

Таким чином, дістаємо подвійну нерівність:

$$A_{n+1} - a_1 < \int_1^{n+1} f(x) dx < A_n. \quad (12.5.2)$$

Розглянемо тепер наступні випадки:

1) інтеграл (12.5.1) збіжний. Тоді існує:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^{n+1} f(x) dx = \int_1^{+\infty} f(x) dx,$$

причому  $\int_1^{n+1} f(x) dx < \int_1^{+\infty} f(x) dx$ , і тоді з лівої частини нерівності

(12.5.2) випливає, що послідовність  $\{A_n\}$  обмежена зверху, отже,

знакододатний ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  збіжний;

2) інтеграл (12.5.1) розбіжний. Тоді:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^{n+1} f(x) dx = +\infty,$$

і з правої частини нерівності (12.5.2) буде впливати, що й  $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = +\infty$ , тобто наш ряд розбіжний.

Самостійно доведіть, що з розбіжності ряду  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  випливає розбіжність інтегралу (12.5.1), а із збіжності цього ряду – збіжність інтегралу (12.5.1).

Ця ознака дуже важлива і цікава, оскільки встановлює аналогію між рядами та інтегралами. Вперше її було знайдено в геометричній формі К. Маклореном, потім була позабута і знову відкрита О. Коші. Розглянемо приклади використання цієї теореми.

*Приклад*

Дослідити, за яких значень  $p$  збігається ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}. \quad (12.5.3)$$

Побудуємо функцію  $f(x) = \frac{1}{x^p}$  шляхом формальної заміни у загальному члені ряду  $n$  на  $x$  і розглянемо невластний інтеграл:

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p}.$$

У п. 7.7 показано, що цей інтеграл збігається при  $p > 1$  і розбігається при  $p \leq 1$ . Отже, саме при таких значеннях  $p$  відповідно збігається і розбігається наш ряд. До речі, розбіжність його при  $p = 1/2$  ми довели безпосередньо у п. 12.2. Цікавий випадок виникає, коли  $p = 1$ , тобто маємо ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

Цей ряд носить назву *гармонічного ряду*. Назву пов'язано з поняттям середнього гармонічного чисел  $a, b$ , яке визначається як число  $c$ , що пов'язане з  $a, b$  співвідношенням:

$$\frac{1}{c} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right).$$



Легко переконатися, що кожен член гармонічного ряду, починаючи з другого, є середнім гармонічним двох його сусідніх членів.

Сума ряду (12.5.3) при  $p > 1$  являє собою славнозвісну дзета-функцію Рімана, яка відіграє помітну роль у теорії чисел.

## 12.6. Знакозмінні ряди. Абсолютно та умовно збіжні ряди

Тепер ми будемо розглядати ряди, які мають як нескінченну кількість додатних членів, так і нескінченну кількість від'ємних. Такі ряди називаються *знакозмінними*. Безпосередньо до таких рядів не можна застосовувати ознаки збіжності знакододатних числових рядів. Але, як ми побачимо нижче, ознаку Даламбера та радикальну ознаку Коші за певним їх коректуванням може бути застосовано і для знакозмінних рядів.

Нехай ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (A)$$

є знакозмінним. Розглянемо поряд з ним ряд, складений з модулів членів ряду (A):

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \quad (|A|).$$

**Теорема.** Якщо збігається ряд  $(|A|)$ , то збігається і ряд  $(A)$ .

**Доведення.** Покладемо:

$$p_n = \frac{|a_n| + a_n}{2}, \quad q_n = \frac{|a_n| - a_n}{2}.$$

Тоді  $\forall n \in \mathbb{N}: 0 \leq p_n \leq |a_n|, 0 \leq q_n \leq |a_n|$ . На підставі ознаки порівняння (див. п. 12.3) з цих нерівностей випливає, що знакододатні ряди  $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$  і  $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$  збіжні. Оскільки  $a_n = p_n - q_n$ , то на підставі властивості 4 (див. п. 12.2) збіжним є і ряд (A).

**Зауваження.** Обернене твердження несправедливе, тобто із збіжності ряду (A) не випливає збіжність ряду  $(|A|)$ . Якщо ряд  $(|A|)$  збігається, то ряд (A) називається *абсолютно збіжним*. Якщо ряд  $(|A|)$  розбігається, а ряд (A) збігається, то ряд (A) називається *умовно*

збіжним. В більш детальних математичних курсах показується суттєва відмінність властивостей абсолютно збіжних та умовно збіжних рядів.

## 12.7. Ряди, знаки членів яких чергуються. Ознака Лейбніца

Розглянемо знакозмінний ряд наступного вигляду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots + (-1)^{n+1} u_n + \dots, \quad (12.7.1)$$

де  $u_n > 0$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ). Знаки членів цього ряду строго чергуються, тобто знаки будь-яких сусідніх членів такого ряду протилежні. За кожним додатним членом йде від'ємний і навпаки.

**Теорема (ознака Лейбніца).** *Якщо для ряду (12.7.1) виконано умови:*

- 1)  $u_1 > u_2 > u_3 > \dots > u_n > u_{n+1} > \dots$ ,
- 2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ ,

то ряд (2.7.1) збігається, його сума додатна і не перевищує  $u_1$ .

**Доведення.** Розглянемо спочатку часткову суму ряду (12.7.1) з парним номером:

$$U_{2n} = (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \dots + (u_{2n-1} - u_{2n}).$$

З першої умови теореми випливає, що вираз в кожній з дужок додатний, отже,

$$U_{2n} > 0.$$

Крім того,  $U_{2n}$  зростає з ростом  $n$ . Згрупуємо тепер доданки в  $U_{2n}$  інакше:

$$U_{2n} = u_1 - (u_2 - u_3) - \dots - (u_{2n-2} - u_{2n-1}) - u_{2n}.$$

Внаслідок першої умови теореми кожна з цих дужок теж додатна, отже,

$$U_{2n} < u_1.$$

Таким чином, послідовність  $\{U_{2n}\}$  зростаюча і обмежена зверху, отже, існує:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} U_{2n} = U, \quad 0 < U < u_1.$$

Тепер розглянемо часткову суму з непарним номером  $U_{2n+1}$ . Очевидно,

$$U_{2n+1} = U_{2n} + u_{2n+1}.$$

Внаслідок другої умови теореми маємо:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} U_{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} U_{2n} + \lim_{n \rightarrow \infty} u_{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} U_{2n} = U.$$

Таким чином, як для парних, так і для непарних  $n$  маємо:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = U,$$

отже, ряд (12.7.1) збігається.

Теорему доведено.

**Наслідок.** Якщо ряд (12.7.1) задовольняє умови ознаки Лейбніца, то його залишок не перевищує за абсолютною величиною модуля першого відкинутого члена.

*Приклади*

1. Дослідити на абсолютну і умовну збіжність ряд:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \dots$$

Перевіримо виконання умов ознаки Лейбніца.

$$1) 1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \dots > \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} > \dots ; \quad 2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0,$$

тобто обидві умови виконано, отже, ряд збіжний. Складемо ряд з модулів членів даного ряду:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

А це гармонічний ряд, який є розбіжним (див. п. 12.5). Таким чином, наш ряд збігається умовно.

2. Дослідити на абсолютну і умовну збіжність ряд:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)!} = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \dots$$

$$\text{Оскільки } 1 > \frac{1}{2!} > \frac{1}{3!} > \dots \quad \text{і} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(n+1)!} = 0,$$

то умови ознаки Лейбніца виконано, і ряд збіжний. Складемо ряд з абсолютних величин членів нашого ряду:

$$1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{(n+1)!} + \dots$$

За ознакою Даламбера легко довести, що цей ряд збіжний (зробіть самостійно). Отже, наш ряд збігається абсолютно.

## 12.8. Функціональні послідовності та ряди. Рівномірна збіжність

Нехай кожному натуральному числу  $n$  і кожному значенню  $x$  з деякої множини  $X$  поставлено у відповідність функцію  $y = f_n(x)$ . Тоді кажуть, що на множині  $X$  задано *функціональну послідовність*  $\{f_n(x)\}$ . Нехай  $x_0 \in X$ . Якщо числова послідовність  $\{f_n(x_0)\}$  збігається, то кажуть, що функціональна послідовність  $\{f_n(x)\}$  збігається в точці  $x_0$ . Якщо функціональна послідовність  $\{f_n(x)\}$  збігається в кожній точці множини  $X$ , то кажуть, що ця послідовність збігається на множині  $X$ . У цьому випадку на множині  $X$  визначено функцію  $y = f(x)$ , значення якої  $\forall x \in X$  дорівнює границі послідовності  $\{f_n(x)\}$ . Ця функція називається *граничною функцією* функціональної послідовності  $\{f_n(x)\}$  на множині  $X$  і пишуть:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x), \quad x \in X. \quad (12.8.1)$$

За означенням границі це означає, що:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N = N_\varepsilon(x) : n > N \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon. \quad (12.8.2)$$

*Приклади*

$$1. f_n(x) = \frac{n+1}{n+x^2}, \quad X = \mathbb{R}.$$

Знайдемо:

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n+x^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{x^2}{n}} = 1 \quad \forall x \in X.$$

$$2. f_n(x) = n \sin \frac{1}{nx}, \quad X = (0, +\infty).$$

Знайдемо:

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \sin \frac{1}{nx} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{nx}}{\frac{1}{n}} = \frac{1}{x} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{nx}}{\frac{1}{nx}} = \frac{1}{x} \cdot 1 = \frac{1}{x}$$

$\forall x \in X$ .

$$3. f_n(x) = x^n, \quad X = [0, 1].$$

Знайдемо  $f(x)$ . Якщо  $0 \leq x < 1$ , то очевидно  $f(x) = 0$ , а якщо  $x = 1$ , то  $f(x) = 1$ .

$$4. f_n(x) = 2n^2 x e^{-n^2 x^2}, \quad X = [0, 1].$$

Знайдемо:

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 x}{e^{n^2 x^2}} = 0 \quad \forall x \in X.$$

Звернемо увагу, що в означенні границі (12.8.2) функціональної послідовності  $\{f_n(x)\}$  номер  $N$  залежить не тільки від  $\varepsilon$ , але й від  $x$ . Тобто для послідовності  $\{f_n(x)\}$  при одному й тому ж значенні  $\varepsilon$  і при різних значеннях  $x$  номери  $N$  можуть бути різними. При  $x = x_1$  матимемо номер  $N_1$ , а при  $x = x_2 \neq x_1$  – номер  $N_2$ , адже ми маємо справу з двома різними числовими послідовностями  $\{f_n(x_1)\}$  і  $\{f_n(x_2)\}$ . Виникає питання, чи можна для даної функціональної послідовності  $\{f_n(x)\}$  і для даного  $\varepsilon$  знайти такий номер  $N$ , який був би придатним для будь-якого  $x \in X$ ? Покажемо на прикладах, що в одних випадках такий номер  $N$  знайти можна, а в інших ні.

*Приклад 1.* Нехай  $f_n(x) = \frac{x}{1+n^2 x^2}$ ,  $X = [0, 1]$ . Очевидно, що  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0 \quad \forall x \in X$ . Оскільки:

$$0 \leq f_n(x) = \frac{1}{2n} \cdot \frac{2nx}{1+n^2 x^2} \leq \frac{1}{2n},$$

то для виконання нерівності  $f_n(x) < \varepsilon$  достатньо  $\forall x \in X$  взяти  $N = \left[ \frac{1}{2\varepsilon} \right] + 1$ , тобто такий номер  $N$  придатний  $\forall x \in X$ .

*Приклад 2.* Нехай  $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2 x^2}$ ,  $X = [0, 1]$ . Очевидно, що й тут  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0 \quad \forall x \in X$ . Для будь-якого фіксованого  $x > 0$  достатньо взяти  $N = \left[ \frac{1}{x\varepsilon} \right] + 1$ , щоб було  $f_n(x) < \frac{1}{nx} < \varepsilon$  при  $n > N$ . Але з іншого боку для функції  $f_n(x)$  у проміжку  $[0, 1]$  завжди знайдеться точка, а саме точка  $x_n = \frac{1}{n}$ , у якій значення функції  $f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}$ . Таким

чином, за рахунок збільшення  $n$  зробити  $f_n(x) < \frac{1}{2}$  для всіх  $x \in [0,1]$  одразу неможливо. Тобто для  $\varepsilon = \frac{1}{2}$  не існує номера  $N$ , який був би придатним одразу для всіх  $x \in [0,1]$ .

**Означення.** Функціональна послідовність  $\{f_n(x)\}$  називається *рівномірно збіжною* на множині  $X$  до функції  $f(x)$ , якщо  $\forall \varepsilon > 0 \exists N = N_\varepsilon : \forall n > N_\varepsilon, \forall x \in X$  виконано  $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ .

Підкреслимо, що у цьому означенні номер  $N$  залежить лише від  $\varepsilon$ , але не залежить від  $x$ .

Таким чином, у прикладі 1 ми маємо справу з рівномірним прямуванням послідовності  $\{f_n(x)\}$  до нуля на  $[0,1]$ , а у прикладі 2 – ні.

*Приклад.* Довести, що послідовність  $\{f_n(x)\}$ , де

$f_n(x) = \frac{\arctg(n^2 x)}{\sqrt[3]{n+x}}$ , рівномірно збігається на множині  $X = [0, +\infty)$ , і знайти  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ .

Оскільки  $0 \leq \arctg(n^2 x) < \frac{\pi}{2}$ ,  $\sqrt[3]{n+x} \geq \sqrt[3]{n}$  при  $x \in [0, +\infty)$ , то

$0 \leq f_n(x) < \frac{\pi}{2\sqrt[3]{n}}$ , звідки  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$ , причому, оскільки  $\frac{\pi}{2\sqrt[3]{n}} < \varepsilon$ , як-

що тільки  $n > \left(\frac{\pi}{2\varepsilon}\right)^3$ , то у якості  $N$  можна взяти  $\left[\left(\frac{\pi}{2\varepsilon}\right)^3\right] + 1$ . Бачимо,

що  $N$  не залежить від  $x$ , отже дана послідовність збігається до нуля рівномірно на  $[0, +\infty)$ .

Розглянемо функціональну послідовність  $\{f_n(x)\}$ . Складемо формальний вираз:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x) + \dots \quad (12.8.3)$$

Такий вираз називається *функціональним рядом*, а  $f_n(x)$  – *загальним членом* цього ряду.

Тобто функціональний ряд – це такий ряд, кожен член якого залежить не тільки від свого номера, а й від деякої змінної  $x$ .

Складемо вирази:

$$F_1(x) = f_1(x), F_2(x) = f_1(x) + f_2(x), \dots, F_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x), \dots$$

Ці вирази називаються *частковими сумами* ряду (12.8.3), і вони, у свою чергу, утворюють функціональну послідовність  $\{F_n(x)\}$ .

**Означення.** Якщо функціональна послідовність  $\{F_n(x)\}$  збігається на множині  $X$  до функції  $F(x)$ , то функціональний ряд називається *збіжним на множині  $X$* , а функція  $F(x)$  – *сумою* цього ряду. Множина  $X$  називається *областю збіжності* функціонального ряду (12.8.3).

*Приклади*

1. Розглянемо ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}$ . Як ми знаємо, він збігається при  $|x| < 1$  і розбігається при  $|x| \geq 1$  (п. 12.1). Отже, областю збіжності цього ряду є інтервал  $(-1, 1)$ , і сума ряду  $F(x) = \frac{1}{1-x}$ .

2. Розглянемо ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ . У п. 12.5 ми довели, що цей ряд збігається при  $x > 1$  і розбігається при  $x \leq 1$ . Отже, областю збіжності цього ряду є інтервал  $(1, +\infty)$ .

Якщо у кожній точці  $x \in X$  збігається ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ , то ряд (12.8.3) називається *абсолютно збіжним на множині  $X$* .

**Означення.** Ряд (12.8.3) називається *рівномірно збіжним на множині  $X$* , якщо функціональна послідовність  $\{F_n(x)\}$  його часткових сум рівномірно збігається на множині  $X$  до функції  $F(x)$ . Тобто  $\forall \varepsilon > 0 \exists N = N_\varepsilon : \forall n > N_\varepsilon, \forall x \in X$  виконано  $|F_n(x) - F(x)| < \varepsilon$ .

Вираз  $|F_n(x) - F(x)|$  є модулем залишку ряду:

$$R_n(x) = F(x) - F_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x).$$

Таким чином, функціональний ряд (12.8.3) називається рівномірно збіжним на множині  $X$ , якщо  $\forall \varepsilon > 0 \exists N = N_\varepsilon : \forall n > N_\varepsilon, \forall x \in X$  виконано  $|R_n(x)| < \varepsilon$ . Тобто  $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0 \quad \forall x \in X$ .

**Теорема (ознака Вейєрштрасса рівномірної збіжності функціонального ряду).** Нехай для функціонального ряду (12.8.3) існує та-

кий збіжний знакододатний числовий ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ , що  $\forall n \in \mathbb{N}$  і  $\forall x \in X$

виконано нерівність:

$$|f_n(x)| \leq a_n. \quad (12.8.4)$$

Тоді ряд (12.8.3) збігається абсолютно та рівномірно на множині  $X$ .

**Доведення.** З умови (12.8.4) і ознаки порівняння (див. п. 12.3) випливає, що ряд (12.8.3) є абсолютно збіжним у довільній точці  $x \in X$ . Тоді є абсолютно збіжним залишок  $R_n(x)$  цього ряду. Для нього матимемо:

$$|R_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k = r_n,$$

де  $r_n$  – залишок знакододатного збіжного числового ряду  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ . Внаслідок збіжності цього числового ряду  $r_n \rightarrow 0$  (властивість 2, п. 12.2). Тому  $\forall \varepsilon > 0$  існує  $N = N_\varepsilon$ , що не залежить від  $x$ , такий, що  $r_n < \varepsilon$ , якщо тільки  $n > N$ . Тоді  $\forall n > N, \forall x \in X$  виконано  $|R_n(x)| < \varepsilon$ . Таким чином, ми довели, що  $\forall \varepsilon > 0 \exists N = N_\varepsilon$ , незалежний від  $x$ , такий, що  $\forall n > N, \forall x \in X$  виконано  $|R_n(x)| < \varepsilon$ . А це й означає рівномірну на множині  $X$  збіжність ряду (12.8.3).

