

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ОДЕСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ І. І. МЕЧНИКОВА
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ, ЕКОНОМІКИ ТА МЕХАНІКИ

С. А. Щоголев, Арк. О. Кореновський

ОСНОВИ ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ

Том 2

Частина 1

УДК 517(07)
Щ92

Рекомендовано до друку вченою радою
ОНУ імені І. І. Мечникова.
Протокол № 2 від 30.10.2018 р.

Рецензенти:

В. Г. Попов – доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри вищої математики Одеської національної морської академії;

А. В. Плотніков – доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри прикладної, обчислювальної математики і САПР Одеської державної академії будівництва та архітектури;

Ю. О. Григор'єв – кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри вищої і прикладної математики Одеського національного морського університету.

Щоголев С. А.

Щ92 Основи вищої математики. Т. 2. Ч. 1 : навч. посіб. /
С. А. Щоголев, Арк. О. Кореновський. – Одеса : Одес. нац. ун-т ім.
І. І. Мечникова, 2019. – 244 с.
ISBN 978-617-689-272-4 (двотомник)
ISBN 978-617-689-335-6 (2-ий том, ч. 1)

Навчальний посібник написано відповідно до програми курсу «Вища математика», що читається студентам 1 курсу спеціальностей «географія», «геологія», «туризм». Викладено основи теорії, представлено основні практичні методи розв'язання задач, розглянуто низка прикладів, у тому числі фізичного змісту, наведено вправи для самостійної роботи.

Для підготовки студентів геолого-географічних спеціальностей.

УДК 517(07)

ISBN 978-617-689-272-4 (двотомник)
ISBN 978-617-689-335-6 (2-ий том, ч. 1)

© Щоголев С. А., Кореновський Арк. О., 2019
© Одеський національний університет імені І. І. Мечникова, 2019

Глава 8. Векторна алгебра і аналітична геометрія у просторі

8.1. Скалярні та векторні величини

У природознавстві доводиться мати справу з різними типами величин. До одного з них відносяться такі, які характеризуються лише числовим значенням. Наприклад:

m – маса,

ρ – густина,

V – об'єм.

Такі величини називаються *скалярними*. Ті величини, в тому числі і змінні, з якими ми мали справу у попередніх розділах курсу, відносяться саме до таких величин.

До іншого типу відносяться величини, які характеризуються не тільки числовим значенням, а ще й напрямом. Наприклад:

\vec{v} – швидкість,

\vec{F} – сила,

\vec{E} – напруженість електричного поля.

Ці величини називають *векторними*. Вони використовуються в багатьох науках, особливо у фізиці, механіці. В кліматології, зокрема, такі величини виникають при розгляді повітряних рухів, в геоморфології – при дослідженні впливу нахилу долини на ступінь розмиття річкового русла, тощо. Щоб векторні величини відрізнити від скалярних, їх позначають стрілкою, або жирним шрифтом: \mathbf{v} , \mathbf{F} , \mathbf{E} . Такі величини мають свої певні властивості, закони дій над ними. Вивченню цих законів і присвячено найближчі параграфи.

Означення. *Векторною величиною* (або просто *вектором*) називається величина, яка характеризується числовим значенням і напрямом.

Термін «вектор» (від латинського *vector* – переносник) ввів у 1848 році математик і фізик У. Гамільтон (1805–1865 рр.). Ми будемо позначати вектори буквами зі стрілками: \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} . Напрямок вектора можна визначити, якщо вказати початкову і кінцеву його точки. Вектор \vec{a} , початок якого знаходиться у точці A , а кінець у точці B , позначатимемо \overrightarrow{AB} . Зображувати вектори зручно за допомогою напрямлених відрізків (рис. 8.1).

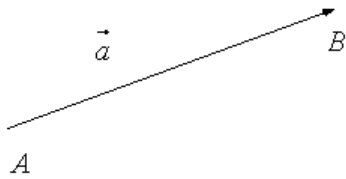


Рис. 8.1

Напрямок вектора показується стрілкою, а його числове значення – відстанню між точками A і B . Ця відстань позначається $|\vec{a}|$ або $|\overline{AB}|$ і називається *довжиною* або *модулем* вектора. Вектор, довжина якого дорівнює одиниці, називається *одичним*, його ми позначатимемо \vec{e} . Вектор, довжина якого дорівнює нулю, називається *нульовим* (точка A тоді буде збігатися з точкою B), такий вектор позначатимемо $\vec{0}$. Одичний вектор, напрям якого збігається з напрямом ненульового вектора \vec{a} , називається *ортом* вектора \vec{a} .

Означення. Вектори \vec{a} і \vec{b} називаються *колінеарними*, якщо їх напрями збігаються або протилежні.

Тобто колінеарними називаються такі вектори, які лежать на одній прямій або паралельних прямих (рис. 8.2). Нульовий вектор вважається колінеарним будь-якому вектору.

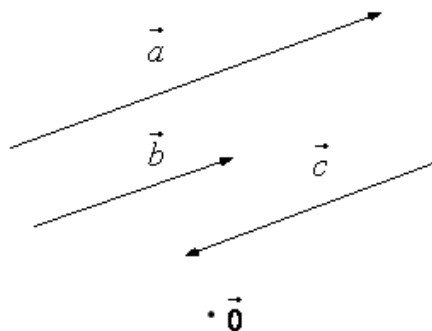


Рис. 8.2

З означення вектора випливає, що він повністю визначається своєю довжиною та своїм напрямом. А положення початкової точки A

не відіграє ролі. Таким чином, вектори, що розрізняються лише положенням початкової точки (точки прикладання), вважаються одним і тим же вектором (рис. 8.3).

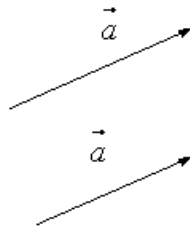


Рис. 8.3

Тим не менш, існують задачі, де точка прикладання також відіграє роль (наприклад, сила, яку прикладено до якоїсь точки пружного тіла). Таким чином, вектор можна паралельним переносом переносити у будь-яку точку простору.

8.2. Лінійні операції над векторами

Нехай задано два вектори \vec{a} і \vec{b} . Оскільки вектори можна переносити до будь-якої точки простору, то, не обмежуючи загальності, можна вважати, що початок вектора \vec{b} збігається з кінцем вектора \vec{a} .

Означення. Сумою векторів \vec{a} і \vec{b} називається вектор $\vec{a} + \vec{b}$, початок якого збігається з початком вектора \vec{a} , а кінець – з кінцем вектора \vec{b} (рис. 8.4).

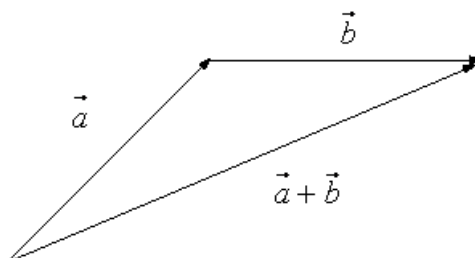


Рис. 8.4

Таке правило додавання векторів називається *правилом трикутника* (з рисунку 8.4 видно, чому саме). В деяких задачах доцільно користуватися іншим правилом – *правилом паралелограма*. Припусти-

мо, що вектори \vec{a} і \vec{b} збігаються своїми початками. Побудуємо на цих векторах паралелограм так, що \vec{a} і \vec{b} є його суміжними сторонами. Діагональ цього паралелограма, що йде від точки прикладання векторів \vec{a} і \vec{b} до протилежної вершини паралелограма, й є сума векторів \vec{a} і \vec{b} (рис. 8.5).

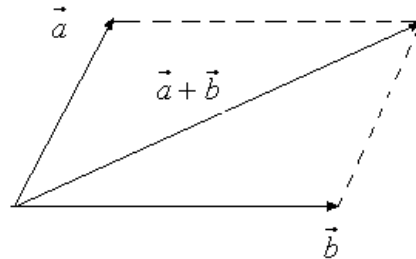


Рис. 8.5

Легко переконатися в еквівалентності правила трикутника і правила паралелограма. Саме за правилом паралелограма знаходиться рівнодіюча $\vec{F}_1 + \vec{F}_2$ двох сил \vec{F}_1 та \vec{F}_2 .

Правило додавання двох векторів легко узагальнити на будь-яке число векторів (рис. 8.6).

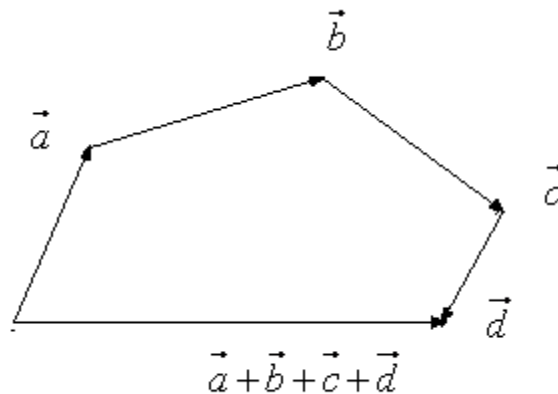


Рис. 8.6

Розглянемо питання про віднімання векторів. Нехай вектори \vec{a} і \vec{b} збігаються своїми початками.

Означення. Різницею векторів \vec{a} і \vec{b} називається вектор $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$ такий, що $\vec{b} + \vec{c} = \vec{a}$.

З означення випливає, що початок вектора $\vec{a} - \vec{b}$ збігається з кінцем вектора \vec{b} , а кінець – з кінцем вектора \vec{a} (рис. 8.7).

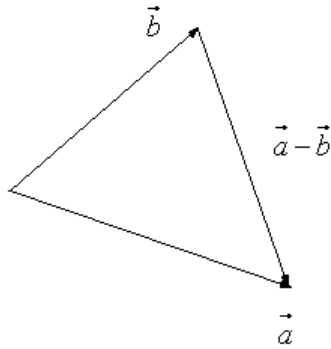


Рис. 8.7

Означення. Добутком вектора \vec{a} на число λ називається вектор $\lambda\vec{a}$, довжина якого дорівнює $|\lambda| \cdot |\vec{a}|$, а напрям збігається з напрямом вектора \vec{a} , якщо $\lambda > 0$, і протилежний йому, якщо $\lambda < 0$. Якщо $\lambda = 0$ або $|\vec{a}| = 0$, то $\lambda\vec{a} = \vec{0}$.

Теорема. Вектори \vec{a} і \vec{b} колінеарні тоді і тільки тоді, коли існує таке число λ , що $\vec{b} = \lambda\vec{a}$.

Доведення. Будемо вважати, що вектори \vec{a} і \vec{b} ненульові (у протилежному випадку $\lambda = 0$, і нульовий вектор колінеарний будь-якому вектору).

Необхідність. Нехай вектори \vec{a} і \vec{b} колінеарні. Для визначеності припустимо, що вони збігаються напрямом. Розглянемо орт \vec{e} , векторів \vec{a} і \vec{b} (рис. 8.8).

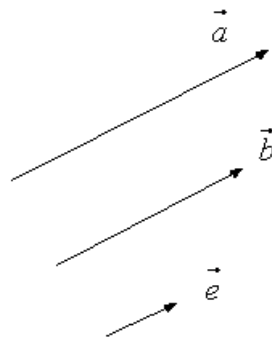


Рис. 8.8

Тоді очевидно: $\vec{a} = |\vec{a}|\vec{e}$, $\vec{b} = |\vec{b}|\vec{e}$. Оскільки $|\vec{a}| \neq 0$, то

$$\vec{b} = |\vec{b}|\vec{e} = \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|} |\vec{a}|\vec{e} = \lambda\vec{a}, \text{ де } \lambda = \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}.$$

Якщо вектори \vec{a} і \vec{b} мають протилежні напрями, то введемо орт \vec{e} вектора \vec{a} , тоді:

$$\vec{a} = |\vec{a}| \vec{e}, \quad \vec{b} = -|\vec{b}| \vec{e} = -\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|} |\vec{a}| \vec{e} = \lambda \vec{a}, \quad \text{де } \lambda = -\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}.$$

Достатність впливає безпосередньо з означення добутку вектора на число.

Додавання, віднімання і множення вектора на число називаються *лінійними операціями над векторами*. Сформулюємо деякі властивості цих операцій.

- 1) $\lambda(\mu \vec{a}) = (\lambda\mu) \vec{a}$,
- 2) $(\lambda + \mu) \vec{a} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{a}$,
- 3) $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda \vec{a} + \lambda \vec{b}$,
- 4) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$,
- 5) $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$.

Справедливість цих властивостей впливає безпосередньо з означень лінійних операцій над векторами.

8.3. Проекція вектора на вісь. Основна теорема про проекцію

Нехай задано вектор $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ і напрямлена вісь l . Проведемо перпендикуляри з точок A і B на пряму l . Основи цих перпендикулярів позначимо відповідно A' і B' . Дістанемо вектор $\overrightarrow{A'B'}$.

Означення. *Скалярною проекцією* вектора \overrightarrow{AB} на вісь l (у подальшому просто *проекцією*) називається довжина вектора $\overrightarrow{A'B'}$, яку взято зі знаком «+», якщо напрям вектора $\overrightarrow{A'B'}$ збігається з напрямом осі l (рис. 8.9), та зі знаком «-» у протилежному випадку (рис. 8.10).

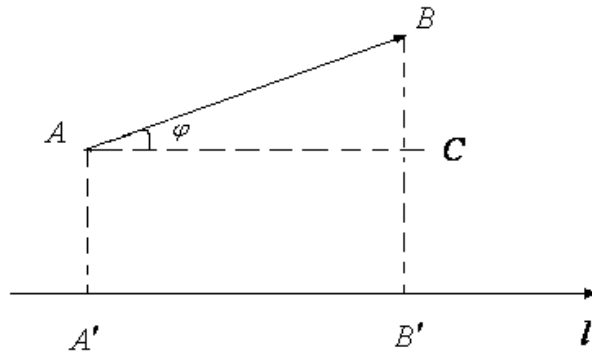


Рис. 8.9

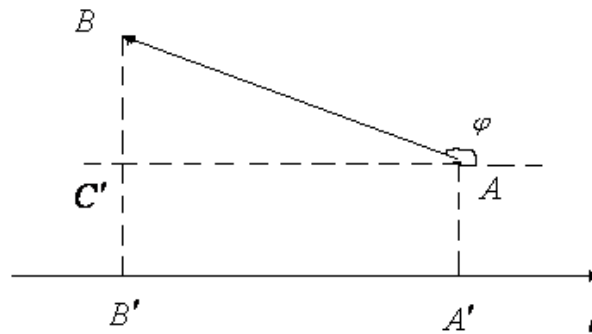


Рис. 8.10

Позначається проекція вектора \overrightarrow{AB} на вісь l таким чином: $pr_l \overrightarrow{AB}$.

Тобто:

$$pr_l \overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{A'B'}| \quad (\text{рис. 8.9}).$$

$$pr_l \overrightarrow{AB} = -|\overrightarrow{A'B'}| \quad (\text{рис. 8.10}).$$

Теорема. Проекція вектора \overrightarrow{AB} на вісь l дорівнює довжині вектора \overrightarrow{AB} , яку помножено на косинус кута φ між вектором \overrightarrow{AB} і напрямом осі l .

Доведення. Розглянемо спочатку ситуацію, яка відповідає рис. 8.9. Очевидно, що $|\overrightarrow{A'B'}| = |AC|$, а з прямокутного трикутника ACB випливає, що:

$$np_l \overline{AB} = |\overline{A'B'}| = |AC| = |\overline{AB}| \cos \varphi,$$

і теорему у цьому випадку доведено. Розглянемо ситуацію, що відповідає рис. 8.10. Тоді:

$$np_l \overline{AB} = -|\overline{A'B'}| = -|AC'| = -|\overline{AB}| \cos(\pi - \varphi) = |\overline{AB}| \cos \varphi,$$

і теорему доведено повністю.

Сформулюємо основні властивості проєкцій.

1. $np_l(\vec{a} + \vec{b}) = np_l \vec{a} + np_l \vec{b}$, тобто проєкція суми векторів на вісь дорівнює сумі проєкцій векторів на цю вісь (рис. 8.11).

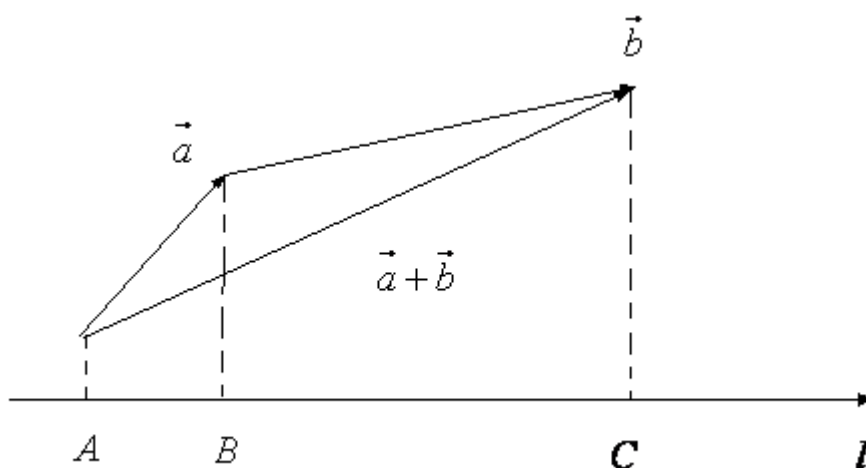


Рис. 8. 11

$$|AB| = np_l \vec{a}, |BC| = np_l \vec{b}, |AC| = np_l(\vec{a} + \vec{b}), |AC| = |AB| + |BC|.$$

$$2. \quad np_l(\lambda \vec{a}) = \lambda \cdot np_l(\vec{a}), \text{ де } \lambda - \text{число.}$$

Дійсно, нехай φ – кут між вектором \vec{a} і віссю l , а ψ – кут між вектором $\lambda \vec{a}$ і віссю l . Тоді, якщо $\lambda > 0$, то $\psi = \varphi$, і матимемо:

$$np_l(\lambda \vec{a}) = |\lambda \vec{a}| \cos \psi = |\lambda| \cdot |\vec{a}| \cos \varphi = \lambda \cdot np_l \vec{a}.$$

Якщо $\lambda < 0$, то $\psi = \pi - \varphi$, і **матимемо:**

$$np_l(\lambda \vec{a}) = |\lambda \vec{a}| \cos \psi = |\lambda| \cdot |\vec{a}| \cos(\pi - \varphi) = -|\lambda| \cdot |\vec{a}| (-\cos \varphi) = \lambda \cdot |\vec{a}| \cos \varphi = \lambda \cdot np_l \vec{a}.$$

Тобто лінійні операції над векторами переходять у відповідні лінійні операції над проєкціями.

8.4. Компланарні та некопланарні вектори. Базис у просторі

Означення. Вектори називаються *компланарними*, якщо вони лежать у одній площині, або в паралельних площинах (рис. 8.12).

З означення випливає, що будь-які два вектори завжди будуть компланарними, адже два вектори завжди лежать в паралельних площинах.

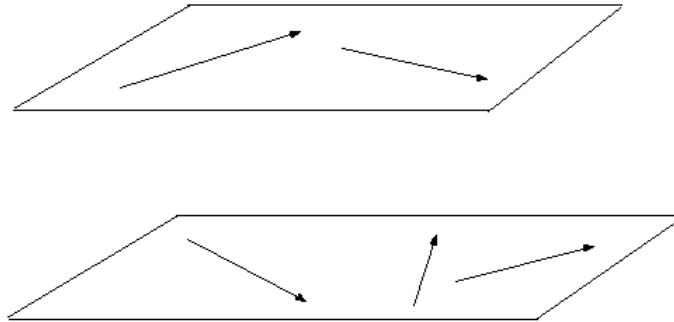


Рис. 8.12

Таким чином, щоб вектори були некопланарними, їх має бути принаймні три (рис. 8.13).

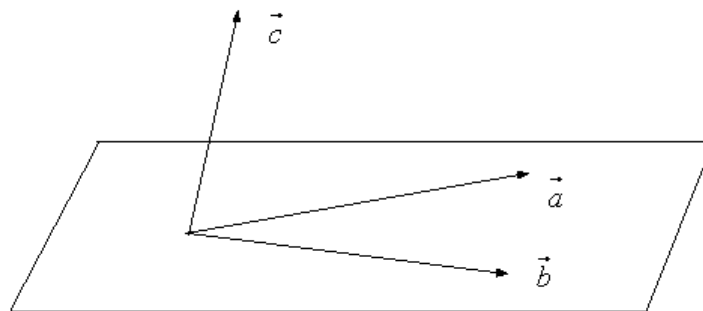


Рис. 8.13

Означення. *Базисом у просторі* називається довільна упорядкована трійка некопланарних векторів.

З означення випливає, що ці вектори мають бути ненульовими, адже у протилежному випадку вони були б компланарними.

Зауваження. Базис можна ввести також на прямій та на площині. *Базисом на прямій* називається довільний ненульовий вектор. *Бази-*

сом на площині називається довільна упорядкована пара ненульових неколінеарних векторів.

Теорема (про розкладання вектора за базисом). *Нехай вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ утворюють базис у просторі. Тоді для будь-якого вектора \vec{d} простору існує єдина трійка чисел α, β, γ , що справджується рівність:*

$$\vec{d} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}.$$

Доведення. Зведемо вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ до одного початку і побудуємо на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ паралелепіпед так, щоб вектор \vec{d} був його діагоналлю (рис. 8.14).

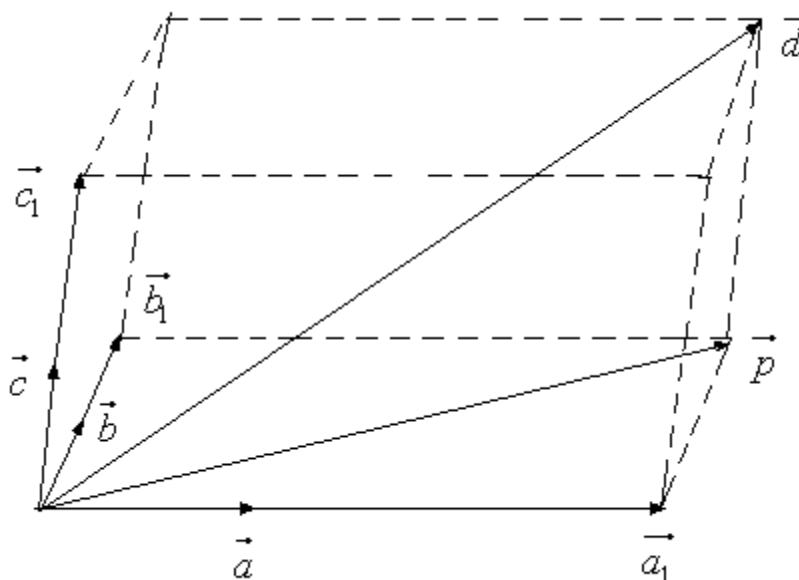


Рис. 8.14

Вектори, що відповідають ребрам паралелепіпеда, позначимо через $\vec{a}_1, \vec{b}_1, \vec{c}_1$, а вектор, що відповідає діагоналі основи паралелепіпеда, позначимо через \vec{p} .

Оскільки вектор \vec{a}_1 колінеарний вектору \vec{a} , то $\vec{a}_1 = \alpha\vec{a}$, відповідно $\vec{b}_1 = \beta\vec{b}$, $\vec{c}_1 = \gamma\vec{c}$. Очевидно, що $\vec{p} = \vec{a}_1 + \vec{b}_1 = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$, $\vec{d} = \vec{p} + \vec{c}_1 = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$, що й треба було довести.

Числа α, β, γ називаються *координатами вектора \vec{d} в базисі $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$* .

Введемо поняття орієнтованих трійок векторів.

Означення. Упорядкована трійка $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ некопланарних векторів називається *правою* (рис. 8.15а), якщо з кінця вектора \vec{c} найкоротший поворот від вектора \vec{a} до вектора \vec{b} видно проти годинникової стрілки. Якщо цей поворот видно за годинниковою стрілкою (рис. 8.15б), то трійка називається *лівою*.

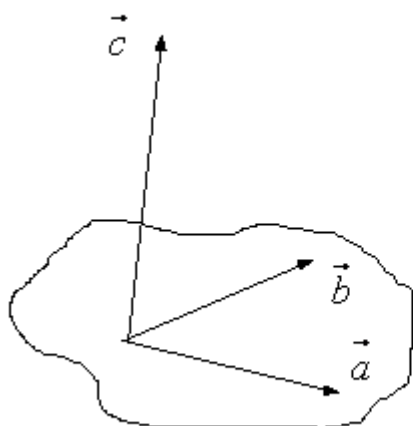


Рис. 8.15а

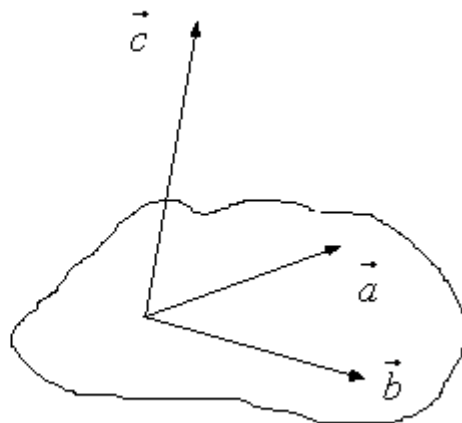


Рис. 8.15б

Назви трійок мають таке походження. Великий, вказівний та середній пальці правої руки (перераховані самі у такому порядку) утворюють праву трійку, а ті ж самі пальці лівої руки, перераховані у такому ж самому порядку, утворюють ліву трійку.

Означення. *Стандартним базисом у просторі* називається права трійка взаємно перпендикулярних одиничних векторів $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ (рис. 8.16)

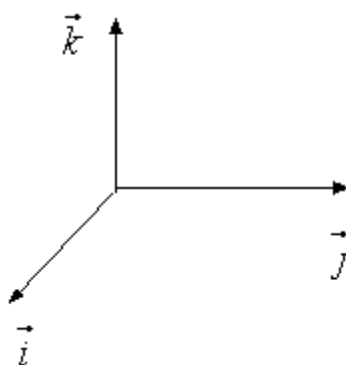


Рис. 8.16

Такий базис ще називається *ортонормованим*. Згідно з вище доведеною теоремою для будь-якого вектора \vec{d} існує єдина трійка чисел x, y, z (координат вектора \vec{d}), що буде виконана рівність:

$$\vec{d} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

8.5. Прямокутна декартова система координат у просторі

Розглянемо у просторі точку O і деякий базис, що задається векторами $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$.

Означення. Сукупність точки та базису називається *декартовою системою координат у просторі*.

Це означення пов'язане з ім'ям видатного французького математика Рене Декарта (1596–1650 рр.) – засновника аналітичної геометрії.

Проведемо через точку O в напрямках векторів, що утворюють базис, напрямлені прямі. Ці прямі називаються *координатними осями* (рис. 8.17).

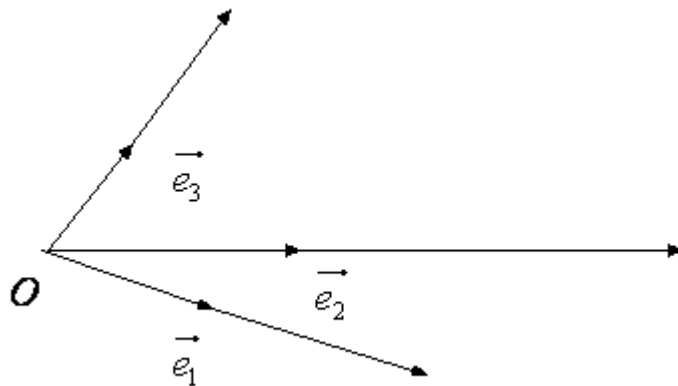


Рис. 8.17

Площини, які проходять через координатні прямі, називаються *координатними площинами*.

Особливо часто використовується *прямокутна декартова система координат (ПДСК)*. Це система, яка пов'язується з ортонормованим базисом (рис. 8.18). Вісь Ox , яка проходить в напрямі вектора

\vec{i} , називається *віссю абсцис*, вісь Oy , яка проходить в напрямі вектора \vec{j} – віссю ординат, а вісь Oz , яка проходить в напрямі вектора \vec{k} – віссю аплікат.

Координатні площини будемо позначати Oxy , Oyz , Oxz . Вони поділяють простір на 8 октантів.

Нехай задано довільну точку M простору. Тоді вектор \overrightarrow{OM} згідно з теоремою про розкладання вектора за базисом можна подати у вигляді:

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

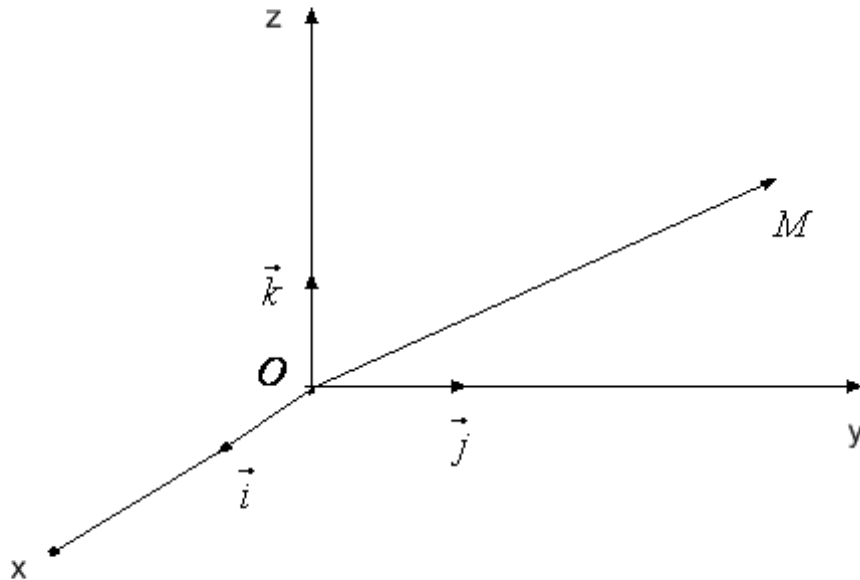


Рис. 8.18

Координати x, y, z вектора \overrightarrow{OM} в базисі $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ називаються *прямокутними декартовими координатами точки M у просторі*. Точка M з координатами x, y, z позначається $M(x, y, z)$.

З ортогональності (тобто перпендикулярності) векторів $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ випливає, що:

$$x = pr_{Ox} \overrightarrow{OM}, \quad y = pr_{Oy} \overrightarrow{OM}, \quad z = pr_{Oz} \overrightarrow{OM}$$

(рис. 8.19).

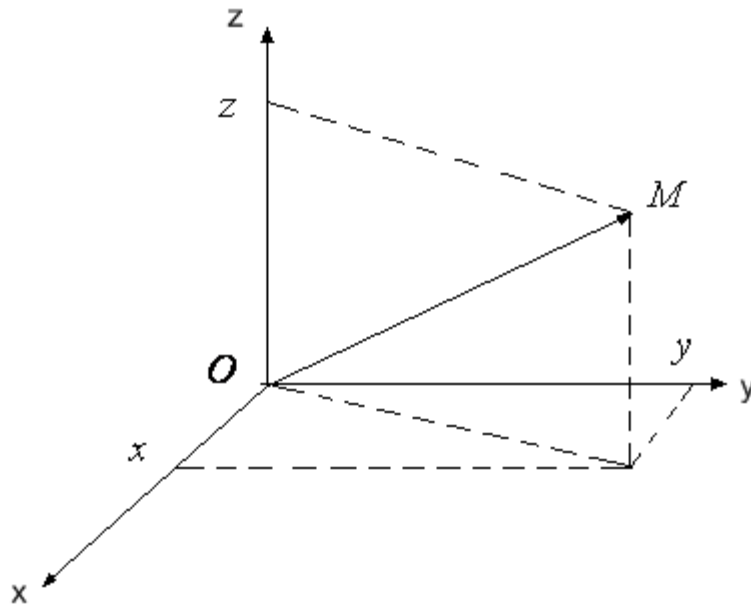


Рис. 8.19

Таким чином, будь-який вектор \vec{a} у ПДСК повністю характеризується єдиною трійкою чисел a_x, a_y, a_z – координатами цього вектора. І навпаки – кожна така трійка чисел визначає єдиний вектор, для якого ця трійка дає його координати. Тому замість вектора можна розглядати саме упорядковані трійки чисел. Тоді пишемо: $\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$, що означає рівність: $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$, причому $a_x = np_{Ox} \vec{a}$, $a_y = np_{Oy} \vec{a}$, $a_z = np_{Oz} \vec{a}$.

8.6. Довжина і напрям вектора у ПДСК

При зображенні вектора за допомогою напрямлених відрізків його напрям зображується стрілкою, а довжина (модуль) – довжиною відрізка. А як знайти напрям і довжину вектора \vec{a} , якщо його задано координатами:

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k} ?$$

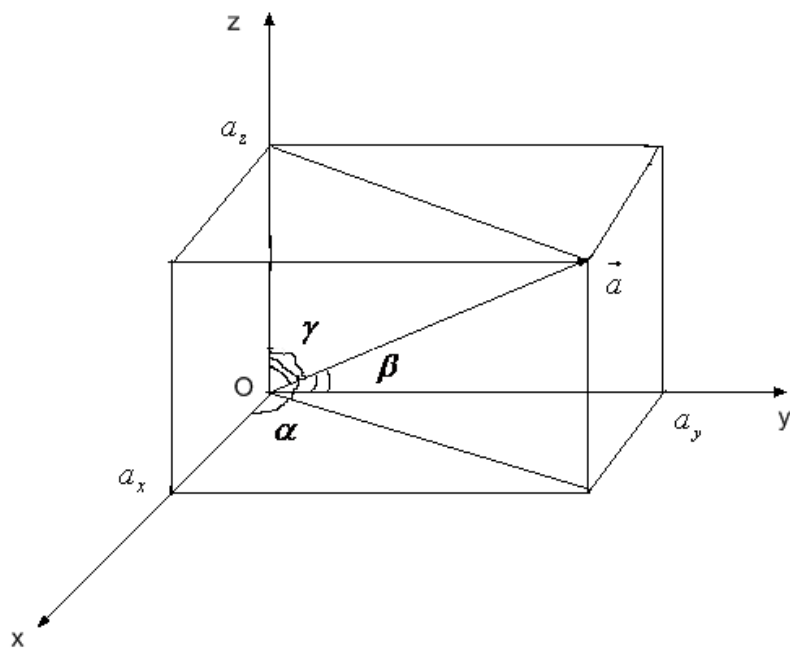


Рис. 8.20

Оскільки вектор \vec{a} є діагоналлю прямокутного паралелепіпеда з вимірами $|a_x|$, $|a_y|$, $|a_z|$ (рис. 8.20), то:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

Знайдемо координати вектора $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, якщо $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ (рис. 8.21).

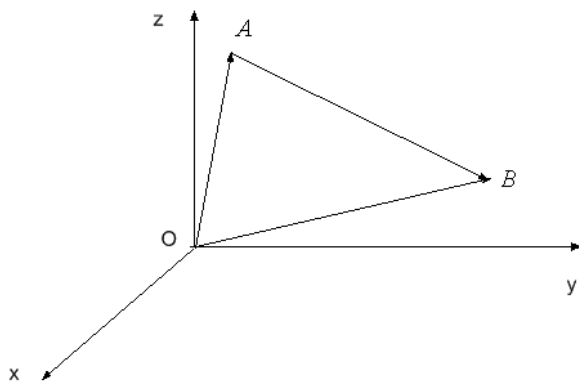


Рис. 8.21

Очевидно, що $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$. З іншого боку:

$$\overrightarrow{OA} = \{x_1, y_1, z_1\} = x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k}, \quad \overrightarrow{OB} = \{x_2, y_2, z_2\} = x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j} + z_2 \vec{k}.$$

$$\overrightarrow{AB} = x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j} + z_2 \vec{k} - x_1 \vec{i} - y_1 \vec{j} - z_1 \vec{k} =$$

$$= (x_2 - x_1) \vec{i} + (y_2 - y_1) \vec{j} + (z_2 - z_1) \vec{k} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}.$$

А тоді:

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \quad (8.6.1)$$

Ця формула водночас дає відстань між точками A і B .

Напрям вектора $\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$ визначається кутами α, β, γ , які вектор \vec{a} утворює з координатними осями (рис. 8.20).

$$\alpha = (\vec{a}, \vec{i}), \quad \beta = (\vec{a}, \vec{j}), \quad \gamma = (\vec{a}, \vec{k}).$$

Косинуси цих кутів називаються *напрямними косинусами* вектора \vec{a} . З формул для проєкцій вектора на осі (див. п. 8.3) дістанемо:

$$\cos \alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|}, \quad \cos \beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|}, \quad \cos \gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|}. \quad (8.6.2)$$

З урахуванням формули для довжини вектора легко одержати:

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.$$

Приклад. Задано точки $A(0; -1; 2)$, $B(-1; 1; 4)$. Знайти координати, довжину та напрямні косинуси вектора \overrightarrow{AB} .

$$\text{Маємо: } \overrightarrow{AB} = \{-1 - 0; 1 - (-1); 4 - 2\} = \{-1; 2; 2\},$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{1 + 4 + 4} = \sqrt{9} = 3,$$

$$\cos \alpha = -\frac{1}{3}, \quad \cos \beta = \frac{2}{3}, \quad \cos \gamma = \frac{2}{3}.$$

8.7. Операції над векторами у координатній формі

Нехай задано два вектори $\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$, $\vec{b} = \{b_x, b_y, b_z\}$. Лінійним операціям над векторами відповідатимуть відповідні арифметичні операції над координатами векторів, що впливає з властивостей проєкцій векторів.

Нехай λ – дійсне число. Тоді:

$$\lambda \vec{a} = \{\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z\}, \quad \vec{a} \pm \vec{b} = \{a_x \pm b_x, a_y \pm b_y, a_z \pm b_z\}.$$

Якщо $\vec{a} = \vec{b}$, то $a_x = b_x, a_y = b_y, a_z = b_z$. Навпаки, при виконанні останньої рівності справджується рівність $\vec{a} = \vec{b}$. Тобто будь-яка векторна рівність $\vec{a} = \vec{b}$ еквівалентна трьом скалярним рівностям:

$$a_x = b_x, a_y = b_y, a_z = b_z.$$

Необхідною та достатньою умовою колінеарності векторів \vec{a} і \vec{b} є пропорційність їх координат, тобто:

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}. \quad (8.7.1)$$

Дійсно, вектори \vec{a} і \vec{b} колінеарні тоді і тільки тоді, коли існує число λ таке, що $\vec{a} = \lambda \vec{b}$, тобто $a_x = \lambda b_x, a_y = \lambda b_y, a_z = \lambda b_z$, з чого й випливає пропорційність координат.

Приклади. Задано вектор $\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$. Знайти орт вектора \vec{a} .

Шуканим ортом є вектор $\vec{e} = \frac{1}{|\vec{a}|} \vec{a}$. Знайдемо: $|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$.

Отже,

$$\vec{e} = \left\{ \frac{a_x}{|\vec{a}|}, \frac{a_y}{|\vec{a}|}, \frac{a_z}{|\vec{a}|} \right\} = \{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\},$$

де $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ – напрямні косинуси вектора \vec{a} .

2. Знайти вектор $\vec{a} = \{a_x; -1; a_z\}$, колінеарний вектору $\vec{b} = \{1; -2; 3\}$.

Використаємо умову колінеарності векторів:

$$\frac{a_x}{1} = \frac{-1}{-2} = \frac{a_z}{3}.$$

Звідси: $a_x = \frac{1}{2}, a_z = \frac{3}{2}$, отже, $\vec{a} = \left\{ \frac{1}{2}; -1; \frac{3}{2} \right\}$.

Означення. Будемо казати, що точка M ділить відрізок AB у відношенні λ , якщо:

$$\frac{|AM|}{|MB|} = \lambda. \quad (8.7.2)$$

Нехай задано відрізок AB точками $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$. Знайдемо на відрізку таку точку $M(x, y, z)$, яка ділить відрізок AB у відношенні λ .

Введемо радіус-вектори точок A, B, M :

$$\vec{r}_1 = \overrightarrow{OA} = \{x_1, y_1, z_1\}, \vec{r}_2 = \overrightarrow{OB} = \{x_2, y_2, z_2\}, \vec{r} = \overrightarrow{OM} = \{x, y, z\}$$

(рис. 8.22).

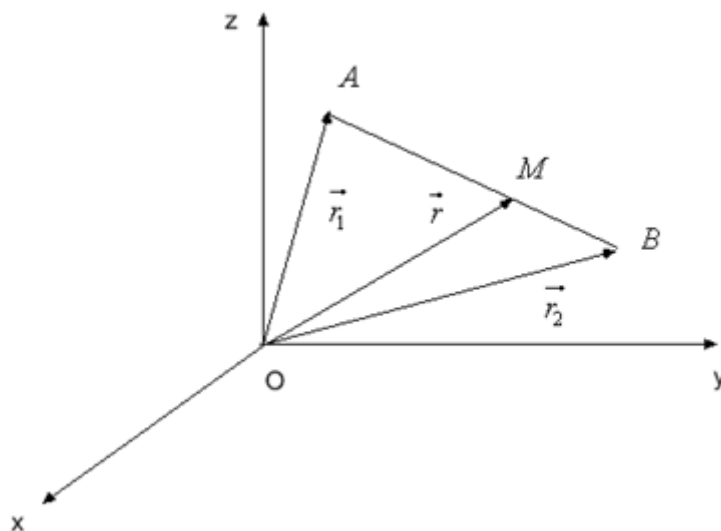


Рис. 8.22

Тоді: $\overrightarrow{AM} = \vec{r} - \vec{r}_1$, $\overrightarrow{MB} = \vec{r}_2 - \vec{r}$. За умовою $\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{MB}$, тобто $\vec{r} - \vec{r}_1 = \lambda(\vec{r}_2 - \vec{r})$, і в координатній формі одержимо:

$$x - x_1 = \lambda(x_2 - x), \quad y - y_1 = \lambda(y_2 - y), \quad z - z_1 = \lambda(z_2 - z).$$

Розв'язуючи ці рівняння відносно x, y, z , матимемо:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}. \quad (8.7.3)$$

Зокрема, якщо $\lambda = 1$, то точка M – центр відрізка AB , і тоді координати цього центру даються формулами:

$$x_c = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y_c = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad z_c = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

Тобто координати x_c, y_c, z_c центру відрізка дорівнює середньому арифметичному відповідних координат його кінців.

Приклад. Задано точки $A(2; -1; 3)$, $B(-4; 3; -2)$. Знайти точку $M(x; y; z)$, що ділить відрізок AB у відношенні $\lambda = \frac{4}{3}$.

Згідно з формулами (8.7.3) маємо:

$$x = \frac{2 + \frac{4}{3} \cdot (-4)}{1 + \frac{4}{3}} = -\frac{10}{7}, \quad y = \frac{-1 + \frac{4}{3} \cdot 3}{1 + \frac{4}{3}} = \frac{9}{7}, \quad z = \frac{3 + \frac{4}{3} \cdot (-2)}{1 + \frac{4}{3}} = \frac{1}{7}.$$

Отже, $M\left(-\frac{10}{7}; \frac{9}{7}; \frac{1}{7}\right)$.

8.8. Скалярний добуток векторів

Означення. Скалярним добутком векторів \vec{a} і \vec{b} називається скаляр, який дорівнює добутку довжин цих векторів на косинус кута між ними (рис. 8.23).

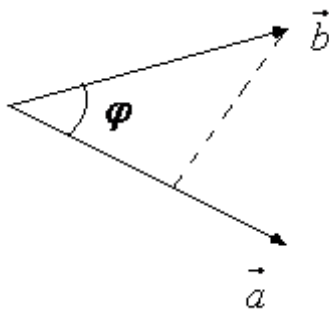


Рис. 8.23

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi. \quad (8.8.1)$$

Оскільки $|\vec{b}| \cdot \cos \varphi = n p_{\vec{a}} \vec{b}$, $|\vec{a}| \cdot \cos \varphi = n p_{\vec{b}} \vec{a}$, то:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot n p_{\vec{a}} \vec{b} = |\vec{b}| \cdot n p_{\vec{b}} \vec{a}. \quad (8.8.2)$$

Поняття скалярного добутку векторів широко використовується у математиці та суміжних науках. Розглянемо, наприклад, силу \vec{F} , що

діє на матеріальне тіло під кутом α до напрямку переміщення \vec{s} цього тіла (рис. 8.24).

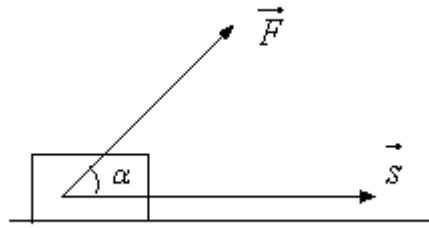


Рис. 8.24

Тоді робота цієї сили $A = |\vec{F}| \cdot |\vec{s}| \cdot \cos \alpha$, тобто $A = \vec{F} \cdot \vec{s}$. Зокрема, якщо напрям дії сили збігається з напрямом переміщення, тобто $\alpha = 0$, $\cos \alpha = 1$, то $A = |\vec{F}| \cdot |\vec{s}|$.

Визначимо деякі важливі властивості скалярного добутку.

- $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$.

Дійсно: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{b}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos(\vec{b}, \vec{a}) = \vec{b} \cdot \vec{a}$.

Тобто скалярний добуток має властивість комутативності.

- $(\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b})$.

Дійсно $(\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = |\vec{b}| \cdot n_{\vec{b}}(\lambda \vec{a}) = \lambda |\vec{b}| \cdot n_{\vec{b}} \vec{a} = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b})$.

- $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$.

Дійсно $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = |\vec{a}| \cdot n_{\vec{a}}(\vec{b} + \vec{c}) = |\vec{a}| \cdot (n_{\vec{a}} \vec{b} + n_{\vec{a}} \vec{c}) = |\vec{a}| \cdot (n_{\vec{a}} \vec{b} + n_{\vec{a}} \vec{c}) = |\vec{a}| \cdot n_{\vec{a}} \vec{b} + |\vec{a}| \cdot n_{\vec{a}} \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$.

4. Скалярний добуток двох ненульових векторів дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли ці вектори перпендикулярні.

Справді, якщо $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, тобто $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi = 0$ при тому, що $|\vec{a}| \neq 0$, $|\vec{b}| \neq 0$, то $\cos \varphi = 0$, тобто або $\varphi = \frac{\pi}{2}$, або $\varphi = \frac{3\pi}{2}$. В обох випадках вектори \vec{a} і \vec{b} перпендикулярні.

- $\vec{a}^2 = \vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos 0 = |\vec{a}|^2$.

Тобто скалярний квадрат вектора дорівнює квадрату його довжини. Звідси зокрема маємо:

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}.$$

Приклад. Знайти скалярний добуток векторів $3\vec{a} + 2\vec{b}$ і $4\vec{a} - 5\vec{b}$, якщо $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$, $(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{3}$.

$$\text{Маємо: } \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}) = 2 \cdot 3 \cdot \cos \frac{\pi}{3} = 2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} = 3;$$

$$\vec{a}^2 = 2 \cdot 2 = 4, \quad \vec{b}^2 = 3 \cdot 3 = 9;$$

$$(3\vec{a} + 2\vec{b}) \cdot (4\vec{a} - 5\vec{b}) = 12\vec{a} \cdot \vec{a} - 15\vec{a} \cdot \vec{b} + 8\vec{b} \cdot \vec{a} - 10\vec{b} \cdot \vec{b} =$$

$$= 12\vec{a}^2 - 7\vec{a} \cdot \vec{b} - 10\vec{b}^2 = 12 \cdot 4 - 7 \cdot 3 - 10 \cdot 9 = -63.$$

Нехай $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – вектори ортонормованого базису. Знайдемо всі можливі скалярні добутки цих векторів:

$$\vec{i}^2 = |\vec{i}|^2 = 1, \quad \vec{j}^2 = |\vec{j}|^2 = 1, \quad \vec{k}^2 = |\vec{k}|^2 = 1,$$

$$\vec{i} \cdot \vec{j} = |\vec{i}| \cdot |\vec{j}| \cdot \cos \frac{\pi}{2} = 0, \quad \vec{i} \cdot \vec{k} = |\vec{i}| \cdot |\vec{k}| \cos \frac{\pi}{2} = 0, \quad \vec{j} \cdot \vec{k} = |\vec{j}| \cdot |\vec{k}| \cos \frac{\pi}{2} = 0.$$

6. Припустимо тепер, що вектори \vec{a}, \vec{b} задано своїми координатами:

$$\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\}, \quad \vec{b} = \{b_x, b_y, b_z\}.$$

Знайдемо (на підставі властивостей 1–3 скалярного добутку):

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) \cdot (b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}) = \\ &= a_x b_x \vec{i} \cdot \vec{i} + a_x b_y \vec{i} \cdot \vec{j} + a_x b_z \vec{i} \cdot \vec{k} + a_y b_x \vec{j} \cdot \vec{i} + a_y b_y \vec{j} \cdot \vec{j} + a_y b_z \vec{j} \cdot \vec{k} + \\ &+ a_z b_x \vec{k} \cdot \vec{i} + a_z b_y \vec{k} \cdot \vec{j} + a_z b_z \vec{k} \cdot \vec{k} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z. \end{aligned}$$

Отже, одержали вираз скалярного добутку векторів \vec{a} і \vec{b} через їх координати:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z. \quad (8.8.3)$$

Тобто скалярний добуток двох векторів дорівнює сумі добутків їх відповідних координат.

Зокрема, для скалярного квадрата вектора \vec{a} маємо:

$$\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2.$$

Таким чином, використовуючи скалярний добуток векторів, ми одержуємо формулу для довжини вектора \vec{a} , яку в п. 8.6 одержали іншим способом:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \quad (8.8.4)$$

Кут $\varphi = (\vec{a}, \vec{b})$ між векторами \vec{a} і \vec{b} визначиться формулою:

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}. \quad (8.8.5)$$

Приклад. Трикутника задано його вершинами $A(0; -1; 2)$, $B(-1; -2; 7)$, $C(0; -2; 6)$. Знайти його внутрішній кут при вершині A .

Очевидно, що кут A це кут між векторами \overrightarrow{AB} та \overrightarrow{AC} (рис. 8.25).

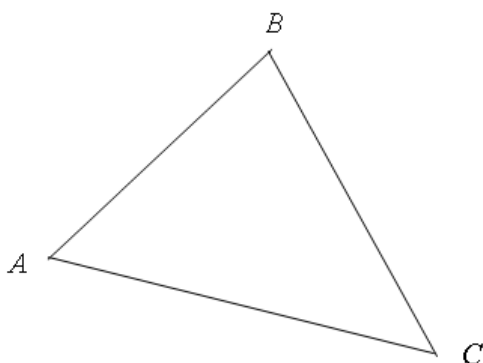


Рис. 8.25

Згідно з формулою (8.8.5) маємо:

$$\cos \varphi = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|} = \frac{-1 \cdot 0 + (-1) \cdot (-1) + 5 \cdot 4}{\sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + 5^2} \cdot \sqrt{0^2 + (-1)^2 + 4^2}} = \frac{7}{\sqrt{51}} \approx 0,98.$$

Звідси $\varphi \approx 11^\circ$.

Оскільки $|\cos \varphi| \leq 1$, то з формули кута між векторами випливає славнозвісна нерівність Коші–Буняковського:

$$|\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|. \quad (8.8.6)$$

Тобто, модуль скалярного добутку векторів не перевищує добуток їх довжин. В координатній формі нерівність (8.8.6) набуває вигляду:

$$|a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z| \leq \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}. \quad (8.8.7)$$

8.9. Векторний добуток векторів

Нехай задано два вектори \vec{a} і \vec{b} .

Означення. Векторним добутком векторів \vec{a} і \vec{b} називається вектор $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$, який задовольняє наступні умови:

- 1) вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ утворюють праву трійку (див. п. 8.4);
- 2) вектор \vec{c} перпендикулярний до кожного з векторів \vec{a} і \vec{b} (тобто перпендикулярний площині, у якій лежать вектори \vec{a} і \vec{b});

$$|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \varphi, \text{ де } \varphi = (\vec{a}, \vec{b}).$$

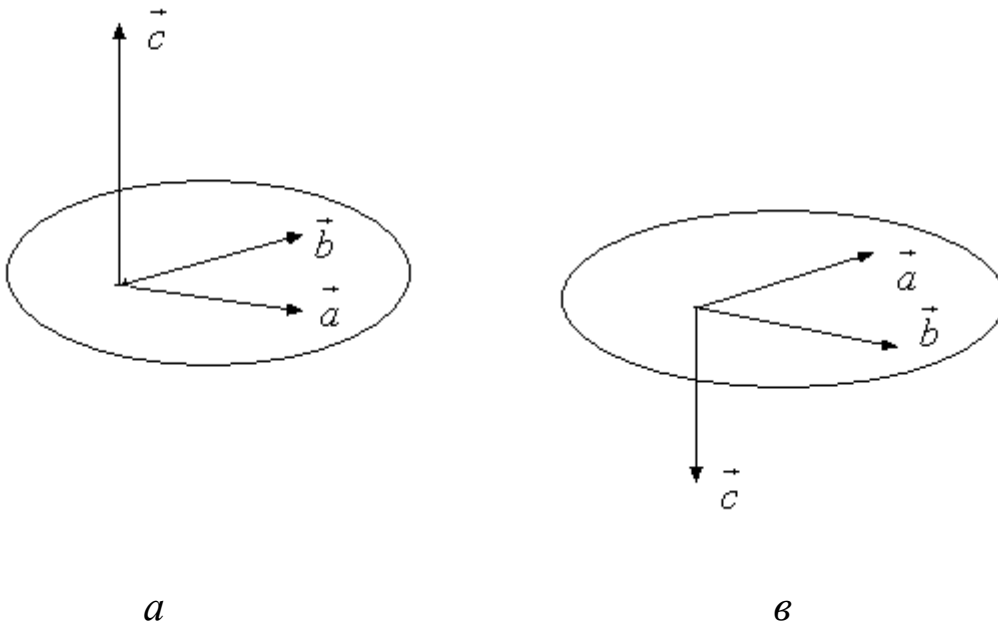


Рис. 8.26

Векторний добуток векторів має наочні геометричну та механічну інтерпретації. Почнемо з геометричної. Розглянемо паралелограм, який побудовано на векторах \vec{a} і \vec{b} (рис. 8.27):

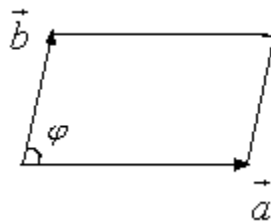


Рис. 8.27

Площа цього паралелограма дорівнює $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \varphi$, тобто саме $|\vec{a} \times \vec{b}|$. Таким чином, довжина векторного добутку двох векторів чисельно дорівнює площі паралелограма, побудованого на цих векторах.

Тепер розглянемо механічну інтерпретацію. Нехай у точці A прикладено силу \vec{F} , і O – деяка фіксована точка. З фізики відомо, що моментом сили \vec{F} відносно точки O називається вектор \vec{M} , довжина якого дорівнює добутку величини сили на плече, і який напрямлено по осі обертання так, що коли дивитися з його кінця, то обертання тіла відбувається проти годинникової стрілки (рис. 8.28).

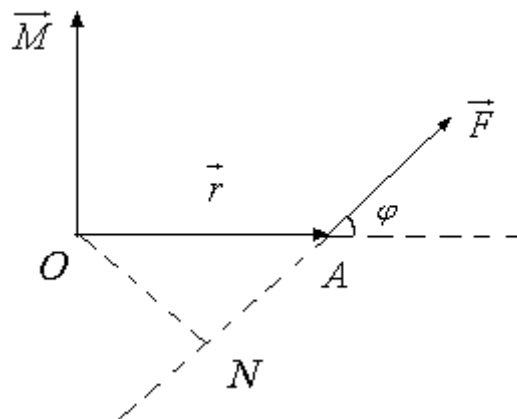


Рис. 8.28

Оскільки $|\vec{M}| = |\vec{F}| \cdot ON = |\vec{F}| \cdot |\vec{r}| \cdot \sin \varphi = |\vec{F}| \cdot |\vec{OA}| \cdot \sin(\vec{F}, \vec{OA})$, то момент сили \vec{F} , прикладеної в точці A , відносно точки O визначається векторним добутком $\vec{M} = \vec{OA} \times \vec{F}$.

Розглянемо деякі властивості векторного добутку:

1. $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$, тобто від переставлення множників векторний добуток змінює свій знак (на відміну від скалярного добутку). Дійсно, хоча $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{b} \times \vec{a}|$, але якщо ми змінюємо місцями вектори \vec{a} і \vec{b} (рис. 8.26), то трійка $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ з правої стає лівою, і для того, щоб вона залишилася правою, необхідно вектор $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ зорієнтувати у протилежному напрямку.

2. $\lambda \vec{a} \times \vec{b} = \lambda(\vec{a} \times \vec{b})$; $\vec{a} \times \lambda \vec{b} = \lambda(\vec{a} \times \vec{b})$.

$$3. \vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}.$$

4. Векторний добуток векторів \vec{a} і \vec{b} дорівнює нуль-вектору тоді і тільки тоді, коли вектори \vec{a} і \vec{b} колінеарні.

Дійсно, у цьому випадку $(\vec{a}, \vec{b}) = 0$, або $(\vec{a}, \vec{b}) = 180^\circ$, отже, $\sin(\vec{a}, \vec{b}) = 0$, а тоді $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$.

5. Розглянемо векторні добутки векторів $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ ортонормованого базису:

$$\begin{aligned} \vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = \vec{0}, & \quad \vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}, \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}, \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}, \\ \vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}, \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}, \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}. \end{aligned}$$

З цих рівностей і властивостей 1–3 векторного добутку нескладно вивести вираз координат векторного добутку через координати векторів-множників. Отже, нехай $\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$, $\vec{b} = \{b_x, b_y, b_z\}$. Тоді маємо:

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) \times (b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}) = \\ &= a_x b_x (\vec{i} \times \vec{i}) + a_x b_y (\vec{i} \times \vec{j}) + a_x b_z (\vec{i} \times \vec{k}) + \\ &+ a_y b_x (\vec{j} \times \vec{i}) + a_y b_y (\vec{j} \times \vec{j}) + a_y b_z (\vec{j} \times \vec{k}) + \\ &+ a_z b_x (\vec{k} \times \vec{i}) + a_z b_y (\vec{k} \times \vec{j}) + a_z b_z (\vec{k} \times \vec{k}) = \\ &= a_x b_y \vec{k} - a_x b_z \vec{j} - a_y b_x \vec{k} + a_y b_z \vec{i} + a_z b_x \vec{j} - a_z b_y \vec{i} = \\ &= (a_y b_z - a_z b_y) \vec{i} - (a_x b_z - a_z b_x) \vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \vec{k} = \\ &= \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \vec{k} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}. \end{aligned} \tag{8.9.1}$$

Приклади.

1. Знайти площу трикутника ABC , якщо $A(1; 2; 3)$, $B(-1; 3; 0)$, $C(-2; -3; -5)$.

Площа трикутника ABC дорівнює половині площі паралелограма, побудованого на векторах \overrightarrow{AB} і \overrightarrow{AC} . А тоді $S_{ABC} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|$.

Знайдемо $\overrightarrow{AB} = \{-2; 1; -3\}$, $\overrightarrow{AC} = \{-3; -5; -8\}$.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 1 & -3 \\ -3 & -5 & -8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 5 & 8 \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} \vec{k} = -23\vec{i} - 7\vec{j} + 13\vec{k}. \end{aligned}$$

Отже згідно з (8.8.4):

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \sqrt{(-23)^2 + (-7)^2 + 13^2} = \frac{\sqrt{747}}{2}.$$

1. Знайти момент сили $\vec{F} = \{1; -2; 4\}$, прикладеної до точки $A(1; 2; 3)$ відносно точки $B(3; 2; -1)$.

Маємо: $\vec{M} = \overrightarrow{BA} \times \vec{F}$. Оскільки $\overrightarrow{BA} = \{-2; 0; 4\}$, то:

$$\vec{M} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 0 & 4 \\ 1 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 4\vec{i} + 12\vec{j} + 4\vec{k}.$$

8.10. Мішаний добуток векторів

Означення. Мішаним добутком векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ називається скаляр, який дорівнює скалярному добутку вектора $\vec{a} \times \vec{b}$ на вектор \vec{c} , тобто $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$.

Легко встановити формулу для мішаного добутку, якщо вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ задано своїми координатами. Дійсно, нехай $\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$, $\vec{b} = \{b_x, b_y, b_z\}$, $\vec{c} = \{c_x, c_y, c_z\}$. Тоді:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \vec{k}.$$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} c_x - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} c_y + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} c_z = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \quad (8.10.1)$$

Встановимо деякі властивості мішаного добутку.

1. Якщо у мішаному добутку змінити місцями будь-які два множники, то мішаний добуток змінить знак на протилежний. Наприклад:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = -(\vec{a} \times \vec{c}) \cdot \vec{b}.$$

Це впливає з того, що якщо у визначнику змінити місцями два рядки, то визначник змінить знак на протилежний.

2. Мішаний добуток не змінюється при так званому циклічному переставленні, тобто:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a} = (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b}$$

(перший множник переставляється в кінець). Дійсно, це еквівалентно тому, що рядки у визначнику змінюються місцями два рази, а тоді у наслідку визначник залишається незмінним.

3. У мішаному добутку знаки векторного та скалярного добутків можна змінювати місцями, тобто:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}).$$

$$\text{Дійсно, } (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}).$$

З'ясуємо геометричний зміст мішаного добутку. Нехай вектори \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} зведено до одного початку. Побудуємо на цих векторах паралелепіпед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ (рис. 8.29):

$$V_{ABCD A_1 B_1 C_1 D_1} = S_{ABCD} \cdot h, \text{ де } h \text{ – висота паралелепіпеда.}$$

Маємо:

$$h = \left| np_{\vec{a} \times \vec{b}} \vec{c} \right| = \frac{\left| (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} \right|}{\left| \vec{a} \times \vec{b} \right|}.$$

Отже:

$$V_{ABCD A_1 B_1 C_1 D_1} = \left| \vec{a} \times \vec{b} \right| \cdot \frac{\left| (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} \right|}{\left| \vec{a} \times \vec{b} \right|} = \left| (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} \right|.$$

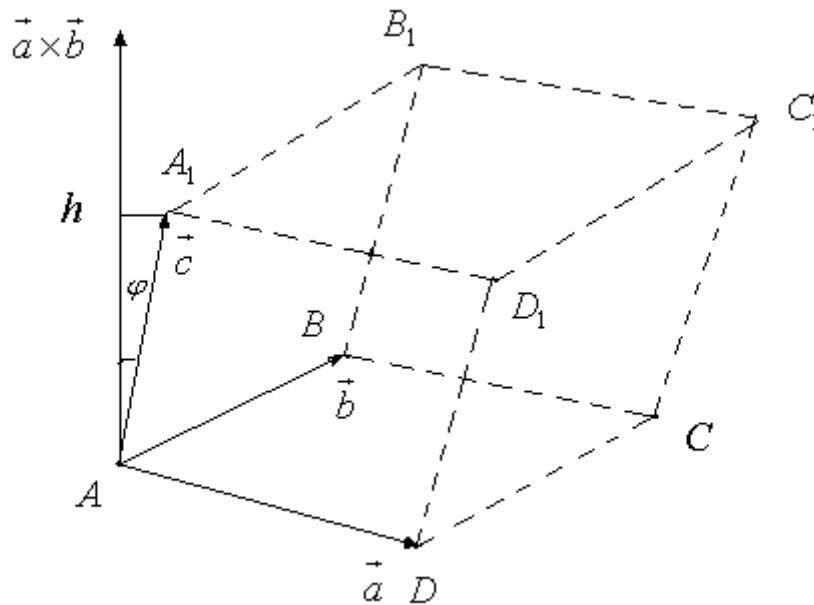


Рис. 8.29

Таким чином, абсолютна величина мішаного добутку векторів \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} дорівнює об'єму паралелепіпеда, побудованого на векторах \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} .

Приклад. Знайти об'єм тетраедра, заданого вершинами $A(2; -1; 0)$, $B(5; 5; 3)$, $C(3; 2; -2)$, $D(4; 1; 2)$.

Шуканий об'єм дорівнює шостій частині об'єму паралелепіпеда, побудованого на векторах \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AC} , \overrightarrow{AD} , тобто:

$$V = \frac{1}{6} \left| (\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AD} \right|.$$

Маємо: $\overrightarrow{AB} = \{3; 6; 3\}$, $\overrightarrow{AC} = \{1; 3; -2\}$, $\overrightarrow{AD} = \{2; 2; 2\}$.

$$(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} 3 & 6 & 3 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -18.$$

Отже, $V = \frac{1}{6} \cdot 18 = 3$.

Теорема. Вектори \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} компланарні тоді і тільки тоді, коли їх мішаний добуток дорівнює нулю.

Доведення. Необхідність. Нехай \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} – компланарні вектори. Позначимо через α площину, в якій лежать ці вектори (без обмежен-

ня загальності можна вважати, що всі три вектори лежать саме в одній площині, внаслідок можливості паралельного перенесення векторів). Тоді вектор $\vec{a} \times \vec{b}$ перпендикулярний площині α , а оскільки $\vec{c} \in \alpha$, то $\vec{a} \times \vec{b}$ перпендикулярний \vec{c} , отже $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0$.

Достатність. Нехай $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0$. Тоді вектори $\vec{a} \times \vec{b}$ і \vec{c} перпендикулярні. Але вектор $\vec{a} \times \vec{b}$ перпендикулярний векторам \vec{a} і \vec{b} , отже вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – компланарні.

Ця теорема узгоджується з геометричним змістом мішаного добутку: якщо вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ компланарні, то об'єм побудованого на них паралелепіпеда, очевидно, дорівнює нулю.

Приклад. Довести, що точки $A(0; 1; 2), B(-2; 0; -1), C(-1; 5; 8), D(1; 6; 11)$ лежать в одній площині.

Точки A, B, C, D лежать в одній площині тоді і тільки тоді, коли вектори $\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}$ – компланарні. Знайдемо:

$$\vec{AB} = \{-2; -1; -3\}, \vec{AC} = \{-1; 4; 6\}, \vec{AD} = \{1; 5; 9\}.$$

$$(\vec{AB} \times \vec{AC}) \cdot \vec{AD} = \begin{vmatrix} -2 & -1 & -3 \\ -1 & 4 & 6 \\ 1 & 5 & 9 \end{vmatrix} = 0,$$

Отже, вектори $\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}$ – компланарні, і, таким чином, потрібно доведено.

8.11. Поверхні та лінії у просторі

Означення. Поверхнею у просторі називається геометричне місце точок цього простору, прямокутні декартові координати яких задовольняють рівняння:

$$F(x, y, z) = 0. \tag{8.11.1}$$

При цьому рівняння (8.11.1) називається *рівнянням поверхні*.

Розглянемо деяку поверхню α у просторі (рис. 8.30).

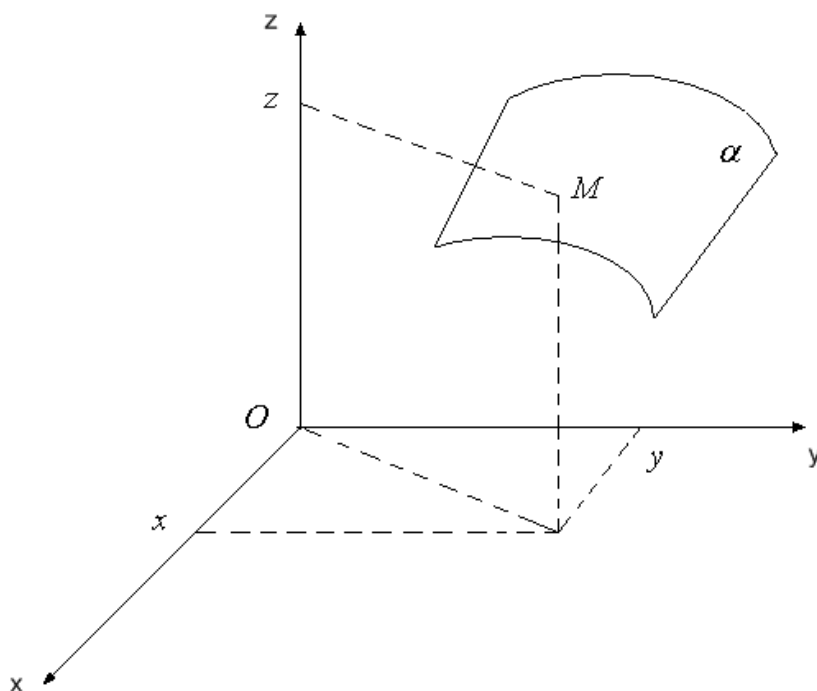


Рис. 8.30

Відмітимо, що строго визначити поняття поверхні без використання системи координат неможливо, і ми змушені розуміти його на інтуїтивному рівні (також, як і поняття точки, лінії). Наприклад, поверхня Землі, поверхня мильної кулі, тощо. Геометричну модель поверхні можна отримати, якщо взяти аркуш паперу і певним чином зігнути його.

Приклад. Знайдемо рівняння сфери, виходячи з її означення, як геометричного місця точок, рівновіддалених від однієї заданої точки (центру сфери). Моделлю сфери, близькою до ідеальної, є мильна кулька.

Нехай центром сфери є точка $C(x_0, y_0, z_0)$, і R – радіус сфери. Нехай $M(x, y, z)$ – довільна точка сфери. Тоді $|MC| = R$. Згідно з формулою (8.6.1):

$$|MC| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} = R,$$

Звідси:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2.$$

Це й є шукане рівняння сфери. Зокрема, якщо центром сфери є початок координат $O(0;0;0)$, то рівняння набуває вигляду:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2. \tag{8.11.2}$$

Якщо вираз $F(x, y, z)$ в рівнянні поверхні є многочленом від x, y, z , тобто сумою скінченного числа одночленів $ax^k y^l z^m$ зі сталими коефіцієнтами a і натуральними показниками k, l, m , то поверхня називається *алгебраїчною*. Наприклад, сфера – алгебраїчна поверхня. *Порядком* алгебраїчної поверхні називається степінь многочлена, яким задається рівняння цієї поверхні. Сфера – алгебраїчна поверхня 2-го порядку. Неалгебраїчні поверхні називаються *трансцендентними*. Ми розглядатиме лише алгебраїчні поверхні 1-го та 2-го порядків.

Розглянемо тепер питання про опис лінії у просторі. Тут існують такі можливості. Лінію можна задати як перетин двох поверхонь (рис. 8.31).

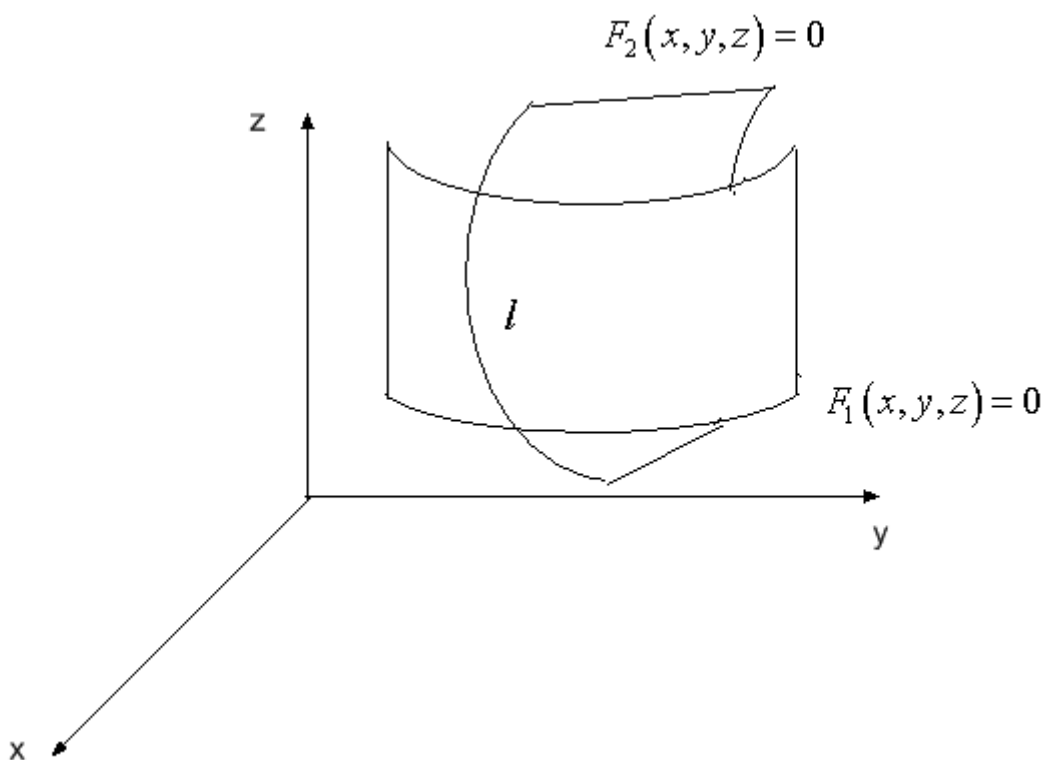


Рис. 8.31

Якщо поверхні задано своїми рівняннями $F_1(x, y, z) = 0$ та $F_2(x, y, z) = 0$, то координати будь-якої точки на лінії мають задовольняти систему двох рівнянь з трьома невідомими:

$$\begin{cases} F_1(x, y, z) = 0, \\ F_2(x, y, z) = 0. \end{cases}$$

Такі рівняння і називаються рівняннями лінії у просторі.

Інша можливість – параметричні рівняння лінії. Вони виникають таким чином. Розглянемо (рис. 8.32) вектор $\vec{r}(t)$ з початком у точці $O(0;0;0)$, довжина і напрям якого змінюються з часом t (тобто, у кожен момент часу вектор \vec{r} має свою довжину і напрям). Тоді з перебігом часу кінець цього вектора буде описувати лінію, яка називається *годографом* вектора $\vec{r}(t)$. А рівняння:

$$\vec{r} = \vec{r}(t)$$

називається *векторним параметричним рівнянням* цієї лінії. Якщо це рівняння переписати у координатній формі:

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t), \end{cases}$$

то дістанемо *скалярні параметричні рівняння* лінії у просторі. У подальшому ми одержимо рівняння деяких конкретних ліній.

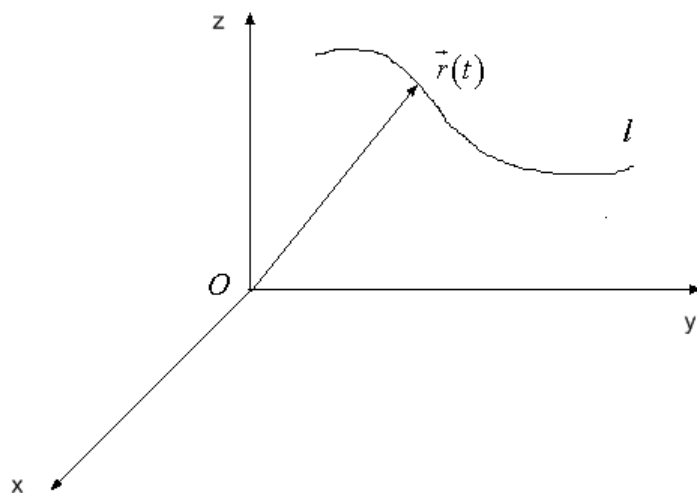


Рис. 8.32

8.12. Площина у просторі. Рівняння площини

Однією з найпростіших поверхонь є *площина*. Моделями площин може бути аркуш паперу, поверхня столу, стіни, підлоги, стелі та ін. Площина є необмеженою поверхнею, її не можна повністю помістити в середину будь-якої сфери. Її також може бути визначено як геометричне місце точок простору, рівновіддалених від двох заданих точок простору. Виходячи з цього означення, можна легко отримати рівняння площини, подібно тому, як ми отримали рівняння прямої лінії на площині (див. п. 3.4). Але зараз ми отримаємо рівняння площини, спираючись на апарат векторної алгебри.

Отже, нехай у ПДСК у просторі задана площина α . Як можна задати площину? Можна, наприклад, задати три точки цієї площини, що не лежать на одній прямій. А можна задати одну точку площини і деякий ненульовий вектор \vec{n} , який перпендикулярний цій площині. Ось з цього ми й будемо виходити.

Нехай $M_0(x_0, y_0, z_0)$ – фіксована точка площини α , а вектор $\vec{n} = \{A, B, C\}$ перпендикулярний цій площині (рис. 8.33). Цей вектор називається *нормальним* вектором площини α . Нехай $M(x, y, z)$ – довільна точка площини α . Рівняння площини ми дістанемо, якщо знайдемо зв'язок між координатами x, y, z цієї точки.

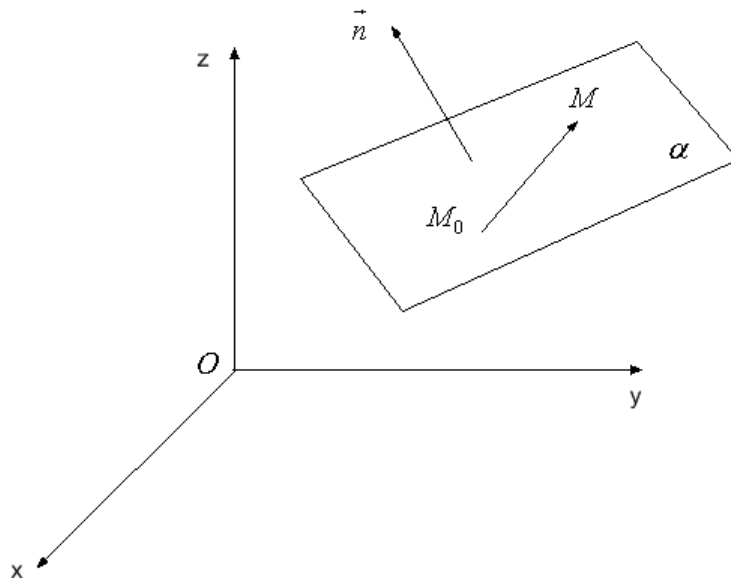


Рис. 8.33

Розглянемо вектор $\overrightarrow{M_0M} = \{x - x_0, y - y_0, z - z_0\}$. Оскільки його цілком розташовано у площині α , а вектор \vec{n} – перпендикулярній цій площині, то вектор $\overrightarrow{M_0M}$ буде перпендикулярний вектору \vec{n} , отже їх скалярний добуток дорівнює нулю:

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0M} = 0.$$

Якщо записати це рівняння у координатній формі (див. п. 8.8), то одержимо:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Розкриваючи у цьому рівнянні дужки і позначаючи $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$, дістанемо:

$$Ax + By + Cz + D = 0. \quad (8.12.1)$$

Покажемо тепер, що будь-яке рівняння вигляду (8.12.1), в якому A, B, C, D – будь-які сталі, причому серед сталих A, B, C хоча б одна відмінна від нуля, описує у тривимірному просторі площину і тільки її.

Рівняння (8.12.1) має хоча б один розв'язок. Дійсно, припустимо, що, наприклад $C \neq 0$. Тоді, беручи довільні x_0, y_0 , з (8.12.1) дістанемо:

$$z_0 = -\frac{A}{C}x_0 - \frac{B}{C}y_0 - \frac{D}{C}.$$

Таким чином, існує принаймні одна точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$, координати якої задовольняють рівняння (8.12.1):

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0. \quad (8.12.2)$$

Віднімаючи від рівняння (12.1) тотожність (12.2), дістанемо рівняння:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0, \quad (8.12.3)$$

яке еквівалентне рівнянню (8.12.1). Покажемо, що рівняння (8.12.3) визначає в системі координат $Oxyz$ деяку площину. А саме площину α , яка проходить через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ перпендикулярно вектору $\vec{n} = \{A, B, C\}$ (оскільки хоча б одна з сталих A, B, C відмінна від нуля, то вектор \vec{n} ненульовий). Дійсно, якщо точка $M(x, y, z)$ належить площині α , то її координати задовольняють рівняння (8.12.3), оскільки в цьому випадку вектори $\overrightarrow{M_0M} = \{x - x_0, y - y_0, z - z_0\}$ і $\vec{n} = \{A, B, C\}$ перпендикулярні, отже їх скалярний добуток:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0)$$

дорівнює нулю. Якщо точка $M(x, y, z)$ не належить площині α , то її координати не задовольняють рівняння (8.12.3), оскільки в цьому випадку вектори \vec{n} і $\overrightarrow{M_0M}$ не є перпендикулярними, тому їх скалярний добуток відмінний від нуля. Таким чином, наше твердження доведено, і рівняння (8.12.1) описує площину і тільки її.

Рівняння (8.12.1) називається *загальним рівнянням площини*. З цього рівняння видно, що площина є алгебраїчною поверхнею 1-го порядку. Проведемо дослідження рівняння (8.12.1).

1. Нехай $D = 0$, тобто

$$Ax + By + Cz = 0.$$

Очевидно, що координати точки $O(0;0;0)$ це рівняння задовольняють. Це означає, що у даному випадку площина проходить через початок координат.