Теорему доведено.

*Приклади*

Довести, що заданий функціональний ряд збігається абсолютно та рівномірно на множині  $X$ .

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}, \quad X = (-\infty, +\infty).$$

Маємо:

$$\left| \frac{\sin nx}{n^2} \right| = \frac{|\sin nx|}{n^2} \leq \frac{1}{n^2} \quad \forall x \in X,$$

і, оскільки ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  збіжний (п. 1.5), то початковий ряд за ознакою

Вейерштрасса збігається абсолютно та рівномірно на  $X$ .

Для будь-якого  $x \in X$  маємо:



$\left| \frac{nx}{1+n^5x^2} \right| = \frac{n|x|}{1+n^5|x|^2} \leq \frac{1}{2n^{3/2}}$  (досягається це значення при  $x_n = 1/n^{5/2}$ ), ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^{3/2}}$  збіжний, отже на підставі ознаки Вейерштра-сса, початковий ряд збігається абсолютно та рівномірно на  $X$ .

## 12.9. Властивості рівномірно збіжних функціональних рядів

**Теорема 1 (про неперервність суми функціонального ряду).** Нехай всі члени ряду (12.8.1) неперервні на відрізку  $[a, b]$ , і цей ряд на відрізку  $[a, b]$  збігається рівномірно. Тоді сума  $F(x)$  ряду (12.8.1) також неперервна на відрізку  $[a, b]$ .

**Доведення.** Нехай  $x_0$  довільна точка інтервалу  $(a, b)$ . За умовою послідовність  $\{F_n(x)\}$  рівномірно на  $[a, b]$  збігається до функції  $F(x)$ , тобто  $\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon : \forall n > N_\varepsilon, \forall x \in [a, b]$  виконано:  $|F_n(x) - F(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$ .

Зафіксуємо номер  $n_0 > N_\varepsilon$ , тоді  $|F(x) - F_{n_0}(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$ , зокрема, при  $x = x_0$ :  $|F(x_0) - F_{n_0}(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$ .

Функція  $F_{n_0}(x)$  неперервна в точці  $x_0$  як сума скінченного числа неперервних функцій. За означенням неперервності це означає, що  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) : \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  виконано:  $|F_{n_0}(x) - F_{n_0}(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$ .

З цих нерівностей випливає:

$$\begin{aligned}
 |F(x) - F(x_0)| &= |(F(x) - F_{n_0}(x)) + (F_{n_0}(x) - F_{n_0}(x_0)) + (F_{n_0}(x_0) - F(x_0))| \leq \\
 &\leq |F(x) - F_{n_0}(x)| + |F_{n_0}(x) - F_{n_0}(x_0)| + |F_{n_0}(x_0) - F(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon
 \end{aligned}$$

$\forall x \in (a, b)$ . Отже, функція  $F(x)$  неперервна на інтервалі  $(a, b)$ . Аналогічно доводиться, що в точці  $x = a$  функція  $F(x)$  неперервна справа, а в точці  $x = b$  – неперервна зліва. Отже, функція  $F(x)$  неперервна на відрізку  $[a, b]$ .

**Теорема 2 (про почленне інтегрування функціонального ряду).** Якщо всі члени ряду (12.8.1) неперервні на відрізку  $[a, b]$ , і ряд (12.8.1) рівномірно збігається на цьому відрізку, то ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^x f_n(t) dt \quad (12.9.1)$$

також рівномірно збігається на відрізку  $[a, b]$ , причому, якщо

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x), \text{ то:}$$

$$\int_a^x F(t) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^x f_n(t) dt \quad \forall x \in [a, b], \quad (12.9.2)$$

тобто ряд (12.8.1) можна почленно інтегрувати на відрізку  $[a, b]$ .

**Доведення.** Оскільки ряд (12.8.1) збігається рівномірно на відрізку  $[a, b]$ , і його сумою є функція  $F(x)$ , то послідовність  $\{F_n(x)\}$  його часткових сум на відрізку  $[a, b]$  збігається рівномірно до функції  $F(x)$ , тобто:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon : \forall n > N_\varepsilon, \forall t \in [a, b] \Rightarrow |F(t) - F_n(t)| < \frac{\varepsilon}{b-a}. \quad (12.9.3)$$

Позначимо:

$$\sigma(x) = \int_a^x F(t) dt, \quad \sigma_n(x) = \sum_{k=1}^n \int_a^x f_k(t) dt.$$

Оскільки функції  $f_n(x)$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) неперервні на відрізку  $[a, b]$ , то вони інтегровні на цьому відрізку. Внаслідок рівномірної збіжності ряду (12.8.1) функція  $F(x)$  неперервна на відрізку  $[a, b]$ , отже, вона

також на ньому інтегровна. Оскільки  $\sigma_n(x) = \int_a^x \sum_{k=1}^n f_k(t) dt = \int_a^x F_n(t) dt$ ,

то  $\sigma(x) - \sigma_n(x) = \int_a^x (F(t) - F_n(t)) dt$ . Звідси внаслідок (12.9.3) дістанемо:

$$|\sigma(x) - \sigma_n(x)| \leq \int_a^x |F(t) - F_n(t)| dt < \frac{\varepsilon}{b-a} \int_a^x dt = \varepsilon \frac{x-a}{b-a} \leq \varepsilon,$$

причому цю нерівність виконано  $\forall n > N_\varepsilon \quad \forall x \in [a, b]$ . Це й означає, що ряд (12.9.1) збігається рівномірно на відрізку  $[a, b]$ , і виконано рівність (12.9.2). Теорему доведено.

**Теорема 3 (про почленне диференціювання функціонального ряду).** Якщо функції  $f_n(x)$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) мають на відрізку  $[a, b]$  неперервні похідні  $f'_n(x)$ , ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x) \quad (12.9.4)$$

рівномірно збігається на відрізку  $[a, b]$ , а ряд (12.8.1) збігається хоча б в одній точці  $x_0 \in [a, b]$ , тобто збігається ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0), \quad (12.9.5)$$

то ряд (12.8.1) збігається рівномірно на відрізку  $[a, b]$ , і його можна почленно диференціювати, тобто:

$$F'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x),$$

де  $F(x)$  – сума ряду (12.8.1).

**Доведення.** Позначимо  $\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x)$ . За попередньою теоремою ряд (12.9.4) можна почленно інтегрувати, тобто:

$$\int_{x_0}^x \varphi(t) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{x_0}^x f'_n(t) dt, \quad (12.9.6)$$

де  $x_0, x \in [a, b]$ , причому ряд (12.9.6) збігається рівномірно на відрізку

$[a, b]$ . Оскільки  $\int_{x_0}^x f'_n(t) dt = f_n(x) - f_n(x_0)$ , то:

$$\int_{x_0}^x \varphi(t) dt = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(x), \quad (12.9.7)$$

де  $g_n(x) = f_n(x) - f_n(x_0)$ . Ряд (12.9.7) збігається рівномірно на відрізку  $[a, b]$ , і збігається числовий ряд (12.9.5). Тому ряд (12.8.1):

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(x) + \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$$

рівномірно збігається на  $[a, b]$ .

З (12.9.7) випливає, що:

$$\int_{x_0}^x \varphi(t) dt = F(x) - F(x_0). \quad (12.9.8)$$

Функція  $\varphi(x)$  неперервна на відрізку  $[a, b]$  як сума рівномірно збіжного ряду з неперервних функцій. Тому функція  $\int_{x_0}^x \varphi(t) dt$  має на  $[a, b]$  похідну, яка дорівнює  $\varphi(x)$ . Отже,  $F(x) - F(x_0)$  також має похідну  $F'(x)$ , і виконано рівність  $F'(x) = \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x)$ . Теорему доведено.

## 12.10. Степеневі ряди, радіус та інтервал збіжності

Серед функціональних рядів особливо виділяються так звані *степеневі ряди*, тобто ряди вигляду:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots \quad (12.10.1)$$

Числа  $a_0, a_1, a_2, \dots$  дійсні, вони називаються *коефіцієнтами* степеневого ряду.

Для степеневого ряду область його збіжності набуває специфічного вигляду. Для його з'ясування доведемо наступну теорему.

**Теорема Абеля.** *Якщо степеневий ряд (12.10.1) збіжний при  $x = x_0 \neq 0$ , то він є абсолютно збіжним  $\forall x: |x| < |x_0|$ .*

**Доведення.** Зауважимо одразу, що ряд (12.10.1) збіжний при  $x = 0$ . Нехай він збіжний при  $x = x_0 \neq 0$ , тобто збіжним є числовий ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ . На підставі необхідної умови збіжності числового ряду

звідси випливає, що  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n x_0^n = 0$ . Тоді послідовність  $\{a_n x_0^n\}$  обмежена, тобто  $\exists M: \forall n$  виконано  $|a_n x_0^n| \leq M$ . Оскільки за умовою  $\left| \frac{x}{x_0} \right| < 1$ ,

то:

$$|a_n x^n| = \left| a_n x_0^n \frac{x^n}{x_0^n} \right| = |a_n x_0^n| \cdot \left| \frac{x^n}{x_0^n} \right| \leq M q^n, \text{ де } q = \left| \frac{x}{x_0} \right|.$$

Таким чином, модуль кожного члена ряду (12.10.1) не перевищує відповідного члена збіжної геометричної прогресії. Тоді за ознакою

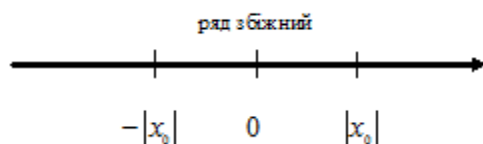
порівняння (п. 12.3, теорема 2) ряд (12.10.1) при  $|x| < |x_0|$  абсолютно збіжний.

Теорему доведено.

**Наслідок.** Якщо ряд (12.10.1) розбігається при  $x = x_1$ , то він розбіжний  $\forall x: |x| > |x_1|$ .

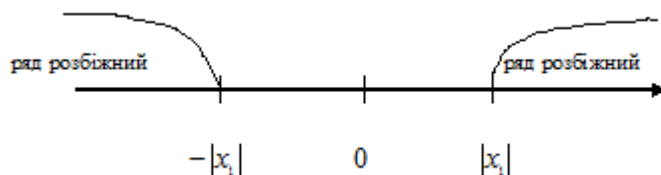
Дійсно, припустимо, що ряд (12.10.1) збігається для деякого  $x = x_2: |x_2| > |x_1|$ . Тоді за теоремою Абеля він збігається для  $x = x_1$ , що суперечить умові.

Теорема Абеля визначає характер області збіжності степеневому ряду. Якщо при  $x = x_0$  ряд збігається, то він абсолютно збігається  $\forall x \in (-|x_0|, |x_0|)$  (рис. 12.3 а).



**Рис. 12.3 а**

Якщо при  $x = x_1$  ряд розбігається, то він розбігається і на інтервалах  $(-\infty, -|x_1|)$ ,  $(|x_1|, +\infty)$  (рис. 12.3 б).



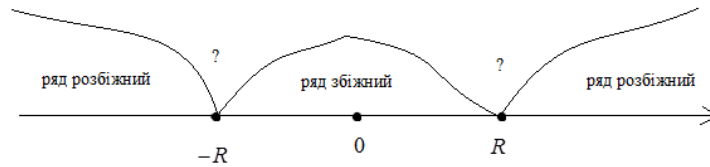
**Рис. 12.3 б**

Отже, для області збіжності степеневому ряду можливі три випадки:

- 1) ряд (12.10.1) збіжний лише в точці  $x = 0$ ;
- 2) ряд (12.10.1) збіжний при  $x \in (-\infty, +\infty)$ ;
- 3) існує таке скінченне число  $R \in (0, +\infty)$ , що при  $|x| < R$

ряд (12.10.1) абсолютно збіжний, а при  $|x| > R$  – розбіжний (рис. 12.3 в). У точках  $x = \pm R$  ряд може бути як збіжним, так і розбіжним, і питання про збіжність ряду у цих точках вирішується окремо.

Число  $R$  називається *радіусом збіжності* степеневому ряду, а інтервал  $(-R, R)$  – *інтервалом збіжності*.



**Рис. 12.3 в**

Виведемо формули для знаходження радіусу збіжності  $R$ . Складемо ряд із модулів членів ряду (12.10.1):

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n x^n|.$$

Тепер це знакододатний ряд, для дослідження збіжності якого можна застосувати, наприклад, ознаку Даламбера. Припустимо, що існує границя:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1} x^{n+1}}{a_n x^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \cdot |x| = L |x| \neq 0, \quad x \neq 0$$

(тут  $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ ).

Тоді ряд (12.10.1) є абсолютно збіжним при  $L|x| < 1$ , або  $|x| < \frac{1}{L}$ , і розбіжним при  $L|x| > 1$ , тому що у цьому випадку загальний член ряду не прямує до нуля. Отже, інтервал  $\left(-\frac{1}{L}, \frac{1}{L}\right)$  є інтервалом збіжності ряду (12.10.1), а число:

$$R = \frac{1}{L} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \tag{12.10.2}$$

є його радіусом збіжності.

Аналогічно, використовуючи радикальну ознаку Коші, матимемо:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}. \tag{12.10.3}$$

**Зауваження.** Досить часто доводиться мати справу зі степеневими рядами узагальненого вигляду:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n. \tag{12.10.4}$$

Для таких рядів радіус збіжності визначається також за формулами (12.10.2), (12.10.3), а інтервал збіжності має вигляд  $(x_0 - R, x_0 + R)$  (рис. 12.4).

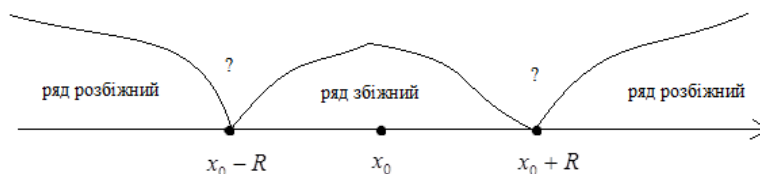


Рис. 12.4

### Приклади

1. Знайти область збіжності ряду:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

Застосуємо для знаходження радіусу збіжності формулу (12.10.2).

Матимемо:

$$a_n = \frac{1}{n+1}, \quad a_{n+1} = \frac{1}{n+2};$$

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n+2}{n+1} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{n+1} \right) = 1,$$

тобто ряд збігається, якщо  $x \in (-1, 1)$ .

Дослідимо збіжність ряду у межах інтервалу збіжності, тобто у точках  $x = \pm 1$ .

а)  $x = -1$ . Тоді маємо числовий ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$ , який збігається за

ознакою Лейбніца (див. п. 12.7);

б)  $x = 1$ . Тоді маємо гармонічний ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$ , який

розбіжний (п. 12.5). Отже, областю збіжності нашого ряду є півінтервал  $[-1, 1)$ .

2. Знайти область збіжності ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^{n^2} (x+1)^n. \quad (12.10.5)$$

Зробимо заміну змінної  $z = x + 1$ . Тоді одержимо ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} z^n. \quad (12.10.6)$$

Для знаходження радіусу збіжності цього ряду використаємо формулу (12.10.3). Маємо:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e},$$

тобто ряд (12.10.6) збігається при  $z \in \left(-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right)$ .

Дослідимо точки  $z = \pm \frac{1}{e}$ . Розглянемо спочатку точку  $z = -\frac{1}{e}$ . Одержуємо ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} \frac{(-1)^n}{e^n}.$$

Покажемо, що загальний член цього ряду не прямує до нуля. Розглянемо:

$$\begin{aligned} u_n &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} \frac{1}{e^n} = \exp \left[ \ln \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}}{e^n} \right] = \\ &= \exp \left( n^2 \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) - n \right) = \exp \left[ -n + n^2 \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) \right] \rightarrow \exp \left( -\frac{1}{2} \right) \end{aligned}$$

при  $n \rightarrow \infty$  (тут використано формулу (5.15.2)).

Таким чином, у точці  $z = -\frac{1}{e}$  ряд (12.10.6) розбіжний. За тою ж самою причиною він розбіжний і при  $z = \frac{1}{e}$ . Отже, область збіжності

ряду (12.10.6) є інтервал  $\left(-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right)$ , а тоді область збіжності ряду

(12.10.5) є інтервал  $x \in \left(-1 - \frac{1}{e}, -1 + \frac{1}{e}\right)$ .



## 12.11. Властивості степеневих рядів

**Теорема 1.** Якщо число  $R > 0$  є радіусом збіжності степеневого ряду (12.10.1), то цей ряд збігається абсолютно і рівномірно на будь-якому відрізку  $[-q, q]$ , де  $0 < q < R$ .

**Доведення.** Оскільки  $0 < q < R$ , то при  $x = q$  ряд (12.10.1) збігається абсолютно, тобто збігається знакододатний ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \cdot q^n$ . Якщо  $|x| \leq q$ , то члени ряду (12.10.1) за абсолютною величиною не перевищують відповідних членів цього ряду, отже, за ознакою Вейерштрасса для цих значень  $x$  ряд (12.10.1) збігається абсолютно та рівномірно. Теорему доведено.

**Зауваження.** Хоча число  $q$  може бути як завгодно близьким до числа  $R$ , але з цієї теореми не випливає рівномірна збіжність ряду (12.10.1) на всьому інтервалі  $(-R, R)$ .

**Теорема 2.** Сума степеневого ряду (12.10.1) є неперервною функцією на будь-якому відрізку  $[-q, q]$ , де  $0 < q < R$ .

Це твердження безпосередньо випливає з теореми 1 (п. 12.9) і попередньої теореми.

**Теорема 3.** Степеневий ряд (12.10.1) можна почленно інтегрувати на будь-якому відрізку  $[\alpha, \beta]$ , такому, що  $-R < \alpha < \beta < R$ , де  $R$  – радіус збіжності ряду (12.10.1). При цьому, якщо  $S(x)$  – сума ряду (12.10.1), то:

$$\int_{\alpha}^{\beta} S(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_{\alpha}^{\beta} x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{\beta^{n+1} - \alpha^{n+1}}{n+1}.$$

**Доведення** безпосередньо випливає з теореми 2 (п. 12.9) та теореми 1 цього пункту.

**Теорема 4.** Якщо число  $R > 0$  є радіусом збіжності степеневого ряду (12.10.1), то це число є також радіусом збіжності ряду, утвореного почленно диференціюванням ряду (12.10.1), при цьому, якщо  $S(x)$  – сума ряду (12.10.1), то:

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}.$$

**Доведення** безпосередньо випливає з теореми 3 (п. 12.9) та теореми 1 цього пункту.

Таким чином, ряд (12.10.1) на будь-якому відрізку  $[\alpha, \beta] \subset (-R, R)$  можна інтегрувати та диференціювати будь-яке число разів. При цьому радіусом збіжності отриманих рядів кожного разу буде залишатися число  $R$ .

**Зауваження.** Хоча радіус збіжності рядів, утворених почленним інтегруванням або диференціюванням ряду (12.10.1), залишається тим самим, що й радіус збіжності самого ряду (12.10.1), ситуація зі збіжністю цих рядів у точках  $\pm R$  може не співпадати з ситуацією зі збіжністю в цих точках ряду (12.10.1). Тому дослідження цих ситуацій є окремим питанням.

*Приклад.* Розглянемо ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}.$$

Як було показано у п. 12.10, областю збіжності цього ряду є півінтервал  $[-1, 1)$ . Розглянемо ряд, отриманий інтегруванням даного ряду на відрізку  $[0, x]$ , де  $|x| < 1$ :

$$\int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n} dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \int_0^x t^n dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}.$$

Легко переконатися, що радіус збіжності цього ряду також  $R = 1$ . Але на відміну від ряду, що інтегрувався, цей ряд збігається у точках  $x = -1$ ,  $x = 1$  (доведіть самостійно).

## 12.12. Ряди Тейлора і Маклорена

Перейдемо тепер до розгляду дуже важливого питання. Досі ми розглядали властивості суми заданого степеневого ряду. Поставимо тепер інше питання: за даною сумою побудувати відповідній їй степеневий ряд.

Отже, нехай  $f(x)$  – сума степеневого ряду:

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + a_3(x - x_0)^3 + \dots + a_n(x - x_0)^n + \dots = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n \end{aligned} \quad (12.12.1)$$

в інтервалі  $(x_0 - R, x_0 + R)$ . Знайдемо коефіцієнти цього ряду. З цією метою будемо послідовно диференціювати цей ряд.

$$f'(x) = a_1 + 2a_2(x - x_0) + 3a_3(x - x_0)^2 + \dots + na_n(x - x_0)^{n-1} + \dots ;$$

$$f''(x) = 2a_2 + 2 \cdot 3a_3(x - x_0) + 3 \cdot 4a_4(x - x_0)^2 + \dots + (n-1)na_n(x - x_0)^{n-2} + \dots;$$

$$f'''(x) = 2 \cdot 3a_3 + 2 \cdot 3 \cdot 4a_4(x - x_0) + \dots + (n-2)(n-1)na_n(x - x_0)^{n-3} + \dots ;$$

$$f^{(IV)}(x) = 2 \cdot 3 \cdot 4a_4 + \dots + (n-3)(n-2)(n-1)na_n(x - x_0)^{n-4} + \dots ;$$

...

$$f^{(n)}(x) = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots (n-2)(n-1)na_n + 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots n(n+1)a_{n+1}(x - x_0) + \dots ;$$

...

Покладемо в цих всіх рівностях  $x = x_0$ . Дістанемо:

$$f(x_0) = a_0, \quad f'(x_0) = a_1, \quad f''(x_0) = 2a_2 = 2!a_2, \quad f'''(x_0) = 2 \cdot 3a_3 = 3!a_3,$$

$$f^{(IV)}(x_0) = 2 \cdot 3 \cdot 4a_4 = 4!a_4, \dots,$$

$$f^{(n)}(x_0) = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots (n-2)(n-1)na_n = n!a_n, \dots$$

Звідси дістаємо формули для коефіцієнтів ряду (12.12.1):

$$a_0 = f(x_0), \quad a_1 = f'(x_0), \quad a_2 = \frac{f''(x_0)}{2!}, \quad a_3 = \frac{f'''(x_0)}{3!}, \dots, \quad a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}, \dots$$

Підставляючи ці співвідношення у рівність (12.12.1), одержимо:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \dots =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n.$$

**Означення.** Ряд:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n \tag{12.12.2}$$

називається *рядом Тейлора функції  $f(x)$* .

Отже, ми довели наступну теорему.

**Теорема.** *Якщо функція  $f(x)$  в інтервалі  $(x_0 - R, x_0 + R)$  розкладається у степеневий ряд, то цей ряд єдиний і є рядом Тейлора для даної функції.*

Якщо у ряді (12.12.2), зокрема,  $x_0 = 0$ , то відповідний ряд називається *рядом Маклорена* для функції  $f(x)$ :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n. \tag{12.12.3}$$

У подальшому нашою метою буде з'ясування умов збіжності ряду (12.12.2) до функції  $f(x)$ . Дивно, насправді. Ми одразу припустили, що  $f(x)$  є сумою побудованого нами степеневому ряду, як же він може збігатися до іншої функції? Але це можливо. Розглянемо наступний приклад:

$$f(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right), & \text{якщо } x \neq 0, \\ 0, & \text{якщо } x = 0. \end{cases} \quad (12.12.4)$$

У випадку, коли  $x \neq 0$ , маємо:

$$f'(x) = \frac{2}{x^3} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right), \quad f''(x) = \left(-\frac{6}{x^4} + \frac{4}{x^6}\right) \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right),$$

і взагалі:

$$f^{(n)}(x) = P_{(n)}\left(\frac{1}{x}\right) \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right),$$

де  $P_{(n)}\left(\frac{1}{x}\right)$  – поліном деякого степеня відносно  $\frac{1}{x}$  (тут  $n$  – номер поліному, а не його степінь), тобто  $f^{(n)}(x)$  є лінійною комбінацією доданків вигляду  $\frac{1}{x^m} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)$ , де  $m \in \mathbb{N}$ . Знайдемо:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^m} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \left[ \begin{array}{l} t = \frac{1}{x^2}, \quad t \rightarrow +\infty \\ x = t^{-\frac{1}{2}} \end{array} \right] = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^{\frac{m}{2}}}{e^t} = 0$$

(за правилом Лопітала, див. п. 5.14). Таким чином,  $\lim_{x \rightarrow \pm 0} f^{(n)}(x) = 0$ .

Отже, сама функція  $f(x)$  неперервна у точці  $x = 0$  разом зі своїми похідними будь-якого порядку, причому, як можна показати,  $f^{(n)}(0) = 0 \quad \forall n = 0, 1, 2, \dots$ .

Таким чином, всі члени ряду Тейлора для функції (12.12.4) дорівнюють нулю, отже, його сума також дорівнює нулю, і тоді ряд не збігається до тієї функції, для якої його побудовано.

Виникає питання, які умови треба ввести, щоб степеневий ряд для функції  $f(x)$  на інтервалі  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  збігався саме до цієї функції? Для розв'язання цієї задачі введемо залишок ряду Тейлора після  $m$ -го члена:

$$R_m(x) = \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n.$$

Запишемо також формулу Тейлора для функції  $f(x)$ :

$$f(x) = \sum_{n=0}^m \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n + r_m(x). \quad (12.12.5)$$

Зауважимо, що тут  $r_m(x)$  – залишковий член формули Тейлора (див. п. 5.15), а не залишковий член ряду Тейлора  $R_m(x)$ . Стверджувати, що ці величини співпадають, можна лише тоді, коли встановлено, що ряд Тейлора збігається саме до функції  $f(x)$ .

Позначимо:

$$s_m(x) = \sum_{n=0}^m \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n$$

і перепишемо формулу (12.12.5) у вигляді:

$$f(x) = s_m(x) + r_m(x).$$

Очевидно, що  $s_m(x)$  співпадає з  $m$ -ю частковою сумою ряду Тейлора (12.12.2). Звідси випливає, що для того, щоб функція  $f(x)$  співпадала на інтервалі  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  з сумою свого ряду Тейлора, тобто для того, щоб  $\lim_{m \rightarrow \infty} s_m(x) = f(x) \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ , необхідно і достатньо, щоб  $\lim_{m \rightarrow \infty} r_m(x) = 0 \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ . Якщо це має місце, то  $r_m(x) = R_m(x)$ , тобто залишковий член формули Тейлора є також сумою залишку ряду Тейлора після  $m$ -го члена.

**Теорема.** Нехай функція  $f(x)$  в інтервалі  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  має похідні будь-якого порядку, та існує таке число  $M > 0$ , що  $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  і для всіх  $n = 0, 1, 2, \dots$  виконано:

$$|f^{(n)}(x)| \leq M. \quad (12.12.6)$$

Тоді на інтервалі  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  ряд Тейлора для функції  $f(x)$  збігається саме до функції  $f(x)$ .

**Доведення.** Скористаємось тим, що  $\forall a \in \mathbb{R}$  виконано:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0, \quad (12.12.7)$$

Це, зокрема, випливає з того, що вираз  $\frac{a^n}{n!}$  є загальним членом збіж-

ного числового ряду  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!}$  (п. 12.4, приклад 1). Покажемо, що в умовах теореми виконано:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} r_m(x) = 0 \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta). \quad (12.12.8)$$

Запишемо залишковий член формули Тейлора в формі Лагранжа (див. п. 5.15):

$$r_m(x) = \frac{f^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!} (x - x_0)^{m+1},$$

де  $\xi$  міститься між точками  $x_0$  та  $x$ . З нерівності (12.12.6) випливає:

$$|r_m(x)| = \left| \frac{f^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!} (x - x_0)^{m+1} \right| \leq M \frac{|x - x_0|^{m+1}}{(m+1)!}.$$

Оскільки  $|x - x_0| < \delta$ , то:

$$|r_m(x)| < M \frac{\delta^{m+1}}{(m+1)!}. \quad (12.12.9)$$

Звідси на підставі (12.12.7) одержуємо справедливість (12.12.8). А це означає, що ряд Тейлора для функції  $f(x)$  збігається на інтервалі  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  саме до цієї функції. Теорему доведено.

### 12.13. Розкладання елементарних функцій у степеневі ряди.

#### Основні формули

Перейдемо тепер до питань практичного розкладання функцій в степеневі ряди. Як ми встановили, такі степеневі ряди обов'язково є рядами Тейлора для відповідних функцій. На практиці частіше всього користуються рядами Маклорена (12.12.3). З викладеного у попередньому пункті випливає, що для розкладання функції в ряд Маклорена потрібно:

- а) знайти  $f'(x), f''(x), f'''(x), \dots, f^{(n)}(x), \dots$  ;
- б) обчислити значення функції  $f(x)$  та всіх її похідних у точці  $x = 0$ , тобто знайти  $f^{(n)}(0), n = 0, 1, 2, \dots$  ;
- в) записати ряд Маклорена (12.12.3) для даної функції і знайти область його збіжності;

г) визначити інтервал  $(-\delta, \delta)$ , у якому залишковий член формули Маклорена  $R_n(x)$  прямує до нуля при  $n \rightarrow \infty$ ;

Якщо такий інтервал існує (він може відрізнятись від інтервалу збіжності ряду (12.12.3)), то в цьому інтервалі функція  $f(x)$  і сума ряду Маклорена співпадають.

Розглянемо тепер розкладання в ряд Маклорена деяких конкретних функцій.

$$1. \quad y = f(x) = e^x.$$

У даному випадку маємо:  $f^{(n)}(x) = e^x \quad \forall n = 0, 1, 2, \dots$ , отже,  $f^{(n)}(0) = e^0 = 1$ , і згідно з (12.12.3):

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \quad (12.13.1)$$

Знайдемо область збіжності цього ряду. За формулою (12.10.2) радіус збіжності:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1/n!}{1/(n+1)!} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) = \infty,$$

Отже, ряд (12.13.1) збігається  $\forall x \in (-\infty, +\infty)$ . Нехай тепер  $|x| < \delta < +\infty$ . Тоді:  $|f^{(n)}(x)| < e^\delta \quad \forall n = 0, 1, 2, \dots$ , тобто умову теореми п. 12.12 виконано з константою  $M = e^\delta$ . Таким чином, функцію  $y = e^x$  можна розкласти в степеневий ряд (12.13.1) на будь-якому інтервалі  $(-\delta, +\delta) \subset (-\infty, +\infty)$ , а отже, і на всьому інтервалі  $(-\infty, +\infty)$ .

$$2. \quad y = f(x) = \sin x.$$

Маємо:

$$f'(x) = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right), \quad f''(x) = -\sin x = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right), \dots,$$

$$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right).$$

$$\text{Отже} \quad f^{(n)}(0) = \sin \frac{n\pi}{2} = \begin{cases} 0, & \text{якщо } n = 2m, \\ (-1)^m, & \text{якщо } n = 2m + 1. \end{cases}$$

Таким чином:

$$\sin x = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^m \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!} + \dots \quad 12.13.2$$

Аналогічно попередньому легко довести, що ряд (12.13.2) збігається  $\forall x \in (-\infty, +\infty)$ . Крім того,

$$|f^{(n)}(x)| = \left| \sin \left( x + \frac{n\pi}{2} \right) \right| \leq 1 < 2, \quad \forall x \in (-\infty, +\infty), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Тобто умову теореми п. 12.12 виконано з константою  $M = 2$ . Таким чином, функцію  $y = \sin x$  можна розкласти в степеневий ряд (12.13.2) на  $(-\infty, +\infty)$ .

$$3. \quad y = f(x) = \cos x.$$

Диференціюючи почленно ряд (12.13.2), дістанемо:

$$\cos x = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!} + \dots \quad (12.13.3)$$

Цей ряд збігається до функції  $y = \cos x \quad \forall x \in (-\infty, +\infty)$ .

$$4. \quad y = f(x) = (1+x)^\alpha.$$

Якщо число  $\alpha$  натуральне (тобто  $\alpha = m \in \mathbb{N}$ ) то рядом Маклорена для цієї функції є відома формула бінома Ньютона:

$$(1+x)^m = \sum_{k=0}^m C_m^k x^k.$$

У цьому випадку ряд перетворюється на скінченну суму, тобто на многочлен. Розглянемо випадок, коли  $\alpha \notin \mathbb{N}$ . Маємо:

$$f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1},$$

$$f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2},$$

$$f'''(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(1+x)^{\alpha-3},$$

...

$$f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}, \dots$$

Отже:

$$f(0) = 1, \quad f'(0) = \alpha, \quad f''(0) = \alpha(\alpha-1), \quad f'''(0) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2), \dots,$$

$$f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1), \dots$$

Таким чином, маємо:

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n. \quad (12.13.4)$$

Ряд (12.13.4) називають *біноміальним* (за аналогією з формулою бінома Ньютона). Знайдемо його радіус збіжності:



$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(n+1)!}{n!\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(\alpha-n)} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n+1}{\alpha-n} \right| = 1,$$

тобто ряд збіжний в інтервалі  $(-1;1)$ . Можна довести, що у цьому інтервалі  $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$ .

Зокрема, при  $\alpha = -1$  з формули (12.13.4) маємо:

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots, \quad (12.13.5)$$

тобто одержали відому формулу суми нескінченно спадної геометричної прогресії зі знаменником  $q = -x$  ( $|x| < 1$ ).

5. Зінтегруємо ряд (12.13.5) у межах від 0 до  $x$ , де  $|x| < 1$ :

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^x t^n dt,$$

тобто:

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \quad (12.13.6)$$

Нескладно перевірити, що цей ряд збігається до функції  $y = \ln(1+x)$  на півінтервалі  $(-1;1]$ .

6. Покладемо у формулі (12.13.5)  $x = z^2$ . Дістанемо, якщо  $|z| < 1$ :

$$\frac{1}{1+z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n} = 1 - z^2 + z^4 - z^6 + \dots \quad (12.13.7)$$

Зінтегрувавши цей ряд від 0 до  $x$ , одержимо:

$$\begin{aligned} \operatorname{arctg} x &= \int_0^x \frac{dz}{1+z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^x z^{2n} dz = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} = \\ &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots \quad (12.13.8) \end{aligned}$$

Легко перевірити, що цей ряд збігається до функції  $y = \operatorname{arctg} x$  при  $x \in [-1,1]$ .

Формули (12.13.1) – (12.13.8) дуже важливі, їх треба знати напам'ять.

## 12.14. Приклади на розкладання функцій у степеневі ряди

Як відмічалось у попередньому пункті, для розвинення функції в ряд Маклорена треба послідовно знайти похідні цієї функції та обчислити їх значення у точці  $x = 0$ . Але у багатьох випадках цей метод пов'язано зі значними незручностями, оскільки вирази для похідних, особливо вищих порядків, часто бувають досить громіздкі. І загальний член ряду знайти складно, а отже, й знайти область збіжності ряду. Разом з цим використання розвинень (12.13.1) – (12.13.8) в низці випадків дозволяє уникнути цієї процедури диференціювання. Розглянемо наступні приклади. Нехай треба задану функцію розкласти в ряд Маклорена і знайти область збіжності цього ряду.

1.  $y = 3^{x^2}$ .

Якщо послідовно знаходити похідні цієї функції, то вийде:

$$y' = 2x \cdot 3^{x^2} \ln 3, \quad y'' = 2 \cdot 3^{x^2} \ln 3 + 4x^2 \cdot 3^{x^2} \ln^2 3,$$

$$y''' = 12x \cdot 3^{x^2} \ln^2 3 + 8x^3 \cdot 3^{x^2} \ln^3 3,$$

$$y^{(IV)} = 12 \cdot 3^{x^2} \ln^2 3 + 48x^2 \cdot 3^{x^2} \ln^3 3 + 16x^4 \cdot 3^{x^2} \ln^4 3,$$

...