2. Нехай $A = 0$, тобто:

$$By + Cz + D = 0.$$

Нормальний вектор $\vec{n} = \{0; B; C\}$. Очевидно, він буде перпендикулярним вектору $\vec{i} = \{1; 0; 0\}$, отже площина буде паралельна цьому вектору, тобто осі Ox (рис. 8.34).

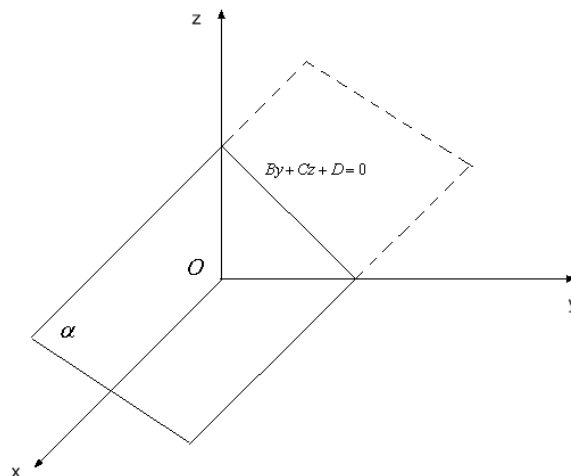


Рис. 8.34

На координатній площині Oyz площина α буде вирізати пряму лінію $By + Cz + D = 0$.

3. Якщо $B = 0$, тобто $Ax + Cz + D = 0$, то площина α буде паралельна осі Oy .

4. Якщо $C = 0$, тобто $Ax + By + D = 0$, то площина α буде паралельна осі Oz .

5. Нехай водночас $A = B = 0$, але $C \neq 0, D \neq 0$, тобто $Cz + D = 0$. Тоді рівняння можна переписати так:

$$z = -\frac{D}{C}.$$

Це рівняння буде визначати площину, яка водночас паралельна осям Ox, Oy , отже площині Oxy (рис. 8.35).

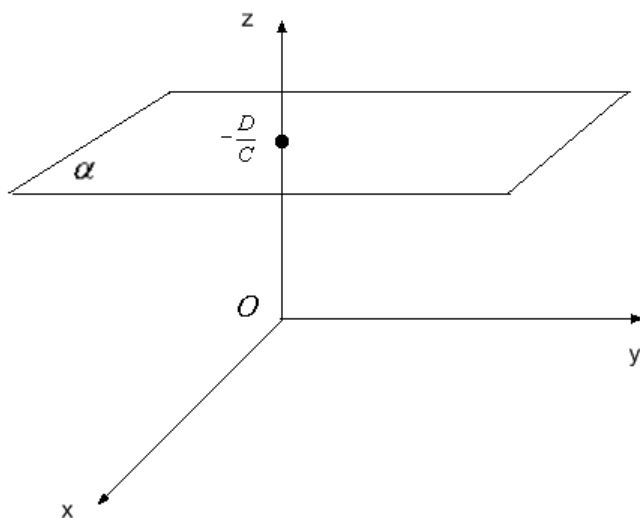


Рис. 8.35

6. Якщо $A = C = 0, B \neq 0, D \neq 0$, то площина α буде паралельна площині Oxz .

7. Якщо $B = C = 0, A \neq 0, D \neq 0$, то площина α буде паралельна площині Oyz .

Рівняння самих координатних площин запишуться так:

Площина Oxy : $z = 0$ ($A = B = D = 0, C \neq 0$).

Площина Oxz : $y = 0$ ($A = C = D = 0, B \neq 0$).

Площина Oyz : $x = 0$ ($B = C = D = 0, A \neq 0$).

Приклад. Скласти рівняння площини, що проходить через точку $M_0(-1; 2; 3)$ перпендикулярно вектору $\vec{n} = \{3; -2; 5\}$.

Згідно з рівнянням (8.12.3) матимемо:

$$3(x+1) - 2(y-2) + 5(z-3) = 0.$$

Або, розкриваючи дужки:

$$3x - 2y + 5z - 8 = 0.$$

8.13. Кут між двома площинами.

Умови паралельності та перпендикулярності площин

Розглянемо дві площини α_1 та α_2 , які задано відповідно рівняннями:

$$\alpha_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$

$$\alpha_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

Двогранний кут φ між цими площинами вимірюється лінійним кутом між перпендикулярами, проведеними у кожній з площин до лінії перетину цих площин (рис. 8.36).

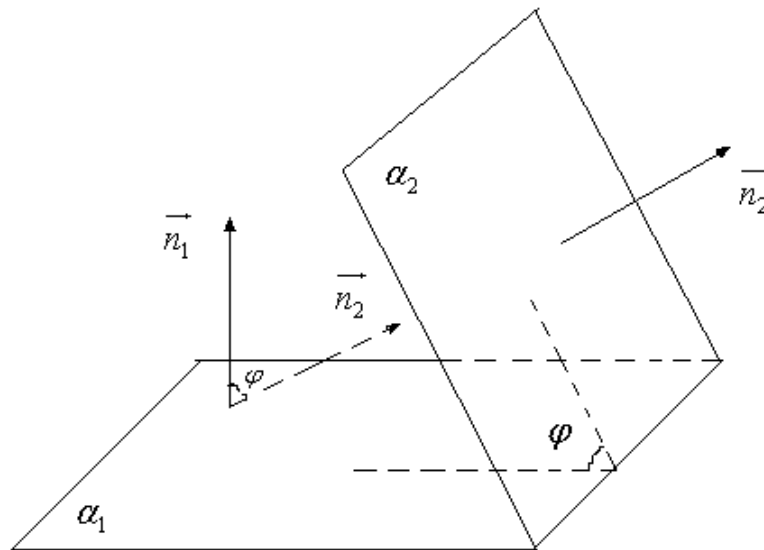


Рис. 8.36

Легко зрозуміти, що цей кут буде співпадати з кутом між нормальними векторами $\vec{n}_1 = \{A_1; B_1; C_1\}$, $\vec{n}_2 = \{A_2; B_2; C_2\}$ цих площин. А тоді згідно з формулою (8.8.5) маємо:

$$\cos \varphi = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}. \quad (8.13.1)$$

Якщо площини паралельні, то вектори \vec{n}_1, \vec{n}_2 колінеарні, і, згідно з умовою (8.7.1) колінеарності двох векторів, маємо умову паралельності площин:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}.$$

Якщо площини перпендикулярні, то $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$, і тоді:

$$A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 0.$$

Приклад. Знайти кут між площинами $2x + y + 3z - 1 = 0$ і $x + y - z + 5 = 0$.

За формулою (8.13.1) маємо:

$$\cos \varphi = \frac{2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 3 \cdot (-1)}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 3^2} \cdot \sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2}} = 0.$$

Отже, дані площини перпендикулярні.

8.14. Рівняння площини, що проходить через три задані точки

Згідно з аксіомою елементарної геометрії через кожні три точки, що не лежать на одній прямій, можна провести площину і тільки одну. Нехай задано три точки $M_0(x_0, y_0, z_0), M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2)$. Побудуємо рівняння площини, що проходить через ці точки. Нехай $M(x, y, z)$ – довільна точка цієї площини. Тоді вектори $\overrightarrow{M_0M}, \overrightarrow{M_0M_1}, \overrightarrow{M_0M_2}$ компланарні, а тоді згідно з необхідною і достатньою умовою компланарності (п. 8.10), мішаний добуток цих векторів дорівнює нулю, отже:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \end{vmatrix} = 0. \quad (8.14.1)$$

Це й є рівняння площини, що проходить через точки M_0, M_1, M_2 .

Зауважимо, що це рівняння можна отримати ще іншим шляхом. Якщо ми маємо два ненульові і неколінеарні вектори, що лежать у даній площині, то у якості нормального вектора площини можна взяти векторний добуток цих векторів. У нашому випадку вектори $\overrightarrow{M_0M_1}$ та $\overrightarrow{M_0M_2}$ лежать у площині, отже нормальний вектор площини:

$$\vec{n} = \overrightarrow{M_0M_1} \times \overrightarrow{M_0M_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \end{vmatrix} = A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k},$$

де

$$A = \begin{vmatrix} y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \end{vmatrix}, \quad B = - \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & z_2 - z_0 \end{vmatrix}, \quad C = \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 \end{vmatrix}.$$

Оскільки точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ належить площині, то рівняння площини має вигляд:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Підставляючи сюди вирази для A, B, C , одержуємо рівняння (8.14.1).

Приклад. Написати рівняння площини, що проходить через точки $M_0(2; -3; 0)$, $M_1(4; 6; -5)$, $M_2(-7; 1; 2)$.

Згідно з рівнянням (8.14.1) маємо:

$$\begin{vmatrix} x - 2 & y + 3 & z \\ 2 & 9 & -5 \\ -9 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 38(x - 2) + 41(y + 3) + 89z = 0.$$

Або:

$$38x + 41y + 89z + 47 = 0.$$

8.15. Нормальне рівняння площини.

Відстань від точки до площини

Нехай задано довільну площину σ . Проведемо через початок координат O пряму, перпендикулярну площині σ (рис. 8.37). Нехай P точка перетину цієї прямої та площини σ . Розглянемо вектор \overrightarrow{OP} (якщо точки O і P співпадають, тобто площина σ проходить через початок координат, то замість вектора \overrightarrow{OP} розглянемо нормальний вектор площини σ , початок якого збігається з початком координат). Нехай $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ – напрямні косинуси вектора \overrightarrow{OP} , і $p = |\overrightarrow{OP}|$. Тоді у якості нормального вектора площини σ можна взяти орт вектора \overrightarrow{OP} , тобто:

$$\vec{n} = \{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\}.$$

Нехай $M(x, y, z)$ – довільна точка простору. Вона належатиме площині σ тоді і тільки тоді, коли проекція вектора \overrightarrow{OM} на вектор нормалі \vec{n} дорівнюватиме p , тобто:

$$p \vec{n} \cdot \overrightarrow{OM} = p. \quad (8.15.1)$$

Але, оскільки $\overrightarrow{OM} = \{x, y, z\}$ і $|\vec{n}| = 1$, то:

$$p \vec{n} \cdot \overrightarrow{OM} = \frac{\vec{n} \cdot \overrightarrow{OM}}{|\vec{n}|} = \vec{n} \cdot \overrightarrow{OM} = x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma. \quad (8.15.2)$$

З рівностей (8.15.1), (8.15.2) отримуємо, що точка $M(x, y, z)$ належить площині σ тоді і тільки тоді, коли її координати задовольняють рівняння:

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p = 0. \quad (8.15.3)$$

Рівняння (8.15.3) називається *нормальним рівнянням* площини σ .

Припустимо, що площину σ задано загальним рівнянням:

$$Ax + By + Cz + D = 0. \quad (8.15.4)$$

Рівняння (8.15.3), (8.15.4) визначають одну й ту ж площину. Тоді коефіцієнти цих рівнянь пропорційні. Помножимо обидві частини рівняння (8.15.4) на деякий множник μ такий, щоб коефіцієнти одержаного рівняння:

$$\mu Ax + \mu By + \mu Cz + \mu D = 0$$

співпадали з коефіцієнтами рівняння (8.15.3). Тобто:

$$\mu A = \cos \alpha, \mu B = \cos \beta, \mu C = \cos \gamma, \mu D = -p. \quad (8.15.5)$$

Піднесемо перші три з рівностей (8.15.5) до квадрату і складемо. Дістанемо:

$$\mu^2 (A^2 + B^2 + C^2) = \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma.$$

Права частина цієї рівності дорівнює одиниці. Отже:

$$\mu = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \quad (8.15.6)$$

Число μ називається *нормувальним множником*. Знак «плюс» або «мінус» у формулі (8.15.6) обирається з рівності $\mu D = -p$, тобто (оскільки $p > 0$) протилежним знаку коефіцієнта D в рівнянні (8.15.4).

Знайдемо тепер відстань d від точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ до площини σ , тобто довжину перпендикуляру, проведеного з точки M_1 на площину σ . Очевидно, що:

$$\begin{aligned} d &= \left| np_{\vec{n}} \overrightarrow{MM_1} \right| = \frac{|\vec{n} \cdot \overrightarrow{MM_1}|}{|\vec{n}|} = |\vec{n} \cdot \overrightarrow{MM_1}| = \\ &= |(x_1 - x) \cos \alpha + (y_1 - y) \cos \beta + (z_1 - z) \cos \gamma| = \\ &= |x_1 \cos \alpha + y_1 \cos \beta + z_1 \cos \gamma - x \cos \alpha - y \cos \beta - z \cos \gamma| = \\ &= |x_1 \cos \alpha + y_1 \cos \beta + z_1 \cos \gamma - p|. \end{aligned}$$

Отже, дістали формулу:

$$d = |x_1 \cos \alpha + y_1 \cos \beta + z_1 \cos \gamma - p|. \quad (8.15.7)$$

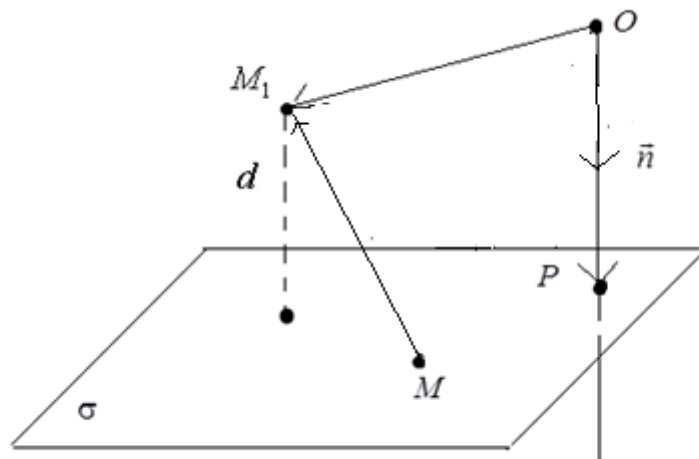


Рис. 8.37

Якщо площину σ задано загальним рівнянням (8.15.4), то, виходячи з рівностей (8.15.5), (8.15.6), (8.15.7), відстань d можна знайти за формулою:

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \quad (8.15.8)$$

Приклад. Знайти довжину висоти AH піраміди, заданої своїми вершинами $A(-1; 2; -1)$, $B(1; 0; 2)$, $C(0; 1; -1)$, $D(2; 0; -1)$.

Знайдемо рівняння площини, що проходить через точки B, C, D :

$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z-2 \\ -1 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & -3 \end{vmatrix} = -3(x-1) - 6y - (z-2) = -3x - 6y - z + 5 = 0.$$

Або:

$$3x + 6y + z - 5 = 0.$$

Довжина висоти AH дорівнює відстані від точки A до площини грані $B CD$. Отже, згідно з формулою (8.15.8):

$$|AH| = \frac{|3 \cdot (-1) + 6 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) - 5|}{\sqrt{3^2 + 6^2 + 1^2}} = \frac{3}{\sqrt{46}}.$$

Цей результат можна було б отримати ще й інакше. Об'єм піраміди дорівнює треті добутку площі основи на висоту, тобто:

$$V_{ABCD} = \frac{1}{3} S_{BCD} \cdot |AH|.$$

Звідси:

$$|AH| = \frac{3V_{ABCD}}{S_{BCD}}.$$

Знайдемо:

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6} \left| (\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AD} \right|.$$

Оскільки

$$(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 3,$$

то $V_{ABCD} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$. Далі:

$$S_{BCD} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BD}|.$$

Оскільки:

$$\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BD} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & -3 \end{vmatrix} = -3\vec{i} - 6\vec{j} - \vec{k},$$

$$\text{то } S_{BCD} = \frac{1}{2} \sqrt{9+36+1} = \frac{\sqrt{46}}{2}.$$

Таким чином:

$$|AH| = \frac{3 \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} \cdot \sqrt{46}} = \frac{3}{\sqrt{46}}.$$

8.16. Пряма лінія у просторі

В п. 3.4 ми здобули рівняння прямої лінії на площині:

$$Ax + By + C = 0.$$

А який вигляд буде мати рівняння прямої лінії у просторі? Здавалось би, треба просто додати до попереднього рівняння третю змінну:

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Але у просторі таке рівняння, як ми знаємо, буде описувати площину, а не пряму лінію. А рівняння прямої лінії буде отримуватись інакше.

Нехай у ПДСК у просторі задано деяку точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ і вектор $\vec{p} = \{m, n, k\}$ (рис. 8.38). Побудуємо рівняння прямої лінії l , що проходить через точку M_0 паралельно вектору \vec{p} , який будемо називати напрямним вектором прямої l . Зрозуміло, що така пряма визначатиметься єдиним чином. Зауважимо у зв'язку з цим, що такої єдиності не було б, якби ми задали вектор не паралельній прямій, а перпендикулярній їй, як ми це робили у випадку прямої лінії на площині або площини у просторі.

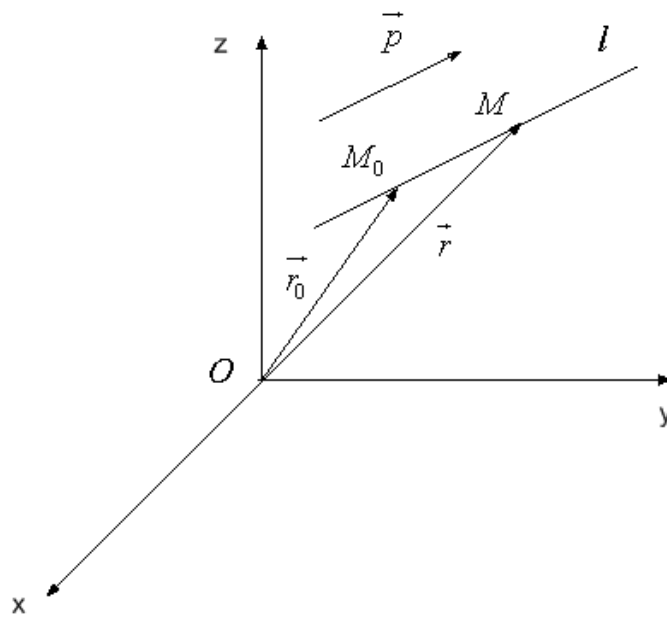


Рис. 8.38

Візьмемо на прямій l довільну точку $M(x, y, z)$. Вектор $\overrightarrow{M_0M} = \{x - x_0, y - y_0, z - z_0\}$ колінеарний вектору \vec{p} , і, згідно з умовою колінеарності векторів: $\overrightarrow{M_0M} = t\vec{p}$. Позначимо $\vec{r}_0 = \overrightarrow{OM_0}$, $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$, тоді $\overrightarrow{M_0M} = \vec{r} - \vec{r}_0$, і ми дістаємо рівняння $\vec{r} - \vec{r}_0 = t\vec{p}$, або:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{p}. \quad (8.16.1)$$

Рівняння (8.16.1) називається *векторно-параметричним рівнянням* прямої лінії у просторі. Якщо його розписати по компонентах, то матимемо:

$$\begin{cases} x = x_0 + tm, \\ y = y_0 + tn, \\ z = z_0 + tk. \end{cases} \quad (8.16.2)$$

Рівняння (8.16.2) називаються *параметричними рівняннями* прямої лінії у просторі. Змінна t називається *параметром*. Якщо її виразити з усіх трьох рівнянь і дорівняти праві частини, то матимемо:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{k}. \quad (8.16.3)$$

Рівняння (8.16.3) називаються *канонічними рівняннями* прямої лінії у просторі. Зауважимо, що деякі знаменники в цьому рівнянні можуть бути нулями. Це буде означати, що деякі з координат напрямного вектора \vec{p} дорівнюють нулю. Але всі три числа m, n, k бути водночас нулями не можуть, адже це означало б, що вектор \vec{p} – нульовий, отже, він не мав би ніякого напрямку, і тому не міг би бути напрямним. Якщо, зокрема, $m = 0, n \neq 0, k \neq 0$, то вектор \vec{p} перпендикулярний осі Ox , тому рівняння:

$$\frac{x - x_0}{0} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{k}$$

визначають пряму, також перпендикулярну осі Ox . Аналогічно рівняння, де лише $n = 0$, або лише $k = 0$, визначають прямі, які перпендикулярні відповідно осі Oy або вісі Oz .

Якщо $m = n = 0, k \neq 0$, то пряма паралельна осі Oz . Якщо $m = k = 0, n \neq 0$, то пряма паралельна осі Oy , якщо $n = k = 0, m \neq 0$, то пряма паралельна осі Ox .

Легко написати канонічні рівняння прямої, яка проходить через дві задані точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ та $M_2(x_2, y_2, z_2)$. Зрозуміло, що у цьому випадку в якості напрямного вектора прямої можна взяти вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$, який має координати $x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1$. Таким чином, канонічні рівняння такої прямої мають вигляд:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}. \quad (8.16.4)$$

Крім задання прямої за допомогою точки, через яку вона проходить, та її напрямного вектора, пряму можна задати як лінію перетину

двох площин. Нехай площина α_1 задається рівнянням $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$, а площина α_2 – рівнянням $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$. Будемо припускати, що серед визначників:

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}$$

хоча б один відмінний від нуля. Тоді площини α_1 та α_2 перетинаються по прямій, яку позначимо l (рис. 8.39).

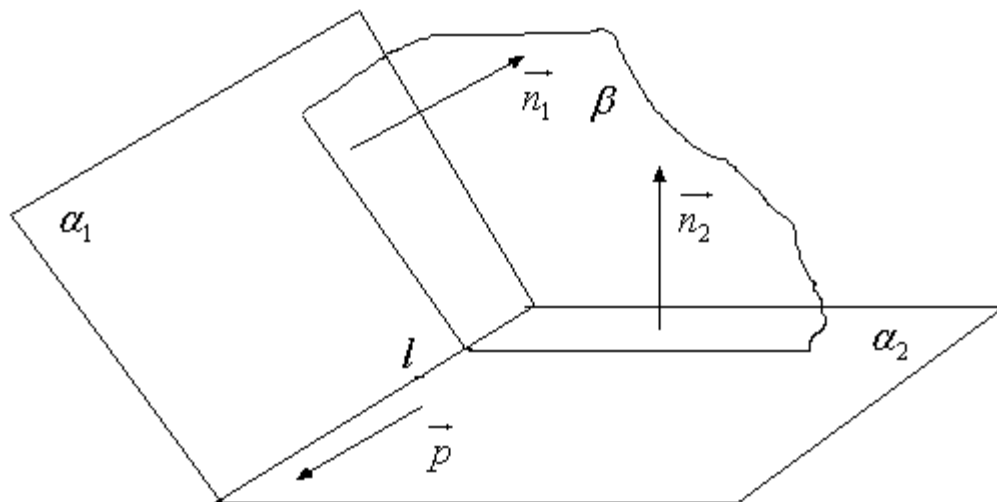


Рис. 8.39

Координати x, y, z будь-якої точки прямої l задовольнятимуть системі 2-х лінійних алгебраїчних рівнянь з 3-ма невідомими:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases}$$

Знаходячи хоча б один розв'язок цієї системи (його існування гарантується відмінністю від нуля хоча б одного з вищенаведених визначників), ми знайдемо точку, через яку проходить пряма l . Напрямний вектор \vec{p} прямої l паралельний обом площинам α_1, α_2 , отже він перпендикулярний нормальним векторам $\vec{n}_1 = \{A_1, B_1, C_1\}$ та

$\vec{n}_2 = \{A_2, B_2, C_2\}$ цих площин, отже площині β , у якій лежать ці нормальні вектори. А тоді в якості вектора \vec{p} можна взяти векторний добуток векторів \vec{n}_1 та \vec{n}_2 :

$$\vec{p} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}.$$

Приклади

1. Написати канонічні рівняння прямої l , яка є лінією перетину площин:

$$\alpha_1 : x + 2y + 3z - 13 = 0,$$

$$\alpha_2 : 3x + y + 4z - 14 = 0.$$

Знайдемо розв'язок системи:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z - 13 = 0, \\ 3x + y + 4z - 14 = 0. \end{cases}$$

Визначник $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$, що відповідає змінним x, y цієї системи, відмінний

від нуля, отже змінну z визначимо довільно (наприклад, $z = 1$), а x, y визначимо з системи:

$$\begin{cases} x + 2y = 10, \\ 3x + y = 10. \end{cases}$$

Звідси $x = 2, y = 4$. Отже, точка $M(2; 4; 1)$ лежить на прямій l . Знайдемо напрямний вектор:

$$\vec{p} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 5\vec{i} + 5\vec{j} - 5\vec{k} = \{5; 5; -5\}.$$

Можна взяти в якості напрямного вектор $\frac{1}{5}\vec{p} = \{1; 1; -1\}$. Отже, шукані рівняння прямої l мають вигляд:

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y-4}{1} = \frac{z-1}{-1}.$$

2. Написати канонічні рівняння прямої, яка проходить через точку $M(-1; 2; 3)$ перпендикулярно площині $3x - y + 2z - 5 = 0$.

Нормальний вектор $\vec{n} = \{3; -1; 2\}$ даної площини буде паралельний прямій, отже його можна взяти у якості напрямного вектора прямої. Канонічні рівняння прямої матимуть вигляд:

$$\frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{2}.$$

8.17. Кут між двома прямими.

Умови паралельності та перпендикулярності прямих

Нехай прямі l_1 і l_2 задано рівняннями:

$$l_1: \frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1} = \frac{z-z_1}{k_1},$$

$$l_2: \frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2} = \frac{z-z_2}{k_2}.$$

Кут φ між прямими дорівнює куту між їх напрямними векторами, отже згідно з формулою (8.8.5) маємо:

$$\cos \varphi = \frac{\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2}{|\vec{p}_1| \cdot |\vec{p}_2|} = \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2 + k_1 k_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + k_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + k_2^2}}.$$

Прямі l_1 і l_2 будуть паралельні, якщо вектори \vec{p}_1 і \vec{p}_2 колінеарні.

Отже, умова паралельності прямих має вигляд:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{k_1}{k_2}.$$

Умова перпендикулярності прямих l_1 і l_2 співпадає з умовою перпендикулярності \vec{p}_1 і \vec{p}_2 :

$$m_1 m_2 + n_1 n_2 + k_1 k_2 = 0.$$

Приклади

1. Знайти кут між прямими:

$$l_1: \begin{cases} 2x + y - z - 1 = 0, \\ 2x - y + 3z + 5 = 0, \end{cases}$$

$$l_2 : x = 2t, \quad y = 2 - t, \quad z = -2 + 3t.$$

Знайдемо напрямний вектор прямої l_1 :

$$\vec{p}_1 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 2\vec{i} - 8\vec{j} - 4\vec{k} = \{2; -8; -4\}.$$

Або: $\frac{1}{2} \vec{p}_1 = \{1; -4; -2\}$.

Напрямний вектор прямої l_2 : $\vec{p}_2 = \{2; -1; 3\}$.

Знайдемо $\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2 = 1 \cdot 2 + (-4) \cdot (-1) + (-2) \cdot 3 = 0$. Отже $\varphi = 90^\circ$, тобто дані прямі перпендикулярні.

2. Довести, що прямі

$$l_1 : x = z - 2, \quad y = 2z + 1,$$

$$l_2 : \frac{x-2}{3} = \frac{y-4}{1} = \frac{z-2}{1}$$

перетинаються, і написати рівняння площини, у якій вони розташовані.

Запишемо канонічні рівняння прямої l_1 . Розв'язуючи систему $x = z - 2$, $y = 2z + 1$, легко знайти точку, що належить цій прямій: $M(-2; 1; 0)$. Напрямний вектор прямої l_1 :

$$\vec{p}_1 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k} = \{1; 2; 1\},$$

отже:

$$l_1 : \frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{1}.$$

Запишемо параметричні рівняння прямої l_2 :

$$x = 2 + 3t, \quad y = 4 + t, \quad z = 2 + t$$

і підставимо у рівняння прямої l_1 :

$$\frac{2+3t+2}{1} = \frac{4+t-1}{2} = \frac{2+t}{1}.$$

Ці рівняння задовольняються при $t = -1$. Отже, підставляючи це значення t у параметричні рівняння прямої l_2 , дістанемо:

$$x = -1, \quad y = 3, \quad z = 1.$$

Таким чином, точка $M_0(-1; 3; 1)$ є точкою перетину прямих l_1, l_2 , і вона, очевидно, належить площині, у якій лежать ці прямі. Нормальний вектор площини знайдемо як векторний добуток напрямних векторів прямих l_1, l_2 :

$$\vec{n} = \vec{p}_1 \times \vec{p}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} + 2\vec{j} - 5\vec{k} = \{1; 2; -5\}.$$

Отже, шукане рівняння площини має вигляд:

$$x + 1 + 2(y - 3) - 5(z - 1) = 0.$$

Або:

$$x + 2y - 5z = 0.$$

8.18. Кут між прямою лінією та площиною. Перетин прямої лінії та площини

Розглянемо площину α , що задається рівнянням:

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

і пряму l , яку задано канонічними рівняннями:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{k}.$$

Означення. Кутом φ між прямою l і площиною α називається кут між прямою l та її проекцією на площину α (рис. 8.40).

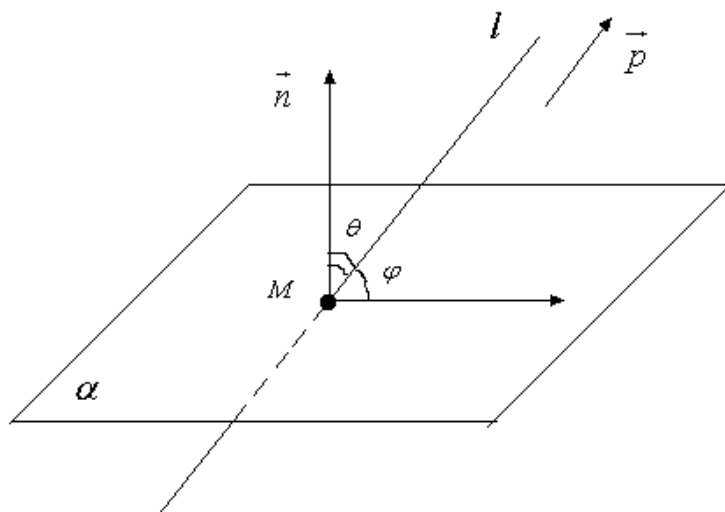


Рис. 8.40

Поставимо задачу знаходження цього кута. Введемо нормальний вектор $\vec{n} = \{A, B, C\}$ площини α . Позначимо через θ кут між вектором \vec{n} і напрямним вектором $\vec{p} = \{m, n, k\}$ прямої l . Очевидно, що $\varphi = \frac{\pi}{2} - \theta$, і тоді $\sin \varphi = \cos \theta$. Згідно з формулою (8.8.5) маємо:

$$\sin \varphi = \cos \theta = \frac{Am + Bn + Ck}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{m^2 + n^2 + k^2}}.$$

Легко отримати умови паралельності та перпендикулярності прямої l та площини α (зробіть це самостійно).

Умова паралельності:

$$Am + Bn + Ck = 0.$$

Умова перпендикулярності:

$$\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{k}.$$

Припустимо, що пряма l непаралельна площині α , тобто:

$$Am + Bn + Ck \neq 0. \quad (8.18.1)$$

Знайдемо координати точки $M(x, y, z)$ перетину прямої l і площини α . Запишемо параметричні рівняння прямої l :

$$\begin{cases} x = x_0 + tm, \\ y = y_0 + tn, \\ z = z_0 + tk. \end{cases} \quad (8.18.2)$$

Підставимо ці вирази у рівняння площини α :

$$A(x_0 + mt) + B(y_0 + nt) + C(z_0 + kt) + D = 0.$$

Або:

$$(Am + Bn + Ck)t = -Ax_0 - By_0 - Cz_0 - D,$$

і внаслідок умови (8.18.1) дістаємо:

$$t = -\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{Am + Bn + Ck}.$$

Підставляючи це значення t у рівняння (8.18.2), одержимо шукані координати точки M .

Приклад. Знайти кут між прямою:

$$l: \frac{x}{2} = \frac{y+1}{6} = \frac{z-1}{-3}$$

і площиною:

$$\alpha : 2x + y + z - 4 = 0,$$

і знайти точку перетину прямої l і площини α .

Введемо нормальний вектор $\vec{n} = \{2; 1; 1\}$ площини α і напрямний вектор $\vec{p} = \{2; 6; -3\}$ прямої l . Згідно з формулою кута між прямою лінією та площиною маємо:

$$\sin \varphi = \frac{2 \cdot 2 + 6 \cdot 1 - 3 \cdot 1}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2} \cdot \sqrt{2^2 + 6^2 + (-3)^2}} = \frac{7}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{49}} = \frac{1}{\sqrt{6}}.$$

Знайдемо точку перетину прямої l та площини α . Запишемо параметричні рівняння прямої l :

$$x = 2t, \quad y = 6t - 1, \quad z = -3t + 1.$$

Підставимо у рівняння площини α :

$$2 \cdot 2t + 6t - 1 - 3t + 1 - 4 = 0.$$

$$7t - 4 = 0; \quad t = \frac{4}{7}.$$

Підставляючи у параметричні рівняння прямої l , дістаємо:

$$x = \frac{8}{7}, \quad y = \frac{17}{7}, \quad z = -\frac{5}{7}.$$

Таким чином, пряма l і площина α перетинаються в точці $M\left(\frac{8}{7}; \frac{17}{7}; -\frac{5}{7}\right)$.

Зауваження. Якщо пряму l задано як лінію перетину площин, тобто рівняннями:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \end{cases}$$

то координати точки перетину прямої l і площини α можна знайти з системи:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \\ Ax + By + Cz + D = 0. \end{cases}$$

8.19. Відстань від точки до прямої

Нехай задано пряму l канонічним рівнянням:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{k}$$

і точку $M(x_1, y_1, z_1)$.

Означення. Відстанню d від точки M до прямої l називається довжина перпендикуляру, проведеного з точки M на пряму l (рис. 8.41).

Знайдемо цю відстань. Точка $A(x_0, y_0, z_0)$ лежить на прямій l , вектор $\vec{p} = \{m, n, k\}$ є напрямним вектором цієї прямої. З рис. 8.41 видно: $d = |\overline{AM}| \sin \varphi$, де φ – кут між вектором \overline{AM} і прямою l .

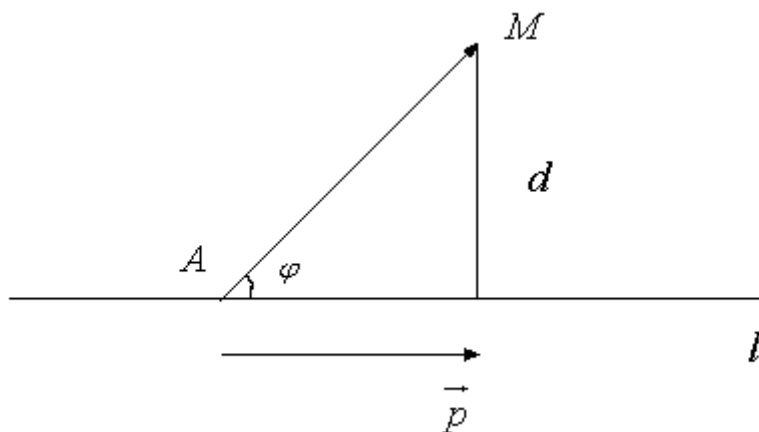


Рис. 8.41

З іншого боку, з означення векторного добутку векторів:

$$|\overline{AM} \times \vec{p}| = |\overline{AM}| \cdot |\vec{p}| \cdot \sin \varphi.$$

Звідси маємо:

$$\sin \varphi = \frac{|\overline{AM} \times \vec{p}|}{|\overline{AM}| \cdot |\vec{p}|}.$$

Таким чином:

$$d = |\overline{AM}| \cdot \frac{|\overline{AM} \times \vec{p}|}{|\overline{AM}| \cdot |\vec{p}|} = \frac{|\overline{AM} \times \vec{p}|}{|\vec{p}|}.$$

Приклади. 1. Знайти відстань від точки $M(2; -1; 3)$ до прямої:

$$\frac{x+1}{3} = \frac{y+2}{4} = \frac{z-1}{5}.$$

Маємо: $A(-1; -2; 1)$, $\overrightarrow{AM} = \{3; 1; 2\}$, $\vec{p} = \{3; 4; 5\}$.

$$\overrightarrow{AM} \times \vec{p} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = -3\vec{i} - 9\vec{j} + 9\vec{k} = \{-3; -9; 9\};$$

$$d = \frac{\sqrt{(-3)^2 + (-9)^2 + 9^2}}{\sqrt{3^2 + 4^2 + 5^2}} = \frac{3\sqrt{19}}{5\sqrt{2}} = 0,3\sqrt{38}.$$

2. Знайти відстань між паралельними прямими:

$$l_1: \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+3}{2}; \quad l_2: \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{2}.$$

Шукана відстань буде дорівнювати відстані від будь-якої точки прямої l_2 до прямої l_1 . Точка $M(1; 1; -1)$ лежить на прямій l_2 . Знайдемо відстань від точки M до прямої l_1 . Точка $A(2; -1; -3)$ лежить на прямій l_1 , напрямним вектором цієї прямої є вектор $\vec{p} = \{1; 2; 2\}$. Оскільки $\overrightarrow{AM} = \{-1; 2; 2\}$, то:

$$\overrightarrow{AM} \times \vec{p} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 4\vec{j} - 4\vec{k} = \{0; 4; -4\};$$

$$d = \frac{|\overrightarrow{AM} \times \vec{p}|}{|\vec{p}|} = \frac{\sqrt{16^2 + 16^2}}{\sqrt{9}} = \frac{32}{\sqrt{18}}.$$

8.20. Поверхні другого порядку

Як ми вже відмічали, площина являється поверхнею першого порядку, її рівняння лінійне відносно x, y, z . Якщо поверхня описується рівнянням 2-го порядку відносно x, y, z , тобто рівнянням вигляду:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Kz + L = 0,$$

то така поверхня називається *поверхнею 2-го порядку*. При цьому припускається, що принаймні один з коефіцієнтів A, B, C, D, E, F відмінний від нуля (у протилежному випадку ми отримуємо поверхню 1-го порядку, тобто площину).

Розглянемо деякі важливі типи поверхонь 2-го порядку.

I. Циліндричні поверхні. *Циліндричною* називають поверхню, утворену множиною прямих (твірних), які перетинають задану лінію L (напряму) і паралельні заданій прямій l .

Ми обмежимося випадком, коли напрямні лежать в одній з координатних площин, а твірні паралельні координатній осі, перпендикулярній цій площині. Наприклад, напрямна лежить в площині Oxy , а ні осі Oz (рис. 8.42).

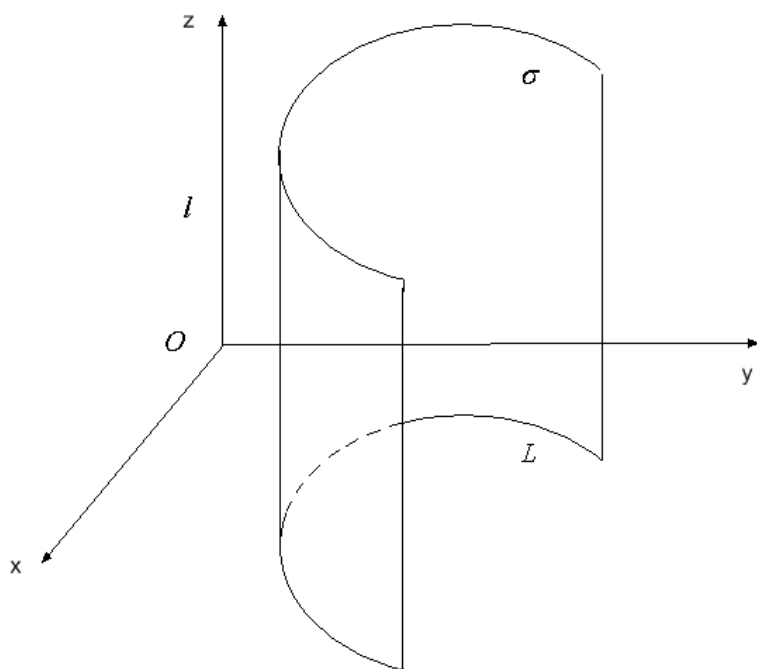


Рис. 8.42

Якщо в площині Oxy лінія L описується рівнянням:

$$f(x, y) = 0,$$

то саме таке рівняння буде описувати у просторі $Oxyz$ циліндричну поверхню σ , напрямною якої є лінія L , а твірні паралельні осі Oz . Дійсно, якщо $M(x, y, z)$ – точка цієї поверхні, то координати x, y будуть збігатися з координатами точки на лінії L , а координата z буде довільною.

Приклади

1). *Круговий циліндр.* Це поверхня, що визначається рівнянням:

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

Її напрямною є коло $x^2 + y^2 = R^2$ на площині Oxy (рис. 8.43).