Як бачимо, ці вирази швидко ускладнюються з ростом порядку похідної. Тому зробимо інакше. Подамо дану функцію у вигляді:

$$y = 3^{x^2} = \left(e^{\ln 3}\right)^{x^2} = e^{x^2 \ln 3}.$$

Запишемо розвинення (12.13.1) для функції  $e^z$ :

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad -\infty < z < +\infty.$$

Покладемо в цій формулі  $z = x^2 \ln 3$ . Матимемо:

$$e^{x^2 \ln 3} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x^2 \ln 3)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\ln^n 3 \cdot x^{2n}}{n!}.$$

Це й є шукане розвинення. Легко знайти і область його збіжності. Оскільки  $-\infty < z < +\infty$ , то  $0 \leq x^2 \ln 3 < +\infty$ , отже  $-\infty < x < +\infty$ .

2.  $y = \cos^2 x$ .

Подамо дану функцію у вигляді:

$$y = \cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x.$$

Скористаємось розвиненням (12.13.3):

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}, \quad -\infty < z < +\infty.$$

Покладемо тут  $z = 2x$ . У наслідку дістанемо:

$$\begin{aligned} y = \cos^2 x &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2x)^{2n}}{(2n)!} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n} x^{2n}}{(2n)!} = \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n-1} x^{2n}}{(2n)!}, \quad -\infty < x < +\infty. \end{aligned}$$

$$3. y = \frac{x}{\sqrt{1-2x}}.$$

Скористаємось розвиненням (12.13.4) при  $\alpha = -1/2$ :

$$(1+z)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2}-1\right) \cdots \left(-\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!} z^n, \quad -1 < z < 1.$$

Покладемо тут  $z = -2x$ . У наслідку дістанемо:

$$\begin{aligned} y = x(1-2x)^{-1/2} &= x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2}-1\right) \cdots \left(-\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!} (-2x)^n = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2}-1\right) \cdots \left(-\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!} (-1)^n 2^n x^{n+1}, \quad -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$$4. y = \frac{x}{1+x-2x^2}.$$

Розкладемо даний дріб на елементарні дробі:

$$y = \frac{1}{3} \left( \frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+2x} \right).$$

Згідно з розвиненням (12.13.5) маємо:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-x} &= \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad -1 < x < 1, \\ \frac{1}{1+2x} &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 2^n x^n, \quad -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Звідси дістаємо:

$$y = \frac{1}{3} \left( \sum_{n=0}^{\infty} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 2^n x^n \right) = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} (1 - (-1)^n 2^n) x^n, \quad -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}.$$

$$5. \quad y = \ln(1 + x + x^2 + x^3).$$

Перетворимо дану функцію наступним чином:

$$y = \ln(1 + x + x^2 + x^3) = \ln((1+x)(1+x^2)) = \ln(1+x) + \ln(1+x^2), \quad x > -1.$$

Скористаємось розвиненням (12.13.6):

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad -1 < x \leq 1,$$

$$\ln(1+x^2) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x^2)^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+2}}{n+1}, \quad -1 \leq x \leq 1.$$

Тому:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+2}}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \left( (-1)^n + 2 \sin \frac{n\pi}{2} \right) x^{n+1}, \quad -1 < x \leq 1.$$

## 12.15. Застосування степеневих рядів

Викладений вище матеріал може створити враження, що теорія рядів дуже абстрактна, та її не може бути використано для розв'язання практичних задач. Але це цілком не так. Історично ряди виникли як засіб розв'язання саме задач практики. Нема сумніву, що відкриття нескінченних рядів належить до найзначніших досягнень математичного аналізу і всіх його застосувань, без якого неможливий був би подальший розвиток математики. Тут ми розглянемо лише деякі застосування степеневих рядів.

### 1. Наближене обчислення значень функції.

Нехай треба обчислити значення функції  $y = f(x)$  при  $x = x_0$ . Припустимо, що функцію  $y = f(x)$  можна розкласти у степеневий ряд в інтервалі  $(-R, R)$  та  $x_0 \in (-R, R)$ . Тоді точне значення  $f(x_0)$  дорівнює сумі цього ряду  $S(x_0)$ . Але, як правило, знайти точну суму ряду досить складна задача, і тому замість цього знаходять часткову суму цього ряду і користуються наближеною рівністю:

$$f(x_0) = S(x_0) \approx S_n(x_0).$$

Похибка цієї рівності оцінюється величиною  $R_n(x_0)$  залишкового члена степеневого ряду в точці  $x_0$ . Якщо, зокрема, ряд такий, що знаки його членів чергуються, то на підставі наслідку з теореми п. 12.7 величина  $|R_n(x_0)|$  не перевищує модуля першого відкинутого члена.

*Приклад 1.* Обчислити число  $\pi$  з точністю 0,01.

Скористаємося розвиненням (12.13.8) при  $x=1$ :

$$\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

З цієї рівності дістаємо:

$$\pi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{2n+1}.$$

Очевидно, що цей ряд знакозмінний і збіжний за ознакою Лейбніца (перевірте самостійно), а тоді його залишок не перевищує за модулем модуля першого відкинутого члена. Знайдемо таке  $n$ , для якого:

$$\left| \frac{4(-1)^n}{2n+1} \right| < 0,01,$$

тобто  $2n+1 > 400$ , або  $n \geq 200$ . Таким чином:

$$\pi \approx 4 - \frac{4}{3} + \frac{4}{5} - \frac{4}{7} + \dots - \frac{4}{399} \approx 3,14.$$

*Приклад 2.* Обчислити число  $e$  з точністю 0,001.

Скористаємось розвиненням (12.13.1), у якому покладемо  $x=1$ :

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} \dots$$

З оцінки (12.12.9) легко встановлюємо оцінку для залишкового члену:

$$|R_n| \leq \frac{e}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!}.$$

Виберемо  $n$  з нерівності:

$$\frac{3}{(n+1)!} < 0,001, \text{ тобто } (n+1)! > 3000, \text{ або } n \geq 6.$$

Отже, для досягнення потрібної точності треба взяти:

$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} \approx 2,7181.$$

## 2. Наближене обчислення інтегралів.

Нехай треба обчислити:

$$\int_a^b f(x) dx.$$

Припустимо, що в інтервалі  $(-R, R)$  функція  $f(x)$  розкладається у степеневий ряд:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

і проміжок інтегрування  $[a, b]$  цілком належить інтервалу  $(-R, R)$ . Тоді на підставі теореми про почленне інтегрування степеневого ряду матимемо:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_a^b x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1}.$$

У якості наближеного значення інтегралу приймаємо часткову суму одержаного числового ряду.

*Приклад 1.* З точністю  $\varepsilon = 0,001$  обчислити інтеграл:

$$\int_0^{0,5} e^{-x^2} dx.$$

Первісна від функції  $e^{-x^2}$  не виражається в елементарних функціях, тому застосувати формулу Ньютона – Лейбніца неможливо.

Скориставшись рядом (12.13.1), маємо:

$$e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} - \dots$$

Тоді

$$\begin{aligned} \int_0^{0,5} e^{-x^2} dx &= \int_0^{0,5} \left( 1 - x^2 + \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{6} + \frac{x^8}{24} - \dots \right) dx = \\ &= \left( x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10} - \frac{x^7}{42} + \frac{x^9}{216} - \dots \right) \Big|_0^{0,5} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^3 \cdot 3} + \frac{1}{2^5 \cdot 10} - \\ &\quad \frac{1}{2^7 \cdot 42} + \frac{1}{2^9 \cdot 216} - \dots \end{aligned}$$

Це числовий ряд, знаки членів якого чергуються, і який збігається за ознакою Лейбніца. Його залишок не перевищує за модулем модуля першого відкинутого члена. Знайдемо перший член цього ряду, який за модулем не перевищує 0,001:

$$\frac{1}{2} = 0,5 > 0,001; \quad \frac{1}{2^3 \cdot 3} \approx 0,042 > 0,001; \quad \frac{1}{2^5 \cdot 10} \approx 0,003 > 0,001;$$

$$\frac{1}{2^7 \cdot 42} \approx 0,0002 < 0,001.$$

Отже, з точністю 0,001 маємо:

$$\int_0^{0,5} e^{-x^2} dx \approx \frac{1}{2} - \frac{1}{24} + \frac{1}{320} \approx 0,461.$$

### 3. Наближене інтегрування диференціальних рівнянь.

Нехай треба розв'язати задачу Коші:

$$\begin{cases} y' = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0. \end{cases} \quad (12.15.1)$$

Припустимо, що розв'язок цієї задачі можна розкласти в ряд Тейлора:

$$\begin{aligned} y(x) = & y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0) + \frac{y''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{y'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \dots \\ & \dots + \frac{y^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \dots \end{aligned}$$

Ми розв'яжемо задачу, якщо знайдемо значення функції  $y(x)$  та її похідних у точці  $x = x_0$ . Значення самої функції  $y(x)$  маємо з початкової умови :  $y(x_0) = y_0$ . Далі:

$$\begin{aligned} y'(x_0) &= f(x_0, y(x_0)), \\ y''(x_0) &= (y'(x))' \Big|_{x=x_0} = \frac{d}{dx} (f(x, y(x))) \Big|_{x=x_0} = \left( \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx} \right) \Big|_{x=x_0} = \\ &= \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} f(x_0, y_0), \\ &\dots \end{aligned}$$

Аналогічно розв'язується задача Коші для рівнянь вищих порядків. Іноді роблять інакше. Шукають розв'язок  $y(x)$  у вигляді степеневого ряду загального вигляду:

$$y(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots,$$

підставляють його у рівняння (12.15.1), а потім у лівій і правій частині зрівнюють коефіцієнти при однакових степенях  $(x - x_0)$ , внаслідок чого знаходяться  $a_0, a_1, a_2, \dots$ .

*Приклад.* Знайти три перших, відмінних від нуля, члени розкладу в ряд розв'язку задачі Коші:

$$\begin{cases} y' = x^2 + y^3, \\ y(1) = -1. \end{cases}$$

Шукаємо розв'язок у вигляді:

$$y(x) = y(1) + y'(1)(x-1) + \frac{y''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{y'''(1)}{3!}(x-1)^3 + \dots$$

Маємо:

$$y(1) = -1, \quad y'(1) = 1^2 + (-1)^3 = 0,$$

$$y''(x) = 2x + 3y^2 y', \quad y''(1) = 2 \cdot 1 + 3 \cdot (-1)^2 \cdot 0^2 = 2,$$

$$y'''(x) = 2 + 6y(y')^2 + 3y^2 y'', \quad y'''(1) = 8,$$

Отже,

$$y(x) \approx -1 + \frac{2}{2!}(x-1)^2 + \frac{8}{3!}(x-1)^3 = -1 + (x-1)^2 + \frac{4}{3}(x-1)^3.$$

## 2.16. Послідовності та ряди комплексних чисел

Числові та функціональні послідовності та ряди можна розглядати і в комплексній області.

Під *послідовністю*  $z_1, z_2, \dots, z_n, \dots$  комплексних чисел розумітимемо зліченну занумеровану сукупність комплексних чисел. Пишемо також  $\{z_n\}$ .

**Означення.** Комплексне число  $a$  називається *границею послідовності*  $\{z_n\}$ , якщо для будь-якого  $\varepsilon > 0$  існує номер  $N = N(\varepsilon)$  такий, що для всіх  $n > N$  виконано:

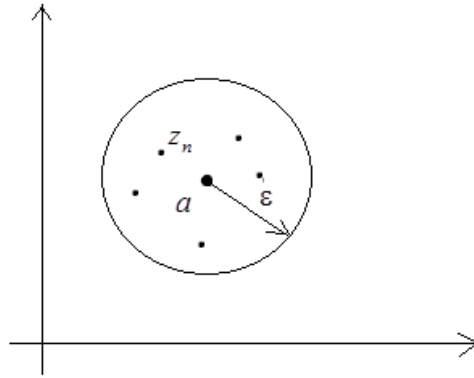
$$|z_n - a| < \varepsilon. \quad (12.16.1)$$

Пишемо:  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$ .

Інакше кажучи, має бути  $\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n - a| = 0$ . Якщо послідовність  $\{z_n\}$  має скінченну границю, то ця послідовність називається *збіжною*, у протилежному випадку – *розбіжною*.

З геометричної точки зору нерівність (12.16.1) означає, що у будь-якому крузі з центром у точці  $a$  містяться всі члени послідовності  $\{z_n\}$  за винятком їх скінченного числа (рис. 12.5).





**Рис. 12.5**

Таким чином, означення границі послідовності  $\{z_n\}$  комплексних чисел є аналогом означення границі послідовності дійсних чисел (див. п. 4.1).

Кожній послідовності  $\{z_n\}$  комплексних чисел відповідають дві послідовності дійсних чисел  $\{x_n\}$  та  $\{y_n\}$ , де  $x_n = \operatorname{Re} z_n$ ,  $y_n = \operatorname{Im} z_n$ , тобто  $z_n = x_n + iy_n$ .

**Теорема.** Існування границі  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$ , де  $a = \alpha + i\beta$  ( $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ) *рівносильне існуванню двох границь:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \alpha, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \beta.$$

**Доведення.** Необхідність. Нехай існує  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$ , тобто  $\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n - a| = 0$ . Тоді з нерівностей  $|x_n - \alpha| \leq |z_n - a|$ ,  $|y_n - \beta| \leq |z_n - a|$  випливає, що  $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n - \alpha| = 0$  і  $\lim_{n \rightarrow \infty} |y_n - \beta| = 0$ , тобто  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \alpha$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \beta$ .

Достатність. Нехай  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \alpha$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \beta$ . Розглянемо:

$$|z_n - a| = |(x_n - \alpha) + i(y_n - \beta)| \leq |x_n - \alpha| + |y_n - \beta|,$$

звідки випливає  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$ .

З доведеної теореми та властивостей границь послідовностей дійсних чисел випливають наступні властивості границь послідовностей комплексних чисел: якщо  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n = b$ , то  $\lim_{n \rightarrow \infty} (z_n \pm \xi_n) = a \pm b$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} k z_n = k a, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} z_n \xi_n = a b, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{z_n}{\xi_n} = \frac{a}{b} \quad (\xi_n \neq 0, n = 1, 2, \dots; b \neq 0).$$

Під рядом комплексних чисел розумітимемо формальний вираз:

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = z_1 + z_2 + \dots + z_n + \dots \quad (12.16.2)$$

**Означення.** Ряд (12.16.2) називається *збіжним*, якщо збігається послідовність  $\{Z_n\}$  його часткових сум:  $Z_n = \sum_{k=1}^n z_k$ . При цьому  $\lim_{n \rightarrow \infty} Z_n = Z$  називається *сумою* ряду (12.16.2).

Ряд (12.16.2) називається *абсолютно збіжним*, якщо збігається ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|.$$

Для того, щоб ряд (12.16.2) збігався, необхідно і достатньо, щоб збігалися ряди  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$  та  $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ , де  $x_n = \operatorname{Re} z_n$ ,  $y_n = \operatorname{Im} z_n$ . При цьому  $Z = X + iY$ , де  $X = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$ ,  $Y = \sum_{n=1}^{\infty} y_n$ .

Мають місце властивості.

1. Якщо ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$  збігається, і його сума дорівнює  $Z$ , то ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a z_n$ , де  $a \in \mathbb{C}$ , також збігається, і його сума дорівнює  $aZ$ .

2. Якщо ряди комплексних чисел  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  і  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  збігаються, та їх суми відповідно дорівнюють  $A$  і  $B$ , то ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$  також збігається, і його сума дорівнює  $A + B$ .

3. Якщо ряд (12.16.2) збігається, то  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0$ .

*Приклади.* Дослідити на збіжність ряди.

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{2^n} + \frac{i(-1)^n}{n} \right).$$

Розглянемо відповідні ряди з дійсними членами:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} + i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}.$$

Перший з них є збіжним як сума геометричної прогресії зі знаменником  $q = \frac{1}{2} < 1$ , а другий збігається за ознакою Лейбніца, отже, даний ряд збіжний.

$$2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+in}{n^2+1}.$$

Розглянемо відповідні ряди з дійсними членами:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1} + i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}.$$

Перший з цих рядів збіжний, а другий – розбіжний, у чому легко переконатися за допомогою, наприклад, інтегральної ознаки Коші-Маклорена (див. п. 12.5). Тому даний ряд розбіжний.

$$3. \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{2-i}{3} \right)^n.$$

Складемо ряд з модулів членів даного ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \left( \frac{2-i}{3} \right)^n \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{2-i}{3} \right|^n = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{\sqrt{5}}{3} \right)^n.$$

Цей ряд збіжний, оскільки є сумою геометричної прогресії зі знаменником  $q = \frac{\sqrt{5}}{3} < 1$ . Тому даний ряд збіжний абсолютно.

## 12.17. Степеневі ряди в комплексній області

Нехай  $z = x + iy$  – комплексна змінна,  $z_0 = x_0 + iy_0$  – деяка фіксована точка комплексної площини.

**Означення.** *Степеневим рядом* називається ряд вигляду:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \quad (12.17.1)$$

де  $c_n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) – сталі комплексні числа. Зокрема, при  $z_0 = 0$  маємо ряд:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n. \quad (12.17.2)$$

Областю збіжності ряду (12.17.2) називається множина всіх точок  $z$ , для яких ряд (12.17.2) збігається. В цій області визначено функцію  $f(z)$  комплексної змінної  $z$ , що є сумою ряду (12.17.2). Пишемо:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n.$$

**Теорема Абеля.** *Якщо степеневий ряд (12.17.2) збігається в точці  $a \neq 0$ , то він абсолютно збігається в крузі  $|z| < |a|$ , а в будь-якому меншому крузі  $|z| \leq r_1 < |a|$  збігається рівномірно.*

Доведення аналогічне доведенню теореми Абеля для степеневих рядів в дійсній області (див. п. 12.10).

З теореми Абеля випливає, що для ряду (12.17.2) існує таке число  $R$ , що цей ряд збігається в крузі  $|z| < R$ , а при  $|z| > R$  цей ряд розбігається. Круг  $|z| < R$  називається кругом збіжності ряду (12.17.2), а число  $R$  – радіусом його збіжності. Цей радіус можна знайти за формулою Коші–Адамара:

$$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}}.$$

Розглянемо ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n c_n z^{n-1}, \tag{12.17.3}$$

складений з похідних членів ряду (12.17.2). Оскільки  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$ , то радіус збіжності ряду (12.17.3) дорівнює радіусу збіжності ряду (12.17.2).

**Теорема** (про почленне диференціювання степеневого ряду). *Нехай радіус збіжності степеневого ряду*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \tag{12.17.4}$$

*дорівнює  $R > 0$ . Тоді цей ряд можна почленно диференціювати в крузі  $|z| < R$  будь-яке число разів. Отримані при диференціюванні ряди мають той самий радіус збіжності, що й ряд (12.17.4).*

Доведення цієї теореми ми тут не наводимо.

Теорему доведено.

**Наслідок.** *Коефіцієнти  $c_n$  степеневого ряду:*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \quad (12.17.5)$$

що збігається в крузі  $|z - z_0| < R$ , визначаються формулами:

$$c_0 = f(z_0), \quad c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Степеневий ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$  називається рядом Тейлора функції  $f(z)$ . Таким чином, будь-який степеневий ряд (12.17.5) у його крузі збіжності є рядом Тейлора суми цього ряду.

За допомогою степеневих рядів ми доведемо славнозвісну формулу, що належить Леонарду Ейлеру, і яка пов'язує експоненту з тригонометричними функціями:

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi, \quad \varphi \in \mathbb{R}. \quad (12.17.6)$$

Довести її можна, наприклад, так. Розглянемо розвинення в ряд Маклорена функції  $e^z$ :

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^5}{5!} + \frac{z^6}{6!} + \frac{z^7}{7!} + \frac{z^8}{8!} + \dots, \quad |z| < +\infty.$$

Покладемо в цій формулі  $z = i\varphi$  і скористаємось таблицею значень для  $i^k$ , де  $k \in \mathbb{N}$  (див. п. 1.8). Матимемо:

$$\begin{aligned} e^{i\varphi} &= 1 + i\varphi - \frac{\varphi^2}{2!} - \frac{i\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^4}{4!} + \frac{i\varphi^5}{5!} - \frac{\varphi^6}{6!} - \frac{i\varphi^7}{7!} + \frac{\varphi^8}{8!} + \dots = \\ &= \left( 1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - \frac{\varphi^6}{6!} + \frac{\varphi^8}{8!} + \dots \right) + i \left( \varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - \frac{\varphi^7}{7!} + \dots \right) = \cos \varphi + i \sin \varphi \end{aligned}$$

(тут скористалися також розкладом в ряд Маклорена функцій  $\cos \varphi$  та  $\sin \varphi$ ).

Зокрема з формули (12.17.6) дістаємо:

$$e^{2\pi i} = 1, \quad e^{\pi i} = -1, \quad e^{\pi i/2} = i, \quad e^{-\pi i/2} = -i.$$

Для будь-якого  $\varphi \in \mathbb{R}$  маємо  $|e^{i\varphi}| = 1$ .

Заміною  $\varphi$  на  $-\varphi$  з формули (12.17.6) одержуємо:

$$e^{-i\varphi} = \cos \varphi - i \sin \varphi. \quad (12.17.7)$$

Додаванням та відніманням рівностей (12.17.6) та (12.17.7) дістаємо формули:

$$\cos \varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}, \quad \sin \varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}. \quad (12.17.8)$$

Саме формулами (12.17.6) – (12.17.8) ми скористалися в п. 11.23, коли встановлювали вигляд фундаментальної системи розв'язків лінійного однорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами у випадку комплексних коренів характеристичного рівняння.

Функція  $e^{i\varphi}$  має властивості, аналогічні властивостям дійсної функції  $e^x$ . Наприклад:

$$e^{i\varphi_1} e^{i\varphi_2} = e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}, \quad (12.17.9)$$

$$\frac{e^{i\varphi_1}}{e^{i\varphi_2}} = e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}, \quad (12.17.10)$$

$$(e^{i\varphi})^n = e^{in\varphi}. \quad (12.17.11)$$

Згідно з формулою Ейлера та тригонометричною формою комплексного числа (див. п. 1.10), будь-яке комплексне число  $z$  може бути подано у вигляді:

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) = re^{i\varphi}, \quad (12.17.12)$$

де  $r = |z|$ ,  $\varphi = \arg z$ . Формула (12.17.12) називається *показниковою формою* комплексного числа  $z$ .

За допомогою формул (12.17.9) – (12.17.12) легко отримуються правила множення, ділення та підведення у натуральну степінь комплексних чисел, записаних у показниковій формі. А саме, якщо  $z = re^{i\varphi}$ ,  $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$ ,  $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$ , то:

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}, \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} \quad (r_2 \neq 0), \quad z^n = r^n e^{in\varphi}.$$

## 12.18. Тригонометричні ряди Фур'є

Серед функціональних рядів, крім степеневих, у математиці та її застосуваннях важливу роль відіграють тригонометричні ряди. *Тригонометричним рядом* називається функціональний ряд наступного вигляду:

$$\frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + \dots + a_n \cos nx + b_n \sin nx + \dots$$

або:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx). \quad (12.18.1)$$

Числа  $a_0, a_n, b_n$  ( $n=1, 2, \dots$ ) називаються *коефіцієнтами* тригонометричного ряду.

Якщо ряд (12.18.1) збігається, то його сума є  $2\pi$ -періодичною функцією, оскільки  $\sin nx, \cos nx$  є  $2\pi$ -періодичними функціями.

Нехай тепер задано  $2\pi$ -періодичну функцію  $f(x)$ , і поставимо задачу знайти такий тригонометричний ряд, для якого  $f(x)$  буде його сумою. А саме припустимо, що ряд (12.18.1) рівномірно збіжний до функції  $f(x)$  на інтервалі  $(-\pi, \pi)$ , тобто:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx). \quad (12.18.2)$$

Оскільки члени ряду (12.18.1) є неперервними функціями, то внаслідок рівномірної збіжності його сума  $f(x)$  є також неперервною функцією. Рівномірно збіжний ряд на проміжку збіжності можна по-членно інтегрувати. Зінтегрувавши обидві частини рівності (12.18.2) в межах від  $-\pi$  до  $\pi$ , дістанемо:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \int_{-\pi}^{\pi} a_n \cos nx dx + \int_{-\pi}^{\pi} b_n \sin nx dx \right).$$

Оскільки для  $n=1, 2, \dots$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx = \frac{1}{n} \sin nx \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx = -\frac{1}{n} \cos nx \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0,$$

то:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} dx = a_0 \pi.$$

Звідси:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx. \quad (12.18.3)$$

Помножимо тепер обидві частини рівності (12.18.2) на  $\cos kx$  ( $k \in \mathbb{N}$ ) і зінтегруємо в межах від  $-\pi$  до  $\pi$ . При цьому матимемо на увазі наступні рівності:

$$а) \forall k, n \in \mathbb{N}, k \neq n:$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos kx dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (\sin(n+k)x + \sin(n-k)x) dx =$$

$$= -\frac{1}{2(n+k)} \cos(n+k)x \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{2(n-k)} \cos(n-k)x \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0;$$

якщо  $k = n$ , то:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos kx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos nx dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin 2nx dx =$$

$$-\frac{1}{4n} \cos 2nx \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0;$$

б)  $\forall k, n \in \mathbb{N}, k \neq n$ :

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos kx dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (\cos(n+k)x + \cos(n-k)x) dx =$$

$$= \frac{1}{2(n+k)} \sin(n+k)x \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{2(n-k)} \sin(n-k)x \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0;$$

якщо  $k = n$ , то

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos kx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 x dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (1 + \cos 2kx) dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} dx + \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos 2kx dx = \pi + \frac{1}{4k} \sin kx \Big|_{-\pi}^{\pi} = \pi + 0 = \pi.$$

З урахуванням цих співвідношень дістанемо:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx = a_k \pi,$$

звідки:

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx. \quad (12.18.4)$$

Аналогічно, помноживши рівність (12.18.2) на  $\sin kx$  ( $k \in \mathbb{N}$ ), і, зінтегрувавши у межах від  $-\pi$  до  $\pi$ , дістанемо:

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx. \quad (12.18.5)$$



Коефіцієнти, які визначено за формулами (12.18.3), (12.18.4), (12.18.5), називаються *коефіцієнтами Фур'є* \* функції  $f(x)$ , а тригонометричний ряд (12.18.1) з такими коефіцієнтами називається *тригонометричним рядом Фур'є* функції  $f(x)$ .

Зауважимо тепер, що ми тільки припускали рівність (12.18.2), тобто те, що функція  $f(x)$  є сумою ряду (12.18.1). Насправді ми можемо стверджувати лише те, що ряд (12.18.1), коефіцієнти якого визначено за формулами (12.18.3), (12.18.4), (12.18.5), «породжується» функцією  $f(x)$ , але питання про збіжність цього ряду, і, тим більш, що його сумою буде саме функція  $f(x)$ , поки що залишається відкритим. Пригадаємо, що аналогічну ситуацію ми спостерігали в теорії ряду Тейлора (див. п. 12.12). Тому замість знаку рівності у (12.18.2) правильно буде використати знак відповідності:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx). \quad (12.18.6)$$

Проведені міркування дозволяють стверджувати наступне:

**Теорема 1.** *Якщо функцію  $f(x)$  можна подати на інтервалі  $(-\pi, \pi)$  у вигляді рівномірно збіжного на цьому відрізку тригонометричного ряду (1.1), то цей тригонометричний ряд єдиний і є тригонометричним рядом Фур'є для функції  $f(x)$ .*

Дамо наступне означення.

**Означення.** Функція  $f(x)$  називається *кусково-монотонною* на відрізку  $[a, b]$ , якщо цей відрізок можна розбити скінченним числом точок  $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$  на інтервали  $(a, x_1), (x_1, x_2), \dots, (x_{n-1}, b)$  так, що на кожному з цих інтервалів функція  $f(x)$  є монотонною, тобто або незростаюча, або неспадна.

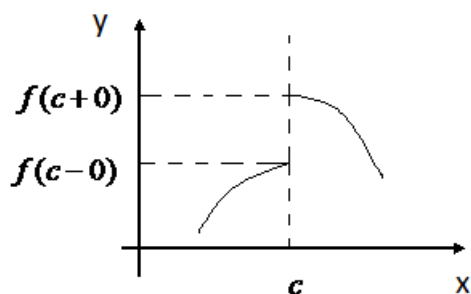
З цього означення випливає, що якщо функція  $f(x)$  кусково-монотонна і обмежена на відрізку  $[a, b]$ , то вона може мати лише точки розриву I роду. Дійсно, якщо  $x = c$  є точка розриву функції  $f(x)$ , то внаслідок монотонності існують скінченні одnobічні границі (див. п. 4.8):

$$\lim_{x \rightarrow c-0} f(x) = f(c-0), \quad \lim_{x \rightarrow c+0} f(x) = f(c+0).$$

А це й означає, що точка  $x = c$  є точкою розриву I роду (рис. 12.6).

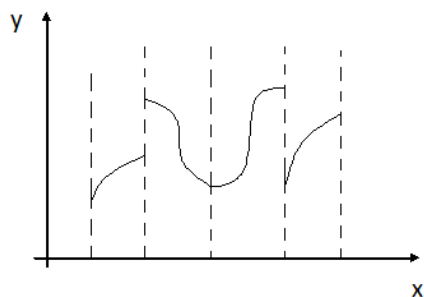
---

\* Фур'є Жан Батист Жозеф (1768–1830) – французький математик і фізик.



**Рис. 12.6**

Схематичний графік кусково-монотонної функції зображено на рис. 12.7.



**Рис. 12.7**

Умови, за яких тригонометричний ряд Фур'є функції  $f(x)$  збігається до самої функції  $f(x)$  (тобто справедливості рівності (12.18.2)), визначається наступною теоремою, яку ми наводимо без доведення.

**Теорема 2.** *Якщо періодична функція  $f(x)$  з періодом  $2\pi$  кусково-монотонна і обмежена на відрізку  $[-\pi, \pi]$ , то тригонометричний ряд Фур'є, побудований для цієї функції, збігається на всій числовій прямій. Сума  $S(x)$  цього ряду дорівнює значенню функції  $f(x)$  в усіх точках неперервності функції  $f(x)$ ; якщо  $x_0$  – точка розриву функції  $f(x)$ , то:*

$$S(x_0) = \frac{f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)}{2}.$$

*В кінцевих точках відрізка  $[-\pi, \pi]$  сума  $S(x)$  набуває значень:*

$$S(-\pi) = S(\pi) = \frac{f(-\pi + 0) + f(\pi - 0)}{2}.$$

**Зауваження.** Умови, які накладаються на функцію  $f(x)$  при розкладанні її в тригонометричний ряд Фур'є, значно простіші, ніж при розкладанні її в степеневий ряд. Дійсно, якщо функція розкладається в ряд Тейлора, то вона на всьому інтервалі збіжності має бути не

тільки неперервною, а й скільки завгодно разів диференційованою (див. п. 12.12). Для розкладання функції у тригонометричний ряд Фур'є в цьому необхідності нема. Функція  $f(x)$  не тільки не зобов'язана бути диференційовною, але навіть може не бути неперервною. Тобто клас функцій, які можна подати рядом Фур'є, значно ширший, ніж клас функцій, які можна подати рядом Тейлора.

### 12.19. Приклади розкладання функції в ряд Фур'є

*Приклад 1.* Розкласти в ряд Фур'є  $2\pi$ -періодичну функцію:  
 $f(x) = \pi + x, \quad -\pi < x \leq \pi.$   
 Графік цієї функції має вигляд:

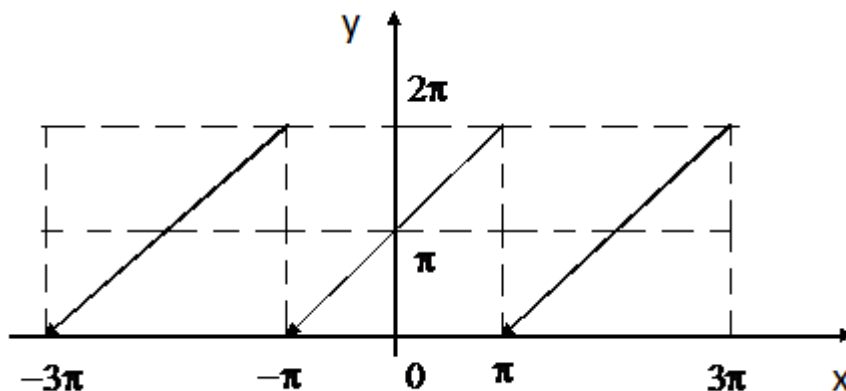


Рис. 12.8

За формулами (12.8.3) – (12.8.5) маємо:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\pi + x) dx = \frac{1}{\pi} \left. \frac{(\pi + x)^2}{2} \right|_{-\pi}^{\pi} = 2\pi.$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\pi + x) \cos kx dx = \left[ \begin{array}{ll} u = \pi + x & du = dx \\ dv = \cos kx & v = \frac{1}{k} \sin kx \end{array} \right] =$$

$$= \frac{1}{\pi} \left( \frac{(\pi + x)}{k} \sin kx \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{k} \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx dx \right) = \frac{1}{\pi} \left( \frac{2\pi}{k} \sin 2k\pi + \frac{1}{k^2} \cos kx \Big|_{-\pi}^{\pi} \right) = 0.$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\pi + x) \sin kx \, dx = \left[ \begin{array}{l} u = \pi + x \quad du = dx \\ dv = \sin kx \quad v = -\frac{1}{k} \cos kx \end{array} \right] =$$

$$= \frac{1}{\pi} \left( -\frac{(\pi + x)}{k} \cos kx \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{k} \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \, dx \right) = \frac{1}{\pi} \left( -\frac{2\pi}{k} \cos 2k\pi + \frac{1}{k^2} \sin kx \Big|_{-\pi}^{\pi} \right) =$$

$$= -\frac{2}{k} \cos k\pi = -\frac{2}{k} (-1)^k = \frac{2}{k} (-1)^{k+1}.$$

Тут ми скористалися формулами інтегрування за частинами у визначеному інтегралі (див. п. 7.6).

Підставивши знайдені коефіцієнти в ряд (12.18.2), дістанемо:

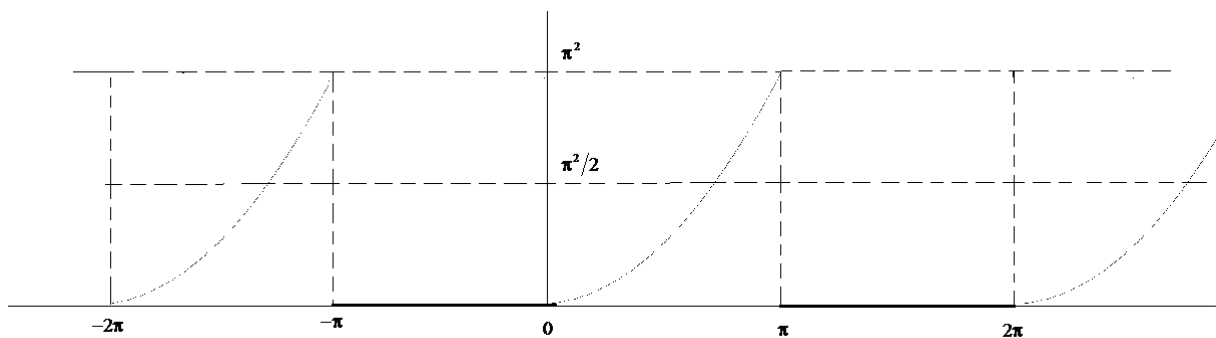
$$f(x) = \pi + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx.$$

Ця рівність справедлива для всіх точок неперервності функції, тобто при  $x \neq (2n+1)\pi$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ). У точках  $x = (2n+1)\pi$  сума ряду Фур'є дорівнює  $\pi$  (півсумі односторонніх границь в цих точках).