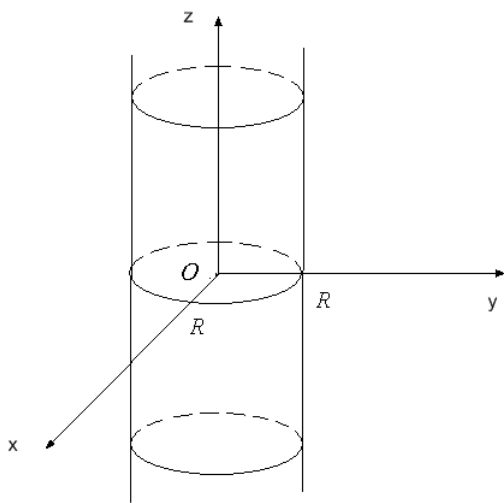


Рис. 8.43

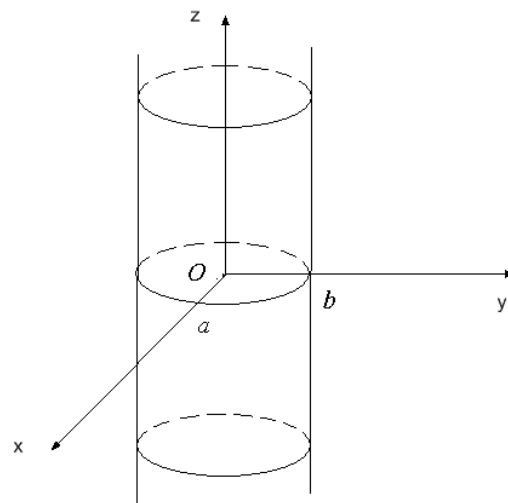


Рис. 8.44

2). *Еліптичний циліндр.*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Напрямною є еліпс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (рис. 8.44).

3). *Параболічний циліндр.*

$$y = x^2.$$

Напрямною є парабола $y = x^2$ (рис. 8.45).

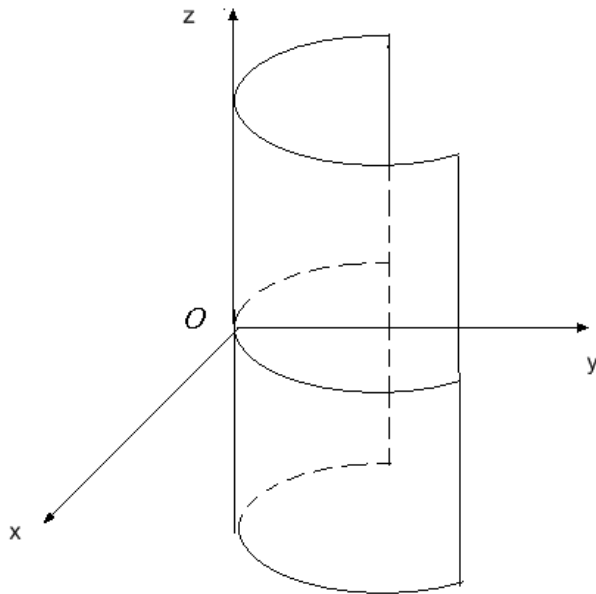


Рис. 8.45

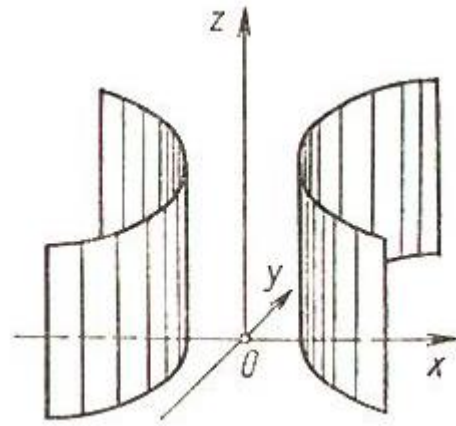


Рис. 8.46

4) Гіперболічний циліндр.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Напрямною є гіпербола $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ (рис. 8.46)

II. Конічні поверхні. *Конічною* називається поверхня, яку утворено множиною прямих, що проходять через задану точку P і перетинають задану лінію L (рис. 8.47). При цьому P називається *вершиною* поверхні, лінія L – *напрямною*, а кожна з прямих, що утворюють поверхню – *твірною*.

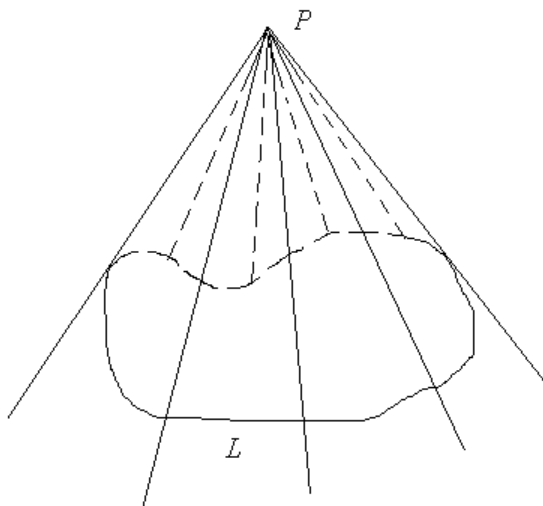


Рис. 8.47

Приклади

1). Еліптичний конус

$$z = \sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}.$$

Вершиною є точка $O(0,0,0)$, а напрямною еліпс:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

в площині $z = 1$ (рис. 8.48).

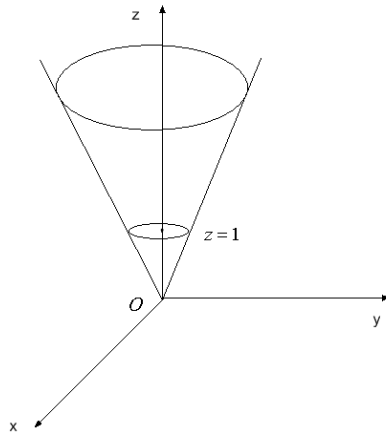


Рис. 8.48

Якщо, зокрема, $a = b = 1$, то маємо *круговий конус* $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, напрямною якого є коло $x^2 + y^2 = 1$ у площині $z = 1$. Цей конус можна отримати обертанням графіка функції $y = |x|$ навколо осі ординат.

III. Еліптичний параболоїд. *Еліптичним параболоїдом* називається геометричне місце точок простору, декартові координати яких задовольняють рівняння:

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}.$$

Перерізи цієї поверхні будь-якою площиною $z = h$ ($h > 0$) є еліпсами:

$$\frac{x^2}{(a\sqrt{h})^2} + \frac{y^2}{(b\sqrt{h})^2} = 1.$$

Зокрема, якщо $h = 1$, то отримуємо еліпс з півосями a і b . Перерізи поверхні площинами $x = 0$ та $y = 0$ є параболою відповідно $z = \frac{y^2}{b^2}$ та $z = \frac{x^2}{a^2}$ (рис. 8.49).

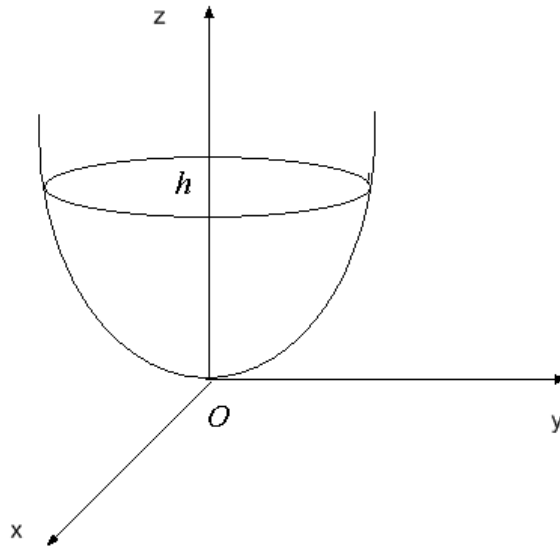


Рис. 8.49

Якщо, зокрема, $a = b$, то отримуємо *параболоїд обертання*:

$$z = \frac{x^2 + y^2}{a^2}.$$

Його можна отримати обертанням параболи $y = \frac{x^2}{a^2}$ навколо осі ординат.

IV. Однопорожнинний гіперболоїд. *Однопорожнинним гіперболоїдом* називається геометричне місце точок простору, декартові координати яких задовольняють рівняння:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Розглянемо перерізи цієї поверхні площинами $z = h$:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{h^2}{c^2}.$$

Позначаючи $d = \sqrt{1 + \frac{h^2}{c^2}}$, дістанемо:

$$\frac{x^2}{(ad)^2} + \frac{y^2}{(bd)^2} = 1,$$

тобто еліпси з півосями ad і bd . Зокрема, при $h=0$ (тоді $d=1$) півосі дорівнюють a і b (горловий еліпс). Таким чином, горизонтальні перерізи нашої поверхні площинами $z=h$ є еліпсами. Півосі цих еліпсів збільшуються зі зростанням h .

Розглянемо тепер перерізи поверхні площинами $y=h$:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{h^2}{b^2}.$$

Позначаючи $d = \sqrt{1 - \frac{h^2}{b^2}}$, дістанемо:

$$\frac{x^2}{(ad)^2} - \frac{z^2}{(cd)^2} = 1,$$

тобто гіперболи з півосями ad , cd . Зокрема, при $h=0$ (тобто площина Oxz) буде $d=1$, і маємо:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

тобто гіпербола з півосями a, c . Аналогічно перерізи поверхні площинами $x=h$ також є гіперболами. Поверхня має вигляд, який показано на рис. 8.50.

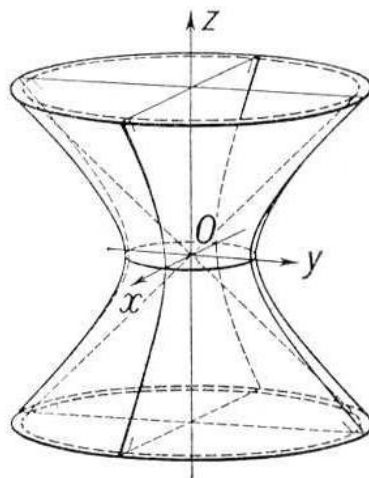


Рис. 8.50

Однопорожнинний гіперболоїд має цікаву властивість: наявність прямих, які цілком лежать на цій поверхні (прямолінійні твірні). Через кожену точку гіперболоїда проходять дві прямі, рівняння яких можна отримати наступним чином. Запишемо рівняння поверхні так:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{y^2}{b^2}.$$

Розкладемо обидві частини на множники:

$$\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) = \left(1 - \frac{y}{b}\right)\left(1 + \frac{y}{b}\right). \quad (8.20.1)$$

Тепер розглянемо пряму лінію, яку задано рівняннями:

$$\begin{cases} \mu\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) = \lambda\left(1 + \frac{y}{b}\right), \\ \lambda\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) = \mu\left(1 - \frac{y}{b}\right), \end{cases} \quad (8.20.2)$$

де λ, μ – деякі числа. Координати кожної точки прямої задовольняють обидва рівняння (8.20.2), отже їх добуток, тобто рівняння (8.20.1). Тому всі точки прямої лінії з рівняннями (8.20.2) лежать на однопорожнинному гіперболоїді. Такі ж міркування можна провести і для сім'ї прямих:

$$\begin{cases} \lambda'\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) = \mu'\left(1 - \frac{y}{b}\right), \\ \mu'\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) = \lambda'\left(1 + \frac{y}{b}\right). \end{cases}$$

Всі ці прямі проходять через горловий еліпс гіперболоїда (рис. 8.50).

У зв'язку з цим однопорожнинний гіперболоїд називається *лінійчатою поверхнею*. Така його властивість використовується в архітектурі, зокрема, в Шуховській вежі в Москві.

V. Двопорожнинний гіперболоїд. Двопорожнинним гіперболоїдом називається геометричне місце точок простору, декартові координати яких задовольняють рівняння:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1.$$

Розглянемо перерізи цієї поверхні площинами $z = h$. Матимемо:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{h^2}{c^2} - 1.$$

Звідси $|h| \geq c$, тобто $h \geq c$ або $h \leq -c$. Позначаючи $d = \sqrt{\frac{h^2}{c^2} - 1}$,

дістаємо рівняння:

$$\frac{x^2}{(ad)^2} + \frac{y^2}{(bd)^2} = 1,$$

тобто еліпс з півосями ad і bd . Перерізи поверхні площинами $x = h$ або $y = h$ є гіперболами (встановіть самостійно). Поверхня має вигляд, зображений на рис. 8.51.

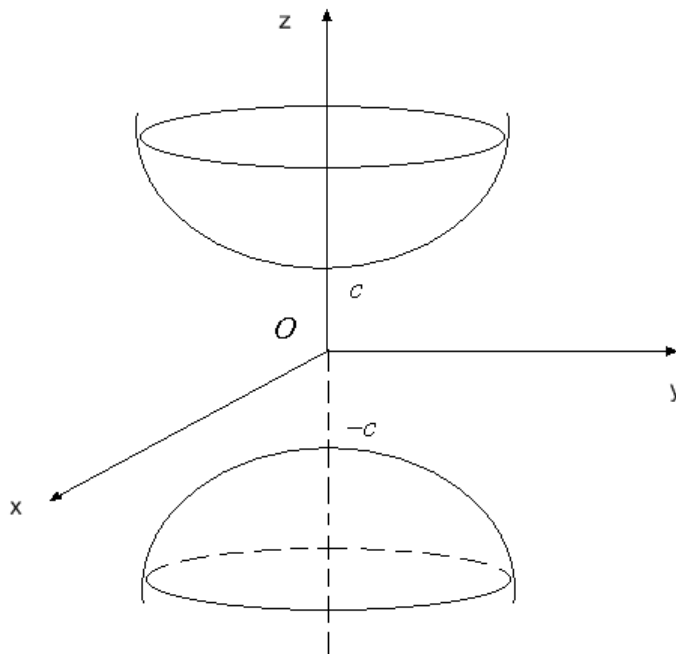


Рис. 8.51

VI. Гіперболічний параболоїд. *Гіперболічним параболоїдом* називається геометричне місце точок простору, декартові координати яких задовольняють рівняння:

$$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}.$$

Перерізи поверхні площинами $z = h$ є гіперболами, а площинами $x = h, y = h$ – параболами. Поверхня має форму сідла (рис. 8.52).

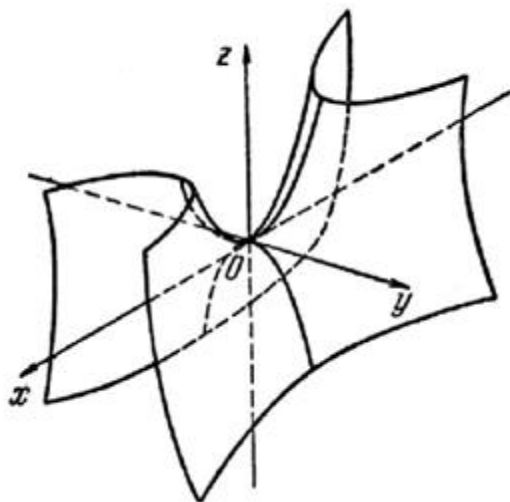


Рис. 8.52

VII. Сфера. *Сферою* називають множину всіх точок простору, рівновіддалених від заданої точки, яка називається *центром сфери* (рис. 8.53). Рівняння у ПДСК сфери з центром у точці $C(x_0, y_0, z_0)$ і радіусом R ми отримали в п. 8.11:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2.$$

Якщо, зокрема, центр сфери знаходиться у початку координат, то рівняння набуває вигляду:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

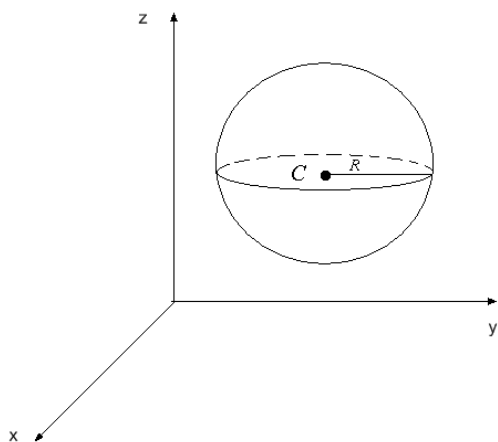


Рис. 8.53

Приклад. Знайти центр і радіус сфери, яку задано рівнянням:

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z - 11 = 0.$$

Виділяючи повні квадрати, запишемо рівняння у вигляді:

$$x^2 + 2x + 1 + y^2 + 4y + 4 + z^2 - 6z + 9 = 11 + 1 + 4 + 9,$$

або:

$$(x+1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 25.$$

Отже, центром сфери є точка $C(-1; -2; 3)$, а радіус дорівнює 5.

8. Еліпсоїд. *Еліпсоїдом* називається геометричне місце точок простору, декартові координати яких задовольняють рівняння:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Розглянемо переріз поверхні площинами $z = h$ ($|h| \leq c$):

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{h^2}{c^2}.$$

Або, позначаючи $d = \sqrt{1 - \frac{h^2}{c^2}}$, дістаємо:

$$\frac{x^2}{(ad)^2} + \frac{y^2}{(bd)^2} = 1,$$

тобто еліпс з півосями ad і bd . Аналогічно еліпси також будуть отримуватись у перерізах поверхні площинами $x = h$ та $y = h$. Поверхня має вигляд, який показано на рис. 8.54.

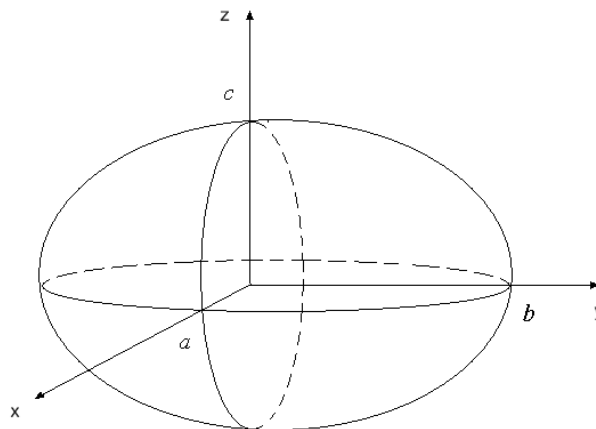


Рис. 8.54

Числа a, b, c називаються півосями еліпсоїда. Якщо всі три півосі різні, то еліпсоїд називається *триосним*. Якщо будь-які дві півосі рівні між собою, а третя не співпадає з ними, то еліпсоїд називається *двоосним*. Форма земної поверхні (геоїд) дуже близька саме до двоосного еліпсоїда. Дві півосі такого еліпсоїда дорівнюють відстані R_e від центра Землі до екватора, а саме 6378245 м, а третя піввісь R_p – відстані від центра Землі до полюсів, а саме 6356853 м (рис. 8.55).

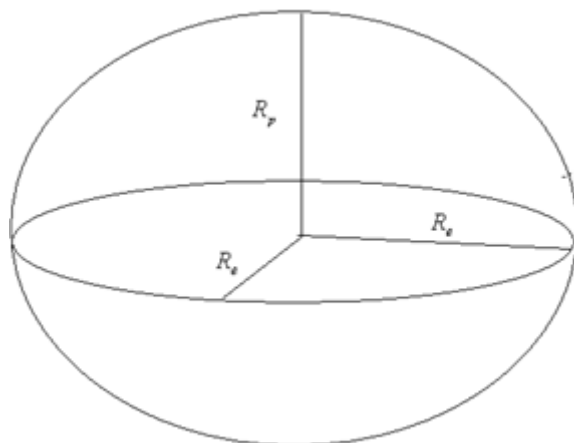


Рис. 8.55

Таким чином, екваторіальний радіус R_e Землі приблизно на 21,4 км більше, ніж її полярний радіус R_p . Відстань R_0 від центра Землі до точки на земній поверхні на широті φ може бути знайдено за формулою (переконайтеся самостійно):

$$R_0 = \frac{R_e R_p}{\sqrt{R_p^2 \cos^2 \varphi + R_e^2 \sin^2 \varphi}}.$$

Зокрема, якщо $\varphi = 0$, то $R_0 = R_e$, а якщо $\varphi = 90^\circ$, то $R_0 = R_p$.

Якщо всі три півосі еліпсоїда співпадають, тобто $a = b = c = R$, то отримуємо сферу радіуса R .

Зауваження. Якщо центр еліпсоїда знаходиться у точці $C(x_0, y_0, z_0)$, то його рівняння має вигляд:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} + \frac{(z - z_0)^2}{c^2} = 1.$$

Приклад. Довести, що поверхня, яку задано рівнянням:

$$x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 2x - 4y + 6z = 0$$

описує еліпсоїд, знайти його центр і півосі.

Перепишемо рівняння у вигляді:

$$x^2 + 2x + 1 + 2(y^2 - 2y + 1) + 3(z^2 + 2z + 1) = 6.$$

Або:

$$\frac{(x+1)^2}{6} + \frac{(y-1)^2}{3} + \frac{(z+1)^2}{2} = 1.$$

Звідси видно, що це рівняння описує еліпсоїд з центром у точці $C(-1;1;-1)$ і півосями $a = \sqrt{6}$, $b = \sqrt{3}$, $c = \sqrt{2}$.

8.21. Сферична система координат у просторі

ПДСК не єдина можлива система координат у просторі. В багатьох ситуаціях зручніше користуватися іншими.

Нехай M – довільна точка простору, x, y, z – її декартові координати. Позначимо через M' – проекцію точки M на площину Oxy .

Введемо величини:

$r = |\overline{OM}|$ – довжина вектора \overline{OM} .

θ – кут між векторами \overline{OM} і \overline{OM}' .

φ – кут між вектором \overline{OM}' і віссю Ox .

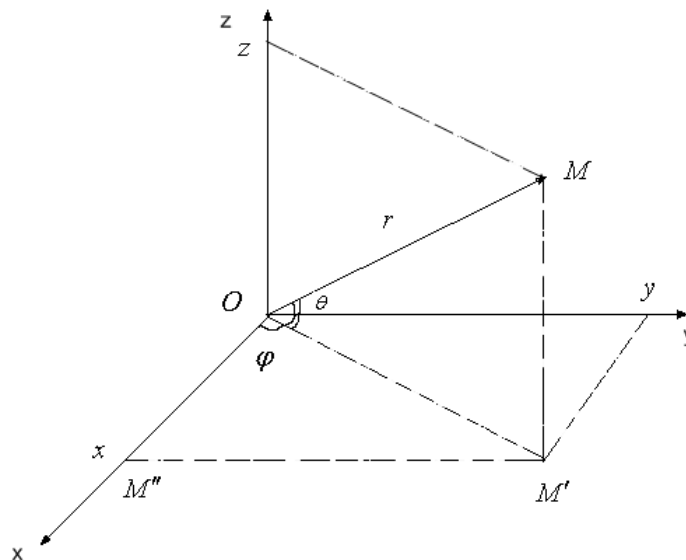


Рис. 8.56

Величини r, θ, φ називаються *сферичними координатами* точки M (рис. 8.56).

Легко встановити зв'язок між сферичними та декартовими координатами точки M . Нехай M'' – проекція точки M' на вісь Ox . З прямокутного трикутника $OM'M''$ маємо:

$$x = \text{пр}_{Ox} \overrightarrow{OM} = |\overrightarrow{OM}| \cos \varphi, \quad y = |\overrightarrow{OM}| \sin \varphi.$$

З прямокутного трикутника OMM' : $|\overrightarrow{OM'}| = r \cos \theta, \quad |\overrightarrow{MM'}| = r \sin \theta.$

Отже, маємо:

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \cos \varphi, \\ y = r \cos \theta \sin \varphi, \\ z = r \sin \theta. \end{cases} \quad (8.21.1)$$

Виведемо у сферичних координатах рівняння сфери радіуса R з центром у початку координат. Її рівняння у ПДСК має вид:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

Підставляючи сюди вищенаведені вирази декартових координат через сферичні, дістанемо:

$$\begin{aligned} r^2 \cos^2 \theta \cos^2 \varphi + r^2 \cos^2 \theta \sin^2 \varphi + r^2 \sin^2 \theta = \\ = r^2 \cos^2 \theta (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) + r^2 \sin^2 \theta = r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta = r^2 = R^2. \end{aligned}$$

Тобто: $r = R$.

Як бачимо, рівняння набагато простіше, ніж у ПДСК.

Сферична система координат має безпосереднє відношення до географічних координат на сфері, зокрема, на земній поверхні. З рис. 8.57 видно, що кут φ не що інше, як довгота точки, а кут θ – широта точки. Координата $r = R$ фіксована – середній радіус Землі.

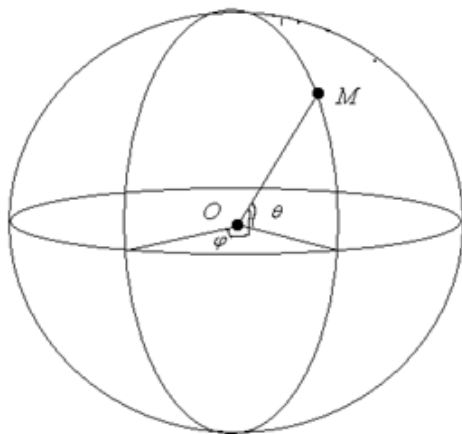


Рис. 8.57

Контрольні запитання до глави 8

1. Що таке скалярні, що таке векторні величини? Наведіть приклади.
2. Які вектори вважаються рівними?
3. Які вектори називаються колінеарними?
4. За яким правилом здійснюється множення вектора на число? У чому полягає необхідна і достатня умова колінеарності двох векторів?
5. За якими правилами здійснюється додавання та віднімання векторів? Які основні властивості лінійних дій над векторами?
6. Як визначається проекція вектора на вісь? Як вона обчислюється? Які основні властивості проєкцій?
7. Які вектори називаються компланарними? Чи можуть бути некомпланарними два вектори?
8. Що називається базисом у просторі?
9. Що таке права і ліва трійка векторів? Який базис називається стандартним?
10. Що таке декартова система координат у просторі? Що таке прямокутна декартова система координат (ПДСК) у просторі?
11. Як знайти координати вектора у ПДСК у просторі за координатами його кінцевої та початкової точок? Як знайти довжину вектора за цими координатами?
12. Що таке напрямні косинуси вектора? Який основний зв'язок між ними?
13. Як виконуються лінійні дії над векторами в координатній формі? У чому полягає координатна форма колінеарності векторів?
14. Що називається скалярним добутком векторів? Які основні властивості скалярного добутку?
15. Як виражається скалярний добуток векторів в координатній формі?
16. У чому полягає умова перпендикулярності двох векторів?
17. Що називається векторним добутком векторів? У чому полягає геометричний та механічний зміст векторного добутку? Які основні властивості векторного добутку?
18. Як виражається векторний добуток у координатній формі?
19. Що називається мішаним добутком векторів? У чому полягає геометричний зміст мішаного добутку?
20. Як виражається мішаний добуток векторів в координатній формі?

21. У чому полягає необхідна і достатня умова компланарності 3-х векторів?
22. Що називається рівнянням поверхні у просторі?
23. Які можливості існують для завдання лінії у просторі?
24. Які можливості існують для завдання площини у просторі?
25. Наведіть загальне рівняння площини у просторі.
26. Як знайти кут між двома площинами? У чому полягають умови паралельності та перпендикулярності двох площин?
27. Як можна знайти відстань від заданої точки до заданої площини?
28. Які існують види рівнянь прямої лінії у просторі? Наведіть канонічні рівняння прямої лінії.
29. Як знайти кут між двома прямими? У чому полягають умови паралельності та перпендикулярності двох прямих?
30. Як знайти відстань від заданої точки до заданої прямої
31. Як знайти кут між прямою лінією та площиною? У чому полягають умови паралельності та перпендикулярності прямої та площини?
32. Що називається поверхнею другого порядку? Які існують види таких поверхонь? Наведіть приклади?
33. Як визначається сфера? Наведіть рівняння сфери, що має заданий центр і заданий радіус.
34. Що таке сферична система координат у просторі? Якій зв'язок між сферичними та прямокутними декартовими координатами точки у просторі?
35. Який зв'язок між сферичними координатами та географічними координатами точки на земній поверхні?

Вправи для самостійного розв'язання

8.1. На трьох некопланарних векторах $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$, побудовано паралелепіпед. Вказати його вектори-діагоналі, які відповідно дорівнюють $\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$, $\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$, $\vec{a} - \vec{b} - \vec{c}$, $\vec{b} - \vec{a} - \vec{c}$.

8.2. Вектори \vec{a} і \vec{b} утворюють кут $\varphi = 60^\circ$, $|\vec{a}| = 5$, $|\vec{b}| = 8$. Знайти $|\vec{a} + \vec{b}|$ та $|\vec{a} - \vec{b}|$.

8.3. Три вектори $\overrightarrow{AB} = \vec{c}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CA} = \vec{b}$ є сторонами трикутника. Через вектори \vec{a} , \vec{b} і \vec{c} виразіть вектори, що збігаються з медіанами \overrightarrow{AM} , \overrightarrow{BN} , \overrightarrow{CP} цього трикутника.

8.4. Знайти довжину і напрям вектора \overrightarrow{AB} , якщо $A(4; -5; 2)$, $B(2; -3; 1)$.

8.5. Знайти координати вектора \vec{a} , якщо відомо кути α, β, γ , які він утворює з осями координат Ox, Oy, Oz , і його довжина: $|\vec{a}| = 7$, $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 60^\circ$, $\gamma = 120^\circ$.

8.6. Перевірити колінеарність векторів $\vec{a} = \{3; -2; 1\}$, $\vec{b} = \{-9; 6; -3\}$ і встановити, який з них довший за інший і в скільки разів?

8.7. Побудувати паралелограм на векторах $\overrightarrow{OA} = \vec{i} + \vec{j}$ і $\overrightarrow{OB} = \vec{k} - 3\vec{j}$, знайти довжини його діагоналей.

8.8. Задано вектори $\vec{c} = \{2; -1; -2\}$ і $\vec{d} = \{12; -6; 4\}$. Знайти скалярний добуток $(2\vec{c} - 3\vec{d}) \cdot (\vec{d} - \vec{c})$.

8.9. Обчислити роботу, яку виконує сила $\vec{F} = \{2; 3; -5\}$, коли її точка прикладання переміщується з початку вектора $\vec{s} = \{-7; 2; -5\}$ в його кінець.

8.10. Трикутника задано його вершинами $A(2; -1; 3)$, $B(1; 1; 1)$, $C(0; 0; 5)$. Знайти його внутрішні кути.

8.11. Нехай $\vec{a} = \{3; -6; 21\}$, $\vec{b} = \{1; 4; -5\}$, $\vec{c} = \{3; -4; 12\}$. Обчислити $np_{\vec{c}}(\vec{a} + \vec{b})$.

8.12. Знайти векторний добуток $\vec{a} \times \vec{b}$, якщо $\vec{a} = \{2; 11; -10\}$, $\vec{b} = \{3; 6; -2\}$.

8.13. Розкрити дужки та спростити вираз:

а) $\vec{i} \times (\vec{j} + \vec{k}) - \vec{j} \times (\vec{i} + \vec{k}) + \vec{k} \times (\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})$;

б) $2\vec{i} \cdot (\vec{j} \times \vec{k}) + 3\vec{j} \cdot (\vec{i} \times \vec{k}) + 4\vec{k} \cdot (\vec{i} \times \vec{j})$.

8.14. Обчислити площу трикутника ABC , якщо $A(0; -1; 3)$, $B(-5; 0; 4)$, $C(1; 4; 3)$.

8.15. Силу $\vec{F} = \{2; -4; 5\}$ прикладено до точки $A(4; -2; 3)$. Знайти момент цієї сили відносно точки $B(3; 2; -1)$.

8.16. Встановити, чи є компланарними вектори $\vec{a} = \{3; 2; 2\}$, $\vec{b} = \{1; -1; 3\}$, $\vec{c} = \{1; 9; -11\}$.

8.17. Знайти об'єм тетраедра з вершинами у точках $A(3; 2; -5)$, $B(1; 3; 1)$, $C(-1; -1; 3)$, $D(4; 3; 4)$.

8.18. Скласти рівняння площини, що проходить через точки $M_1(1; -3; 2)$ і $M_2(-2; 3; -1)$ паралельно осі Ox .

8.19. Скласти рівняння площини, що проходить через точку $M(-2; 3; -1)$ паралельно площині Oxz .

8.20. Написати рівняння площини, що проходить через точку $M(-1; -1; 2)$, і перпендикулярної площинам $x - 2y + z - 4 = 0$ і $x + 2y - 2z + 4 = 0$.

8.21. Написати рівняння площини, що проходить через точки $M_0(1; -1; 2)$, $M_1(2; 1; 2)$, $M_2(1; 1; 4)$.

8.22. Знайти кут між площинами $x - 2y + 2z - 8 = 0$ і $x + z - 6 = 0$.

8.23. Знайти відстань від точки $M(6; -2; 0)$ до площини $2x - 3y + z - 6 = 0$.

8.24. Обчислити довжину висоти AH піраміди, заданої своїми вершинами $A(0; 6; 4)$, $B(3; 5; 3)$, $C(-2; 11; -5)$, $D(1; -1; 1)$.

8.25. Написати рівняння прямої, що проходить через точки $A(-1; 2; 3)$, $B(2; 6; -2)$.

8.26. Написати канонічне рівняння прямої, що є лінією перетину площин $x + 2y - 3z - 5 = 0$ і $2x - y + z + 2 = 0$.

8.27. Знайти кут між прямими

$$l_1: \begin{cases} 2x - y + 2z - 4 = 0, \\ x + 2y - z - 1 = 0, \end{cases} \quad \text{і} \quad l_2: x = t, \quad y = 4 + t, \quad z = 5 - t.$$

8.28. Задано площину $\alpha: 3x - 2y + z - 4 = 0$ і пряму

$$l: \frac{x+1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z-2}{3}.$$

Знайти кут між площиною α і прямою l , а також точку їх перетину.

8.29. Знайти відстань від точки $M(-1; 3; 3)$ до прямої

$$l: \frac{x-1}{-2} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{1}.$$

8.30. Довести, що прямі

$$l_1: \begin{cases} 2x + 2y - z - 10 = 0, \\ x - y - z - 22 = 0, \end{cases} \quad \text{і} \quad l_2: \frac{x+7}{3} = \frac{y-5}{-1} = \frac{z-9}{4}$$

паралельні, і знайти відстань між ними.

8.31. Написати рівняння площини, що проходить через пряму

$$l: \frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+1}{3} \text{ і точку } M(3;4;0).$$

8.32. Показати, що прямі

$$l_1: \begin{cases} x = z - 2, \\ y = 2z + 1, \end{cases} \quad l_2: \frac{x-2}{3} = \frac{y-4}{1} = \frac{z-2}{1}$$

перетинаються, і написати рівняння площини, яка містить ці прямі.

8.33. Довести, що рівняння

$$x^2 + y^2 + z^2 - 3x + 5y - 4z = 0$$

описує сферу, знайти її центр і радіус.

8.34. Скласти рівняння сфери, вписаної в тетраедр, утворений площинами

$$3x - 2y + 6z - 18 = 0, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0.$$

8.35. Довести, що рівняння

$$3x^2 + 2y^2 + z^2 + 6x + 4y + 2z - 6 = 0$$

описує еліпсоїд, знайти його центр і півосі.

8.36. Твірна циліндра паралельна осі Oz , а напрямною є коло $x^2 + y^2 + z^2 = 3, z = 1$. Скласти рівняння цього циліндра.

8.37. Написати рівняння поверхні, утвореної обертанням еліпса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad y = 0$$

навколо осі Oz .

8.38. Побудувати однопорожнинний гіперболоїд

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{36} = 1$$

і знайти його прямолінійні твірні, що проходять через точку $M(4;1;-3)$.

8.39. Скласти рівняння поверхні, кожна точка якої розміщена вдвічі ближче до точки $A(2;0;0)$, ніж до точки $B(-4;0;0)$.

8.40. Знайти рівняння геометричного місця точок, рівновіддалених від даної точки і даної площини.

Глава 9. Диференціальне числення функцій багатьох змінних

9.1. Поняття функції багатьох змінних.

У попередніх розділах нашого курсу ми познайомилися з поняттям функції однієї незалежної змінної $y = f(x)$ (рис. 9.1). Змінна y

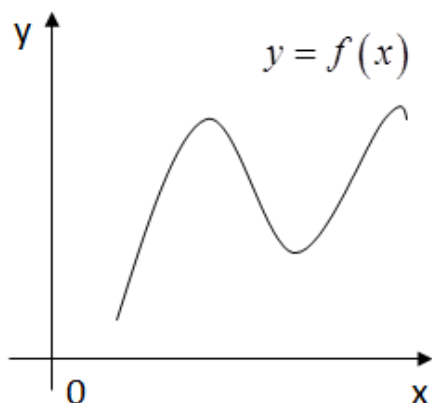


Рис. 9.1

залежить тільки від однієї незалежної змінної x . Разом з цим у багатьох задачах самої математики, а також природознавства, зокрема, фізики, біології, географії, геології, в задачах економіки доводиться мати справу з величинами, чисельні значення яких залежать від значень декількох, незалежних одна від одної величин, що змінюються. Вивчення таких величин приводить до поняття функції багатьох змінних.

Приклади

1. Об'єм паралелепіпеда залежить від трьох, незалежних одна від одної величин: довжини x , ширини y та висоти z :

$$V = xyz.$$

2. У відповідності з законом Кулона величина сили взаємодії двох зарядів залежить від величин q_1, q_2 цих зарядів і відстані r між ними:

$$F = k \frac{q_1 q_2}{r^2}, \text{ де } k \text{ — коефіцієнт пропорційності.}$$

3. Величина створеного суспільного продукту y залежить від су

купних витрат живого x_1 (у матеріальному виробництві) і сумарного об'єму виробничих фондів x_2 :

$$y = a_0 x_1^{a_1} x_2^{a_2}, \text{ де } a_0, a_1, a_2 - \text{сталі.}$$

Означення. Якщо кожному набору змінних (x_1, x_2, \dots, x_n) з деякої множини G за певним законом поставлено у відповідність одне і тільки одне значення z , то кажуть, що на множині G задано функцію n змінних $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Змінні x_1, x_2, \dots, x_n називаються незалежними змінними або аргументами, а змінна z залежною змінною, або функцією.

Множина G називається областю визначення функції і позначається D_f . Множину значень z позначають E_f .

Ми, як правило, будемо мати справу з функціями двох або трьох змінних: $z = f(x, y)$, $u = f(x, y, z)$. Областю визначення функції двох змінних є деяка множина точок на координатній площині. Областю визначення функції трьох змінних є деяка множина точок координатного простору.

Приклади

1. Знайти область визначення функції $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$.

Областю визначення цієї функції є множина точок площини, координати яких задовольняють нерівність $4 - x^2 - y^2 \geq 0$, тобто має бути $x^2 + y^2 \leq 4$. Такою множиною є круг радіусу $r = 2$ з центром у початку координат.

2. Знайти область визначення функції:

$$u = \arcsin \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Областю визначення цієї функції є множина точок простору, координати яких задовольняють нерівність:

$$\left| \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right| \leq 1.$$

Таким чином, має бути: $x^2 + y^2 > 0$, $|z| \leq \sqrt{x^2 + y^2}$. Це множина точок простору, яка розташована між конусами $z = -\sqrt{x^2 + y^2}$ та

$z = \sqrt{x^2 + y^2}$, включаючи самі ці конуси крім їх спільної вершини – початку координат.

Як відомо, геометричним зображенням функції однієї змінної $y = f(x)$ є графік цієї функції, тобто лінія на площині Oxy , координати (x, y) кожної точки на якій пов'язані співвідношенням $y = f(x)$ (рис. 9.1).

Розглянемо функцію 2-х змінних $z = f(x, y)$, яку визначено на множині G площини Oxy , і прямокутну декартову систему координат $Oxyz$ простору.

Означення. Графіком функції $z = f(x, y)$ називається геометричне місце точок простору з координатами $(x, y, f(x, y))$.

Нам вже відомо (див. п. 8.11), що рівняння $z = f(x, y)$ визначає у просторі деяку поверхню. Таким чином, графіком функції двох змінних є поверхня P , яка проектується на множину G площини Oxy (рис. 9.2).

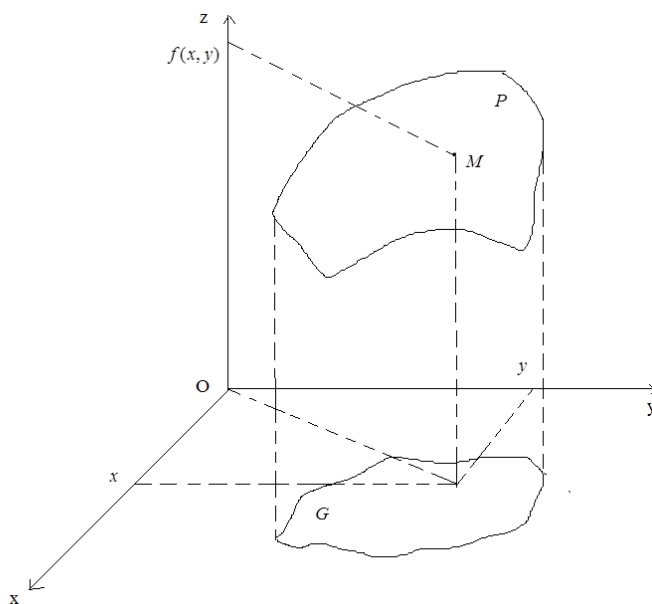


Рис. 9.2

Наприклад, графіком функції $z = x^2 + y^2$ є параболоїд обертання (рис. 9.3).

Для визначення графіка функції n змінних $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ у випадку $n > 2$ треба використовувати багатовимірні простори. Наочну геометричну інтерпретацію у цьому випадку надати неможливо.

Розглянемо знову функцію 2-х змінних $z = f(x, y)$.

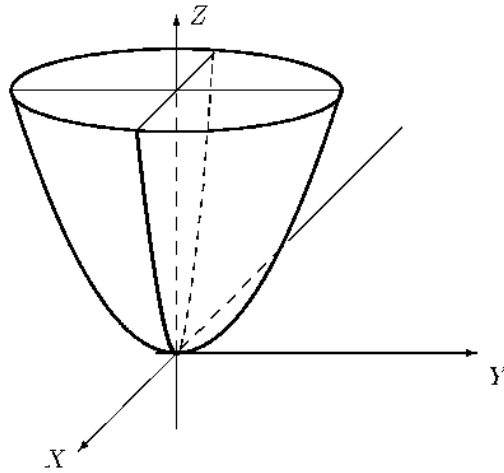


Рис. 9.3

Означення. *Лінією рівня* функції $z = f(x, y)$ називається множи- на точок площини Oxy , для яких функція зберігає одне й те ж зна- чення, тобто множина точок, координати яких задовольняють рів- ність $f(x, y) = C$, де C – стала.

Лінія рівня функції $z = f(x, y)$ є не що інше, як проекція на пло- щину Oxy лінії перетину поверхні P , яка є графіком функції $z = f(x, y)$, з площиною $z = C$ (рис. 9.4).

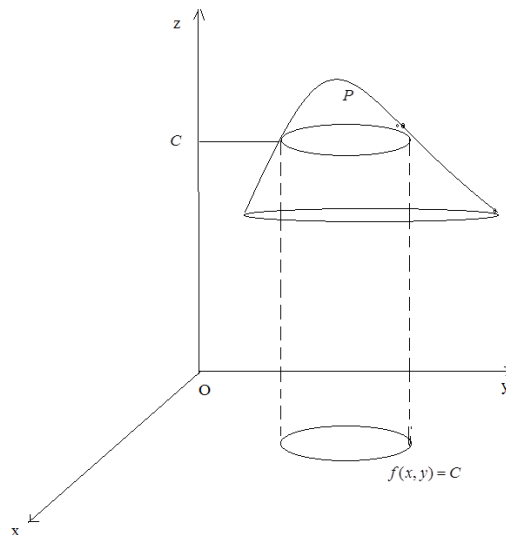


Рис. 9.4

Приклад. Лініями рівня функції $z = x^2 + y^2$ є концентричні кола з центром у точці $(0,0)$. Кожне коло відповідає певному невід’ємному значенню сталої C . Значенню $C = 0$ відповідає точка $(0,0)$ (рис. 9.5).

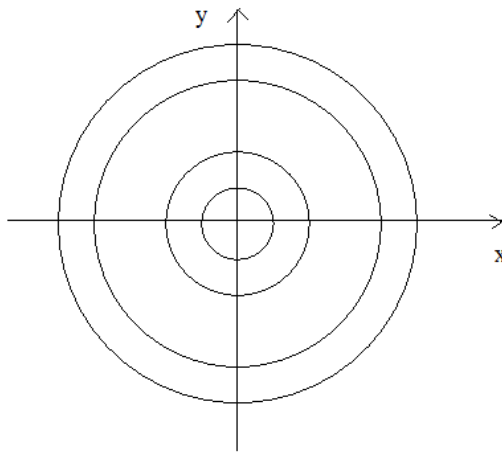


Рис. 9.5

Лінії рівня функції 2-х змінних знаходять численні застосування, зокрема, у картографії. Це лінії, які пов'язують точки на земній поверхні з однаковим певним показником. Наприклад, горизонталі пов'язують точки з однаковою висотою над рівнем моря, ізотерми пов'язують точки з однаковою температурою, ізобари – точки з однаковим тиском тощо.

Аналогічне поняття можна ввести для функції трьох і більшого числа змінних. Для функції 3-х змінних $u = f(x, y, z)$ поверхнею рівня називається множина точок простору, для яких функція зберігає одне й те ж значення, тобто координати яких задовольняють нерівність $f(x, y, z) = C$, де C – стала. Наприклад, для функції $u = x^2 + y^2 + z^2$ поверхнями рівня є сфери радіусу \sqrt{C} з центром у точці $(0, 0, 0)$. Для функцій більшого числа змінних наочну геометричну інтерпретацію надати неможливо.

9.2. Границя і неперервність функції багатьох змінних

Вивчаючи тему “Вступ до аналізу” (див. главу 4), ми оволоділи поняттям границі функції, розглядали відповідні приклади. Аналогічним чином поняття границі вводиться і для функцій багатьох змінних. Ми обмежимося випадком функції двох змінних.

Означення. δ -околом точки (x_0, y_0) називається множина всіх точок площини, координати яких задовольняють нерівність:

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta.$$

Тобто це не що інше, як відкритий круг радіуса δ з центром у точці (x_0, y_0) – множина точок площини, розташованих від точки (x_0, y_0) на відстані, меншій ніж δ (рис. 9.5).

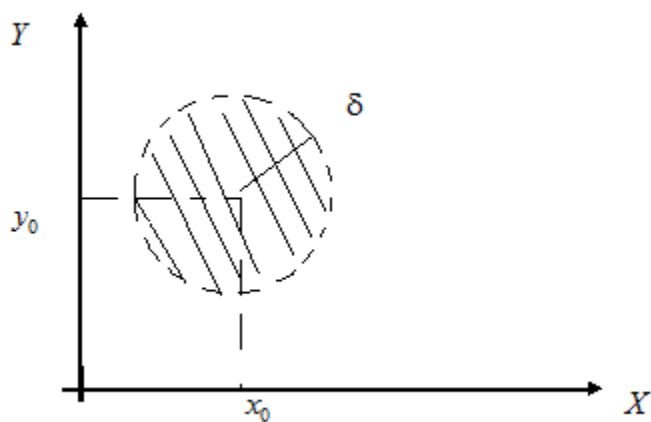


Рис. 9.5

За аналогією з числовими послідовностями (див. п. 4.1) можна ввести поняття послідовності точок площини.

Означення. Якщо кожному натуральному числу n за певним законом поставлено у відповідність одну і тільки одну точку $M_n(x_n, y_n)$ координатної площини, то сукупність точок $M_1, M_2, \dots, M_n, \dots$ називають *послідовністю* точок координатної площини.

Інакше кажучи, послідовність точок – це нескінченна занумерована сукупність точок площини.

Вказану послідовність будемо також позначати $\{M_n\}$.

Означення. Точка $M_0(x_0, y_0)$ називається *границею послідовності* $M_n(x_n, y_n)$, якщо для довільного числа $\delta > 0$ знайдеться номер $N = N(\delta)$ такий, що для будь-якого номера $n > N$ виконується нерівність:

$$\sqrt{(x_n - x_0)^2 + (y_n - y_0)^2} < \delta.$$

Тобто, починаючи з номера, наступного за N , всі точки послідовності $\{M_n\}$ потрапляють в δ -окіл точки $M_0(x_0, y_0)$.

Послідовність $\{M_n\}$ у цьому випадку називають *збіжною до точки* M_0 .

Нехай функцію двох змінних $z = f(x, y)$ визначено в деякому околі D точки (x_0, y_0) за винятком, може бути, самої точки (x_0, y_0) .

Означення. Число A називається границею функції $z = f(x, y)$ при $x \rightarrow x_0, y \rightarrow y_0$ (пишемо $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = A$), якщо для будь-якої послідовності точок $M_n(x_n, y_n)$, збіжної до точки $M_0(x_0, y_0)$, відповідна числова послідовність $z_n = f(x_n, y_n)$ значень функції збігається до числа A .

Як і для функцій однієї змінної (див. п. 4.6), наведене означення називається означенням границі функції на мові послідовностей або означенням Гейне.

Дамо також інше означення границі функції двох змінних (означення Коші).

Означення. Число A називається границею функції $z = f(x, y)$ при $x \rightarrow x_0, y \rightarrow y_0$ (пишемо $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = A$), якщо для будь-якого додатного числа ε існує таке додатне число δ , що для всіх точок (x, y) , таких, що $0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$, виконується нерівність $|f(x, y) - A| < \varepsilon$.

Тобто ця нерівність виконується для всіх точок (x, y) з δ -околу точки (x_0, y_0) , за винятком самої цієї точки.

Простіше кажучи, це означення означає, що значення функції $z = f(x, y)$ можна зробити як завгодно близьким до числа A , якщо тільки точка (x, y) буде достатньо близькою до точки (x_0, y_0) .

Як і для функцій однієї змінної, можна довести, що означення Коші та означення Гейне еквівалентні.

Приклад 1. Доведемо, що $\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ y \rightarrow 1}} (x^2 + y^2) = 10$. Скористаємось означенням Коші. Задамо довільне $\varepsilon > 0$ і розглянемо:

$$\begin{aligned} |x^2 + y^2 - 10| &= |(x - 3)^2 + 6(x - 3) + (y - 1)^2 + 2(y - 1)| \leq \\ &\leq |x - 3|^2 + 6|x - 3| + |y - 1|^2 + 2|y - 1|. \end{aligned}$$

Звідси видно, що для того, щоб для будь-яких x, y таких, що $0 < \sqrt{(x-3)^2 + (y-1)^2} < \delta$, було виконано $|x^2 + y^2 - 10| < \varepsilon$, достатньо, щоб $\delta^2 + 6\delta + 2\delta = \delta^2 + 8\delta < \varepsilon$, тобто $0 < \delta < \sqrt{16 + \varepsilon} - 4$. У якості δ можна, наприклад, взяти число $\sqrt{4 + \frac{\varepsilon}{4}} - 2$. Таким чином, для довільного $\varepsilon > 0$ ми знайшли число $\delta = \sqrt{4 + \frac{\varepsilon}{4}} - 2 > 0$ таке, що при виконанні нерівності $0 < \sqrt{(x-3)^2 + (y-1)^2} < \delta$ виконано $|x^2 + y^2 - 10| < \varepsilon$. А це, згідно з означенням Коші, й означає, що $\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ y \rightarrow 1}} (x^2 + y^2) = 10$.

Приклад 2. Доведемо, що $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} = 1$.

Покладемо: $t = x^2 + y^2$. Тоді, очевидно, $t \rightarrow 0$, коли $x \rightarrow 0$, $y \rightarrow 0$. На підставі першої важливої границі (див. п. 4.12) маємо:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1.$$

Приклад 3. Доведемо, що функція:

$$f(x, y) = \frac{2xy}{x^2 + y^2}$$

не має границі при $x \rightarrow 0$, $y \rightarrow 0$. Візьмемо послідовність точок $(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$. Оскільки $\forall n \ f(x_n, y_n) = 1$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n, y_n) = 1$. Тепер

візьмемо послідовність точок $(x'_n, y'_n) = \left(\frac{1}{n}, -\frac{1}{n}\right)$. Тоді $\forall n \ f(x'_n, y'_n) = -1$, отже $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x'_n, y'_n) = -1$. Для будь-якого n точки (x_n, y_n) , (x'_n, y'_n) не співпадають з точкою $(0, 0)$, але послідовності точок $\{(x_n, y_n)\}$, $\{(x'_k, y'_k)\}$ прямують до точки $(0, 0)$. Тем не менш, послідовності значень функції, які відповідають цим послідовностям точок, прямують до різних границь. Це, згідно з означенням Гейне, означає, що функція $f(x, y)$ не має границі при $x \rightarrow 0$, $y \rightarrow 0$.

Означення. Функція $z = f(x, y)$ називається нескінченно малою при $x \rightarrow x_0, y \rightarrow y_0$, якщо $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = 0$.

Наприклад, функція $z = \sin(x^2 + y^2)$ є нескінченно малою при $x \rightarrow 0, y \rightarrow 0$.

Всі наведені означення легко узагальнюються на функції 3-х і більшого числа змінних.

Означення. Функція $z = f(x, y)$, визначена у деякому околі точки (x_0, y_0) (включаючи саму точку (x_0, y_0)), називається неперервною у цій точці, якщо існує $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y)$, і виконується рівність

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0).$$

Інакше кажучи, функція $z = f(x, y)$ називається неперервною у точці (x_0, y_0) , якщо $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: \forall (x, y):$

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta \text{ виконано } |f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon.$$

Позначимо: $x - x_0 = \Delta x, y - y_0 = \Delta y$. Тоді означення неперервності можна переформулювати так:

Означення. Функція $z = f(x, y)$, визначена у деякому околі точки (x_0, y_0) (включаючи саму точку (x_0, y_0)), називається неперервною у цій точці, якщо $\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = f(x_0, y_0)$, або $\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \Delta u = 0$, де

$$\Delta u = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \quad - \text{ повний приріст функції } z = f(x, y) \text{ у точці } (x_0, y_0).$$

Тобто нескінченно малим приростам аргументів відповідає нескінченно малий приріст функції.

Приклад 4. Покажемо, що функція $u = x^2 + y^2$ неперервна в будь-якій точці площини Oxy . Нехай (x_0, y_0) – довільна точка площини Oxy . Функція $u = x^2 + y^2$ визначена на всій площині Oxy , і $f(x_0, y_0) = x_0^2 + y_0^2$. Легко довести (аналогічно прикладу 1, зробіть це

самостійно), що $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} (x^2 + y^2) = x_0^2 + y_0^2$. Отже функція неперервна в точці (x_0, y_0) .

Приклад 5. Функція:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2 + y^2}, & x \neq 0, y \neq 0, \\ 0, & x = 0, y = 0 \end{cases}$$

не є неперервною в точці $(0,0)$, оскільки границі цієї функції при $x \rightarrow 0, y \rightarrow 0$ не існує (див. приклад 3).

Легко показати, що сума, різниця і добуток двох неперервних функцій є функція також неперервна. Частка двох неперервних функцій є функція неперервна у тих точках, де знаменник відмінний від нуля. Наприклад, функція $z = \frac{x^2 + y^2 + 5}{y + x}$ неперервна всюди, крім точок прямої $y = -x$.

Означення. Функція $z = f(x, y)$ називається неперервною на множині G , якщо ця функція неперервна у кожній точці множини G .

Приклад. Функція $z = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{1-x-y}$ визначена і неперервна у трикутнику $\Delta = \{x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$.

9.3. Частинні похідні функції багатьох змінних

Нехай задано функцію $z = f(x, y)$, визначену на деякій множині G . Розглянемо внутрішню точку $M(x, y)$ цієї множини, тобто таку точку, яка належить множині G разом з деяким своїм околom. Надамо змінній x приріст Δx і розглянемо іншу точку $M'(x + \Delta x, y)$, яку теж вважаємо внутрішньою точкою множини G (рис. 9.6). Розглянемо різницю значень функції $z = f(x, y)$ у точках M' і M , тобто величину $\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y)$. Ця величина називається *частинним приростом функції $z = f(x, y)$ за змінною x* .

Означення. Якщо існує скінченна границя $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x}$, то ця границя називається частинною похідною першого порядку функції $z = f(x, y)$ за змінною x і позначається $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} = f'_x(x, y)$.

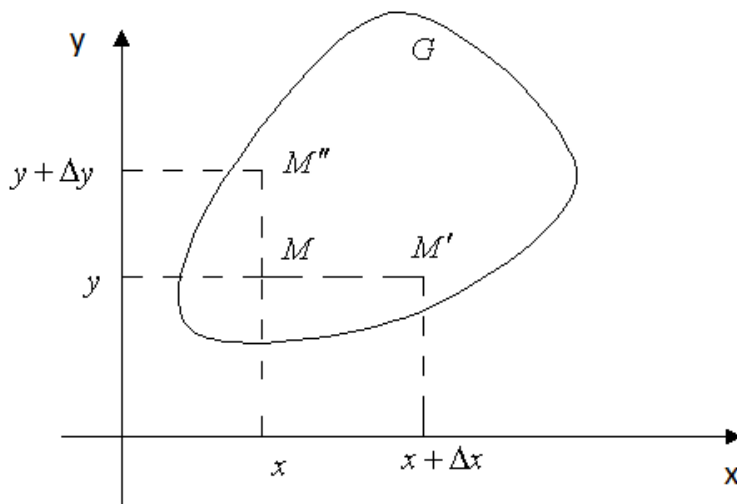


Рис. 9.6

Тепер надамо змінній y приріст Δy , залишаючи x сталою, і розглянемо точку $M''(x, y + \Delta y)$, яку теж вважаємо внутрішньою точкою області G . Аналогічно вводимо частинний приріст функції $z = f(x, y)$ за змінною y :

$$\Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

Означення. Якщо існує скінченна границя $\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y}$, то ця границя називається частинною похідною першого порядку функції $z = f(x, y)$ по змінній y і позначається $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} = f'_y(x, y)$.

Аналогічним чином визначаються частинні похідні від функцій 3-х і більшого числа змінних.

З наведених означень випливає, що якщо частинна похідна береться за однією зі змінних, то вся решта змінних вважаються сталими. Отже, знаходження частинних похідних здійснюється за тими ж самими правилами, що й звичайних похідних функції однієї змінної.

Приклади. Знайти частинні похідні.

$$1. z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}.$$

Вважаючи y сталою, одержимо:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \left(-\frac{y}{x^2}\right) = -\frac{y}{x^2 + y^2}.$$

Вважаючи x сталою, одержимо:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

$$2. z = 2x^3 - 4x^2y + 5xy^2 - 6y^3.$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 6x^2 - 8xy + 5y^2, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -4x^2 + 10xy - 18y^2.$$

$$3. z = xe^{-xy}.$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^{-xy} + xe^{-xy}(-y) = e^{-xy}(1 - xy),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = xe^{-xy}(-x) = -x^2e^{-xy}.$$

$$4. z = y^x.$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y^x \ln y; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = xy^{x-1}.$$

Відносно x ця функція є показниковою (оскільки у даному випадку основа степеня $y = \text{const}$), а відносно y – степеневою ($x = \text{const}$).

$$5. u = \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}.$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{y} - \frac{z}{x^2}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{x}{y^2} + \frac{1}{z}; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{y}{z^2} + \frac{1}{x}.$$

6. Обчислити визначник:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{vmatrix},$$

де $x = r \cos \theta \cos \varphi$, $y = r \cos \theta \sin \varphi$, $z = r \sin \theta$ (формули відповідності між декартовими та сферичними координатами точки у просторі).

Маємо:

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \cos \theta \cos \varphi, \quad \frac{\partial x}{\partial \varphi} = -r \cos \theta \sin \varphi, \quad \frac{\partial x}{\partial \theta} = -r \sin \theta \cos \varphi,$$

$$\frac{\partial y}{\partial r} = \cos \theta \sin \varphi, \quad \frac{\partial y}{\partial \varphi} = r \cos \theta \cos \varphi, \quad \frac{\partial y}{\partial \theta} = -r \sin \theta \sin \varphi,$$

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \sin \theta, \quad \frac{\partial z}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial \theta} = r \cos \theta.$$

Отже:

$$J = \begin{vmatrix} \cos \theta \cos \varphi & -r \cos \theta \sin \varphi & -r \sin \theta \cos \varphi \\ \cos \theta \sin \varphi & r \cos \theta \cos \varphi & -r \sin \theta \sin \varphi \\ \sin \theta & 0 & r \cos \theta \end{vmatrix} = r^2 \cos \theta$$

З'ясуємо геометричний зміст частинних похідних функції $z = f(x, y)$. Нехай геометричним зображенням цієї функції є деяка поверхня P (рис. 9.7), $M(x, y, z)$ – точка на цій поверхні.

Поклавши $y = \text{const}$, отримаємо плоску криву Γ_x , яка являє собою переріз поверхні P відповідною площиною, паралельною площині Oxz . Нехай MK – дотична до кривої Γ_x у точці $M(x, y, z)$, і α – кут, утворений цією площиною з додатним напрямом осі Ox . Оскільки:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left[\frac{dz}{dx} \right]_{y=\text{const}},$$

то на підставі геометричного змісту звичайної похідної функції однієї змінної, маємо:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \text{tg } \alpha.$$

Аналогічно, якщо Γ_y – переріз поверхні P площиною $x = \text{const}$, і β – кут, утворений з віссю Oy дотичною ML у точці $M(x, y, z)$ до кривої Γ_y , то $\frac{\partial z}{\partial y} = \text{tg} \beta$.

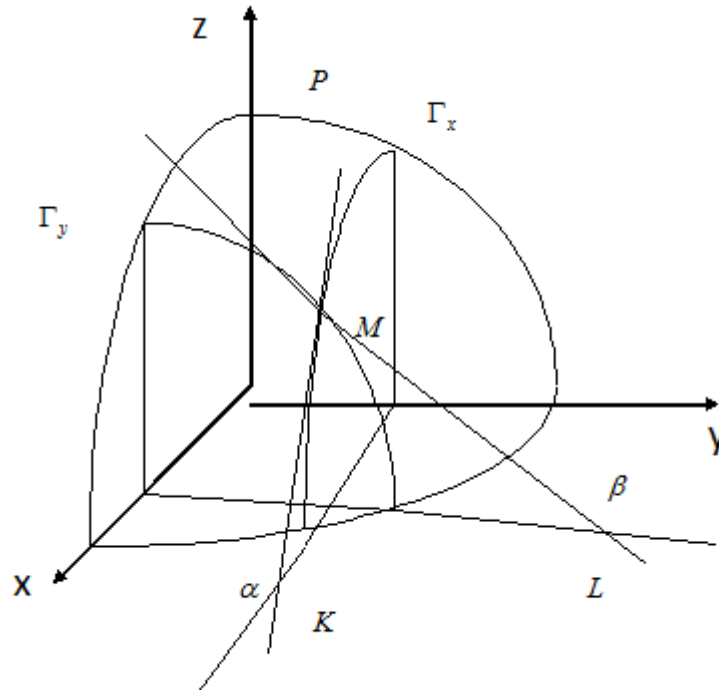


Рис. 9.7

9.4. Диференційовність функції багатьох змінних

Розглянемо повний приріст функції $z = f(x, y)$ у точці (x, y) :

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

Означення. Функція $z = f(x, y)$ називається диференційовною у точці (x, y) , якщо її повний приріст у цій точці може бути зображено у вигляді:

$$\Delta z = A(x, y)\Delta x + B(x, y)\Delta y + \alpha_1\Delta x + \alpha_2\Delta y,$$

де α_1, α_2 – нескінченно малі при $\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0$ (або при $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \rightarrow 0$) функції, які залежать від $x, y, \Delta x, \Delta y$.

Вираз $A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y$ називається головною або лінійною частиною приросту функції.

Приклад. Розглянемо функцію $z = x^2 y$. Її повний приріст має вигляд:

$$\Delta z = (x + \Delta x)^2 (y + \Delta y) - x^2 y = 2xy \cdot \Delta x + y \cdot \Delta x^2 + x^2 \cdot \Delta y + 2x \cdot \Delta x \cdot \Delta y + \Delta x^2 \cdot \Delta y.$$

Вираз $2xy \cdot \Delta x + x^2 \cdot \Delta y$ – головна частина приросту. Доданок $y \cdot \Delta x^2 + 2x \cdot \Delta x \cdot \Delta y + \Delta x^2 \cdot \Delta y$ напишемо у вигляді $\alpha_1 \cdot \Delta x + \alpha_2 \cdot \Delta y$, де $\alpha_1 = y \cdot \Delta x + 2x \cdot \Delta y$, $\alpha_2 = \Delta x^2$. Очевидно, що α_1, α_2 – нескінченно малі при $\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0$, отже, функція $z = x^2 y$ диференційовна у будь-якій точці.

Теорема. Якщо функція $z = f(x, y)$ диференційовна у точці (x, y) , то вона неперервна у цій точці.

Доведення. Оскільки функція $z = f(x, y)$ диференційовна у точці (x, y) , то її повний приріст у цій точці має вигляд:

$$\Delta z = A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y + \alpha_1 \cdot \Delta x + \alpha_2 \cdot \Delta y.$$

Звідси випливає, що $\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \Delta z = 0$. А це й означає неперервність функції

$z = f(x, y)$ у точці (x, y) .

Теорема. Якщо функція $z = f(x, y)$ диференційовна у точці (x, y) , то вона має у цій точці частинні похідні f'_x, f'_y .

Доведення. Оскільки функція $z = f(x, y)$ диференційовна у точці (x, y) , то $\Delta z = A(x, y) \cdot \Delta x + B(x, y) \cdot \Delta y + \alpha_1 \cdot \Delta x + \alpha_2 \cdot \Delta y$. Покладемо у цій рівності $\Delta y = 0$. Тоді повний приріст Δz функції перетвориться на частинний за змінною x , і ми дістанемо:

$$\Delta_x z = A(x, y) \cdot \Delta x + \alpha_1 \cdot \Delta x.$$

Аналогічно, покладаючи $\Delta x = 0$, матимемо:

$$\Delta_y z = B(x, y) \cdot \Delta y + \alpha_2 \cdot \Delta y.$$

Звідси випливає:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (A(x, y) + \alpha_1) = A(x, y),$$

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} (B(x, y) + \alpha_2) = B(x, y),$$

оскільки $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha_1 = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \alpha_2 = 0$. Отже, у точці (x, y) існують частинні похідні $f'_x = A(x, y)$, $f'_y = B(x, y)$, що й треба було довести. Зауважимо, що ми не тільки довели існування частинних похідних, а й отримали для них явні вирази. Це не що інше, як коефіцієнти при $\Delta x, \Delta y$ у головній частині приросту функції. Наприклад для розглянутої вище функції $z = x^2 y$ у ці коефіцієнти відповідно $2xy$ і x^2 .

Зауваження. Обернені твердження для двох доведених вище теорем, взагалі кажучи, несправедливі. Зокрема, з неперервності функції у точці не впливає її диференційовність у цій точці. Наприклад, функція $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ неперервна у точці $(0, 0)$, але не диференційовна в ній. Дійсно, границя:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0 + \Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{(0 + \Delta x)^2 + 0} - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x}$$

не існує, тому не існує і похідна $f'_x(0, 0)$. Аналогічно показуємо, що не існує і $f'_y(0, 0)$. А тоді на підставі попередньої теореми отримуємо, що дана функція не є диференційовною у точці $(0, 0)$.

З існування частинних похідних функції у точці також не впливає диференційовність функції (на відміну від функцій однієї змінної). Розглянемо, наприклад, функцію:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 > 0, \\ 0, & x = y = 0. \end{cases}$$

Покажемо, що існують $f'_x(0, 0)$, $f'_y(0, 0)$. Дійсно:

$$f'_x(0, 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{0}{\Delta x} = 0,$$

$$f'_y(0, 0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(0, \Delta y) - f(0, 0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{0}{\Delta y} = 0.$$

Разом з цим ця функція не є навіть неперервною у точці $(0, 0)$ (див. п. 9.2, приклад 5), а, отже, не є й диференційовною.

Теорема. Якщо у деякому околі точки (x, y) існують частинні похідні f'_x, f'_y функції $z = f(x, y)$ і ці похідні неперервні у точці (x, y) , то функція $z = f(x, y)$ диференційовна у цій точці.

Доведення. Розглянемо повний приріст функції:

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

Віднімемо і додаймо доданок $f(x, y + \Delta y)$, внаслідок чого матимемо:

$$\Delta z = [f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y)] + [f(x, y + \Delta y) - f(x, y)].$$

Перші квадратні дужки містять приріст функції $f(x, y)$ по змінній x при фіксованому значенні $y + \Delta y$ другої змінної. За формулою Лагранжа матимемо:

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y) = f'_x(\xi, y + \Delta y)\Delta x,$$

де ξ знаходиться між x та $x + \Delta x$.

Аналогічно:

$$f(x, y + \Delta y) - f(x, y) = f'_y(x, \eta)\Delta y,$$

де η знаходиться між y та $y + \Delta y$.

Спрямуємо Δx та Δy до нуля. Внаслідок неперервності f'_x, f'_y матимемо:

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} f'_x(\xi, y + \Delta y) = f'_x(x, y), \quad \lim_{\Delta y \rightarrow 0} f'_y(x, \eta) = f'_y(x, y).$$

Отже:

$$f'_x(\xi, y + \Delta y) = f'_x(x, y) + \alpha, \quad f'_y(x, \eta) = f'_y(x, y) + \beta,$$

де α, β – нескінченно малі при $\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0$. А тоді:

$$\Delta z = (f'_x(x, y)\Delta x + f'_y(x, y)\Delta y) + \alpha \cdot \Delta x + \beta \cdot \Delta y,$$

тобто функція $z = f(x, y)$ диференційовна у точці (x, y) , що й треба було довести.

9.5. Диференціал функції багатьох змінних

Як ми вже казали, якщо функція $z = f(x, y)$ диференційовна у точці (x, y) , то її повний приріст у цій точці має вигляд:

$$\Delta z = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \Delta y + \alpha_1 \cdot \Delta x + \alpha_2 \cdot \Delta y,$$

де α_1, α_2 – нескінченно малі при $\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0$. При малих $\Delta x, \Delta y$ доданки $\alpha_1 \Delta x + \alpha_2 \Delta y$ малі порівняно з $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \Delta y$, тому основний внесок у величину приросту функції здійснюється саме доданками $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \Delta y$, лінійними відносно Δx та Δy . Тому ці доданки називаються головною частиною приросту функції або диференціалом функції.

Означення. Головна лінійна відносно $\Delta x, \Delta y$ частина приросту диференційовної у точці (x, y) функції називається її повним диференціалом у цій точці і позначається $df(x, y)$ або dz .

Тобто за означенням:

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y.$$

Покладемо тут $z = x$. Тоді $\frac{\partial f}{\partial x} = 1, \frac{\partial f}{\partial y} = 0$, і $dx = \Delta x$. Аналогічно

$dy = \Delta y$. Тобто диференціали незалежних змінних дорівнюють їх приростам. Таким чином, маємо:

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy.$$

Така форма запису диференціалу найбільш поширена.

Наведене означення легко поширюється на функції трьох і більшого числа змінних. Якщо маємо функцію $z = f(x_1, \dots, x_n)$ від n незалежних змінних x_1, \dots, x_n , то її повним диференціалом називається вираз:

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n.$$

Приклади

1. Знайти повний диференціал функції:

$$z = \ln\left(y + \sqrt{x^2 + y^2}\right).$$

Маємо:

$$f'_x = \frac{1}{y + \sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{y\sqrt{x^2 + y^2} + x^2 + y^2},$$

$$f'_y = \frac{1}{y + \sqrt{x^2 + y^2}} \left(1 + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) = \frac{\sqrt{x^2 + y^2} + y}{(y + \sqrt{x^2 + y^2})\sqrt{x^2 + y^2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Таким чином:

$$dz = \frac{x dx}{y\sqrt{x^2 + y^2} + x^2 + y^2} + \frac{dy}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

2. Знайти повний диференціал функції $u = (xy)^z$.

Маємо:

$$u'_x = z(xy)^{z-1} \cdot y = x^{z-1} \cdot y^z \cdot z,$$

$$u'_y = z(xy)^{z-1} \cdot x = x^z \cdot y^{z-1} \cdot z, \quad u'_z = (xy)^z \ln(xy),$$

$$du = x^{z-1} \cdot y^z \cdot z dx + x^z \cdot y^{z-1} \cdot z dy + (xy)^z \ln(xy) dz.$$

3. $u = \ln \frac{1}{r}, \quad r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}.$

Така функція зустрічається в теорії потенціала. Маємо:

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = -\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x_i} = -\frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}} \times$$

$$\times \frac{1}{2\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}} \cdot 2x_i = -\frac{x_i}{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}.$$

Таким чином:

$$du = -\sum_{i=1}^n \frac{x_i dx_i}{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} = -\frac{1}{r^2} \sum_{i=1}^n x_i dx_i.$$

9.6. Застосування диференціала до наближених обчислень

Як ми вже відмічали, приріст диференційовної в точці (x, y) функції $z = f(x, y)$ має вигляд:

$$\Delta z = f'_x(x, y)\Delta x + f'_y(x, y)\Delta y + \alpha_1 \cdot \Delta x + \alpha_2 \cdot \Delta y,$$

де α_1, α_2 – нескінченно малі при $\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0$.

Якщо відкинути два останні доданки, то дістанемо наближену рівність:

$$\Delta z \approx f'_x(x, y)\Delta x + f'_y(x, y)\Delta y,$$

або

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) \approx f(x, y) + f'_x(x, y)\Delta x + f'_y(x, y)\Delta y.$$

Припустимо тепер, що нам треба наближено обчислити значення функції $z = f(x, y)$ у точці (x_1, y_1) , тобто $f(x_1, y_1)$. Якщо вдається знайти іншу точку (x_0, y_0) , яка досить близька до точки (x_1, y_1) , і у якій значення $f(x_0, y_0)$ функції $z = f(x, y)$ та її частинних похідних відомі, то покладемо:

$$x = x_0, \quad y = y_0, \quad x + \Delta x = x_1, \quad y + \Delta y = y_1.$$

Тоді маємо наближену формулу:

$$f(x_1, y_1) \approx f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)(x_1 - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y_1 - y_0). \quad (9.6.1)$$

Приклад 1. Обчислити наближено: $\sqrt{(4,05)^2 + (3,07)^2}$.

Шукане число будемо розглядати як значення функції $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ у точці $(x_1 = 4,05; y_1 = 3,07)$. Покладемо: $x_0 = 4, y_0 = 3$.

Тоді $f(x_0, y_0) = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$. Знайдемо:

$$f'_x(x_0, y_0) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \Big|_{\substack{x=4 \\ y=3}} = \frac{4}{5} = 0,8,$$

$$f'_y(x_0, y_0) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \Big|_{\substack{x=4 \\ y=3}} = \frac{3}{5} = 0,6.$$

Підставляючи знайдені значення у формулу (9.6.1), дістанемо:

$$\sqrt{(4,05)^2 + (3,07)^2} \approx 5 + 0,8 \cdot 0,05 + 0,6 \cdot 0,07 = 5,08.$$

Точне до трьох десяткових знаків значення: 5,082.

Приклад 2. Циліндрична судина має внутрішні розміри: радіус основи $R = 2,5$, висоту $H = 4$ м і товщину стінок $l = 1$ дм. Знайти наближено об'єм матеріалу, витраченого на виготовлення судини.

Розглянемо функцію $V = F(x, y) = \pi x^2 y$. Об'єм матеріалу виражається величиною:

$$\Delta V = V_1 - V_0,$$

де $V_1 = F(R + l, H + l)$, $V_0 = F(R, H)$. Згідно з формулою (9.6.1) маємо:

$$\Delta V \approx \frac{\partial F(R, H)}{\partial R} l + \frac{\partial F(R, H)}{\partial H} l,$$

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = 2\pi xy, \quad \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = \pi x^2.$$

Тоді:

$$\Delta V \approx (2\pi RH + \pi R^2) l = (2\pi \cdot 2,5 \cdot 4 + \pi \cdot 6,25) \cdot 0,1 = 2,625\pi \approx 8,2 \text{ (м}^3\text{)}$$

9.7. Похідна функції за заданим напрямом

Нехай функція $z = f(x, y)$ визначена на деякій множині G на площині Oxy . Розглянемо точку $M(x, y) \in G$ і деякий напрям l , який визначається напрямними косинусами $\cos \alpha$, $\cos \beta = \sin \alpha$ (рис. 9.8).

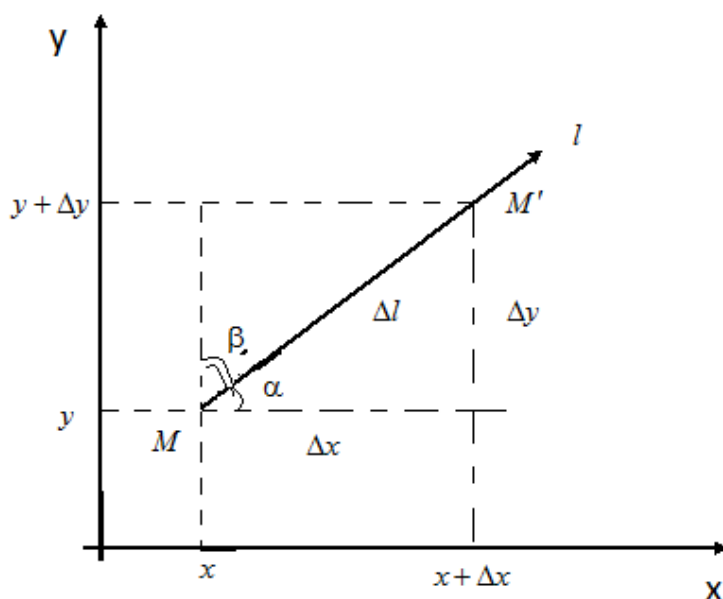


Рис. 9.8

При переміщенні у даному напрямку l з точки $M(x, y)$ у точку $M'(x + \Delta x, y + \Delta y)$ функція $z = f(x, y)$ отримає приріст $\Delta_l z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$, який називається *приростом функції у даному напрямку l* . З рис. 9.8 видно:

$$\Delta x = \Delta l \cdot \cos \alpha, \quad \Delta y = \Delta l \cdot \cos \beta, \quad (9.7.1)$$

отже, $\Delta_l z = f(x + \Delta l \cdot \cos \alpha, y + \Delta l \cdot \cos \beta) - f(x, y)$.

Означення. Похідною функції $z = f(x, y)$ за напрямом l називається границя відношення приросту цієї функції у даному напрямку до величини переміщення, коли останнє прямує до нуля, тобто:

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta_l z}{\Delta l}.$$

Зокрема, $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ можна розглядати як похідні функції $z = f(x, y)$

за додатними напрямками осей координат відповідно Ox і Oy .

Похідна $\frac{\partial z}{\partial l}$ виражає швидкість зміни функції $z = f(x, y)$ вздовж

напрямку l . Якщо вздовж даного напрямку $\frac{\partial z}{\partial l} > 0$, то у даному напрямку

функція зростає, а якщо $\frac{\partial z}{\partial l} < 0$, то функція спадає.

Знайдемо формулу для обчислення $\frac{\partial z}{\partial l}$ у припущенні, що функція

$z = f(x, y)$ диференційовна у точці $M(x, y)$. У цьому випадку маємо:

$\Delta_l z = f'_x \cdot \Delta x + f'_y \cdot \Delta y + \varepsilon_1 \cdot \Delta x + \varepsilon_2 \cdot \Delta y$, де $\varepsilon_1 \rightarrow 0, \varepsilon_2 \rightarrow 0$ при $\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0$. Звідси внаслідок (9.7.1):

$$\Delta_l z = (f'_x \cos \alpha + f'_y \cos \beta) \Delta l + (\varepsilon_1 \cos \alpha + \varepsilon_2 \cos \beta) \Delta l.$$

Отже:

$$\frac{\Delta_l z}{\Delta l} = f'_x \cos \alpha + f'_y \cos \beta + \varepsilon_1 \cos \alpha + \varepsilon_2 \cos \beta.$$

Переходячи до границі при $\Delta l \rightarrow 0$ (тоді і $\Delta x, \Delta y \rightarrow 0$), дістанемо:

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \frac{\partial z}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial z}{\partial y} \cos \beta. \quad (9.7.2)$$

Формула (9.7.2) легко узагальнюється на випадок функцій 3-х і більшого числа змінних. Для функції 3-х змінних $u = f(x, y, z)$ вона має вигляд:

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma, \quad (9.7.3)$$

де $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ – напрямні косинуси вектора \vec{l} .

Приклади

1. Знайти похідну функції $z = x^2 - xy + y^2$ у точці $M(1;1)$ за напрямом вектора $\vec{l} = 6\vec{i} + 8\vec{j}$.

Знайдемо значення частинних похідних у точці M :

$$z'_x = 2x - y, \quad z'_y = -x + 2y, \quad z'_x(M) = z'_y(M) = 1.$$

Знайдемо напрямні косинуси вектора \vec{l} :

$$|\vec{l}| = \sqrt{36 + 64} = 10; \quad \cos \alpha = 0,6; \quad \cos \beta = 0,8.$$

Таким чином:

$$\left. \frac{\partial z}{\partial l} \right|_M = 1 \cdot 0,6 + 1 \cdot 0,8 = 1,4.$$

2. Знайти похідну функції $u = x^2 - 2xz + y^2$ у точці $A(1;2;-1)$ за напрямом від точки A до точки $B(2;4;-3)$.