*Приклад 2.* Розкласти в ряд Фур'є  $2\pi$ -періодичну функцію:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0, \\ x^2, & 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

Графік цієї функції має вигляд:



**Рис. 12.9**

За формулами (12.18.3) – (12.18.5) маємо:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 f(x) \, dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \, dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 0 \, dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \, dx =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{1}{\pi} \frac{x^3}{3} \Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{\pi^2}{3}.$$

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cos kx dx = \left[ \begin{array}{ll} u = x^2 & du = 2x dx \\ dv = \cos kx dx & v = \frac{1}{k} \sin kx \end{array} \right] = \\ &= \frac{1}{\pi} \left( \frac{x^2}{k} \sin kx \Big|_0^{\pi} - \frac{2}{k} \int_0^{\pi} x \sin kx dx \right) = -\frac{2}{k\pi} \int_0^{\pi} x \sin kx dx = \\ &= \left[ \begin{array}{ll} u = x & du = dx \\ dv = \cos kx dx & v = \frac{1}{k} \sin kx \end{array} \right] = \frac{\pi}{k} (-1)^{k+1} + \frac{2}{k\pi} \left( \frac{x}{k} \sin kx \Big|_0^{\pi} - \frac{1}{k} \int_0^{\pi} \sin kx dx \right) = \\ &= \frac{\pi}{k} (-1)^{k+1} + \frac{2}{\pi k^2} \cos kx \Big|_0^{\pi} = \frac{\pi}{k} (-1)^{k+1} + \frac{2}{\pi k^2} ((-1)^k - 1). \end{aligned}$$

Підставляючи знайдені коефіцієнти в ряд (12.8.2), дістанемо:

$$f(x) = \frac{\pi^2}{6} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{2}{n^2} (-1)^n \cos nx + \left( \frac{\pi}{n} (-1)^{n+1} + \frac{2}{\pi n^2} ((-1)^n - 1) \right) \sin nx \right).$$

## 12.20. Ряди Фур'є для парних та непарних функцій

Припустимо, що функція, яку на відрізку  $[-\pi, \pi]$  можна подати рядом Фур'є, є парною. Тоді коефіцієнти  $b_k$ , що обчислюються за формулами (12.18.5), дорівнюють нулеві, оскільки функція  $f(x) \sin kx$ , що стоїть під знаком інтеграла в (12.18.5), є непарною, а інтеграл береться у симетричних межах (див. п. 7.6). Отже, ряд Фур'є має вигляд:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx, \quad (12.20.1)$$

де:

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx, \quad a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos kx dx. \quad (12.20.2)$$

Тут ми скористалися тим, що функція  $f(x)\cos kx$  також є парною, а для парної функції  $\varphi(x)$  виконано:

$$\int_{-a}^a \varphi(x) dx = 2 \int_0^a \varphi(x) dx.$$

Тепер припустимо, що функція  $f(x)$  є непарною. Тоді дорівнюють нулеві коефіцієнти  $a_0, a_k$ , оскільки функція  $f(x)\cos kx$  також непарна, а інтеграл береться в симетричних межах.

Ряд Фур'є має вигляд:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx, \quad (12.20.3)$$

де коефіцієнти  $b_k$  обчислюються за формулами:

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin kx dx \quad (12.20.4)$$

(функція  $f(x)\sin kx$  є парною).

Таким чином, ряд Фур'є для парної функції містить лише косинуси (парні функції), а ряд Фур'є для непарної функції містить лише синуси (непарні функції).

#### Приклади

1. Розкласти в ряд Фур'є  $2\pi$ -періодичну функцію:

$$f(x) = |x|, \quad -\pi \leq x \leq \pi.$$

Функція  $|x|$  парна, отже, її ряд Фур'є буде містити лише косинуси.

Згідно з формулами (12.20.2) маємо:

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} |x| dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x dx = \frac{2}{\pi} \frac{x^2}{2} \Big|_0^{\pi} = \pi,$$

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} |x| \cos kx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos kx dx = \left[ \begin{array}{ll} u = x & du = dx \\ dv = \cos kx dx & v = \frac{1}{k} \sin kx \end{array} \right] =$$

$$= \frac{2}{\pi} \left( \frac{x}{k} \sin kx \Big|_0^{\pi} - \frac{1}{k} \int_0^{\pi} \sin kx dx \right) = \frac{2}{\pi} \frac{1}{k^2} \cos kx \Big|_0^{\pi} = \frac{2}{\pi k^2} (\cos k\pi - \cos 0) =$$

$$= \frac{2}{\pi k^2} ((-1)^k - 1).$$

Таким чином:

$$f(x) = \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k - 1}{k^2} \cos kx = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left( \frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \dots \right).$$

Графік функції  $f(x)$  має вигляд:

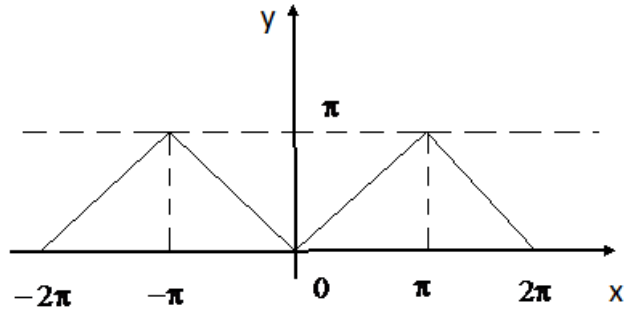


Рис. 12.10

2. Розкласти в ряд Фур'є функцію:

$$f(x) = \begin{cases} -1, & -\pi \leq x < 0, \\ 1, & 0 \leq x < \pi. \end{cases}$$

Графік функції  $f(x)$  має вигляд:

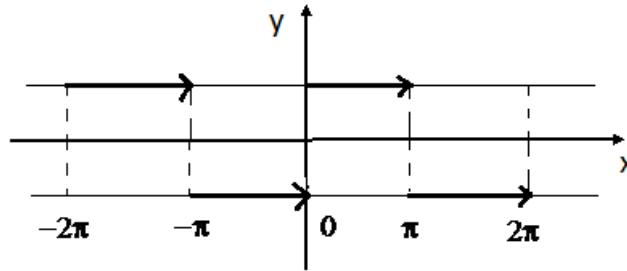


Рис. 12.11

Функція  $f(x)$  непарна, отже, її ряд Фур'є містить лише синуси.

Згідно з формулами (12.20.4) маємо:

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin kx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} 1 \cdot \sin kx dx = -\frac{2}{\pi k} \cos kx \Big|_0^{\pi} = \frac{2}{\pi k} (1 - (-1)^k).$$

Таким чином:

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^k}{k} \sin kx = \frac{4}{\pi} \left( \frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \dots \right).$$

3. Розкласти в ряд Фур'є  $2\pi$ -періодичну функцію  $f(x)$ , яка на проміжку  $(0, 2\pi)$  задається рівністю:

$$f(x) = \frac{\pi - x}{2}.$$

Графік функції  $f(x)$  має вигляд, який показано на рис. 12.12. Звідси видно, що функція є непарною, отже її ряд Фур'є містить лише синуси. Скористаємось наступною властивістю інтегралів від періодичних функцій (див. п. 7.6): якщо  $f(x)$  –  $T$ -періодична, інтегровна на відрізку  $[0, T]$  функція, то  $\forall a$ :

$$\int_0^T f(x) dx = \int_a^{a+T} f(x) dx.$$

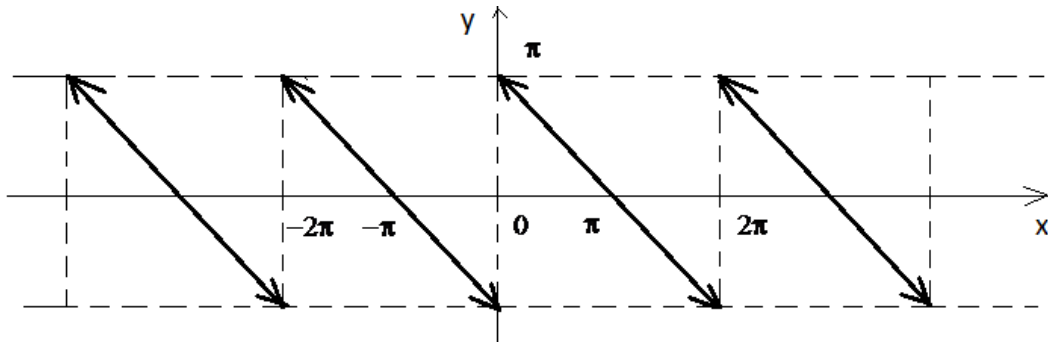


Рис. 12.12

Тобто інтеграли за всіма проміжками, довжина яких дорівнює періоду, співпадають. Звідси маємо:

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin kx dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\pi - x}{2} \sin kx dx = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\pi - x) \sin kx dx = \left[ \begin{array}{l} u = \pi - x \quad du = -dx \\ dv = \sin kx \quad v = -\frac{1}{k} \cos kx \end{array} \right] = \\ &= \frac{1}{2\pi} \left( -\frac{\pi - x}{k} \cos kx \Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{k} \int_0^{2\pi} \cos kx dx \right) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \left( \frac{\pi}{k} \cos 2k\pi + \frac{\pi}{k} \cos 0 - \frac{1}{k^2} \sin kx \Big|_0^{2\pi} \right) = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{\pi}{k} + \frac{\pi}{k} \right) = \frac{1}{k}. \end{aligned}$$

Таким чином, дістаємо наступне співвідношення:

$$\frac{\pi - x}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k}, \quad 0 < x < 2\pi. \quad (12.20.5)$$



## 12.21. Ряд Фур'є $2l$ -періодичної функції

Нехай функція  $f(x)$  визначена на відрізку  $[-l, l]$ , має період  $2l$  ( $l > 0$ ) і є на відрізку  $[-l, l]$  кусково-монотонною. Поставимо задачу розкладання функції  $f(x)$  в ряд Фур'є. Виконаємо заміну змінної за формулою  $x = lt/\pi$  і розглянемо функцію  $\varphi(t) = f(lt/\pi)$ . Оскільки  $x \in [-l, l]$ , то  $t \in [-\pi, \pi]$ . Таким чином, функція  $\varphi(t)$  визначена на відрізку  $[-\pi, \pi]$  і кусково-монотонна на ньому.

Розкладемо функцію  $\varphi(t)$  в ряд Фур'є на відрізку  $[-\pi, \pi]$ :

$$\varphi(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt), \quad (12.21.1)$$

де:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) dt, \quad (12.21.2)$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) \cos kt dt, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) \sin kt dt. \quad (12.21.3)$$

Повернемося до змінної  $x$ . Тоді вирази (12.21.1) – (12.21.3) набувають вигляду:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left( a_k \cos \frac{k\pi x}{l} + b_k \sin \frac{k\pi x}{l} \right), \quad (12.21.4)$$

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) dt = \left[ \begin{array}{ll} t = \pi x/l & t = -\pi \Rightarrow x = -l \\ t = \pi \Rightarrow x = l & \\ dt = (\pi/l) dx & \end{array} \right] = \\ &= \frac{1}{\pi} \frac{\pi}{l} \int_{-l}^l \varphi\left(\frac{\pi x}{l}\right) dx = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) dx. \end{aligned} \quad (12.21.5)$$

Аналогічно:

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) \cos kt dt = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{k\pi x}{l} dx, \quad (12.21.6)$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) \sin kt dt = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx. \quad (12.21.7)$$

Ряд (12.21.4) і є рядом Фур'є для  $2l$ -періодичної функції  $f(x)$ . Коефіцієнти цього ряду знаходяться за формулами (12.21.5) – (12.21.7). Зауважимо, що всі твердження, які справджуються для ря-

дів Фур'є  $2\pi$ -періодичних функцій, зберігаються і для рядів Фур'є  $2l$ -періодичних функцій.

*Приклад.* Розкласти в ряд Фур'є  $2$ -періодичну функцію, яка на відрізку  $[-1,1]$  задається формулою:  $f(x) = e^{\alpha x}$  ( $\alpha \neq 0$ ).

Згідно з формулами (4.5) – (4.7) маємо (при  $l = 1$ ):

$$a_0 = \int_{-1}^1 e^{\alpha x} dx = \frac{1}{\alpha} (e^{\alpha} - e^{-\alpha}) = \frac{2 \operatorname{sh} \alpha}{\alpha},$$

де  $\operatorname{sh} \alpha = \frac{e^{\alpha} - e^{-\alpha}}{2}$  – гіперболічний синус;

$$\begin{aligned} a_k &= \int_{-1}^1 e^{\alpha x} \cos k\pi x dx = \left[ \begin{array}{ll} u = e^{\alpha x} & du = \alpha e^{\alpha x} dx \\ dv = \cos k\pi x dx & v = \frac{1}{k\pi} \sin k\pi x \end{array} \right] = \\ &= \frac{e^{\alpha x}}{k\pi} \sin k\pi x \Big|_{-1}^1 - \frac{\alpha}{k\pi} \int_{-1}^1 e^{\alpha x} \sin k\pi x dx = -\frac{\alpha}{k\pi} \int_{-1}^1 e^{\alpha x} \sin k\pi x dx = \\ &= \frac{e^{\alpha x}}{k\pi} \sin k\pi x \Big|_{-1}^1 - \frac{\alpha}{k\pi} \int_{-1}^1 e^{\alpha x} \sin k\pi x dx = \left[ \begin{array}{ll} u = e^{\alpha x} & du = \alpha e^{\alpha x} dx \\ dv = \sin k\pi x dx & v = -\frac{1}{k\pi} \cos k\pi x \end{array} \right] = \\ &= -\frac{\alpha}{k\pi} \left( -\frac{e^{\alpha x}}{k\pi} \cos k\pi x \Big|_{-1}^1 + \frac{\alpha}{k\pi} \int_{-1}^1 e^{\alpha x} \cos k\pi x dx \right) = \\ &= -\frac{\alpha}{k\pi} \left( -\frac{e^{\alpha}}{k\pi} \cos k\pi + \frac{e^{-\alpha}}{k\pi} \cos k\pi + \frac{\alpha}{k\pi} a_k \right) = \\ &= \frac{\alpha e^{\alpha}}{k^2 \pi^2} (-1)^k - \frac{\alpha e^{-\alpha}}{k^2 \pi^2} (-1)^k - \frac{\alpha^2}{k^2 \pi^2} a_k = \alpha \frac{e^{\alpha} - e^{-\alpha}}{k^2 \pi^2} (-1)^k - \frac{\alpha^2}{k^2 \pi^2} a_k. \end{aligned}$$

Звідси:

$$a_k = \frac{\alpha(e^{\alpha} - e^{-\alpha})}{\alpha^2 + k^2 \pi^2} (-1)^k = \frac{2\alpha \operatorname{sh} \alpha}{\alpha^2 + k^2 \pi^2} (-1)^k;$$

$$\begin{aligned} b_k &= \int_{-1}^1 e^{\alpha x} \sin k\pi x dx = \left[ \begin{array}{ll} u = e^{\alpha x} & du = \alpha e^{\alpha x} dx \\ dv = \sin k\pi x dx & v = -\frac{1}{k\pi} \cos k\pi x \end{array} \right] = \\ &= -\frac{e^{\alpha x}}{k\pi} \cos k\pi x \Big|_{-1}^1 + \frac{\alpha}{k\pi} \int_{-1}^1 e^{\alpha x} \cos k\pi x dx = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{e^\alpha}{k\pi} \cos k\pi + \frac{e^{-\alpha}}{k\pi} \cos k\pi + \frac{\alpha}{k\pi} \int_{-1}^1 e^{\alpha x} \cos k\pi x dx = \\
&= \frac{e^{-\alpha} - e^\alpha}{k\pi} (-1)^k + \frac{\alpha}{k\pi} \int_{-1}^1 e^{\alpha x} \cos k\pi x dx = \left[ \begin{array}{l} u = e^{\alpha x} \quad du = \alpha e^{\alpha x} dx \\ dv = \cos k\pi x dx \quad v = \frac{1}{k\pi} \sin k\pi x \end{array} \right] = \\
&= \frac{e^{-\alpha} - e^\alpha}{k\pi} (-1)^k + \frac{\alpha}{k\pi} \left( \frac{e^{\alpha x}}{k\pi} \sin k\pi x \Big|_{-1}^1 - \frac{\alpha}{k\pi} \int_{-1}^1 e^{\alpha x} \sin k\pi x dx \right) = \\
&= \frac{e^{-\alpha} - e^\alpha}{k\pi} (-1)^k - \frac{\alpha^2}{k^2 \pi^2} b_k.
\end{aligned}$$

Звідси:

$$b_k = -\frac{2k\pi \operatorname{sh} \alpha}{k^2 \pi^2 + \alpha^2} (-1)^k.$$

Підставляючи одержані вирази в (12.21.4), дістанемо:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{\operatorname{sh} \alpha}{\alpha} + \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{2\alpha \operatorname{sh} \alpha}{k^2 \pi^2 + \alpha^2} (-1)^k \cos k\pi x - \frac{2k\pi \operatorname{sh} \alpha}{k^2 \pi^2 + \alpha^2} (-1)^k \sin k\pi x \right) = \\
&= \frac{\operatorname{sh} \alpha}{\alpha} + 2 \operatorname{sh} \alpha \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\alpha \cos k\pi x - k\pi \sin k\pi x}{k^2 \pi^2 + \alpha^2}.
\end{aligned}$$

## 12.22. Ряд Фур'є неперіодичної функції

Нехай треба розкласти в ряд Фур'є функцію  $f(x)$ , задану на відрізку  $[0, l]$ . Підкреслимо, що функція задається лише на відрізку  $[0, l]$ , і ніякої інформації щодо її поведінки зовні цього відрізка ми не маємо. Побудуємо  $2l$ -періодичну функцію  $g(x)$ , яка є кусково-монотонною на відрізку  $[-l, l]$ , і на відрізку  $[0, l]$  збігається з функцією  $f(x)$ . На відрізок  $[-l, 0]$  ми можемо продовжити функцію  $f(x)$  довільним чином. Наприклад, покласти  $g(x) = 0$  при  $x \in [-l, 0]$ , і  $g(x) = f(x)$  при  $x \in [0, l]$ . Розклавши  $2l$ -періодичну функцію  $g(x)$  в ряд Фур'є на відрізку  $[-l, l]$ , дістанемо ряд Фур'є функції  $f(x)$  на відрізку  $[0, l]$ . Зокрема, функцію  $f(x)$  на відрізок  $[-l, 0]$  можна продовжити парним способом, і тоді ряд Фур'є міститиме лише косинуси.