Знайдемо вектор $\vec{l} = \overrightarrow{AB}$ і його напрямні косинуси:

$$\vec{l} = \overrightarrow{AB} = \{1;2;-2\} = \vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}, \quad |\vec{l}| = \sqrt{1+4+4} = 3,$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{3}, \quad \cos \beta = \frac{2}{3}, \quad \cos \gamma = -\frac{2}{3}.$$

Знайдемо значення частинних похідних у точці A :

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_A = (2x - 2z) \Big|_{\substack{x=1 \\ z=-1}} = 4, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_A = 2y \Big|_{y=2} = 4, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_A = -2x \Big|_{x=1} = -2.$$

Таким чином, у відповідності з формулою (9.7.3) маємо:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial l} \right|_A = 4 \cdot \frac{1}{3} + 4 \cdot \frac{2}{3} - 2 \cdot \left(-\frac{2}{3} \right) = \frac{16}{3}.$$

Оскільки $\left. \frac{\partial u}{\partial l} \right|_A > 0$, то наша функція у даному напрямі зростає.

9.8. Градієнт функції

Розглянемо похідну функції $z = f(x, y)$ у точці $M(x, y)$ вздовж деякого напрямку \vec{l} :

$$\left. \frac{\partial z}{\partial l} \right|_M = \left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_M \cos \alpha + \left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_M \cos \beta.$$

Поставимо питання: як обрати напрям \vec{l} , щоб похідна $\left. \frac{\partial z}{\partial l} \right|_M$ набула найбільшого значення?

Помітимо (див. формулу (9.7.2)), що $\left. \frac{\partial z}{\partial l} \right|_M$ являє собою скалярний добуток двох векторів: вектора з координатами $\left\{ \left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_M, \left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_M \right\}$ і вектора $\vec{l} = \{\cos \alpha, \cos \beta\}$.

Означення. Вектор з координатами $\left\{ \left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_M, \left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_M \right\}$ називається градієнтом функції $z = f(x, y)$ у точці $M(x, y)$.

Позначається градієнт символами:

$$\overrightarrow{\text{grad}} z = \overline{\nabla} z = \left\{ \left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_M, \left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_M \right\}.$$

Таким чином,

$$\left. \frac{\partial z}{\partial l} \right|_M = \overrightarrow{\text{grad}} z \cdot \vec{l}.$$

З іншого боку, за означенням скалярного добутку маємо:

$$\left. \frac{\partial z}{\partial l} \right|_M = |\overrightarrow{\text{grad}} z| \cdot |\vec{l}| \cdot \cos \varphi,$$

де φ – кут між градієнтом і вектором \vec{l} (рис. 9.9).

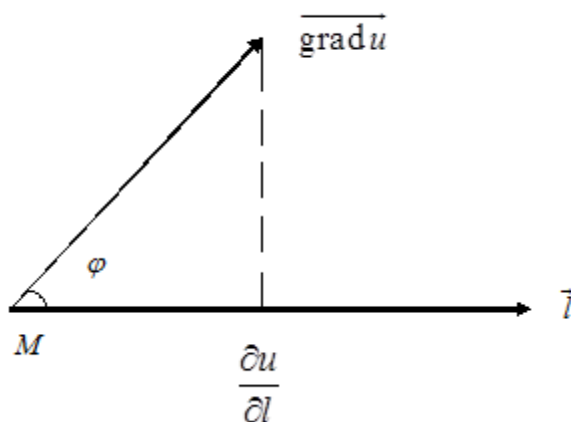


Рис. 9.9

Очевидно, що $|\vec{l}| = 1$, отже:

$$\frac{\partial z}{\partial l} = |\overrightarrow{\text{grad } z}| \cdot \cos \varphi,$$

тобто величина похідної за напрямом \vec{l} дорівнює довжині проекції градієнта на напрям \vec{l} . Очевидно, що $\frac{\partial z}{\partial l}$ набуває максимального значення при $\cos \varphi = 1$, тобто $\varphi = 0$, а це означає, що напрям \vec{l} збігається з напрямом градієнта функції z . При цьому:

$$\max_l \frac{\partial z}{\partial l} = |\overrightarrow{\text{grad } z}| = \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}.$$

На підставі цього можна стверджувати, що градієнт характеризує величину і напрям максимальної швидкості зростання (оскільки $\frac{\partial z}{\partial l} = |\overrightarrow{\text{grad } z}| > 0$) функції у даній точці. Він перпендикулярний лінії рівня, яка проходить через точку M .

Очевидно тепер, що напрям найшвидшого спадання функції збігається з напрямом вектора $-\overrightarrow{\text{grad } z}$, тобто *антиградієнта* функції.

Аналогічно визначається градієнт функції багатьох змінних $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$:

$$\overrightarrow{\text{grad } z} = \left\{ \frac{\partial z}{\partial x_1}, \frac{\partial z}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial z}{\partial x_n} \right\}.$$

Приклади

1. Знайти величину і напрям градієнта функції $u = xyz$ у точці $M(2;1;1)$.

Маємо:

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_M = yz \Big|_M = 1, \quad \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_M = xz \Big|_M = 2, \quad \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_M = xy \Big|_M = 2.$$

Таким чином:

$$\overrightarrow{\text{grad } u} \Big|_M = \{1; 2; 2\}.$$

Довжина градієнта:

$$\left| \overrightarrow{\text{grad } u} \Big|_M \right| = \sqrt{1 + 4 + 4} = 3.$$

Напрямок градієнта характеризується його напрямними косинусами:

$$\cos \alpha = \frac{1}{3}, \quad \cos \beta = \frac{2}{3}, \quad \cos \gamma = \frac{2}{3}.$$

2. Горизонталі підвищеності визначаються рівнянням:

$$h = 20 - \frac{x^2}{4} - y^2. \text{ Побудувати горизонталі, які відповідають відміткам } h = 20 \text{ м, } 19 \text{ м, } 18 \text{ м, } 16 \text{ м та } 11 \text{ м.}$$

Напрямок $\overrightarrow{\text{grad} h}$ визначає тут напрям найкрутішого схилу, а його величина – крутизну цього схилу. Побудувати $\overrightarrow{\text{grad} h}$ у точці $M(2;1)$.

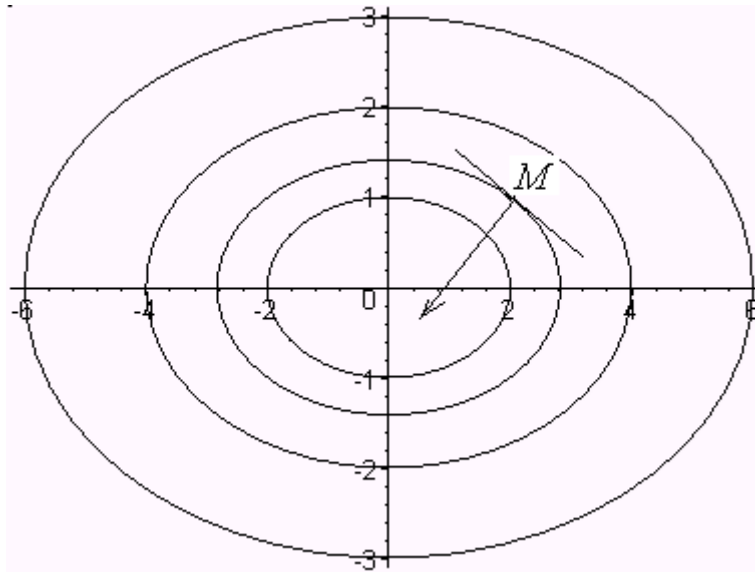


Рис. 9.10

Побудуємо горизонталі:

1) $h = 20$; тоді $\frac{x^2}{4} + y^2 = 0$ – це точка $(0,0)$;

2) $h = 19$; тоді $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ – еліпс з півосями $a = 2$, $b = 1$;

3) $h = 18$; тоді $\frac{x^2}{4} + y^2 = 2$, або $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1$ – еліпс з півосями $a = 2\sqrt{2}$, $b = \sqrt{2}$;

4) $h = 16$; тоді $\frac{x^2}{4} + y^2 = 4$, або $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$ – еліпс з півосями $a = 4$, $b = 2$;

5) $h=11$; тоді $\frac{x^2}{4} + y^2 = 9$, або $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9} = 1$ – еліпс з півосями $a=6$, $b=3$.

Точка $M(2;1)$ лежить на лінії рівня (горизонталі) $h=18$. Градієнт напрямлений перпендикулярно дотичній, яку проведено до даній лінії рівня у цій точці (рис. 9.10). Знайдемо:

$$\left. \frac{\partial h}{\partial x} \right|_M = -\frac{x}{2} \Big|_M = -1, \quad \left. \frac{\partial h}{\partial y} \right|_M = -2y \Big|_M = -2,$$

отже,

$$\overrightarrow{\text{grad } h} \Big|_M = \{-1; -2\}, \quad \left| \overrightarrow{\text{grad } h} \Big|_M \right| = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}.$$

9.9. Складені функції та їх диференціювання

Нехай $z = f(x, y)$ – функція двох змінних x, y . І нехай ці змінні у свою чергу є функціями незалежної змінної t , тобто $x = x(t)$, $y = y(t)$. Тоді функція z буде складеною функцією змінної t :

$$z = F(t) = f(x(t), y(t)).$$

Теорема. Якщо функції $x = x(t)$, $y = y(t)$ диференційовні у точці t , а функція $z = f(x, y)$ диференційовна у відповідній точці (x, y) , то складена функція $z = F(t) = f(x(t), y(t))$ також диференційовна у точці t , і має місце наступне співвідношення:

$$F'(t) = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}. \quad (9.9.1)$$

Доведення. Надамо змінній t приріст Δt . Тоді функції x, y отримають прирости Δx і Δy , а функція z , у свою чергу, отримає приріст Δz . Оскільки z диференційовна у точці (x, y) , то:

$$\Delta z = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \Delta y + \alpha_1 \Delta x + \alpha_2 \Delta y,$$

де α_1, α_2 – нескінченно малі при $\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0$.

Поділимо обидві частини цієї рівності на Δt :

$$\frac{\Delta z}{\Delta t} = f'_x(x, y) \frac{\Delta x}{\Delta t} + f'_y(x, y) \frac{\Delta y}{\Delta t} + \alpha_1 \frac{\Delta x}{\Delta t} + \alpha_2 \frac{\Delta y}{\Delta t}.$$

Оскільки x, y диференційовні у точці t , то:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = x'(t), \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = y'(t).$$

Крім того x, y неперервні у точці t , отже:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta x = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta y = 0, \quad \text{звідси} \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \alpha_1 = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \alpha_2 = 0.$$

Таким чином, існує $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta t} = f'_x(x, y)x'(t) + f'_y(x, y)y'(t)$, тобто має місце рівність (9.9.1).

Теорему доведено.

Зокрема, якщо $y = \varphi(x)$, то $z = f(x, \varphi(x))$, і

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dx}. \quad (9.9.2)$$

Наведена теорема поширюється на більш загальний випадок: нехай $z = f(u, v)$, де $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$. Тоді $z = F(x, y)$, і

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x}, \quad (9.9.3)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y}. \quad (9.9.4)$$

Приклади

1. Знайти $\frac{dz}{dt}$, якщо $z = e^{2x-3y}$, де $x = \operatorname{tg} t$, $y = t^2 - t$.

За формулою (9.9.1) маємо:

$$\frac{dz}{dt} = 2e^{2x-3y} \cdot \frac{1}{\cos^2 t} - 3e^{2x-3y} (2t-1) = e^{2\operatorname{tg} t - 3t^2 + 3t} \left(\frac{2}{\cos^2 t} - 6t + 3 \right).$$

2. Знайти $\frac{dy}{dx}$, якщо $y = (\ln x)^{\sin x}$.

Позначимо: $u = \ln x$, $v = \sin x$. Тоді $y = u^v = u(x)^{v(x)}$. Отже,

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{\partial y}{\partial u} \frac{du}{dx} + \frac{\partial y}{\partial v} \frac{dv}{dx} = v u^{v-1} \cdot \frac{1}{x} + u^v \ln u \cdot \cos x = \\ &= \frac{(\sin x)(\ln x)^{\sin x - 1}}{x} + (\ln x)^{\sin x} \ln \ln x \cdot \cos x. \end{aligned}$$

Нагадаємо, що раніше похідні показниково-степеневих функцій ми знаходили шляхом логарифмічного диференціювання (див. п. 5.9).

3. Знайти $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{dz}{dx}$, якщо $z = \ln(e^x + e^y)$, де $y = \frac{1}{3}x^3 + x$.

Знайдемо $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{e^x}{e^x + e^y}$.

Згідно з формулою (9.9.2):

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dx} = \frac{e^x}{e^x + e^y} + \frac{e^y}{e^x + e^y} (x^2 + 1) = \frac{e^x + e^{\frac{1}{3}x^3 + x} (x^2 + 1)}{e^x + e^{\frac{1}{3}x^3 + x}}.$$

4. Знайти dz , якщо $z = u^2v - uv^2$, де $u = x \sin y$, $v = y \cos x$.

Маємо: $z = F(x, y)$, $dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$.

Згідно з формулами (9.9.3), (9.9.4):

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = (2uv - v^2) \sin y + (u^2 - 2uv)(-y \sin x), \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} = (2uv - v^2) x \cos y + (u^2 - 2uv) \cos x. \end{aligned}$$

Отже:

$$dz = \left((2uv - v^2) \sin y - (u^2 - 2uv) y \sin x \right) dx + \left((2uv - v^2) x \cos y + (u^2 - 2uv) \cos x \right) dy.$$

9.10. неявні функції та їх диференціювання

Як ми знаємо, рівняння деяких ліній на площині частіше записуються не у вигляді явної залежності ординати точки на лінії від її абсциси $y = f(x)$, а у вигляді співвідношення більш загального, так званого неявного вигляду, яке пов'язує змінні x та y :

$$F(x, y) = 0. \tag{9.10.1}$$

Наприклад, рівняння еліпсу:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

З рівняннями такого типу досить часто доводиться мати справу в багатьох задачах теорії та практики. У зв'язку з цим виникає питання: за яких умов рівняння (9.10.1) визначатиме змінну y як функцію

змінної x ? І що можна сказати про похідну y'_x цієї функції? Частково ми це питання вже розглядали в п. 5.10. Зауважимо, що розв'язати рівняння (9.10.1) відносно змінної y (також, як і відносно змінної x) вдається далеко не завжди. Якщо, наприклад, у вищезазваному рівнянні еліпсу це можливо:

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2},$$

то у випадку, наприклад, такого рівняння:

$$y - x - \varepsilon \sin y = 0 \quad (0 < \varepsilon < 1)$$

такої можливості нема.

Означення. Функція $y = f(x)$ називається *неявною*, якщо її може бути визначено з нерозв'язаного відносно y рівняння вигляду (9.10.1).

Відмітимо, що не будь-яке рівняння вигляду (9.10.1) визначає y як неявну функцію змінної x . Наприклад, рівняння:

$$x^2 + y^2 + 1 = 0$$

не визначає ані y , як функцію змінної x , ані x як функцію змінної y .

Сформулюємо теорему, котра встановлює умови, за яких рівняння (9.10.1) визначає y як неявну функцію змінної x і дає формулу для обчислення похідної цієї функції.

Теорема (про існування неявної функції). *Нехай виконано наступні умови:*

- 1) функція $F(x, y)$ має в околі точки (x_0, y_0) неперервні частинні похідні $F'_x(x, y)$, $F'_y(x, y)$;
- 2) $F(x_0, y_0) = 0$;
- 3) $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$.

Тоді існує прямокутник $K = \{(x, y) : |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b\}$, у якому рівняння (9.10.1) визначає y як неявну функцію змінної x . Ця функція $y = f(x)$ неперервно диференційовна на інтервалі $(x_0 - a, x_0 + a)$, та справедлива формула:

$$f'(x) = - \frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)} \Big|_{y=f(x)}. \quad (9.10.2)$$

Доведення цієї теореми ми не наводимо. Існує її узагальнення на випадок системи рівнянь вигляду:

$$F_1(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = 0,$$

...

$$F_m(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = 0.$$

Приклад. Довести, що рівняння:

$$y - \varepsilon \sin y = x \quad (0 < \varepsilon < 1) \tag{9.10.3}$$

визначає y як неявну функцію змінної x та знайти її похідну.

Скористаємось теоремою про існування неявної функції. У даному випадку $F(x, y) = y - \varepsilon \sin y - x$. Очевидно, що $F(0, 0) = 0$. Знайдемо:

$$F'_y(0, 0) = (1 - \varepsilon \cos y)|_{y=0} = 1 - \varepsilon \neq 0.$$

Таким чином, в якості точки (x_0, y_0) може бути використано точку $(0, 0)$. Тоді згідно з теоремою існує прямокутник $K_0 = \{(x, y) : |x| \leq a, |y| \leq b\}$, у якому рівняння (9.10.3) визначає y як неявну функцію від x . Знайдемо похідну цієї функції. Маємо: $F'_x = -1$, $F'_y = 1 - \varepsilon \cos y$. Згідно з формулою (9.10.2):

$$y'_x = -\frac{F'_x}{F'_y} = \frac{1}{1 - \varepsilon \cos y}.$$

9.11. Дотична площина і нормаль до поверхні

Розглянемо у просторі поверхню P , яку задано рівнянням:

$$F(x, y, z) = 0. \tag{9.11.1}$$

Означення. Пряма лінія називається *дотичною до поверхні P* у точці $M(x_0, y_0, z_0) \in P$, якщо вона є дотичною до якої-небудь кривої, яка лежить на поверхні P і проходить через точку M (рис. 9.11.1).

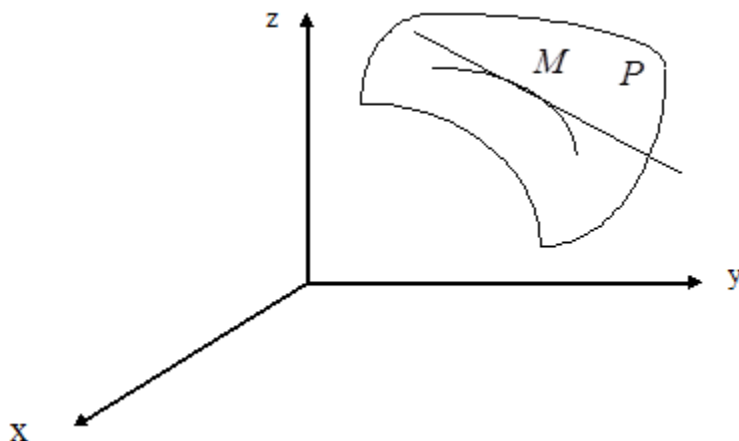


Рис. 9.11

Оскільки через точку M проходить безліч різних кривих, що лежать на поверхні P , то й дотичних до поверхні, що проходять через точку M , буде, взагалі кажучи, безліч.

Означення. Якщо в точці $M(x_0, y_0, z_0) \in P$ всі похідні $\partial F/\partial x$, $\partial F/\partial y$, $\partial F/\partial z$ існують неперервні та хоча б одна з них відмінна від нуля, то точка M називається *звичайною* точкою поверхні P . Якщо у точці M хоча б одна з цих похідних не існує, або всі вони в цій точці дорівнюють нулю, то точка M називається *особливою* точкою поверхні P .

Теорема. Якщо точка $M(x_0, y_0, z_0) \in P$ є *звичайною* точкою поверхні P , то всі дотичні до поверхні P у точці M лежать в одній площині.

Доведення. Розглянемо на поверхні P деяку лінію L , яка проходить через точку M . Нехай криву L задано параметричними рівняннями:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t). \quad (19.11.2)$$

Тоді вектор $\vec{r}(t) = \{\varphi(t), \psi(t), \chi(t)\}$ – радіус-вектор довільної точки на кривій L . Зокрема, якщо $x_0 = \varphi(t_0)$, $y_0 = \psi(t_0)$, $z_0 = \chi(t_0)$, то $\vec{r}(t_0)$ – радіус-вектор точки $M(x_0, y_0, z_0)$.

Вектор

$$\frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \left\{ \frac{d\varphi(t)}{dt}, \frac{d\psi(t)}{dt}, \frac{d\chi(t)}{dt} \right\}$$

є дотичним вектором до кривої L у довільній точці цієї кривої. Зокрема:

$$\frac{d\vec{r}(t_0)}{dt} = \left\{ \frac{d\varphi(t_0)}{dt}, \frac{d\psi(t_0)}{dt}, \frac{d\chi(t_0)}{dt} \right\}$$

– дотичний вектор до кривої L у точці $M(x_0, y_0, z_0)$.

Якщо вирази (9.11.2) підставити у рівняння (9.11.1), то одержимо тотожність відносно t , оскільки крива L лежить на поверхні P :

$$F(\varphi(t), \psi(t), \chi(t)) \equiv 0. \quad (9.11.3)$$

Здиференціюємо цю тотожність за t :

$$\frac{\partial F}{\partial x} \frac{d\varphi(t)}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{d\psi(t)}{dt} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{d\chi(t)}{dt} \equiv 0.$$

Зокрема, цю рівність виконано для точки M :

$$\left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_M \cdot \frac{d\varphi(t_0)}{dt} + \left. \frac{\partial F}{\partial y} \right|_M \cdot \frac{d\psi(t_0)}{dt} + \left. \frac{\partial F}{\partial z} \right|_M \cdot \frac{d\chi(t_0)}{dt} = 0.$$

Вектор $\left\{ \left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_M, \left. \frac{\partial F}{\partial y} \right|_M, \left. \frac{\partial F}{\partial z} \right|_M \right\}$ є градієнтом функції $u = F(x, y, z)$ у точці

M . Таким чином скалярний добуток цього вектора і дотичного в точці M дорівнює нулю:

$$\left(\overrightarrow{\text{grad } F} \Big|_M, \frac{d\vec{r}(t_0)}{dt} \right) = 0.$$

Отже вектор $\overrightarrow{\text{grad } F} \Big|_M$ перпендикулярний до вектора $\frac{d\vec{r}(t_0)}{dt}$. Про-

ведене міркування справедливе для будь-якої кривої L , яка лежить на поверхні P і проходить через точку M . Отже дотичний вектор до будь-якої такої кривої перпендикулярний до одного й того ж вектора $\overrightarrow{\text{grad } F} \Big|_M$. Тому всі дотичні, які проведено до поверхні P у точці M

лежать в одній площині, нормальним до якої є саме вектор $\vec{N} = \overrightarrow{\text{grad } F} \Big|_M$. Теорему доведено.

Означення. Площина, у якій розташовано всі дотичні прямі до кривих на поверхні P , які проходять через точку M , називається *дотичною площиною* до поверхні P у точці M (рис. 9.12).

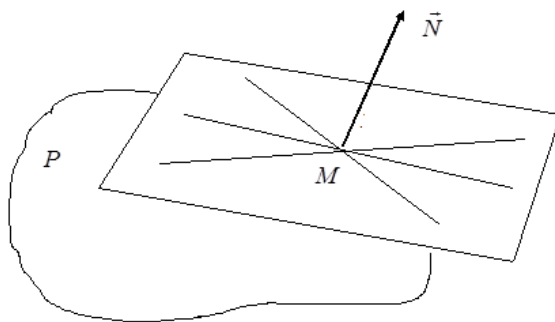


Рис. 9.12

Якщо точка M – звичайна точка поверхні P , то дотична площина у цій точці обов'язково існує. Але в особливих точках дотичної площини може не існувати. Дотичні прямі до поверхні у такій точці можуть не лежати в одній площині. Наприклад, вершина конічної поверхні $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ є особливою точкою. Дотичні до конічної поверхні у цій точці не лежать в одній площині (вони самі утворюють конічну поверхню).

Користуючись рівняннями площини у просторі, яка проходить через точку $M(x_0, y_0, z_0)$ і має нормальний вектор $\vec{N} = \{A, B, C\}$:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0,$$

і тим, що, як ми довели,

$$\vec{N} = \overline{\text{grad } F} \Big|_M = \left\{ \frac{\partial F}{\partial x} \Big|_M, \frac{\partial F}{\partial y} \Big|_M, \frac{\partial F}{\partial z} \Big|_M \right\},$$

можемо записати рівняння дотичної площини до поверхні P у точці M :

$$\frac{\partial F}{\partial x} \Big|_M (x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y} \Big|_M (y - y_0) + \frac{\partial F}{\partial z} \Big|_M (z - z_0) = 0. \quad (9.11.4)$$

Якщо, зокрема, рівняння поверхні задано в формі $z = f(x, y)$, то рівняння дотичної площини набуває вигляду:

$$z - z_0 = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} (x - x_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} (y - y_0). \quad (9.11.5)$$

Означення. Пряма лінія, яку проведено через точку $M(x_0, y_0, z_0)$ поверхні P перпендикулярно дотичній площині, називається *нормаллю до поверхні*.

Користуючись канонічними рівняннями прямої лінії у просторі, яка проходить через точку $M(x_0, y_0, z_0)$ і має напрямний вектор $\{m, n, k\}$:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{k},$$

а також тим, що напрямним вектором у даному випадку є вектор $\vec{N} = \overline{\text{grad } F}\Big|_M$, можемо записати рівняння нормалі:

$$\frac{x - x_0}{\frac{\partial F}{\partial x}\Big|_M} = \frac{y - y_0}{\frac{\partial F}{\partial y}\Big|_M} = \frac{z - z_0}{\frac{\partial F}{\partial z}\Big|_M} \quad (9.11.6)$$

Якщо, зокрема, рівняння поверхні задано у вигляді $z = f(x, y)$, то рівняння нормалі набуває вигляду:

$$\frac{x - x_0}{f'_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f'_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}.$$

Зауваження. Нехай поверхня $F(x, y, z) = 0$ є поверхнею рівня для деякої функції 3-х змінних $u(x, y, z)$, тобто:

$$F(x, y, z) = u(x, y, z) - C = 0.$$

Тоді вектор нормалі до цієї поверхні рівня, який проходить через точку $M(x_0, y_0, z_0)$, є $\vec{N} = \overline{\text{grad } F}\Big|_M = \overline{\text{grad } u}\Big|_M$. Таким чином, напрям градієнта функції $u(x, y, z)$ в точці M співпадає з напрямом нормалі до поверхні рівня функції $u(x, y, z)$, яка проходить через точку M .

Приклад. Знайти рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні, яку задано рівнянням:

$$3xy^2 - 2yz + 4xz - 4 = 0 \quad (9.11.7)$$

у точці $M(x_0, y_0, z_0)$, якщо $x_0 = -1$, $y_0 > 0$, $z_0 = -2$.

Оскільки точка M лежить на поверхні, її координати повинні задовольняти рівняння поверхні (9.11.7). Звідси знайдемо ординату точки дотику:

$$3 \cdot (-1) y_0^2 - 2 y_0 \cdot (-2) + 4 \cdot (-1) \cdot (-2) - 4 = 0.$$

Звідси, враховуючи умову $y_0 > 0$, дістаємо: $y_0 = 2$, і, таким чином, $M(-1; 2; -2)$ – точка дотику.

Знайдемо:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{grad } F}\Big|_M &= \left\{ \frac{\partial F}{\partial x}\Big|_M, \frac{\partial F}{\partial y}\Big|_M, \frac{\partial F}{\partial z}\Big|_M \right\} = \\ &= \left\{ (3y^2 + 4z)\Big|_M, (6xy - 2z)\Big|_M, (-2y + 4x)\Big|_M \right\} = \{4, -8, -8\}. \end{aligned}$$

У якості нормального вектора можна взяти цей вектор, або колінеарний йому, більш короткий вектор $\vec{n} = \{1, -2, -2\}$. Отже, рівняння дотичної площини, згідно з (9.11.4), має вигляд:

$$(x+1) - 2(y-2) - 2(z+2) = 0,$$

а рівняння нормалі, згідно з (9.11.6):

$$\frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+2}{-2}.$$

9.12. Частинні похідні та диференціали вищих порядків

Розглянемо функцію двох змінних $z = f(x, y)$. Нехай у неї існують частинні похідні z'_x, z'_y . Ці частинні похідні у загальному випадку також являються функціями змінних x, y : $z'_x = z'_x(x, y), z'_y = z'_y(x, y)$. Від цих функцій теж можна обчислювати частинні похідні по x та по y (звичайно, у випадку їх існування).

Тобто, можна знайти $(z'_x)'_x, (z'_x)'_y, (z'_y)'_x, (z'_y)'_y$. Ці частинні похідні називаються *частинними похідними 2-го порядку* від функції $z = f(x, y)$, і позначаються наступним чином:

$$\begin{aligned} (z'_x)'_x &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = z''_{xx} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, & (z'_x)'_y &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = z''_{xy} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \\ (z'_y)'_x &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = z''_{yx} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}, & (z'_y)'_y &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = z''_{yy} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}. \end{aligned}$$

Похідні $z''_{xy} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, z''_{yx} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ називаються *мішаними*.

Приклад. Знайти частинні похідні 2-го порядку від функції:

$$z = 5x^3 - 4x^2y + 8xy^2 - 3y^3.$$

Знайдемо спочатку частинні похідні 1-го порядку:

$$z'_x = 15x^2 - 8xy + 8y^2, \quad z'_y = -4x^2 + 16xy - 9y^2.$$

А тепер 2-го:

$$z''_{xx} = 30x - 8y, \quad z''_{xy} = -8x + 16y,$$

$$z''_{yx} = -8x + 16y, \quad z''_{yy} = 16x - 18y.$$

Ми бачимо, що похідні z''_{xy} і z''_{yx} співпадають. Випадково це, чи ні? Чи завжди будуть дорівнювати одна одної мішані частинні похідні, тобто чи залежать ці частинні похідні від порядку диференціювання? Відповідь на це питання дає теорема, яку ми наводимо без доведення.

Теорема Шварца¹ (про рівність мішаних похідних). Якщо функція $z = f(x, y)$ визначена разом зі своїми похідними $z'_x, z'_y, z''_{xy}, z''_{yx}$ у деякому околі точки $M_0(x_0, y_0)$, і похідні z''_{xy} та z''_{yx} неперервні у точці M_0 , то справджується рівність:

$$z''_{xy} \Big|_{M_0} = z''_{yx} \Big|_{M_0}$$

Таким чином, у розглянутому вище прикладі збіг частинних похідних не є випадковим – вони неперервні у будь-якій точці площини Oxy . Але існують і інші приклади. Розглянемо функцію:

$$z = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}, & \text{якщо } x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & \text{якщо } x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$$

Знайдемо:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \begin{cases} \frac{y(x^4 - y^4 + 4x^2y^2)}{(x^2 + y^2)^2}, & \text{якщо } x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & \text{якщо } x^2 + y^2 = 0, \end{cases}$$

$$\text{оскільки } z'_x(0,0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = 0.$$

Звідси:

$$\frac{\partial z}{\partial x}(0, y) = -y, \quad \frac{\partial^2 z(0, y)}{\partial x \partial y} = -1, \text{ зокрема, } \frac{\partial^2 z(0,0)}{\partial x \partial y} = -1.$$

$$\text{Аналогічно обчислюється } \frac{\partial^2 z(0,0)}{\partial y \partial x} = 1.$$

¹ Шварц Карл Герман (1843–1921) – німецький математик.

Отже, для даної функції $z''_{xy}(0,0) \neq z''_{yx}(0,0)$, тобто результат диференціювання залежить від порядку диференціювання. Це пов'язано з тим, що похідні z''_{xy} , z''_{yx} у точці $(0,0)$ розривні.

Ми, тем не менш, у подальшому будемо мати справу тільки з такими випадками, де рівність $z''_{xy} = z''_{yx}$ справджується.

Аналогічним чином визначаються частинні похідні вищих порядків. Наприклад, похідні 3-го порядку:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right), & \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right), \\ \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \right), & \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right), \\ \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \right), & \frac{\partial^3 z}{\partial y^2 \partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right), \\ \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right), & \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right). \end{aligned}$$

Визначимо тепер поняття диференціалу 2-го порядку.

Означення. Диференціалом 2-го порядку від функції $z = f(x, y)$ називається диференціал від диференціалу 1-го порядку, обчислений у припущенні, що dx і dy є сталими.

Позначається:

$$d^2 z = d(dz).$$

Розглянемо цю рівність детальніше:

$$\begin{aligned} d^2 z &= d(dz) = d \left(\frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy \right) = \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy \right) dx + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy \right) dy = \\ &= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2. \end{aligned}$$

Наприклад, для функції $z = x^2 \cos y$:

$$d^2 z = 2 \cos y dx^2 - 4x \sin y dx dy - x^2 \cos y dy^2$$

(перевірте самостійно).

Аналогічно визначаються диференціали 3-го і вищих порядків:

$$d^3 z = d(d^2 z), \dots, d^n z = d(d^{n-1} z).$$

9.13. Формула Тейлора для функції багатьох змінних

З розділу «Диференціальне числення функцій однієї змінної» ми знаємо, що функцію $F(t)$ за умови існування її $n+1$ похідних у деякому околі точки t_0 може бути подано за формулою Тейлора (див. п. 5.15):

$$F(t) = F(t_0) + F'(t_0)(t-t_0) + \frac{1}{2!} F''(t_0)(t-t_0)^2 + \dots + \frac{1}{n!} F^{(n)}(t_0)(t-t_0)^n + \frac{1}{(n+1)!} F^{(n+1)}(t_0 + \theta(t-t_0))(t-t_0)^{n+1} \quad (0 < \theta < 1)$$

(залишковий член взято в формі Лагранжа). Покладемо у цій формулі:

$$F(t) - F(t_0) = \Delta F(t_0).$$

Тоді:

$$\Delta F(t_0) = dF(t_0) + \frac{1}{2!} d^2 F(t_0) + \dots + \frac{1}{n!} d^n F(t_0) + \frac{1}{(n+1)!} d^{n+1} F(t_0 + \theta \cdot \Delta t)$$

$$(0 < \theta < 1). \tag{9.13.1}$$

Підкреслимо, що величина dt , яка входить у різних степенях у вирази диференціалів у правій частині, точно дорівнює приросту Δt , яке фігурує в прирості $\Delta F(t_0)$ у лівій частині.

Розповсюдимо цю формулу на випадок функції багатьох змінних. Для спрощення викладення знову обмежимося випадком функції двох змінних $z = f(x, y)$.

Припустимо, що в деякому околі точки (x_0, y_0) функція $z = f(x, y)$ має неперервні частинні похідні до $(n+1)$ -го порядку включно. Надамо x_0 та y_0 прирости відповідно Δx та Δy так, щоб відрізок, що з'єднує точки (x_0, y_0) та $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ не вийшов за межі цього околу. Параметричними рівняннями такого відрізка є

$$x = x_0 + t\Delta x, \quad y = y_0 + t\Delta y \quad (0 \leq t \leq 1). \tag{9.13.2}$$

Підставимо вирази (9.13.2) замість аргументів функції $f(x, y)$. Тоді отримаємо функцію однієї змінної t :

$$F(t) = f(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y).$$

Розглянемо приріст функції $f(x, y)$ в точці (x_0, y_0) :

$$\Delta f(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0).$$

Він дорівнює приросту функції $F(t)$:

$$\Delta F(0) = F(1) - F(0).$$

Функція $F(t)$ має в околі точки $t = 0$ неперервні похідні до $(n + 1)$ -го порядку включно, тому можна застосувати формулу Тейлора (9.13.1):

$$\Delta F(0) = F(1) - F(0) = dF(0) + \frac{1}{2!} d^2 F(0) + \dots + \frac{1}{n!} d^n F(0) + \frac{1}{(n+1)!} d^{n+1} F(\theta)$$

($0 < \theta < 1$). При цьому диференціал dt , який міститься у виразах правої частини, дорівнює $\Delta t = 1 - 0 = 1$. Користуючись формулою для похідної складеної функції, знайдемо:

$$\begin{aligned} dF(0) &= \frac{dF(0)}{dt} \Delta t = \frac{dF(0)}{dt} = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \Delta y = \\ &= \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} dy = df(x_0, y_0), \\ d^2 F(0) &= d(dF(0)) = \frac{d^2 F(0)}{dt^2} \Delta t^2 = \frac{d^2 F(0)}{dt^2} = \\ &= \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2} dy^2 = d^2 f(x_0, y_0). \end{aligned}$$

Продовжуючи так далі, дістанемо:

$$d^n F(0) = d^n f(x_0, y_0),$$

$$d^{n+1} F(\theta) = d^{n+1} f(x_0 + \theta \cdot \Delta x, y_0 + \theta \cdot \Delta y).$$

Таким чином, дістаємо формулу:

$$\begin{aligned} \Delta f(x_0, y_0) &= f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = df(x_0, y_0) + \\ &+ \frac{1}{2!} d^2 f(x_0, y_0) + \dots + \frac{1}{n!} d^n f(x_0, y_0) + \frac{1}{(n+1)!} d^{n+1} f(x_0 + \theta \cdot \Delta x, y_0 + \theta \cdot \Delta y). \end{aligned} \tag{9.13.3}$$

Формула (9.13.3) називається *формулою Тейлора для функції двох змінних* $u = f(x, y)$ з залишковим членом у формі Лагранжа. Якщо цю формулу записати в розгорнутому вигляді, розписавши вирази для диференціалів, вона набуває набагато складнішого вигляду:

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \Delta y +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2!} \left[\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2} \Delta x^2 + 2 \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y} \Delta x \Delta y + \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2} \Delta y^2 \right] + \\
& + \frac{1}{3!} \left[\frac{\partial^3 f(x_0, y_0)}{\partial x^3} \Delta x^3 + 3 \frac{\partial^3 f(x_0, y_0)}{\partial x^2 \partial y} \Delta x^2 \Delta y + 3 \frac{\partial^3 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y^2} \Delta x \Delta y^2 + \frac{\partial^3 f(x_0, y_0)}{\partial y^3} \Delta y^3 \right] + \dots
\end{aligned}
\tag{9.13.4}$$

Приклад. Написати розвинення за формулою Тейлора функції $u = \frac{x}{y}$ в околі точки $M(1,1)$, обмежившись доданками до 3-го порядку

включно відносно $\Delta x, \Delta y$.

Маємо: $x_0 = 1, y_0 = 1,$

$$f(x, y)|_M = xy^{-1}|_M = 1,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}|_M = y^{-1}|_M = 1, \quad \frac{\partial f}{\partial y}|_M = -xy^{-2}|_M = -1,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}|_M = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}|_M = -y^{-2}|_M = -1, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}|_M = 2xy^{-3}|_M = 2,$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}|_M = 0, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}|_M = 0, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^3}|_M = 2y^{-3}|_M = 2,$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}|_M = -6xy^{-4}|_M = -6.$$

Тому, згідно з (9.13.4) маємо:

$$\begin{aligned}
\frac{1 + \Delta x}{1 + \Delta y} &= 1 + \Delta x - \Delta y + \frac{1}{2!} (-2\Delta x \Delta y + 2\Delta y^2) + \frac{1}{3!} (6\Delta x \Delta y^2 - 6\Delta y^3) + \dots = \\
&= 1 + \Delta x - \Delta y - \Delta x \Delta y + \Delta y^2 + \Delta x \Delta y^2 - \Delta y^3 + \dots
\end{aligned}$$

9.14. Екстремум функції двох змінних

Означення. Точка $M_0(x_0, y_0)$ називається точкою максимуму функції $z = f(x, y)$, якщо існує такий окіл D цієї точки, що для всіх інших точок $M(x, y) \in D$ виконується нерівність:

$$f(x, y) < f(x_0, y_0).$$

Тобто значення функції $z = f(x, y)$ у точці M_0 є найбільшим порівняно з її значеннями у деякому (може бути достатньо малому) околі цієї точки.

Аналогічно визначається *точка мінімуму*. Для такої точки $M_0(x_0, y_0)$ виконано нерівність:

$$f(x, y) > f(x_0, y_0)$$

для всіх точок $M(x, y)$ з деякого околу точки M_0 .

Точки максимуму і мінімуму називаються *точками екстремуму* функції. На рис. 9.13 точки M_1 і M_3 є точками максимуму, а точка M_2 – точкою мінімуму.

Теорема (необхідна умова екстремуму функції). Якщо точка $M_0(x_0, y_0)$ є точкою екстремуму функції $z = f(x, y)$, і у цій точці існують частинні похідні f'_x, f'_y , то виконується рівність:

$$f'_x(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = 0.$$

Доведення. Зафіксуємо у функції $z = f(x, y)$ аргумент y , поклавши $y = y_0$. Тоді матимемо функцію однієї змінної $z = \varphi(x) = f(x, y_0)$, і у точці $x = x_0$ ця функція досягає екстремуму. Крім того, існує $\varphi'(x_0)$, оскільки $\varphi'(x) = f'_x(x, y_0)$, отже, на підставі необхідної умови екстремуму для функції однієї змінної маємо: $\varphi'(x_0) = f'_x(x_0, y_0) = 0$.

Аналогічно доводиться, що $f'_y(x_0, y_0) = 0$

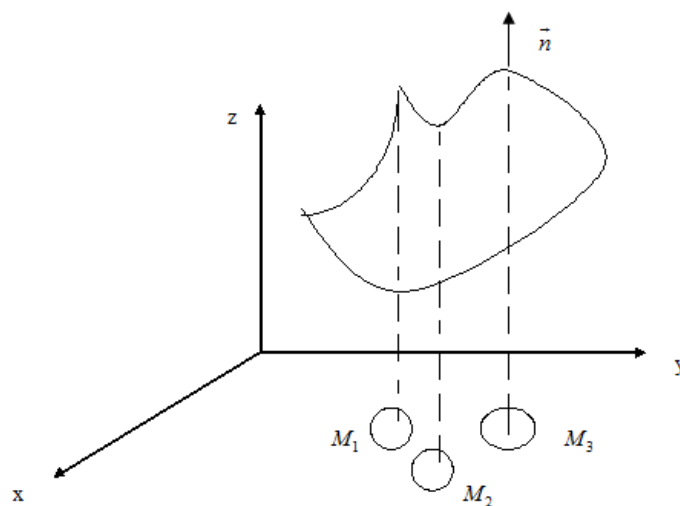


Рис. 9.13

Зауважимо, що обернене твердження до цієї теореми несправедливе, тобто з того, що у деякій точці частинні похідні функції перетворюються на нуль, не випливає наявність у цій точці екстремуму. Розглянемо, наприклад, функцію $z = x^2 - y^2$. Маємо $f'_x = 2x$, $f'_y = -2y$, і обидві ці похідні дорівнюють нулю у точці $(0,0)$. Разом з цим екстремуму у цій точці нема. Дійсно, значення функції у цій точці $f(0,0) = 0$. Зрушимося з цієї точки на скільки завгодно малу величину ε вздовж осі Ox . Одержимо $f(\varepsilon, 0) = \varepsilon^2 > f(0,0)$. А якщо зрушимося на величину ε вздовж осі Oy , то одержимо: $f(0, \varepsilon) = -\varepsilon^2 < f(0,0)$. “Графіком” цієї функції є гіперболічний параболоїд, і точка $(0,0)$ – його сідлова точка (див. п. 8.20, рис. 8.52).

З іншого боку екстремум може бути в тих точках, де похідні не існують. Наприклад, функція $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ має екстремум (саме мінімум) у точці $(0,0)$, а похідні:

$$z'_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad z'_y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

у цій точці не існують.

У точці екстремуму вектор нормалі \vec{n} до поверхні $z = f(x, y)$ напрямлений вздовж осі Oz , оскільки перші дві його координати дорівнюють нулю (рис. 9.13).

Таким чином, точки, в яких частинні похідні функції дорівнюють нулю, тільки *можуть бути* точками екстремуму цієї функції, а гарантії в цьому нема. Такі точки називаються *критичними*. Як переконатися у дійсній наявності екстремуму в критичній точці функції? Відповідь на це дає наступна теорема, яку ми наводимо без доведення.

Теорема (достатні умови екстремуму). *Нехай у критичній точці $M_0(x_0, y_0)$ функція $z = f(x, y)$ має неперервні частинні похідні другого порядку. Якщо визначник*

$$\Delta(x_0, y_0) = \begin{vmatrix} f''_{xx}(x_0, y_0) & f''_{xy}(x_0, y_0) \\ f''_{xy}(x_0, y_0) & f''_{yy}(x_0, y_0) \end{vmatrix} > 0,$$

то функція $z = f(x, y)$ має в точці M_0 екстремум, а саме, максимум, якщо $f''_{xx}(x_0, y_0) < 0$, і мінімум, якщо $f''_{xx}(x_0, y_0) > 0$.

Якщо $\Delta(x_0, y_0) < 0$, то екстремуму в точці M_0 немає.

Якщо $\Delta(x_0, y_0) = 0$, то екстремум в точці M_0 може бути, а може і не бути (так званий сумнівний випадок, і для встановлення наявності чи відсутності екстремуму тут необхідні додаткові дослідження).

Приклади

1. Дослідити на екстремум функцію:

$$z = x^3 + y^3 - 9xy.$$

1). Знайдемо критичні точки:

$$z'_x = 3x^2 - 9y, \quad z'_y = 3y^2 - 9x.$$

Дорівнюючи ці похідні до нуля, дістанемо систему алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} x^2 - 3y = 0, \\ y^2 - 3x = 0. \end{cases}$$

Розв'язуючи цю систему, дістанемо дві критичні точки $M_0(0,0)$, $M_1(3,3)$.

2). Перевіримо виконання у точках M_0, M_1 достатніх умов екстремуму. Маємо:

$$z''_{xx} = 6x, \quad z''_{xy} = -9, \quad z''_{yy} = 6y,$$

$$\Delta(x, y) = 36xy - 81.$$

У точці $M_0(0,0)$ маємо: $\Delta(0,0) = -81 < 0$ – отже в цій точці екстремуму нема. У точці $M_1(3,3)$ маємо: $\Delta(3,3) = 36 \cdot 3 \cdot 3 - 81 = 243 > 0$ – отже в цій точці є екстремум, а саме мінімум, оскільки $z''_{xx}(M_1) = 6 \cdot 3 = 18 > 0$. Значення функції у цій точці $f(3,3) = -27$.

2. Дослідити на екстремум функцію:

$$z = x^4 + y^4.$$

Критичною є тільки точка $(0,0)$, оскільки $z'_x = 4x^3$, $z'_y = 4y^3$. У цій точці:

$$z''_{xx}|_{x=y=0} = 12x^2|_{x=0} = 0,$$

$$z''_{xy} = 0, \quad z''_{yy}|_{x=y=0} = 12y^2|_{y=0} = 0,$$

отже, $\Delta(0,0) = 0$, і виникає сумнівний випадок, теорема не дає відповіді. Але з самої функції $z = x^4 + y^4$ видно, що $z(0,0) = 0$, а у решті точок $z > 0$, отже у точці $(0,0)$ маємо мінімум.

9.15. Найбільше та найменше значення функції в замкненій обмеженій множині

Відомо, що функція $z = f(x, y)$, задана і неперервна в замкненій та обмеженій множині G , досягає в цій множині свого найбільшого та найменшого значень (2-а теорема Вейерштрасса). Поставимо задачу знаходження цих значень. У внутрішніх точках множини диференційовна функція може набувати цих значень лише в точках локального екстремуму. Тому треба знайти критичні точки функції $z = f(x, y)$, які лежать всередині множини G . Для цього, як ми знаємо, треба знайти точки, в яких частинні похідні 1-го порядку нашої функції перетворюються на нуль або не існують. Потім обчислити значення функції в цих точках. Далі треба знайти найбільше та найменше значення нашої функції на межі множини G . Використовуючи рівняння межі (на різних її частинах це можуть бути різні рівняння), цю задачу зводять до знаходження найбільшого та найменшого значень функції однієї змінної на деякому відрізку. Серед всіх, здобутих таким чином значень, обирають найбільше та найменше.

Приклади

1. Знайти найбільше та найменше значення функції:

$$z = x^2 y(2 - x - y)$$

на множині $G = \{x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 6\}$ (рис. 9.14).

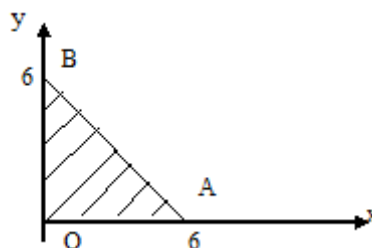


Рис. 9.14

Знайдемо критичні точки нашої функції. Маємо:

$$z'_x = xy(4 - 3x - 2y), \quad z'_y = x^2(2 - x - 2y).$$

Дорівнюючи ці похідні до нуля і скорочуючи на xy і x^2 (всередині трикутника OAB $x \neq 0, y \neq 0$), дістанемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 4 - 3x - 2y = 0, \\ 2 - x - 2y = 0. \end{cases}$$

З цієї системи знаходимо: $x = 1, y = \frac{1}{2}$. Таким чином, маємо одну

критичну точку $M_0\left(1, \frac{1}{2}\right)$, яка лежить всередині множини G . Значення функції у цій точці: $f\left(1, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$.

Дослідимо тепер функцію на межі множини G . Рівняння сторін OB та OA трикутника є відповідно $x = 0$ та $y = 0$, тому значення нашої функції дорівнює нулю в усіх точках відрізків OA і OB , зокрема, $z(O) = z(A) = z(B) = 0$. Розглянемо тепер відрізок AB . Його рівняння $y = 6 - x$, тому на цьому відрізку:

$$z = \varphi(x) = x^2(6-x)(2-x-6+x) = -4x^2(6-x), \quad 0 \leq x \leq 6.$$

Далі $\varphi'(x) = -48x + 12x^2 = 0$, звідки $x_1 = 0, x_2 = 4$. Всередині відрізка $[0, 6]$ лежить точка $x_2 = 4$. Значення функції $\varphi(x)$ у цій точці $\varphi(4) = -128$. Крім того $\varphi(0) = \varphi(6) = 0$.

Отже, найбільше значення функції $z = x^2y(2-x-y)$ на множині G дорівнює $\frac{1}{4}$, а найменше -128 .

1. Переріз каналу має форму рівнобічної трапеції $ABCD$ заданої площі S (рис. 9.15). Як обрати розміри l, b, α так, щоб оми́та поверхня каналу була найменшою?

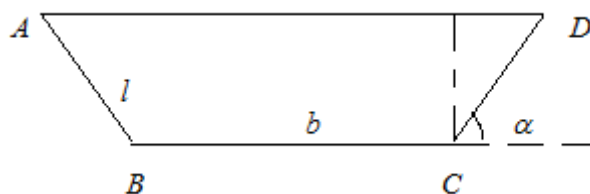


Рис. 9.15

Шукана поверхня каналу буде найменшою, якщо найменшою буде величина $z = |AB| + |BC| + |CD| = 2l + b$. Маємо:

$$S = \frac{|BC| + |AD|}{2} |EC|.$$

Оскільки $|EC| = l \sin \alpha$, $|BC| = b$, $|AD| = |BC| + 2|ED| = b + 2l \cos \alpha$, то:

$$S = \frac{b + b + 2l \cos \alpha}{2} l \sin \alpha = (b + l \cos \alpha) l \sin \alpha.$$

Звідси:

$$b = \frac{S}{l \sin \alpha} - l \cos \alpha.$$

А тоді:

$$z = f(\alpha, l) = 2l + \frac{S}{l \sin \alpha} - l \cos \alpha = l(2 - \cos \alpha) + \frac{S}{l \sin \alpha}.$$

З рис. 9.15 зрозуміло, що $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $0 < l < +\infty$. Таким чином, ми повинні функцію $f(\alpha, l)$ дослідити на найменше значення на множині

$G = \left\{ 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}, 0 < l < +\infty \right\}$ Функція $f(\alpha, l)$ неперервна в D і набуває лише додатних значень, оскільки $0 < \sin \alpha < 1$, $0 < \cos \alpha < 1$ при

$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Знайдемо:

$$f'_\alpha = l \sin \alpha - \frac{S \cos \alpha}{l \sin^2 \alpha}, \quad f'_l = 2 - \cos \alpha - \frac{S}{l^2 \sin \alpha}.$$

Ці частинні похідні існують у всіх точках множини G . Знайдемо точки, в яких f'_α , f'_l дорівнюють нулю:

$$\begin{cases} l^2 \sin^3 \alpha - S \cos \alpha = 0, \\ l^2 \sin \alpha (2 - \cos \alpha) - S = 0. \end{cases}$$

З другого рівняння цієї системи знаходимо: $l^2 = \frac{S}{(2 - \cos \alpha) \sin \alpha}$.

Підставляючи в перше рівняння, знайдемо α :

$$\frac{S \sin^2 \alpha}{2 - \cos \alpha} - S \cos \alpha = 0, \quad \sin^2 \alpha - 2 \cos \alpha + \cos^2 \alpha = 0,$$

$$1 - 2 \cos \alpha = 0, \quad \cos \alpha = \frac{1}{2}, \quad \alpha = \frac{\pi}{3}.$$

Тоді

$$l = \frac{\sqrt{S}}{\sqrt{\left(2 - \cos \frac{\pi}{3}\right) \sin \frac{\pi}{3}}} = \frac{2\sqrt{S}}{\sqrt[4]{27}}.$$

Легко переконатися, що у точці $\left(\alpha = \frac{\pi}{3}, l = \frac{2\sqrt{S}}{\sqrt[4]{27}}\right)$ функція $f(\alpha, l)$ досягає саме найменшого значення (зробіть це самостійно). Таким чином, шукані розміри:

$$\alpha = \frac{\pi}{3} = 60^\circ, \quad l = b = \frac{2\sqrt{S}}{\sqrt[4]{27}}.$$

9.16. Умовний екстремум

У багатьох задачах на найбільше та найменше значення функції питання зводиться до знаходження екстремумів функцій від таких декількох змінних, які не є цілком незалежними, а пов'язані деякими додатковими співвідношеннями. Зокрема, такого типу задачею є й задача знаходження найбільшого та найменшого значень функції на замкненій та обмеженій множині (змінні припускаються такими, що відповідна точка належить цій множині). Змінні також можуть бути такими, що задовольняють деякі рівняння. Тоді ми отримуємо задачу на так званий умовний екстремум.

Нехай на відкритій множині G площини Oxy задано функцію $\varphi(x, y)$. Нехай E – множина точок множини G , що задовольняють рівняння:

$$\varphi(x, y) = 0. \tag{9.16.1}$$

Рівняння (9.16.1) будемо називати рівнянням зв'язку.

Означення. Точка $(x_0, y_0) \in E$ називається *точкою умовного мінімуму (максимуму)* функції $z = f(x, y)$ за наявності зв'язку (9.16.1), якщо існує такий окіл D цієї точки, що для будь-якої іншої точки (x, y) цього околу, яка також належить множині E , виконано: $f(x, y) > f(x_0, y_0)$ ($f(x, y) < f(x_0, y_0)$).

Точки умовного мінімуму та максимуму функції називаються *точками умовного екстремуму* функції.

Припустимо, що з рівняння (9.16.1) можна виразити, наприклад, змінну y через змінну x : $y = \psi(x)$. Тоді, підставивши цей вираз у функцію $z = f(x, y)$, дістанемо функцію однієї змінної x : $z = F(x) = f(x, \psi(x))$. І тоді маємо задачу знаходження звичайного (безумовного) екстремуму функції F , яка залежить від однієї змінної x .

Приклад. Знайти точки умовного екстремуму функції $z = 1 - x^2 - y^2$, якщо $x + y = 1$.

Рівняння зв'язку $x + y = 1$ легко розв'язується відносно y : $y = 1 - x$. Підставимо цей вираз у функцію z :

$$z = 1 - x^2 - (1 - x)^2 = 2x - 2x^2.$$

Таким чином, отримали задачу на звичайний екстремум функції однієї змінної $z = F(x) = 2x - 2x^2$. Легко перевіряємо, що ця функція має максимум при $x = 1/2$. Якщо $x = 1/2$, то $z = 1/2$. Таким чином, точка $(1/2, 1/2)$ є точкою умовного максимуму функції $z = 1 - x^2 - y^2$ за наявності зв'язку $x + y = 1$, причому $z_{\max} = z(1/2, 1/2) = 1/2$.

Зауважимо в той же час, що справжній (глобальний) максимум функції $z = 1 - x^2 - y^2$ досягається при $x = y = 0$, і цей максимум дорівнює 1.

У загальному випадку розв'язати рівняння (9.16.1) відносно однієї зі змінних вдається далеко не завжди, тому для знаходження умовного екстремуму частіше використовується інший метод, а саме *метод Лагранжа*.

Розглянемо функцію 3 змінних:

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda \varphi(x, y),$$

де $x, y \in G$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Число λ називається *множником Лагранжа*, а функція $L(x, y, \lambda)$ – *функцією Лагранжа*.

Означення. Точка (x_0, y_0, λ_0) називається *стаціонарною точкою функції Лагранжа*, якщо:

$$\frac{\partial L(x_0, y_0, \lambda_0)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial L(x_0, y_0, \lambda_0)}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial L(x_0, y_0, \lambda_0)}{\partial \lambda} = \varphi(x_0, y_0) = 0.$$

Позначимо:

$$d_{xy}^2 L(x_0, y_0, \lambda_0) = \frac{\partial^2 L(x_0, y_0, \lambda_0)}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 L(x_0, y_0, \lambda_0)}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 L(x_0, y_0, \lambda_0)}{\partial y^2} dy^2$$

(тобто диференціал 2-го порядку функції $L(x, y, \lambda)$ у точці (x_0, y_0, λ_0) , якщо його обчислювати лише за змінними x, y , вважаючи λ сталою).

Теорема (достатні умови умовного екстремуму). Нехай функції $f(x, y)$, $\varphi(x, y)$ мають в околі точки (x_0, y_0) неперервні частинні похідні 2-го порядку, і нехай (x_0, y_0, λ_0) є стаціонарною точкою функції Лагранжа $L(x, y, \lambda)$.

Тоді, якщо $d_{xy}^2 L(x_0, y_0, \lambda_0) > 0$ ($d_{xy}^2 L(x_0, y_0, \lambda_0) < 0$) за умови, що

$$dx^2 + dy^2 > 0, \quad d\varphi(x_0, y_0) = \frac{\partial \varphi(x_0, y_0)}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi(x_0, y_0)}{\partial y} dy = 0, \quad (9.16.2)$$

то (x_0, y_0) є точкою умовного мінімуму (максимуму) функції $f(x, y)$ за наявності зв'язку $\varphi(x, y) = 0$. Якщо при виконанні умов (9.16.2) диференціал $d_{xy}^2 L(x_0, y_0, \lambda_0)$ може бути як додатним, так й від'ємним, то (x_0, y_0) не є точкою умовного екстремуму за наявності зв'язку $\varphi(x, y) = 0$.

Доведення теореми ми тут не наводимо.

У загальному випадку розглядається задача знаходження умовного екстремуму функції n змінних $u = f(x_1, \dots, x_n)$ за наявності m рівнянь зв'язків $\varphi_1(x_1, \dots, x_n) = 0, \dots, \varphi_m(x_1, \dots, x_n) = 0$. Висновки щодо існування цього екстремуму робляться на підставі розгляду функції Лагранжа наступного вигляду:

$$L(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m) = f(x_1, \dots, x_n) + \sum_{k=1}^m \lambda_k \varphi_k(x_1, \dots, x_n).$$

Величини $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ називаються *множниками Лагранжа*. Тому відповідний метод дослідження функцій на умовний екстремум називається *методом множників Лагранжа*.

Приклад. Знайти екстремуми функції $z = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2$ за умови, що $x^3 + y^3 = 1$.

Складемо функцію Лагранжа:

$$L(x, y, \lambda) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 + \lambda(x^3 + y^3 - 1).$$

Знайдемо стаціонарну точку функції Лагранжа. Для цього складемо систему:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = x + 3\lambda x^2 = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial y} = y + 3\lambda y^2 = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = x^3 + y^3 - 1 = 0. \end{cases}$$

Легко перевірити, що ця система має три розв'язки:

$$\left(0; 1; -\frac{1}{3}\right), \left(1; 0; -\frac{1}{3}\right), \left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}; \frac{1}{\sqrt[3]{2}}; -\frac{\sqrt[3]{2}}{3}\right).$$

Складемо:

$$d^2L_{xy}(x, y, \lambda) = (1 + 6\lambda x)dx^2 + (1 + 6\lambda y)dy^2.$$

Перевіримо виконання достатніх умов екстремуму для першого з наведених розв'язків. У цьому випадку маємо:

$$d^2L_{xy}(x_0, y_0, \lambda_0) = dx^2 - dy^2,$$

а внаслідок умови

$$d\varphi(x_0, y_0) = (3x^2 dx + 3y^2 dy)\Big|_{x=0, y=1} = 3dy = 0,$$

дістаємо, що $d^2L_{xy}(x_0, y_0, \lambda_0) = dx^2$, і, внаслідок умови $dx^2 > 0$, остаточно маємо $d^2L_{xy}(x_0, y_0, \lambda_0) > 0$, тому, згідно з теоремою, точка $(0; 1)$

є точкою умовного мінімуму функції $z = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2$. Цей мінімум дорівнює $\frac{1}{2}$.

Аналізуючи розв'язок $\left(1; 0; -\frac{1}{3}\right)$, аналогічно показуємо, що точка $(1; 0)$ також є точкою умовного мінімуму функції $z = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2$, і цей мінімум також дорівнює $\frac{1}{2}$.

Розглянемо тепер розв'язок $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}; \frac{1}{\sqrt[3]{2}}; -\frac{\sqrt[3]{2}}{3}\right)$. У цьому випадку:

$$d^2L_{xy}(x_0, y_0, \lambda_0) = -dx^2 - dy^2.$$

Внаслідок умови:

$$d\varphi(x_0, y_0) = (3x^2 dx + 3y^2 dy) \Big|_{x=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, y=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}} = \frac{3}{\sqrt[3]{4}}(dx + dy) = 0, \quad \text{тобто}$$

$dy = -dx$, дістаємо, що $d^2L_{xy}(x_0, y_0, \lambda_0) = -2dx^2$, і, внаслідок умови $dx^2 > 0$, остаточно маємо $d^2L_{xy}(x_0, y_0, \lambda_0) < 0$, тому, згідно з теоре-

мою, точка $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}; \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)$ є точкою умовного максимуму функції

$$z = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2, \text{ і цей максимум дорівнює } \frac{1}{\sqrt[3]{4}}.$$

Задачі на екстремум функцій за наявності обмежень є досить поширеними. Теорія екстремальних задач інтенсивно розвивається, їй присвячено численні дослідження, вона знаходить широке коло застосувань. Метод множників Лагранжа має глибокі узагальнення, зокрема, на випадки, коли обмеження задаються системою нерівностей. В конкретних прикладних задачах множники Лагранжа мають змістовну інтерпретацію. В механіці ними задаються реакції зв'язків, в економіці – ціни на продукти виробництва, тощо.

9.17. Побудова емпіричних залежностей методом найменших квадратів

При проведенні експериментальних досліджень часто виникає необхідність за результатами вимірів встановити функціональну залежність однієї величини y від іншої величини x . Загальний вигляд такої залежності, як правило, припускається відомим, але її конкретний вираз визначається певним набором числових параметрів, які є невідомими. І задача полягає в тому, щоб наближено визначити ці параметри, користуючись експериментальними даними.

Нехай експериментально отримано m значень величини y при відповідних значеннях величини x :

x	x_1	x_2	\dots	x_m
y	y_1	y_2	\dots	y_m

Загальний вигляд функціональної залежності $y = f(x)$ між величинами x та y встановлюється з теоретичних міркувань, або на підставі розташування на координатній площині точок $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_m, y_m)$. Нехай, наприклад, ці точки розташовано так, як показано на рис. 9.16.

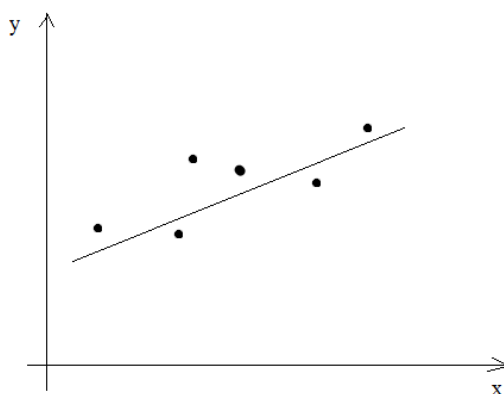


Рис. 9.16

Тоді функцію $y = f(x)$ природно вважати лінійною: $y = ax + b$. При цьому параметри a, b є невідомими. Нехай тепер точки розташовано так, як показано на рис. 9.17.

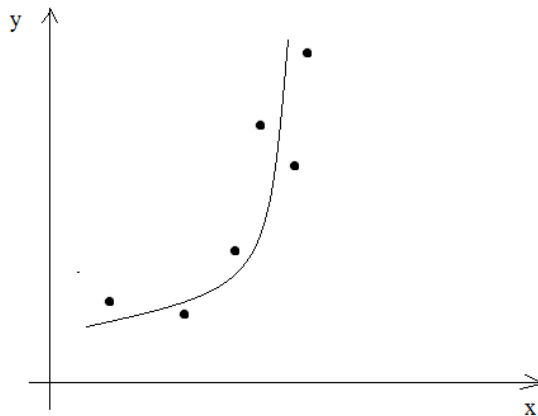


Рис. 9.17

Тоді функцію $y = f(x)$ природно вважати степеневою: $y = ax^b$. Параметри a, b знову ж є невідомими.

Припустимо, що функція $y = f(x)$ залежить від двох невідомих параметрів a і b , тобто має вигляд:

$$y = f(x, a, b). \quad (9.17.1)$$

Нашою задачею буде визначити ці параметри таким чином, щоб функція (9.17.1) якомога краще узгоджувалася з експериментальними даними, що наведено в таблиці. Поширеним методом розв'язання цієї задачі є *метод найменших квадратів*. Полягає він у наступному. Розглянемо функцію:

$$S(a, b) = \sum_{k=1}^m (y_k - f(x_k, a, b))^2.$$

Ця функція буде характеризувати степінь розбіжності між експериментальними значеннями y_k величини y та теоретичними, які обчислено на підставі функції (9.17.1). Параметри a і b підбираються таким чином, щоб функція $S(a, b)$ набула найменшого значення. Звідси й назва методу – сума квадратів відхилень теоретичних значень від експериментальних має бути найменшою.

Таким чином, ми отримуємо задачу про знаходження мінімуму функції $S(a, b)$.

На підставі теореми про необхідні умови екстремуму (див. п. 9.14) значення a і b повинні задовольняти систему рівнянь:

$$\frac{\partial S}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial b} = 0. \quad (9.17.2)$$

Або у розгорнутому вигляді:

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^m (y_k - f(x_k, a, b)) \frac{\partial f(x_k, a, b)}{\partial a} = 0, \\ \sum_{k=1}^m (y_k - f(x_k, a, b)) \frac{\partial f(x_k, a, b)}{\partial b} = 0. \end{cases} \quad (9.17.3)$$

Таким чином, одержали систему двох рівнянь з двома невідомими a і b . В залежності від конкретного вигляду функції $y = f(x, a, b)$ досліджується питання про розв'язки цієї системи.

Розглянемо випадок, коли функція $y = f(x, a, b)$ лінійна, тобто $y = ax + b$. Функція $S(a, b)$ у цьому випадку має вигляд:

$$S(a, b) = \sum_{k=1}^m (y_k - ax_k - b)^2.$$

Звідси:

$$\begin{cases} \frac{\partial S(a, b)}{\partial a} = -2 \sum_{k=1}^m (y_k - ax_k - b)x_k = 0, \\ \frac{\partial S(a, b)}{\partial b} = -2 \sum_{k=1}^m (y_k - ax_k - b) = 0. \end{cases}$$

Або:

$$\begin{cases} \left(\sum_{k=1}^m x_k^2 \right) a + \left(\sum_{k=1}^m x_k \right) b = \sum_{k=1}^m x_k y_k, \\ \left(\sum_{k=1}^m x_k \right) a + mb = \sum_{k=1}^m y_k. \end{cases} \quad (9.17.4)$$

Одержали систему двох лінійних алгебраїчних рівнянь з двома невідомими a, b . Можна довести, що при $m > 1$ її визначник відмінний від нуля, і розв'язок системи (9.17.4) є саме точкою мінімуму функції $S(a, b)$.

Приклад. Нехай на підставі експерименту отримано наступні пари значень величин x та y :

x	1	2	3	5
y	3	4	2,5	0,5

Шукаємо функцію $y = f(x, a, b)$ у вигляді $y = ax + b$. Система (9.17.4) набуває вигляду:

$$\begin{cases} 39a + 11b = 21, \\ 11a + 4b = 10. \end{cases}$$

Розв'язуючи цю систему, знаходимо: $a = -\frac{26}{35}$, $b = \frac{159}{35}$. Шукана залежність така:

$$y = -\frac{26}{35}x + \frac{159}{35}.$$

Розташування точок та графік побудованої лінійної залежності показано на рис. 9.18.

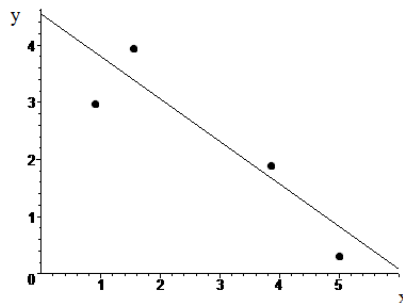


Рис. 9.18

9.18. Поняття про лінійне програмування

Задачі знаходження найбільших та найменших значень функцій багатьох незалежних змінних на множинах, що задаються певними рівняннями та нерівностями, що пов'язують ці незалежні змінні, відіграють дуже важливу роль як у самій математиці, так і в її численних застосуваннях. Такі задачі виникають в економіці, геології та багатьох інших галузях. Розділ математики, що вивчає ці задачі, отримав назву *математичного програмування*. Зауважимо, що тут термін «програмування» використовується не у найбільш звичному сенсі, тобто складання програм для комп'ютерів. В даному контексті він ближче до терміну «планування». Мається на увазі, що в процесі розв'язання вказаних задач послідовно розглядається серія варіантів

розв'язків, які інакше можна назвати програмами або планами. Кожна програма (план) з кожним кроком процесу покращується, і поступово приходять до оптимальної програми (плану).

Найбільш розробленою частиною математичного програмування є так зване *лінійне програмування*. Основи цього напряму було закладено радянським математиком Л. В. Канторовичем і американським математиком Дж. Данцигом у 1930–1940 роки. В цій частині функція, найбільші та найменші значення якої шукаються, є лінійною відносно всіх своїх аргументів. І рівняння та нерівності, що задають множину, на якій шукають ці значення, також є лінійними.

У загальному вигляді задача лінійного програмування формулюється наступним чином: знайти найбільше або найменше значення функції:

$$u = f(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n, \quad (9.18.1)$$

і значення змінних x_1, x_2, \dots, x_n , при яких досягається це найбільше або найменше значення, за умови, що ці змінні задовольняють співвідношення вигляду:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n & R_1 b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n & R_2 b_2, \\ \dots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n & R_m b_m, \end{aligned} \quad (9.18.2)$$

де c_j ($j = 1, 2, \dots, n$), a_{jk} ($j = 1, 2, \dots, m; k = 1, 2, \dots, n$), b_j ($j = 1, 2, \dots, m$) – задані сталі числа, а R_j ($j = 1, 2, \dots, m$) – символи $=$, або \leq , або \geq .

Суттєво те, що і функція (9.18.1), і ліві частини співвідношень (9.18.2) є лінійними відносно змінних x_1, x_2, \dots, x_n . Саме тому прийнято термін *лінійне програмування*.

Функцію (9.18.1) зазвичай називають *цільовою функцією*, а співвідношення (9.18.2) – *обмеженнями*.

Наприклад, типова задача лінійного програмування може бути такою.

$$\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 + x_3 & \rightarrow \max, \\ 2x_1 - 3x_3 & \leq -1, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 & = 6, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 & \leq 2, \\ x_j & \geq 0, \quad j = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Наведемо деякі приклади задач лінійного програмування, що зустрічаються в практиці.

1. Задача про вибір оптимального плану випуска продукції. Нехай номенклатура продукції, що випускається підприємством, складається з n найменувань. І підприємство має m видів ресурсів для випуску цієї продукції. Позначимо через x_k – обсяг продукції k -ого виду, що має випускатися, через a_{jk} витрати j -ого виду ресурсів на виробництво одиниці продукції k -ого виду ($j = 1, 2, \dots, m; k = 1, 2, \dots, n$), через b_j – повний обсяг j -ого виду ресурсів, що є ($j = 1, 2, \dots, m$), через c_k – прибуток, що отримує підприємство при виготовленні та реалізації одиниці продукції k -ого виду, d_k і D_k – відповідно нижню та верхню межі обсягів випуску продукції k -ого виду ($k = 1, 2, \dots, n$).

Треба скласти такий план випуску продукції, який був би технологічно можливим за тими ресурсами, що є, задовольняв би всі обмеження, що задаються на випуск кожного виду продукції і, в той же час, приносив би найбільший загальний прибуток підприємству.

Математична модель задачі полягає в наступному: знайти такий план випуску продукції (x_1, x_2, \dots, x_n) , щоб виконувалися умови:

1) загальний прибуток від виробництва та реалізації продукції має бути максимальним, тобто:

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \rightarrow \max;$$

2) мають виконуватися технологічні обмеження:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1,$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2,$$

...

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m;$$

3) мають виконуватися обмеження на обсяги окремих видів продукції, що випускається:

$$d_k \leq x_k \leq D_k, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Таким чином, дістали задачу лінійного програмування вигляду (9.18.1), (9.18.2).

2. Транспортна задача. Нехай є m пунктів виробництва з обсягами виробництва a_1, a_2, \dots, a_m і n пунктів споживання продукції з обсягами споживання b_1, b_2, \dots, b_n . Природно вважати, що $a_1 + a_2 + \dots + a_m \geq b_1 + b_2 + \dots + b_n$, тобто споживання не перевищує мож-

ливостей виробництва. Відомо величини c_{jk} – витрати на перевезення одиниці продукції з j -ого пункту виробництва до k -ого пункту споживання.

Треба скласти такий план перевезень, при якому задовольнялися б потреби в усіх пунктах споживання, і при цьому сумарні витрати на перевезення були б мінімальними.

Позначимо через x_{jk} – кількість одиниць продукції, що перевозиться з j -ого пункту виробництва до k -ого пункту споживання. Тоді приходимо до наступної математичної моделі:

знайти такі значення величин x_{jk} , щоб досягався мінімум функції:

$$\sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n c_{jk} x_{jk}$$

(це й є сумарні витрати на перевезення), за умов:

$$1) \quad \sum_{j=1}^m x_{jk} \geq b_k, \quad k = 1, 2, \dots, n \text{ (потреби кожного пункту споживання}$$

задовольняються);

$$2) \quad \sum_{k=1}^n x_{jk} \leq a_j, \quad j = 1, 2, \dots, m \text{ (можливості кожного пункту вироб-$$

ництва не перевищуються);

$$3) \quad x_{jk} \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad k = 1, 2, \dots, n \text{ (обсяг, що перевозиться, не може бути від'ємним).}$$

9.19. Задача лінійного програмування для функції двох змінних

У простішому випадку, коли цільова функція залежить лише від двох змінних, нескладно отримати геометричну інтерпретацію задачі лінійного програмування і розв'язати її суто геометричним методом.

Нехай задано задачу:

$$f(x_1, x_2) = c_1 x_1 + c_2 x_2 \rightarrow \max, \quad (9.19.1)$$

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &\leq b_1, \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &\leq b_2, \\
&\dots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 &\leq b_m.
\end{aligned}
\tag{9.19.2}$$

Введемо на площині прямокутну декартову систему координат Ox_1x_2 і з'ясуємо, що собою являє множина точок, координати яких задовольняють обмеження (9.19.2). Розглянемо спочатку одну лінійну нерівність з двома змінними:

$$a_1x_1 + a_2x_2 \leq b.$$

Ця нерівність визначає одну з двох півплощин, на які пряма $a_1x_1 + a_2x_2 = b$ розбиває площину Ox_1x_2 , включаючи саму цю пряму (замкнена півплощина). Щоб визначити, яку саме з двох замкнених півплощин визначає ця нерівність, достатньо підставити в неї координати якої-небудь точки, що не лежить на межовій прямій. Якщо нерівність задовольняється, то шуканою площиною є та, в якій лежить ця точка, а якщо не задовольняється, то протилежна їй.

Приклад. Яку півплощину визначає нерівність:

$$3x_1 - 5x_2 \leq 7?$$

Побудуємо пряму $3x_1 - 5x_2 = 7$ (рис. 9.19). Оскільки вона не проходить через початок координат, то для визначення шуканої півплощини можна взяти точку $O(0,0)$. Підставляючи її координати в нашу нерівність, дістаємо правильне співвідношення $0 \leq 7$. Отже, шуканою площиною є та, що містить початок координат (на рис. 9.19 цю півплощину зображено штрихуванням).

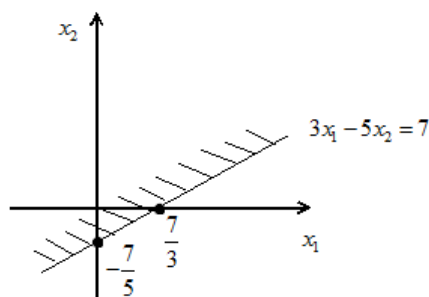


Рис. 9.19

Таким чином, кожне з обмежень (9.19.2) задає на площині Ox_1x_2 деяку півплощину. Нас цікавитимуть ті точки площини, координати яких задовольняють всі нерівності (9.19.2), тобто точки, що належать

водночас всім m півплощинам, кожна з яких визначається одним з обмежень (9.19.2). Така множина точок називається *припустимою множиною* задачі (9.19.1), (9.19.2). Отже, припустима множина геометрично зображується перетином (спільною частиною) півплощин, що визначаються окремими обмеженнями.

Приклад 1. Знайти припустимі множини для наступних обмежень задач лінійного програмування (цільова функція тут не вказується).

$$\begin{array}{lll}
 2x_1 - 3x_2 \leq 2, & -x_1 + x_2 \leq 1, & \frac{3}{4}x_1 + x_2 \geq 3, \\
 1. \quad 3x_1 + x_2 \leq 1, & 2. \quad x_1 - 2x_2 \leq 1, & 3. \quad x_1 + x_2 \leq 1, \\
 -x_1 + \frac{1}{2}x_2 \leq 1. & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. & x_2 \leq 1.
 \end{array}$$

Для випадку 1 припустиму множину показано на рис. 9.20. Це трикутник, який утворено прямими $2x_1 - 3x_2 = 2$, $3x_1 + x_2 = 1$, $-x_1 + \frac{1}{2}x_2 = 1$. Ця множина є замкненою та обмеженою. Для випадку 2 припустиму множину показано на рис. 9.21. Це частина площини, що знаходиться в 1-му квадранті між прямими $-x_1 + x_2 = 1$ і $x_1 - 2x_2 = 1$. Ця множина не є обмеженою. Для випадку 3 півплощини, що відповідають даним обмеженням, не мають спільної частини (рис. 9.22), отже, в даному випадку припустима множина порожня.

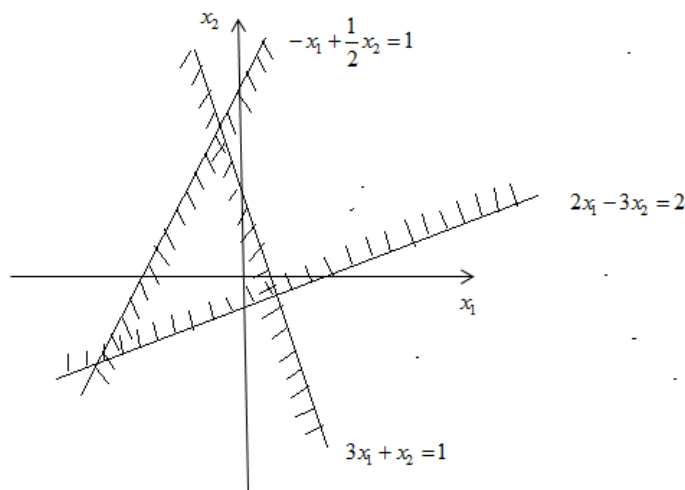


Рис. 9.20

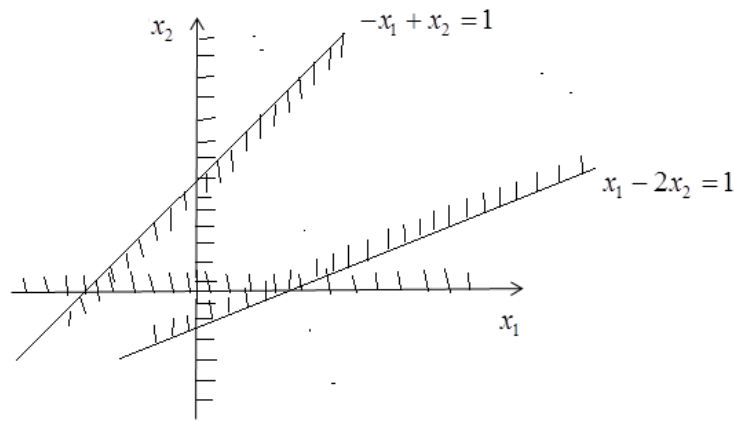


Рис. 9.21

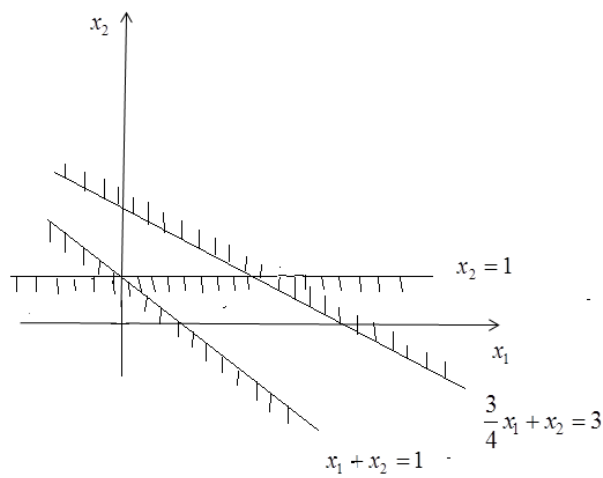


Рис. 9.22

Вже ці випадки показують, що припустима множина задачі лінійного програмування може бути порожньою (випадок 3), непорожньою, обмеженою (випадок 1) і непорожньою, необмеженою (випадок 2). Якщо припустима множина не порожня, то вона являє собою, взагалі кажучи, деякий багатокутник (може бути, необмежений).