А можна продовжити непарним способом, і тоді ряд Фур'є міститиме лише синуси.

Зауважимо, що функції  $g(x)$  і  $f(x)$  – різні функції. Функція  $f(x)$  не є періодичною, більш того, її визначено лише на відрізку  $[0, l]$ . А функція  $g(x)$  – періодична з періодом  $2l$  і на відрізку  $[0, l]$  збігається з функцією  $f(x)$ .

### Приклади

1. Функцію  $f(x) = x^2$  розкласти на проміжку  $[0, 2]$  в ряд Фур'є за синусами. Побудувати графік суми ряду Фур'є.

Оскільки розкладання функції в ряд Фур'є має містити лише синуси, то функція має бути непарною. Отже продовжимо функцію  $f(x)$  на відрізок  $[-2, 0]$  непарним способом. Далі побудуємо 4-періодичну функцію  $g(x)$ , яка на відрізку  $[-2, 2]$  збігається з продовженою на відрізок  $[-2, 0]$  непарним чином функцією  $f(x)$ . Графік суми  $S(x)$  ряду Фур'є (рис. 12.13) співпадатиме з графіком функції  $g(x)$  за винятком точок  $x = 4k + 2$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ). В цих точках значення  $S(x)$  дорівнює нулеві – півсумі односторонніх границь функції  $g(x)$  зліва і справа в цих точках.

Згідно з формулами (12.21.4) – (12.21.7) маємо (з урахуванням непарності функції  $g(x)$ ):

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin \frac{k\pi x}{2},$$

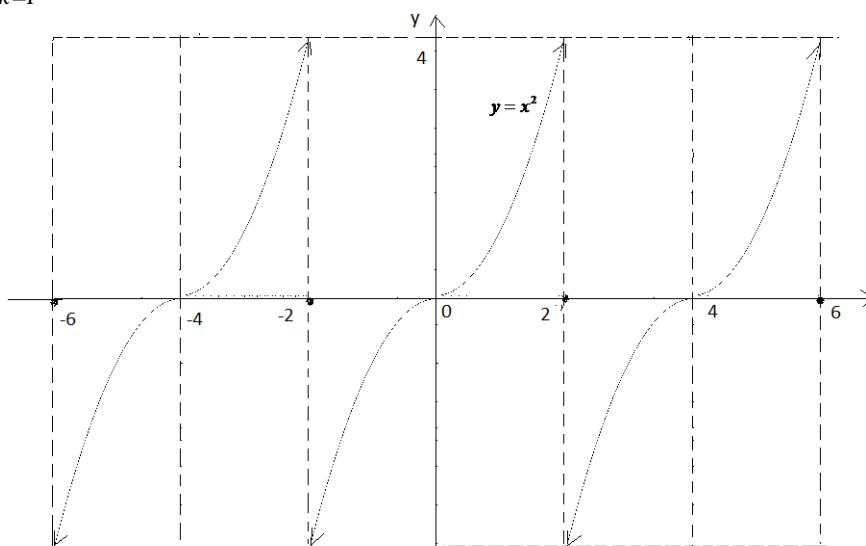


Рис. 12.13

де:

$$\begin{aligned}
b_k &= \frac{2}{2} \int_0^2 g(x) \sin \frac{k\pi x}{2} dx = \int_0^2 x^2 \sin \frac{k\pi x}{2} dx = \\
&= \left[ \begin{array}{l} u = x^2 \quad du = 2x dx \\ dv = \sin \frac{k\pi x}{2} dx \quad v = -\frac{2}{k\pi} \cos \frac{k\pi x}{2} \end{array} \right] = \\
&= -\frac{2x^2}{k\pi} \cos \frac{k\pi x}{2} \Big|_0^2 + \frac{4}{k\pi} \int_0^2 x \cos \frac{k\pi x}{2} dx = -\frac{8}{k\pi} (-1)^k + \frac{4}{k\pi} \int_0^2 x \cos \frac{k\pi x}{2} dx = \\
&= \left[ \begin{array}{l} u = x \quad du = dx \\ dv = \cos \frac{k\pi x}{2} dx \quad v = \frac{2}{k\pi} \sin \frac{k\pi x}{2} \end{array} \right] = \\
&= \frac{8}{k\pi} (-1)^{k+1} + \frac{4}{k\pi} \left( \frac{2x}{k\pi} \sin \frac{k\pi x}{2} \Big|_0^2 - \frac{2}{k\pi} \int_0^2 \sin \frac{k\pi x}{2} dx \right) = \\
&= \frac{8}{k\pi} (-1)^{k+1} - \frac{8}{k^2 \pi^2} \int_0^2 \sin \frac{k\pi x}{2} dx = \frac{8}{k\pi} (-1)^{k+1} + \frac{16}{k^3 \pi^3} \cos \frac{k\pi x}{2} \Big|_0^2 = \\
&= \frac{8}{k\pi} (-1)^{k+1} + \frac{16}{k^3 \pi^3} ((-1)^k - 1).
\end{aligned}$$

Таким чином,

$$g(x) = 8 \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{(-1)^{k+1}}{k\pi} + \frac{2}{k^3 \pi^3} ((-1)^k - 1) \right) \sin \frac{k\pi x}{2}.$$

### 12.23. Комплексна форма ряду Фур'є

Нехай:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \quad (12.23.1)$$

де:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, \quad (12.23.2)$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx. \quad (12.23.3)$$

Застосувавши формулу Ейлера (див. п. 12.17), дістанемо:

$$\cos kx = \frac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2}, \quad \sin kx = \frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2i}.$$

Підставивши ці вирази в (12.23.1), дістанемо:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left( a_k \frac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2} + b_k \frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2i} \right) = \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{a_k}{2} + \frac{b_k}{2i} \right) e^{ikx} + \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{a_k}{2} - \frac{b_k}{2i} \right) e^{-ikx} = \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k - ib_k}{2} e^{ikx} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k + ib_k}{2} e^{-ikx} = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{ikx} + \sum_{k=1}^{\infty} c_{-k} e^{-ikx}, \end{aligned} \quad (12.23.4)$$

де:

$$c_0 = \frac{a_0}{2}, \quad c_k = \frac{a_k - ib_k}{2}, \quad c_{-k} = \frac{a_k + ib_k}{2} \quad (k = 1, 2, \dots).$$

З формул (12.23.2), (12.23.3) маємо:

$$c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, \quad (12.23.5)$$

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx - \frac{i}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) (\cos kx - i \sin kx) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx, \end{aligned} \quad (12.23.6)$$

$$\begin{aligned} c_{-k} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx + \frac{i}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) (\cos kx + i \sin kx) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{ikx} dx. \end{aligned} \quad (12.23.7)$$

Враховуючи (12.23.4), запишемо ряд Фур'є у вигляді:

$$f(x) = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (c_k e^{ikx} + c_{-k} e^{-ikx}),$$

або:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}. \quad (12.23.8)$$

Згідно з формулами (12.23.5) – (12.23.7) коефіцієнти цього ряду можна записати єдиною формулою:

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (12.23.9)$$

Ряд (12.23.8), у якому коефіцієнти обчислюються за формулою (12.23.9), називається *комплексною* (або *експоненціальною*) формою ряду Фур'є.

Аналогічно можна знайти комплексну форму ряду Фур'є на відрізку  $[-l, l]$ :

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i \frac{n\pi x}{l}},$$

де:

$$c_n = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) e^{-i \frac{n\pi x}{l}} dx, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (12.23.10)$$

Зауважимо, що коефіцієнти з номерами, які відрізняються тільки знаком, є комплексно спряженими, тобто  $c_{-n} = \bar{c}_n$ . Коефіцієнт  $c_0$  – дійсний.

*Приклад.* Написати ряд Фур'є в комплексній формі для функції з періодом  $2l = 2$ :

$$f(x) = \begin{cases} -1, & -1 < x < 0, \\ 1, & 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Згідно з формулами (12.23.10) маємо (при  $n \neq 0$ ):

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(x) e^{-in\pi x} dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^0 f(x) e^{-in\pi x} dx + \frac{1}{2} \int_0^1 f(x) e^{-in\pi x} dx = \\ &= -\frac{1}{2} \int_{-1}^0 e^{-in\pi x} dx + \frac{1}{2} \int_0^1 e^{-in\pi x} dx = \frac{1}{2in\pi} e^{-in\pi x} \Big|_{-1}^0 - \frac{1}{2in\pi} e^{-in\pi x} \Big|_0^1 = \\ &= \frac{1}{2in\pi} (1 - e^{in\pi}) - \frac{1}{2in\pi} (e^{-in\pi} - 1) = \frac{1}{2in\pi} (1 - (-1)^n) + \frac{1}{2in\pi} (1 - (-1)^n) = \\ &= \frac{1 - (-1)^n}{in\pi} = \frac{(-1)^n - 1}{n\pi} i. \end{aligned}$$

При  $n = 0$  маємо:

$$c_0 = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(x) dx = -\frac{1}{2} \int_{-1}^0 dx + \frac{1}{2} \int_0^1 dx = -\frac{1}{2} x \Big|_{-1}^0 + \frac{1}{2} x \Big|_0^1 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0.$$

Таким чином, ряд Фур'є має вигляд:

$$f(x) = \frac{i}{\pi} \sum_{\substack{n=-\infty \\ (n \neq 0)}}^{\infty} \frac{(-1)^n - 1}{n} e^{inx}.$$

## 12.24. Поняття про інтеграл Фур'є

Нехай неперіодичну кусково-монотонну функцію  $f(x)$  задано на проміжку  $(-\infty, +\infty)$ . Будемо припускати, що ця функція абсолютно інтегровна на цьому проміжку, тобто:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx = Q < +\infty. \quad (12.24.1)$$

Тоді на довільному скінченному проміжку  $(-l, l)$  цю функцію можна розкласти в ряд Фур'є (12.21.4). Підставляючи до цього ряду вирази для коефіцієнтів  $a_0, a_n, b_n$  з формул (12.21.5), (12.21.6), (12.21.7), дістанемо:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(t) dt + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{l} \int_{-l}^l (f(t) \cos \alpha_n t \cos \alpha_n x + f(t) \sin \alpha_n t \sin \alpha_n x) dt = \\ &= \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(t) dt + \frac{1}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-l}^l f(t) \cos \alpha_n (t-x) dt, \end{aligned} \quad (12.24.2)$$

де  $\alpha_n = \frac{\pi n}{l}$ . Позначимо:

$$\alpha_{n+1} - \alpha_n = \frac{\pi}{l} = \Delta \alpha_n.$$

Тоді формула (8.2) набуде вигляду:

$$f(x) = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(t) dt + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \int_{-l}^l f(t) \cos \alpha_n (t-x) dt \right] \Delta \alpha_n. \quad (12.24.3)$$

Перейдемо в цій формулі до границі при  $l \rightarrow +\infty$ . Оскільки  $f(x)$  від  $l$  не залежить, то  $\lim_{l \rightarrow +\infty} f(x) = f(x)$ . З умови (12.24.1) випливає, що перший доданок у правій частині формули (12.24.3) прямує до нуля при  $l \rightarrow +\infty$ :

$$\lim_{l \rightarrow +\infty} \left| \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(t) dt \right| \leq \lim_{l \rightarrow +\infty} \frac{1}{2l} \int_{-l}^l |f(t)| dt < \lim_{l \rightarrow +\infty} \frac{Q}{2l} = 0.$$



Позначимо при фіксованому  $l$ :

$$\varphi(\alpha_n, x) = \int_{-l}^l f(t) \cos \alpha_n(t-x) dt.$$

З урахуванням цього дістанемо:

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \lim_{l \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \int_{-l}^l f(t) \cos \alpha_n(t-x) dt \right) \Delta \alpha_n = \frac{1}{\pi} \lim_{l \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(\alpha_n, x) \Delta \alpha_n.$$

Сума  $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi(\alpha_n, x) \Delta \alpha_n$  нагадує при фіксованому  $x$  інтегральну суму для функції:

$$\varphi(\alpha, x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \alpha(t-x) dt, \quad (12.24.4)$$

де  $\alpha \in (0, +\infty)$ . При прямуванні  $l$  до нескінченності величина  $\Delta \alpha_n = \frac{\pi}{l}$

прямує до нуля. Тому природно сподіватися, що:

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \lim_{l \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(\alpha_n, x) \Delta \alpha_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \varphi(\alpha, x) d\alpha.$$

Або з урахуванням (12.24.4):

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \alpha(t-x) dt \right) d\alpha. \quad (12.24.5)$$

Інтеграл (12.24.5) називається *інтегралом Фур'є* функції  $f(x)$ . Строгого доведення цієї формули ми тут не наводимо. Відмітимо, що вона справедлива в усіх точках неперервності функції  $f(x)$ . Якщо  $x_0$  є точкою розриву функції  $f(x)$ , то:

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \alpha(t-x_0) dt \right) d\alpha = \frac{f(x_0+0) + f(x_0-0)}{2}. \quad (12.24.6)$$

Отже, коли функція визначена і абсолютно інтегровна всій числовій прямій і кусково-монотонна на довільному скінченному проміжку, то для неї існує інтеграл Фур'є. У точках неперервності функції  $f(x)$  виконано рівність (12.25.5), а в точках розриву – рівність (12.24.6).

Запишемо інтеграл Фур'є у іншому вигляді:

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \alpha(t-x) dt \right) d\alpha = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \alpha t dt \right) \cos \alpha x d\alpha +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin \alpha t dt \right) \sin \alpha x d\alpha. \quad (12.24.7)$$

Позначимо:

$$A(\alpha) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \alpha t dt, \quad B(\alpha) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin \alpha t dt. \quad (12.24.8)$$

Тоді:

$$f(x) = \int_0^{+\infty} (A(\alpha) \cos \alpha x + B(\alpha) \sin \alpha x) d\alpha. \quad (12.24.9)$$

Інтеграл Фур'є у такому запису подібний до ряду Фур'є (12.18.2); знак суми в формулі (12.18.2) замінюється знаком інтеграла, коефіцієнти  $a_n, b_n$  замінено функціями  $A(\alpha), B(\alpha)$ . Таким чином, інтеграл Фур'є може розглядатися як граничний випадок ряду Фур'є.

*Приклад.* Зобразити інтегралом Фур'є функцію:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1, \\ 0,5, & x = 0, x = 1, \\ 0, & x < 0, x > 1. \end{cases}$$

Ця функція кусково-монотонна на будь-якому скінченному відрізьку  $[-l, l]$ , оскільки складається з трьох неперервних частин. Вона також абсолютно інтегровна на всій числовій прямій. Дійсно:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx = \int_{-\infty}^0 0 \cdot dx + \int_0^1 dx + \int_1^{+\infty} 0 \cdot dx = 1 < +\infty.$$

Отже, таку функцію в точках її неперервності можна подати через інтеграл Фур'є. Згідно з формулою (12.24.5) маємо:

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \left( \int_0^1 f(t) \cos \alpha(t-x) dt \right) d\alpha = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha(t-x)}{\alpha} \Big|_{t=0}^{t=1} d\alpha =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha(1-x) + \sin \alpha x}{\alpha} d\alpha = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{1}{\alpha} \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha(1-2x)}{2} d\alpha.$$

У точках розриву  $x = 0$  та  $x = 1$  інтеграл Фур'є дорівнює:

$$\frac{f(x-0) + f(x+0)}{2} = \frac{1}{2}.$$

Таким чином, знайдений інтеграл Фур'є зображує дану функцію на всій числовій прямій. Зокрема, якщо  $x = 0$ , дістанемо:

$$f(0) = \frac{1}{2} = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{1}{\alpha} \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} d\alpha = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha}{\alpha} d\alpha,$$

звідки:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha}{\alpha} d\alpha = \frac{\pi}{2}.$$

Ми обчислили таким чином інтеграл, який за формулою Ньютона–Лейбніца не обчислюється, оскільки первісна від функції  $\frac{\sin x}{x}$  не виражається в елементарних функціях.

### ***Контрольні запитання до глави 12***

1. Що розуміється під числовим рядом?
2. Які ряди називаються збіжними, які розбіжними, наведіть приклади. Що таке сума числового ряду?
3. У чому полягає необхідна умова збіжності числового ряду? Чи є вона достатньою? Наведіть відповідний приклад.
4. Які ряди називаються знакозмінними, які – знакододатними?
5. У чому полягає ознака порівняння збіжності знакододатних числових рядів? Які існують форми цієї ознаки?
6. У чому полягає ознака Даламбера збіжності знакододатних числових рядів? Чи існують ситуації, коли ця ознака не дає відповіді на питання про збіжність ряду?
7. У чому полягає радикальна ознака Коші збіжності знакододатних числових рядів? Чи існують ситуації, коли ця ознака не дає відповіді на питання про збіжність ряду?
8. У чому полягає інтегральна ознака Коші збіжності знакододатних числових рядів?
9. Що таке абсолютна і що таке умовна збіжність знакозмінних числових рядів? Які існують відмінності у властивостях абсолютно та умовно збіжних числових рядів?
10. Як можна ознаку Даламбера та радикальну ознаку Коші застосувати для дослідження на збіжність знакозмінних рядів?

11. У чому полягає ознака Лейбніца збіжності числових рядів, знаки членів яких чергуються? Як оцінюється залишок таких рядів за умови їх збіжності?
12. Що таке функціональна послідовність? Яка функціональна послідовність називається рівномірно збіжною на заданій множині?
14. Що таке функціональний ряд, що таке область його збіжності? Наведіть приклади.
15. Які функціональні ряди називаються рівномірно збіжними на заданій множині?
16. У чому полягає ознака Вейєрштрасса рівномірної збіжності на заданій множині функціонального ряду?
17. Які основні властивості рівномірно збіжних функціональних рядів?
18. Що таке степеневий ряд? Що таке радіус та інтервал збіжності степеневого ряду?
19. Що є областю рівномірної збіжності степеневого ряду? Чи можна стверджувати, що степеневий ряд збігається рівномірно на всьому інтервалі його збіжності?
20. Який ряд називається рядом Тейлора для даної функції? Який ряд називається рядом Маклорена?
21. Чи можна стверджувати, що ряд Тейлора для даної функції завжди збігається на інтервалі своєї збіжності до цієї самої функції?
22. Які достатні умови розкладання функції в ряд Тейлора (Маклорена)?
23. Наведіть приклади застосувань степеневих рядів.
24. У чому полягає необхідна і достатня умова збіжності числового ряду в комплексній області?
25. Що собою являє область збіжності степеневого ряду в комплексній області?
26. Який ряд називається тригонометричним?
27. Чи завжди тригонометричний ряд для даної функції збігається саме до цієї функції?
28. Наведіть достатні умови того, щоб тригонометричний ряд, побудований для даної функції, збігався саме до цієї функції.
29. Які особливості мають ряди Фур'є для парних і непарних функцій?
30. Як можна розкласти в ряд Фур'є функцію, задану на відрізку  $[0, l]$ ?
31. Що називається комплексною формою ряду Фур'є?

32. Що таке інтеграл Фур'є? Який зв'язок між рядом та інтегралом Фур'є?

**Вправи для самостійного розв'язання**

1. Довести, що даний числовий ряд збіжний і знайти його суму.

1)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ ; 2)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+5)}$ ; 3)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{9n^2 + 12n - 5}$ ;

4)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{4n^2 + 8n + 3}$ ; 5)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{14}{49n^2 - 14n - 48}$ ; 6)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{12}{36n^2 + 12n - 35}$ .

2. За допомогою ознаки порівняння, або використовуючи необхідну умову збіжності, дослідити на збіжність знакододатний числовий ряд.

1)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-1}{4n^2 + 5n}$ ; 2)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2(n\sqrt{n})}{n\sqrt{n}}$ ; 3)  $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2(n+1)}\right)$ ;

4)  $\sum_{n=1}^{\infty} \arcsin \frac{1}{\sqrt{n}}$ ; 5)  $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \sin \frac{1}{n}$ ; 6)  $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$ ;

7)  $\sum_{n=1}^{\infty} (\ln(n+1) - \ln n)$ ; 8)  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos \frac{\pi}{2n}\right)$ ; 9)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt[4]{n^5}}$ ;

10)  $\sum_{n=1}^{\infty} \cos^2\left(\frac{1}{n^3}\right)$ ; 11)  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \exp\left(-\frac{2}{n^3}\right)\right)$ ; 12)  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[3]{1 + \frac{1}{2n}} - 1\right)$ .

3. За допомогою ознаки Даламбера дослідити на збіжність знакододатний числовий ряд.

1)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(2n)!}$ ; 2)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 5 \cdots (3n-1)}{1 \cdot 5 \cdots (4n-3)}$ ; 3)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n (n+1)}{(n+3)!}$ ; 4)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}$ ;

5)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{2 \cdot 4 \cdots (2n)}$ ; 6)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n^2}}{(n!)^2}$ ; 7)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n (n!)^2}{(2n)!}$ ; 8)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n n!}{n^n}$ .

**4.** За допомогою радикальної ознаки Коші дослідити на збіжність знакододатний числовий ряд.

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2}; \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln^n(n+2)}; \quad 3) \sum_{n=1}^{\infty} 4^n \left(\frac{n+1}{n}\right)^{-n^2}; \quad 4) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2} \sin \frac{1}{n}\right)^n;$$

$$5) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}\right)^n; \quad 6) \sum_{n=1}^{\infty} (\log_3(n+1) - \log_3 n)^n; \quad 7) \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \sin \frac{1}{n}\right)^{n^2}.$$

**5.** За допомогою інтегральної ознаки Коші-Маклорена дослідити на збіжність знакододатний числовий ряд.

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log_4 n}{n}; \quad 2) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^3 n}; \quad 3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctg^2 n}{1+n^2}; \quad 4) \sum_{n=1}^{\infty} n e^{-n^2};$$

$$5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln n (\ln \ln n)}; \quad 6) \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\sqrt{n}}; \quad 7) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln \left(\arctg \frac{n}{2}\right)}{4+n^2}; \quad 8) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^3};$$

$$9) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1) \sqrt[3]{\ln^2 n}}; \quad 10) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cdot 3^{\frac{1}{n}}.$$

**6.** За допомогою ознаки Лейбніца дослідити на абсолютну та умовну збіжність ряд, знаки членів якого чергуються.

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2^n}{3^n + 4^n}; \quad 2) \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n}; \quad 3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\ln(n+1)}; \quad 4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} n}{n+1};$$

$$5) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^n; \quad 6) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \arcsin \frac{1}{n}; \quad 7) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n!}{(2n)!};$$

$$8) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \pi n}{2^n}; \quad 9) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n!}{n^n}; \quad 10) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n;$$

$$11) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\arctg n}{n}; \quad 12) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n^2+1}}.$$

**7.** Користуючись ознакою Вейерштрасса, довести рівномірну збіжність у вказаному проміжку функціонального ряду.

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2 + n^2}, \quad -\infty < x < +\infty; \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x + 2^n}, \quad -2 < x < +\infty;$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1 + n^4 x^2}, \quad 0 \leq x \leq +\infty; \quad 4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\sqrt{n!}} (x^n + x^{-n}), \quad \frac{1}{2} \leq |x| \leq 2;$$

$$5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n^2 x}{\sqrt[3]{n^4 + x^4}}, \quad -\infty < x < +\infty; \quad 6) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n\sqrt{n}}, \quad -\infty < x < +\infty;$$

$$7) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n \sqrt{1+nx}}, \quad 0 < x < +\infty; \quad 8) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x+2n-1)(x+2n+1)}, \quad 0 < x < +\infty.$$

**8.** Знайти область збіжності функціонального ряду.

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} \left( \frac{1-x}{1+x} \right)^n; \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{x+1}}; \quad 3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+x^n}{1-x^n}; \quad 4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{x}{7^n};$$

$$5) \sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{1}{x+1} - \frac{2}{x+3}}; \quad 6) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n!} x^n; \quad 7) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x-1)^n}{n \cdot 3^n}; \quad 8) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n (4x^2-1)^n};$$

$$9) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n\sqrt{n}} \left( \frac{x-1}{2} \right)^n; \quad 10) \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{2n-1}{2n+1} \right)^n (x-1)^n; \quad 11) \sum_{n=1}^{\infty} \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^{n^2} x^n;$$

**9.** Розкласти функцію в ряд Маклорена і вказати область його збіжності.

$$1) f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}; \quad 2) f(x) = \cos^3 x; \quad 3) f(x) = xe^{-5x}; \quad 4) f(x) = \frac{x}{5+6x};$$

$$5) f(x) = \frac{3+4x}{6-5x-x^2}; \quad 6) f(x) = \frac{x}{(1-x)(1-x^2)}; \quad 7) f(x) = \ln \sqrt{\frac{2+x}{2-x}};$$

$$8) y = \left( \frac{1}{4} \right)^x; \quad 9) f(x) = \frac{2x}{(1+4x)^3}; \quad 10) f(x) = \operatorname{arctg}(4x^3).$$

**10.** Розкласти функцію в ряд Тейлора і вказати область його збіжності.

$$1) f(x) = \ln x \text{ за степенями } (x-1); \quad 2) f(x) = \frac{1}{x^2+4x+7} \text{ за степенями } (x+2);$$

$$3) f(x) = e^{2x} \text{ за степенями } (x+1); \quad 4) f(x) = \cos^2 x \text{ за степенями } \left( x - \frac{\pi}{4} \right);$$

$$5) f(x) = \sqrt[3]{x} \text{ за степенями } (x-4); \quad 6) f(x) = \frac{1}{4+3x} \text{ за степенями } (x+2);$$

$$7) f(x) = \ln(5x+3) \text{ за степенями } (x-3);$$

$$8) f(x) = \sin 3x \text{ за степенями } (x+\pi).$$

**11.** За допомогою розкладання підінтегральної функції в ряд Маклорена наближено з точністю до 0,001 обчислити інтеграл.

$$1) \int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{\sin x}{x} dx; \quad 2) \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{64-x^3}}; \quad 3) \int_1^3 \frac{e^x-1}{x} dx; \quad 4) \int_0^{1.3} \cos(x^2) dx;$$

$$5) \int_{0.2}^{0.4} \frac{\ln(1+2x)}{x} dx; \quad 6) \int_{0.1}^{0.5} \frac{\operatorname{arctg} x^2}{x} dx; \quad 7) \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{1-\cos x}{x^2} dx;$$

$$8) \int_1^2 x^2 e^{-3x^2} dx; \quad 9) \int_{0.1}^{0.4} \frac{dx}{1+x^4}; \quad 10) \int_0^5 \frac{dx}{\sqrt[4]{81+x^4}}.$$

**12.** Знайти три перших, відмінних від нуля, члени розкладання в ряд Тейлора розв'язку задачі Коші.

1)  $y' = x + y^2$ ,  $y(1) = 2$ ; 2)  $y' = x - \cos y$ ,  $y(0) = \pi$ ;

3)  $y' = y + xe^y$ ,  $y(0) = 0$ ; 4)  $y' = x^2 + \frac{x}{y}$ ,  $y(1) = -2$ ;

5)  $y' = x - \operatorname{tg} y$ ,  $y(0) = \frac{\pi}{4}$ ; 6)  $y' = 2x + \sqrt{y}$ ,  $y(1) = 0$ .

**13.** Розкласти в ряд Фур'є у вказаних проміжках наступні функції.

1)  $f(x) = x - \pi$ ,  $(-\pi, \pi]$ ; 2)  $f(x) = \begin{cases} 1, & (-\pi, 0), \\ 3, & [0, \pi]. \end{cases}$  3)  $f(x) = \begin{cases} ax, & (-\pi, 0), \\ bx, & (0, \pi); \end{cases}$

4)  $f(x) = \pi^2 - x^2$ ,  $(-\pi, \pi)$ ; 5)  $f(x) = \cos ax$ ,  $(-\pi, \pi)$ ,  $a \notin \mathbb{Z}$ ;

6)  $f(x) = \sin ax$ ,  $(-\pi, \pi)$ ,  $a \notin \mathbb{Z}$ ; 7)  $f(x) = \begin{cases} \pi, & (-\pi, 0), \\ \pi - x, & [0, \pi] \end{cases}$  на  $(-\pi, \pi]$ .

**14.** Розкласти в ряд Фур'є по синусах.

1)  $f(x) = \cos 2x$ ,  $(0, \pi]$ ; 2)  $f(x) = x(2-x)$ ,  $(0, 2]$ ;

3)  $f(x) = x - 4\pi$ ,  $(4\pi, 5\pi]$ .

**15.** Розкласти в ряд Фур'є по косинусах.

1)  $f(x) = \begin{cases} 1, & (0, h), \\ 0, & (h, \pi]; \end{cases}$  2)  $f(x) = \sin ax$ ,  $(0, \pi)$ ,  $a \in \mathbb{Z}$ ;

3)  $f(x) = 2 - x$ ,  $(0, 2]$ .

**16.** Розкласти в комплексний ряд Фур'є функції.

1)  $f(x) = e^x$ ,  $[-\pi, \pi]$ ; 2)  $f(x) = \begin{cases} 1, & [-1, 0], \\ 0, & [0, 1] \end{cases}$  на  $[-1, 1]$ ;

3)  $f(x) = x^2$ ,  $[-\pi, \pi]$ .

**17.** Зобразити за допомогою інтеграла Фур'є функції.



$$\begin{aligned} 1) f(x) &= \begin{cases} 1 - x/2, & 0 \leq x \leq 2, \\ 0, & x > 2; \end{cases} & 2) f(x) &= \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1, \\ -1, & -1 \leq x < 0; \end{cases} \\ 3) f(x) &= \begin{cases} \cos x, & |x| \leq \pi/2, \\ 0, & |x| > \pi/2; \end{cases} & 4) f(x) &= \begin{cases} \sin x, & |x| \leq \pi, \\ 0, & |x| > \pi. \end{cases} \end{aligned}$$

## Рекомендована література

1. *Дубовик В. П., Юрик І. І.* Вища математика. – К. : Вища школа, 1993.– 648 с.
2. *Керекеша П. В.* Лекції і вправи з вищої математики. – Одеса : Астропринт, 2003. – 520 с.
3. *Призва Г. Й., Плахотник В. В. та ін.* Вища математика. Основні розділи. – К. : Либідь, 2003. – 400 с.
4. *Призва Г. Й., Плахотник В. В. та ін.* Вища математика. Спеціальні розділи. – К. : Либідь, 2003. – 368 с.
5. *Клепко В. Ю., Голець В. Л.* Вища математика в прикладах і задачах. К., 2009. – 592 с.
6. *Дубовик В. П., Юрик І. І. та ін.* Вища математика. Збірник задач. – К. : АСК, 2005. – 480 с.
7. *Кудрявцев В. А., Демидович Б. П.* Краткий курс высшей математики. – М. : Астрель, 2001. – 656 с.
8. *Шипачёв В. С.* Высшая математика. – М. : ВШ, 1990. – 479 с.
9. *Самнер Г.* Математика для географов. – М. : Прогресс, 1981. – 296 с.
10. *Минорский. В. П.* Сборник задач по высшей математике. – М. : Физматлит, 2006. – 356 с.

## Зміст

<b>Глава 11. Диференціальні рівняння</b>	<b>3</b>
11.1. Основні поняття. Задачі, що приводять до диференціальних рівнянь	3
11.2. Диференціальні рівняння 1-го порядку. Основні означення	8
11.3. Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними	20
11.4. Однорідні диференціальні рівняння	26
11.5. Диференціальні рівняння, звідні до однорідних	31
11.6. Лінійні диференціальні рівняння 1-го порядку	37
11.7. Диференціальне рівняння Бернуллі	43
11.8. Диференціальне рівняння Ріккати	45
11.9. Диференціальні рівняння у повних диференціалах	48
11.10. Інтегрувальний множник	51
11.11. Теорема існування та єдності розв'язку задачі Коші	55
11.12. Диференціальні рівняння 1-го порядку, не розв'язані відносно похідної. Основні поняття	60
11.13. Метод введення параметру	62
11.14. Рівняння Лагранжа і Клеро	66
11.15. Диференціальні рівняння вищих порядків. Загальні питання	69
11.16. Диференціальні рівняння вищих порядків, що припускають зниження порядку	73
11.17. Лінійні диференціальні рівняння $n$ -го порядку. Основні поняття	79
11.18. Властивості розв'язків лінійного однорідного рівняння 2-го порядку	81
11.19. Фундаментальна система розв'язків лінійного однорідного рівняння 2-го порядку	86
11.20. Структура загального розв'язку лінійного однорідного рівняння 2-го порядку	88
11.21. Структура загального розв'язку лінійного неоднорідного рівняння 2-го порядку	89
11.22. Метод варіації довільних сталих	92
11.23. Лінійне однорідне рівняння 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами. Попередні зауваження	95
11.24. Лінійне неоднорідне рівняння 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами і спеціальним виглядом правої частини	100
11.25. Застосування лінійних диференціальних рівнянь 2-го порядку до дослідження коливних явищ	106

11.26. Системи двох лінійних диференціальних рівнянь 1-го порядку зі сталими коефіцієнтами	114
<i>Контрольні запитання до глави 11</i>	123
<i>Вправи для самостійного розв'язання</i>	128
<b>Глава 12. Теорія рядів</b>	136
12.1. Поняття числового ряду. Збіжність числового ряду	136
12.2. Властивості збіжних числових рядів	140
12.3. Ознаки збіжності знакододатних рядів. Ознаки порівняння	143
12.4. Ознаки збіжності знакододатних рядів. Ознака Даламбера та радикальна ознака Коші	394
12.5. Ознаки збіжності знакододатних рядів. Інтегральна ознака Коші–Маклорена	149
12.6. Знакозмінні ряди. Абсолютно та умовно збіжні ряди	153
12.7. Ряди, знаки членів яких чергуються. Ознака Лейбніца	154
12.8. Функціональні послідовності та ряди. Рівномірна збіжність	156
12.9. Властивості рівномірно збіжних функціональних рядів	161
12.10. Степеневі ряди. Радіус та інтервал збіжності	164
12.11. Властивості степеневих рядів	169
12.12. Ряди Тейлора і Маклорена	170
12.13. Розкладання елементарних функцій в степеневі ряди. Основні формули	174
12.14. Приклади на розкладання функцій в степеневі ряди	178
12.15. Застосування степеневих рядів	180
12.16. Послідовності та ряди комплексних чисел	184
12.17. Степеневі ряди в комплексній області	187
12.18. Тригонометричні ряди Фур'є	190
12.19. Приклади розкладання функцій в ряд Фур'є	195
12.20. Ряди Фур'є для парних та непарних функцій	197
12.21. Ряди Фур'є $2l$ -періодичної функції	201
12.22. Ряд Фур'є неперіодичної функції	203
12.23. Комплексна форма ряду Фур'є	205
12.24. Поняття про інтеграл Фур'є	208
<i>Контрольні запитання до глави 12</i>	211
<i>Вправи для самостійного розв'язання</i>	213
Рекомендована література	218

Навчальне видання

**Щоголев Сергій Авенірович**  
**Кореновський Аркадій Олександрович**

*ОСНОВИ ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ*

Том 2. Частина 2

**НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК**

*За редакцією авторів*

Підп. до друку. 13.11.2019. Формат 60x84/16.  
Ум.-друк. арк. 12,79. Тираж 30 пр.  
Зам. № 2012.

**Видавець і виготовлювач**  
**Одеський національний університет**  
**імені І. І. Мечникова**  
Свідоцтво ДК № 4215 від 22.11.2011 р.

65082, м. Одеса, вул. Єлісаветинська, 12, Україна  
Тел.: (048) 723 28 39.  
E-mail: [druk@onu.edu.ua](mailto:druk@onu.edu.ua)