Нехай припустима множина задачі лінійного програмування (9.19.1), (9.19.2) є непорожньою (многокутник $MNPQ$ на рис. 9.23).

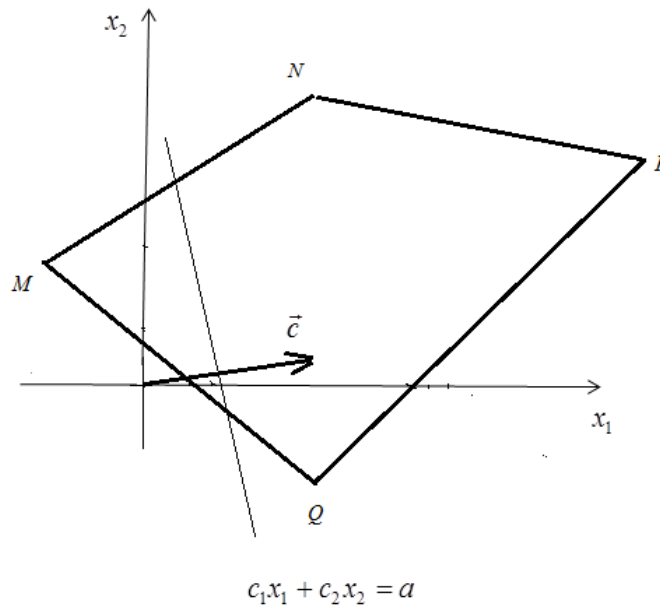


Рис. 9.23

Як геометрично знайти точки, що відповідають розв'язку задачі (9.19.1), (9.19.2)? Розглянемо лінію рівня функції $f = c_1x_1 + c_2x_2$. Ця лінія задається рівнянням $c_1x_1 + c_2x_2 = a$, де a – стала. Якщо вважати a параметром, ми дістанемо сім'ю паралельних прямих, кожна з яких є лінією рівня нашої функції. Вектор $\vec{c} = \{c_1, c_2\}$, очевидно, є градієнтом функції $f = c_1x_1 + c_2x_2$ (дійсно, $\partial f / \partial x_1 = c_1$, $\partial f / \partial x_2 = c_2$). Цей вектор перпендикулярний лінії рівня (див. п. 9.8). В напрямі цього вектора функція $f = c_1x_1 + c_2x_2$ зростає найшвидшим чином. Отже, щоб знайти максимальне значення функції в даному многокутнику, треба переміщувати лінію рівня в напрямі вектора $\vec{c} = \{c_1, c_2\}$, тобто в напрямі нормалі до лінії рівня, починаючи з якогось її фіксованого положення, при якому вона перетинається з припустимою множиною, і поки лінія рівня не припинить перетинатися з цією множиною. Перетин припустимої множини з лінією рівня в тому її положенні, коли подальше переміщення дає порожній перетин, і буде розв'язком задачі (9.19.1), (9.19.2). На рис. 9.23 це будуть координати точки P . Відповідно, якщо ми шукаємо найменше значення функції на припустимій множині, то лінію рівня треба переміщувати в напрямі, протилежному напрямку градієнта, тобто в напрямі вектора $-\vec{c} = \{-c_1, -c_2\}$. Розв'язком такої задачі будуть координати точки M .

Приклад 2. Розв'язати задачу лінійного програмування:

$$f(x_1, x_2) = 2x_1 - x_2 \rightarrow \min,$$

$$-x_1 + x_2 \leq 1,$$

$$x_1 - 2x_2 \leq 1,$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

Побудуємо припустиму множину (рис. 9.24). В даному випадку вона необмежена. Побудуємо яку-небудь лінію рівня функції $f(x_1, x_2) = 2x_1 - x_2$, яка перетинає цю множину. Нею може бути, наприклад, пряма $2x_1 - x_2 = 0$. Вектор $\vec{c} = \{2, -1\}$ є градієнтом нашої функції. Оскільки ми шукаємо найменше значення функції, то будемо мислено переміщувати пряму $2x_1 - x_2 = 0$ в напрямі, протилежному напрямку вектора \vec{c} . Очевидно, що лінія рівня буде востаннє перетинати припустиму множину, коли пройде через точку $A(0,1)$. Таким чином, $x_1 = 0, x_2 = 1$ – єдиний розв'язок даної задачі, а найменше значення функції $f(x_1, x_2) = 2x_1 - x_2$ на припустимій множині є $f(0,1) = -1$.

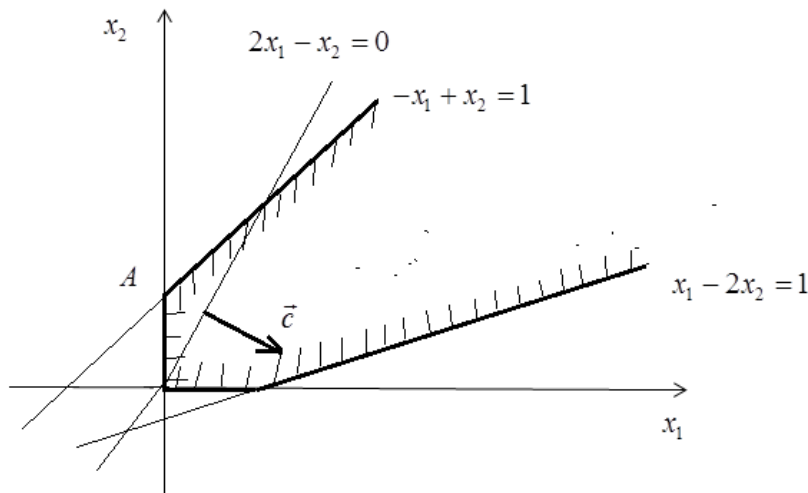


Рис. 9.24

Зауважимо, що якби ми в цій самій припустимій множині розглядали задачу знаходження найбільшого значення цієї ж функції, тобто $f(x_1, x_2) = 2x_1 - x_2 \rightarrow \max$, то така задача не мала б розв'язків. Дійсно, як довго не переміщували б ми лінію рівня в напрямі вектора \vec{c} , вона

завжди буде мати непорожній перетин з припустимою множиною. Інакше кажучи, в припустимій множині знайдуться точки, в яких цільова функція $f(x_1, x_2) = 2x_1 - x_2$ має як завгодно велике значення, тобто ця функція не є обмеженою зверху на припустимій множині.

Приклад 3. Розв'язати задачу лінійного програмування:

$$f(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2 \rightarrow \max,$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 4,$$

$$x_1 - x_2 \leq 1,$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

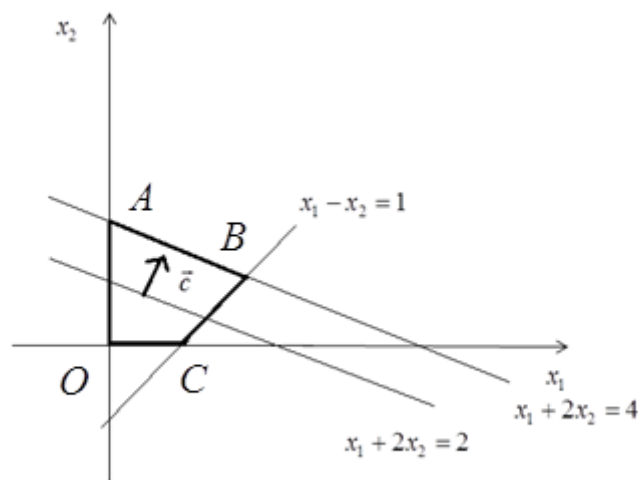


Рис. 9.25

Припустиму множину показано на рис. 9.25 – це чотирикутник $OABC$. В якості лінії рівня нашої функції, яка перетинає припустиму множину, візьмемо пряму $x_1 + 2x_2 = 2$. Очевидно, що якщо її переміщувати в напрямі вектора $\vec{c} = \{1, 2\}$, то вона востаннє буде мати непустий перетин з припустимою множиною, коли співпаде з прямою $x_1 + 2x_2 = 4$. Отже, дана задача має нескінченну кількість розв'язків – координати будь-якої точки відрізка AB . Найбільше значення нашої функції на припустимій множині, очевидно, дорівнює 4.

Аналізуючи ці приклади, можна зробити наступні висновки. При $n = 2$ задача лінійного програмування має розв'язки (єдиний, або нескінченну кількість) завжди, коли припустима множина є непорожньою та обмеженою (тобто цілком міститься в крузі достатньо вели-

кого радіусу з центром у початку координат). Але ця задача може мати розв'язки і у випадку необмеженої припустимої множини. Це має місце лише тоді, коли цільова функція обмежена на припустимій множині зверху, якщо розглядається задача на максимум, і знизу, якщо розглядається задача на мінімум. Справедливо і обернене: якщо цільова функція не обмежена зверху (знизу) на припустимій множині, то відповідна задача на максимум (мінімум) не має розв'язків.

Контрольні запитання до глави 9

1. Що таке функція багатьох змінних? Наведіть приклади. Що є геометричним зображенням функції двох змінних?
2. Що називається лінією рівня функції двох змінних? Як лінії рівня використовуються в географії?
3. Наведіть означення границі функції двох змінних у точці.
4. Наведіть означення неперервності функції двох змінних у точці.
5. Що таке частинні похідні функції багатьох змінних?
6. Яка функція називається диференційовною у точці? Який зв'язок між неперервністю функції в точці та її диференційовністю в цій точці? Чи достатньо для диференційовності функції в точці існування частинних похідних функції в цій точці?
7. Що таке диференціал функції багатьох змінних, який його зв'язок з приростом функції?
8. Як можна використати диференціал функції для наближених обчислень?
9. Що таке похідна функції багатьох змінних за заданим напрямом?
10. Що таке градієнт функції? Який напрям характеризується градієнтом?
11. Що таке складена функція багатьох змінних? Як знаходяться похідні складеної функції?
12. Що таке неявна функція? Як знаходиться похідна неявної функції?
13. Що таке дотична площина та нормаль до поверхні? Який вектор є вектором нормалі до поверхні?
14. Що таке точка екстремуму функції багатьох змінних? Чим відрізняється екстремум функції від її найбільшого та найменшого зна-

чень? Які необхідні умови екстремуму? Чи є ці умови також й достатніми?

15. У чому полягають достатні умови екстремуму функції двох змінних?

16. Що таке умовний екстремум функції багатьох змінних?

17. У чому полягає ідея методу найменших квадратів?

18. У чому полягає задача лінійного програмування?

19. Наведіть геометричну інтерпретацію задачі лінійного програмування для функції двох змінних.

20. В яких випадках задача лінійного програмування має розв'язки, а в яких не має?

Вправи для самостійного розв'язання

9.1. Знайти область визначення функції та зобразити її на рисунку?

1) $u = \ln(1 - x^2 - y^2)$; 2) $u = \sqrt{x^2 + y^2 - 16} + \sqrt{25 - x^2 - y^2}$;

3) $u = \frac{1}{\sqrt{x + y + 8}}$; 4) $u = \ln \frac{y}{x}$; 5) $u = \arccos \frac{x}{x + y}$;

6) $u = \operatorname{ctg}(x^2 - y^2)$; 7) $u = \frac{1}{\sqrt{2 - x^2 + 2x - y^2 + 2y}}$; 8) $u = \ln \ln(y - x)$;

9) $u = \arcsin \frac{x}{y^2} + \arcsin(1 - y)$; 10) $u = \ln \sin y - \ln x$.

9.2. Побудувати лінії рівня функції.

1) $u = x + y$; 2) $u = x^2 - y^2$; 3) $u = \frac{y}{x}$; 4) $u = \frac{1}{x^2 + 2y^2}$;

5) $u = \sqrt{xy}$; 6) $u = |x| + y$; 7) $u = \min(x, y)$;

8) $u = \min(x, y) + \max(x, y)$;

9) $u = \max(|x|, y)$; 10) $u = \operatorname{sgn}(\sin x \sin y)$.

9.3. Знайти частинні похідні 1-го порядку за кожною з незалежних змінних.

1) $u = x^2 y - x + y + 5$; 2) $u = x^2 + y^2 - 3xy$; 3) $u = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + 2y^2}$;

4) $u = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2 + y^3}}$; 5) $u = x^y - y^x$; 6) $u = e^{-x+y}(x^2 + xy + y^2)$;

$$7) u = \ln \sqrt{\frac{x^3 + y^3}{x^2 - y^2}}; \quad 8) u = \operatorname{arctg} \frac{y-x}{y+x}; \quad 9) u = xy \ln(x+y);$$

$$10) u = \sin \frac{x}{y} \cos \frac{y}{x}; \quad 11) u = \ln(e^y \cos x + e^x \sin y); \quad 12) u = \ln \cos \operatorname{arctg} \frac{x}{y};$$

$$13) u = \operatorname{tg} 2^{x/y}; \quad 14) u = \log_2 \sqrt{x \cos y - y \cos x}; \quad 15) u = \ln^4(5 - x^2 - y^2);$$

$$16) u = \arcsin \sqrt{\frac{xy+1}{xy-1}}; \quad 17) u = (xy + yz + zx)^{10}; \quad 18) u = x^{y/z};$$

$$19) u = \ln \operatorname{tg}(xyz); \quad 20) u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - t^2}.$$

9.4. Показати, що функція задовольняє диференціальне рівняння з частинними похідними.

$$1) u = e^{x/y^2}; \quad 2x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = 0;$$

$$2) u = \frac{x^2}{2y} + \frac{x}{2} + \frac{1}{x} - \frac{1}{y}; \quad x^2 \frac{\partial u}{\partial x} + y^2 \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{x^3}{y};$$

$$3) u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}; \quad \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 = 1;$$

$$4) u = \ln(x^2 + xy + y^2); \quad x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = 2;$$

$$5) T = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}; \quad l \frac{\partial T}{\partial l} + g \frac{\partial T}{\partial g} = 0.$$

9.5. Знайти повний диференціал 1-го порядку функції.

$$1) u = \sqrt{x^2 + y^2}; \quad 2) u = \frac{y}{x} - \frac{x}{y}; \quad 3) u = \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy}; \quad 4) u = \ln \cos \frac{x}{y};$$

$$5) u = (xy)^z; \quad 6) u = x^{y^z}; \quad 7) u = \operatorname{ctg} \frac{xy}{z}; \quad 8) u = \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \dots + \frac{x_{n-1}}{x_n}.$$

9.6. Обчислити наближено за допомогою диференціалу 1-го порядку відповідної функції.

$$1) \sqrt{1,02^3 + 1,97^3}; \quad 2) 0,98^{3,03}; \quad 3) \log_4(2,03^2 + 0,01^4);$$

$$4) 2^{2,96^2 - 2,01^3}; \quad 5) \sqrt{1,04^{1,99} + \ln 1,02}; \quad 6) \frac{1,03^2}{\sqrt[3]{0,98} \sqrt[4]{1,05^3}}.$$

9.7. Знайти du/dt .

$$1) u = e^x + y^2, \quad x = \ln t, \quad y = \cos t; \quad 2) u = \operatorname{arctg} x + \ln y, \quad x = \sin 2t, \quad y = e^t;$$

$$3) u = e^{2x-3y}, \quad x = \operatorname{tg} t, \quad y = t^2 - 1; \quad 4) u = \arcsin(x - y), \quad x = 3t, \quad y = 4t^3;$$

$$5) u = x^y, \quad x = \ln t, \quad y = \sin t; \quad 6) u = \frac{yz}{x}, \quad x = e^{2t}, \quad y = \ln t, \quad z = t^2 - 1;$$

$$7) u = \frac{e^{at}(y-x)}{a^2+1}, \quad x = a \cos t, \quad y = a \sin t; \quad 8) u = \frac{t^2 - y}{t^2 + y}, \quad y = 3t + 1;$$

$$9) u = \ln \frac{t - \sqrt{t^2 - y^2}}{t + \sqrt{t^2 - y^2}}, \quad y = t \cos \alpha^4, \quad \alpha = \text{const};$$

$$10) u = e^{xy} \ln(x + y), \quad x = t^3, \quad y = 1 - t^3.$$

9.8. Знайти $\frac{\partial u}{\partial t}$ та $\frac{\partial u}{\partial s}$.

$$1) u = x^2 y^3, \quad x = te^s, \quad y = se^t; \quad 2) u = x^2 \ln y, \quad x = \frac{t}{s}, \quad y = t^2 + s^2;$$

$$3) u = x^2 + y^2, \quad x = \sqrt{ts}, \quad y = e^{t+s}; \quad 4) u = \arcsin \sqrt{xy}, \quad x = \sin t, \quad y = \sin s;$$

$$5) u = 2^x 3^{-y}, \quad x = \ln(t^2 + s^2), \quad y = \ln(t^2 - s^2);$$

$$6) u = \ln(x^2 + y^2), \quad x = ts, \quad y = \frac{t}{s}.$$

9.9. Знайти похідну $\frac{dy}{dx}$ від функції, заданої неявно.

$$1) x^2 y + xy^2 - y^3 - 1 = 0; \quad 2) x^4 y + x^3 y^2 - y^5 - 5 = 0;$$

$$3) xe^y + ye^x - e^{xy} = 0; \quad 4) x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}; \quad 5) xy - \ln y = \ln a;$$

$$6) x^y = y^x \quad (x \neq y); \quad 7) y = 2x \operatorname{arctg} \frac{y}{x}; \quad 8) \ln \sqrt{x^2 + y^2} = \operatorname{arccctg} \frac{y}{x};$$

$$9) yx^2 = e^y; \quad 10) y \sin(x - y) - x \cos(x - y) = 1.$$

9.10. Знайти градієнт функції $u = f(x, y, z)$ в точці M , його довжину та напрям, і похідну цієї функції в точці M за напрямом вектора \overline{MN} .

- 1) $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $M(2,3,6)$, $N(-4,1,5)$;
- 2) $u = \sin \pi x + \sin \pi y + \sin \pi z$, $M(1,2,3)$, $N(4,6,-9)$;
- 3) $u = \ln\left(x + \sqrt{y^2 + z^2}\right)$, $M(1,-5,6)$, $N(-2,-1,3)$;
- 4) $u = \operatorname{ctg} \frac{1}{xyz}$, $M\left(\frac{2}{\pi}, 1, 1\right)$, $N\left(\frac{2}{\pi} + 2, -3, 8\right)$;
- 5) $u = \frac{\sqrt{x}}{y} + \frac{8y}{2 + \sqrt{z}}$, $M(4,1,4)$, $N(6,2,4)$.

9.11. Скласти рівняння дотичної площини та рівняння нормалі до заданої поверхні у точці M .

- 1) $y^2 + z^2 - x^4 = 0$, $M(2,0,z_0)$, $z_0 > 0$;
- 2) $z^2 + y^2 - (x+1)^2 = 0$, $M(x_0,3,4)$, $x_0 > 0$;
- 3) $x^2 + z^2 - y^5 = 0$, $M(4,y_0,4)$;
- 4) $z = 2 + (x-1)^2 + (y-2)^2$, $M(2,3,z_0)$;
- 5) $z = \sqrt{x^2 + y^2} - xy$, $M(3,y_0,-7)$, $y_0 > 2$.

9.12. Знайти диференціал другого порядку від функції.

- 1) $u = x^4 + 3x^2y^2 + y^4$; 2) $u = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$; 3) $u = x \ln \frac{x}{y}$;
- 4) $u = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$; 5) $u = \frac{xy}{\sqrt{x^2 - y^2}}$, 6) $u = \frac{2x + 3y}{x - y}$.

9.13. Показати, що функція задовольняє диференціальне рівняння з частинними похідними.

- 1) $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$; $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{2}{u}$;
- 2) $u = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \exp\left(-\frac{(x-b)^2}{4a^2 t}\right)$; $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$;
- 3) $u = \varphi(x-at) + \psi(x+at)$, де $\varphi(x)$, $\psi(x)$ – довільні двічі диференційовні функції; $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

9.14. Розкласти функцію $u = f(x, y)$ за формулою Тейлора в околі точки $M(x_0, y_0)$.

1) $u = 2x^2 - xy - y^2 - 6x - 3y + 5; M(1, -2);$

2) $u = \sqrt{1 - x^2 - y^2}; M(0, 0);$ обмежитись доданками до 4-го порядку включно відносно x, y ;

3) $u = e^x \sin y; M(0, 0);$

4) $u = \sin(x^2 + y^2); M(0, 0);$

5) $u = \ln(1 + x)\ln(1 + y); M(0, 0).$

9.15. Дослідити на екстремум функцію.

1) $u = 2x^3 - xy^2 + 5x^2 + y^2;$ 2) $u = x^3 + 3xy^2 - 30x - 18y + 1;$

3) $u = -x^3 + 8y^3 + 6xy + 2;$ 4) $u = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2;$ 5) $u = x^3 + y^3 - 6xy.$

9.16. Знайти найбільше та найменше значення функції $u = f(x, y)$ на множині G , яку обмежено лініями.

1) $u = x^2 + 4xy - y^2 - 6x - 2y; x = 0, y = 0, x + y = 4;$

2) $u = x^2 - 2y^2 - 4xy - 6x + 5; x = 0, y = 0, x - y = 3;$

3) $u = x^2 - xy + y^2 - 4x; x = 0, y = 0, 2x + 3y - 12 = 0;$

4) $u = x^2 - xy + y^2 + x + y; x = 0, y = 0, x + y + 3 = 0;$

5) $u = x; x^2 + y^2 = R^2.$

9.17. Розв'язати наступні екстремальні задачі.

1) Визначити розміри відкритого прямокутного ящика заданого об'єму V так, щоб він мав найменшу площу поверхні.

2) Подати додатне число a у вигляді добутку трьох множників так, щоб сума цих множників була найменшою.

3) Знайти найменшу відстань між точками параболу $y = x^2$ та прямої $x - y - 2 = 0$.

4) Визначити розміри циліндра найбільшого об'єму, якщо площа його повної поверхні дорівнює S .

5) Робота деформації рами дається формулою:

$$A = \frac{L^3}{2EJ} \left(\frac{4}{3}H^2 - NH + \frac{1}{3}N^2 + \frac{1}{3}PH - \frac{1}{4}PN + \frac{1}{10}P^2 \right),$$

де P – стала навантаження, N, H – вертикальна та горизонтальна реакції опори, L – довжина, E – модуль пружності, J – момент інерції. Якими повинні бути величини N і H , щоб робота A була найменшою?

9.18. Розв'язати задачі на умовний екстремум.

1) $u = x^2 + y^2, \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1.$

2) $u = x^2 + y^2 - xy + x + y - 4, x + y + 3 = 0.$

3) $u = x + y + z, \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1.$

4) З усіх прямокутних паралелепіпедів, сума довжин ребер яких дорівнює $12a$, знайти паралелепіпед найбільшого об'єму.

5) Намот має форму циліндра, завершеного прямою конічною верхівкою. При заданому об'ємі намету визначити його розміри так, щоб для його виготовлення було витрачено найменше матеріалу.

9.19. Методом найменших квадратів побудувати залежність вигляду $y = ax + b$ за наведеними у таблиці значеннями величин x та y .

x	0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0
y	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0	5,5	6,0

9.20. Розв'язати наступні задачі лінійного програмування.

1) $f(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2 \rightarrow \max$; 2) $f(x_1, x_2) = 5x_1 - 3x_2 \rightarrow \min$,

$x_1 - 2x_2 \leq 4,$

$3x_1 + x_2 \leq 15,$

$2x_1 - x_2 \geq -2,$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$

$3x_1 - 2x_2 \leq 12,$

$9x_1 + 5x_2 \leq 45,$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$

Глава 10. Інтегральне числення функцій багатьох змінних

10.1. Області на площині та у просторі

Розглянемо координатну площину Oxy . Нехай D_0 – деяка множина точок цієї площини, і точка $M_0(x_0, y_0)$ належить множині D_0 . Нехай ε – додатне дійсне число.

Означення. Точка $M_0(x_0, y_0) \in D_0$ називається *внутрішньою точкою* множини D_0 , якщо існує такий ε -окіл цієї точки, який цілком належить множині D_0 .

Тобто точка $M_0(x_0, y_0)$ належить множині D_0 разом зі своїм ε -околом (рис. 10.1).

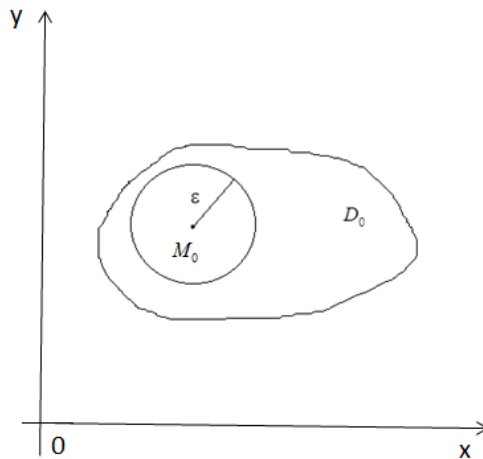


Рис. 10.1

Сукупність всіх внутрішніх точок множини D_0 називається *внутрішністю* множини D_0 і позначається D_0 як $\text{int } D_0$. Зрозуміло, що $\text{int } D_0 \subseteq D_0$. Якщо внутрішність множини співпадає з самою множиною D_0 ($\text{int } D_0 = D_0$), тобто всі точки множини D_0 є внутрішніми, то множина D_0 називається *відкритою*.

Означення. Точка $M_1(x_1, y_1)$ називається *граничною точкою* множини D_0 , якщо $\forall \varepsilon > 0 \exists M_0(x_0, y_0) \in D_0$:
$$\sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2} < \varepsilon.$$

Тобто в будь-якому крузі з центром в точці $M_1(x_1, y_1)$ існують точки множини D_0 , відмінні від точки $M_1(x_1, y_1)$.

Гранична точка множини D_0 може належати цій множині, а може й не належати. Наприклад, всі точки інтервалу (a,b) є його граничними точками. Точки a і b також його граничні точки, але вони інтервалу (a,b) не належать.

Означення. Множина D називається *замкненою*, якщо вона містить всі свої граничні точки.

Наприклад, відрізок $[a,b]$ є замкненою множиною, а інтервал, (a,b) а також півінтервали $(a,b]$, $[a,b)$ не є замкненими множинами.

Означення. Множина D_0 називається *зв'язною*, якщо для будь-якого її розбиття $D_0 = D_1 \cup D_2$ на дві непорожні множини, що не перетинаються ($D_1 \cap D_2 = \emptyset$), хоча б одна з них містить граничну точку іншої множини.

Означення. *Областю* на площині Oxy називається відкрита та зв'язна множина цієї площини.

Відкрита множина $D_0 \subset Oxy$ буде областю тоді і тільки тоді, коли будь-які дві точки множини D_0 можна з'єднати ламаною лінією, яка цілком належить множині D_0 .

Означення. *Межовою точкою* множини називається така точка, в будь-якому околі якої існує хоча б одна точка, що належить цій множині, і хоча б одна точка, що цій множині не належить. Сукупність всіх межових точок області D_0 називається *межею* області D_0 і позначається ∂D_0 . Об'єднання області D_0 та її межі називається *замиканням* області D_0 і позначається $\overline{D_0}$. Тобто $\overline{D_0} = D_0 \cup \partial D_0$.

Наприклад, точки a і b є межовими точками інтервалу (a,b) , а їх сукупність – межа інтервалу (a,b) . Замиканням інтервалу (a,b) є відрізок $[a,b]$.

Означення. *Замкненою областю* площини Oxy називається об'єднання області та всіх її граничних точок.

Покажемо, що $\overline{D_0}$ є замкненою областю. Нехай це не так, тоді має існувати така гранична точка множини $\overline{D_0}$, яка цій множині не належить. Ця точка не може бути внутрішньою точкою множини $\overline{D_0}$, інакше вона цій множині належить. За тою ж обставиною точка не може бути і межовою точкою множини $\overline{D_0}$. Тоді знайдеться такий

оکیل цієї точки, який не містить жодної точки множини \bar{D}_0 . А це су-
перечить тому, що дана точка є граничною точкою множини \bar{D}_0 .

Аналогічні означення можна ввести і у координатному просторі $Oxyz$. Нагадаємо, що відстань між точками $M_0(x_0, y_0, z_0)$ і $M_1(x_1, y_1, z_1)$ цього простору визначається формулою (див. п. 8.6):

$$|M_0M_1| = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2}.$$

Нехай знову ε – додатне дійсне число. Назвемо ε -околом точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ множину точок $M(x, y, z) \in Oxyz$, координати яких за-
довольняють нерівність:

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} < \varepsilon.$$

Тобто це куля радіусу ε з центром в точці $M_0(x_0, y_0, z_0)$, причому
сфера, що обмежує цю кулю, не включається.

Нехай D_0 – деяка множина точок простору $Oxyz$, і точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ належить множині D_0 .

Означення. Точка $M_0(x_0, y_0, z_0) \in D_0$ називається *внутрішньою
точкою* множини D_0 , якщо існує такий ε -оکیل цієї точки, який цілком
належить множині D_0 .

Якщо всі точки множини D_0 є внутрішніми, то множина D_0 на-
зивається *відкритою*.

Означення. Множина D_0 називається *зв'язною*, якщо для будь-
якого її розбиття $D_0 = D_1 \cup D_2$ на дві непорожні множини, що не пе-
ретинаються ($D_1 \cap D_2 = \emptyset$), хоча б одна з них містить граничну точку
іншої множини.

Означення. *Область* у просторі $Oxyz$ називається *відкрита* та
зв'язна множина цієї площини.

Означення. Точка $M_1(x_1, y_1, z_1)$ називається *граничною точкою*
множини D_0 , якщо $\forall \varepsilon > 0 \exists M_0(x_0, y_0, z_0) \in D_0$:

$$\sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2} < \varepsilon.$$

Тобто в будь-якій кулі з центром в точці $M_1(x_1, y_1, z_1)$ існують
точки множини D_0 , відмінні від точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$.

Означення. Множина D називається *замкненою*, якщо вона міс-
тить всі свої граничні точки.

Зауваження. У подальшому, якщо це не приводитиме до непорозуміння, під терміном «область» для скорочення розумітимемо замкнену обмежену область – як на площині, так і у просторі.

10.2. Задачі, що приводять до поняття подвійного інтеграла

I. Задача про об'єм циліндричного бруса. Розглянемо у прямокутній декартовій системі координат $Oxyz$ у просторі тіло, яке обмежене знизу областю D площини Oxy , зверху – поверхнею $z = f(x, y)$ (припускаємо, що $f(x, y) \geq 0$ в області D), з боків – циліндричною поверхнею, напрямна якої збігається з межею області D , а твірна паралельна осі Oz (рис. 10.1). Таке тіло називають *циліндричним брусом*. Поставимо задачу: знайти об'єм V цього бруса.

Довільним чином розіб'ємо область D на n частинних областей D_i , які не мають спільних внутрішніх точок. Позначимо як ΔS_i площу частинної області D_i . В кожній області D_i довільним чином оберемо точку $P_i(\xi_i, \eta_i)$. Побудуємо циліндричний стовпчик з основою D_i , висотою $f(\xi_i, \eta_i)$ і твірними, паралельними осі Oz . Об'єм цього стовпчика дорівнює $f(\xi_i, \eta_i)\Delta S_i$. Усіх таких стовпчиків n , тому сума їх об'ємів:

$$V_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i)\Delta S_i. \quad (10.2.1)$$

Ця сума наближено дорівнює шуканому об'єму циліндричного бруса:

$$V \approx V_n.$$

Означення. *Діаметром* $d(G)$ області G називається найбільша відстань між двома точками цієї області:

$$d(G) = \max_{x, x' \in G} \rho(x, x')$$

Нехай λ – найбільший з діаметрів частинних областей D_i :

$$\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} d(D_i).$$

Тоді природно об'єм циліндричного бруса визначити як границю суми (1.2.1) при $\lambda \rightarrow 0$:

$$V = \lim_{\lambda \rightarrow 0} V_n = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta S_i. \quad (10.2.2)$$

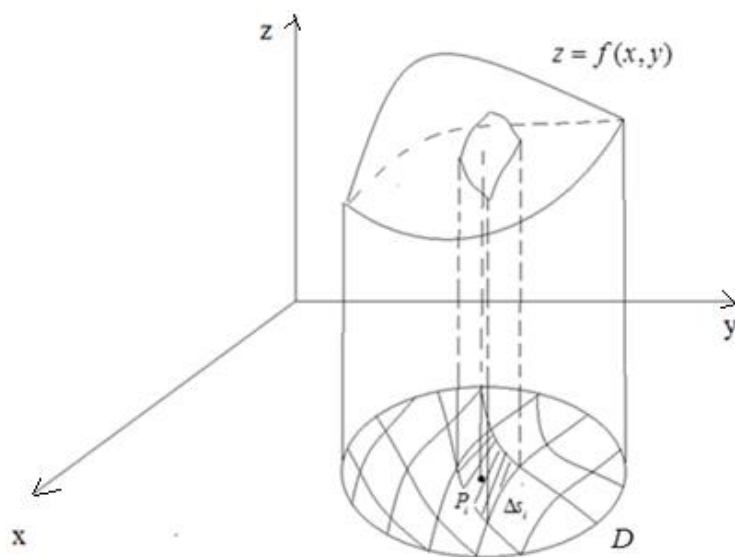


Рис. 10.2

Це аналог знаходження площі криволінійної трапеції як границі площі ступінчатої фігури при прямуванні рангу розбиття відрізка $[a, b]$ до нуля (див. п. 7.1).

II. Задача про масу пластини. Нехай маємо плоску матеріальну пластину, формою якої є область D (рис. 10.3).

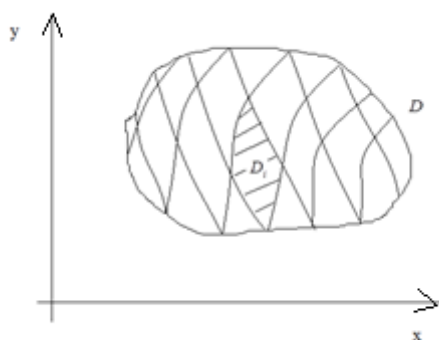


Рис. 10.3

Припустимо, що в області D визначено неперервну функцію $\gamma = \gamma(x, y)$, яка визначає густину пластини в точці (x, y) . Знайдемо масу m пластини.

Розіб'ємо довільним чином область D на частинні області D_i , які не мають спільних внутрішніх точок. Площу множини D_i позначимо як ΔS_i ($i = \overline{1, n}$). Оберемо в кожній з множин D_i довільним чином точку $P_i(\xi_i, \eta_i)$. Густина у цій точці дорівнює $\gamma(\xi_i, \eta_i)$. Будемо вважати, що діаметр області D_i настільки малий, що густина в цій області не встигає суттєво змінитися, і тому в області D_i її можна наближено вважати сталою, а саме $\gamma(\xi_i, \eta_i)$. Тоді маса пластини наближено дорівнює:

$$m \approx \sum_{i=1}^n \gamma(\xi_i, \eta_i) \Delta S_i. \quad (10.2.3)$$

Точне значення маси дістанемо як границю суми (10.2.3) при прямуванні $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} d(D_i)$ до нуля:

$$m = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \gamma(\xi_i, \eta_i) \Delta S_i. \quad (10.2.4)$$

Легко помітити, що з точністю до позначень вираз (10.2.4) має такий самий вигляд, що й вираз (10.2.2).

10.3. Означення подвійного інтеграла. Умови його існування та властивості

Нехай функцію $z = f(x, y)$ визначено в області D координатної площини Oxy (тут вже ми не припускаємо обов'язкову невід'ємність функції $z = f(x, y)$ в області D). Розіб'ємо область D довільним чином на частинні області D_i ($i = 1, 2, \dots, n$), які не мають спільних внутрішніх точок. Позначимо через ΔS_i площу частинної області D_i . В кожній області D_i довільним чином оберемо точку $P_i(\xi_i, \eta_i)$ і утворимо суму:

$$I_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta S_i. \quad (10.3.1)$$

Сума (10.3.1) називається *інтегральною сумою* для функції $z = f(x, y)$ по області D , яка відповідає даному розбиттю області D на частинні області D_i ($i = 1, 2, \dots, n$). Позначимо $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} d(D_i)$ і наведемо число λ *рангом розбиття*.

Означення. Якщо існує скінченна границя при $\lambda \rightarrow 0$ суми (10.3.1), яка не залежить ані від способу розбиття області D на частинні області D_1, \dots, D_n , ані від вибору внутрішніх точок P_1, \dots, P_n , то ця границя називається *подвійним інтегралом* від функції $z = f(x, y)$ по області D і позначається

$$\iint_D f(x, y) dx dy.$$

Таким чином, за означенням:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta S_i. \quad (10.3.2)$$

Повертаючись до розглянутих в п. 10.2 задач, можна тепер сказати, що об'єм циліндричного тіла обчислюється за формулою:

$$V = \iint_D f(x, y) dx dy, \quad (10.3.3)$$

а маса пластини:

$$m = \iint_D \gamma(x, y) dx dy. \quad (10.3.4)$$

Рівності (10.3.3) та (10.3.4) визначають відповідно геометричний та механічний зміст подвійного інтеграла у випадку, коли $f(x, y) \geq 0$ в області D .

Означення. Функція $z = f(x, y)$ називається *інтегрованою* в області D , якщо існує $\iint_D f(x, y) dx dy$.

Наведемо без доведення достатню умову інтегровності функції.

Теорема (достатня умова інтегровності). *Якщо функція $z = f(x, y)$ неперервна в області D , то вона інтегровна в цій області.*

Властивості подвійного інтеграла аналогічні відповідним властивостям визначеного інтеграла Рімана від функції однієї змінної.

1. Сталий множник можна виносити за знак подвійного інтеграла:

$$\iint_D kf(x, y)dxdy = k \iint_D f(x, y)dxdy$$

2. Подвійний інтеграл від суми (різниці) двох інтегровних функцій дорівнює сумі (різниці) інтегралів від цих функцій:

$$\iint_D (f(x, y) \pm g(x, y))dxdy = \iint_D f(x, y)dxdy \pm \iint_D g(x, y)dxdy.$$

3. Якщо в області D виконується нерівність $f(x, y) \geq 0$, то

$$\iint_D f(x, y)dxdy \geq 0.$$

4. Якщо функції $f(x, y)$ та $g(x, y)$ інтегровні в області D , і в цій області виконано $f(x, y) \geq g(x, y)$, то:

$$\iint_D f(x, y)dxdy \geq \iint_D g(x, y)dxdy.$$

5. Якщо $D = D_1 \cup D_2$, причому $D_1 \cap D_2 = \emptyset$, то:

$$\iint_D f(x, y)dxdy = \iint_{D_1} f(x, y)dxdy + \iint_{D_2} f(x, y)dxdy.$$

6. Якщо функція $z = f(x, y)$ неперервна в замкненій обмеженій області D , площа якої дорівнює S , то:

$$mS \leq \iint_D f(x, y)dxdy \leq MS,$$

де $m = \min_D f(x, y)$, $M = \max_D f(x, y)$, та існує точка $(x_0, y_0) \in D$ така, що:

$$\iint_D f(x, y)dxdy = f(x_0, y_0)S.$$

10.4. Обчислення подвійного інтеграла

Нехай маємо деяке об'ємне тіло T . Припустимо, що відомо площу перерізу цього тіла площиною, перпендикулярною осі Ox , причому $x \in [a, b]$ (рис. 10.4).

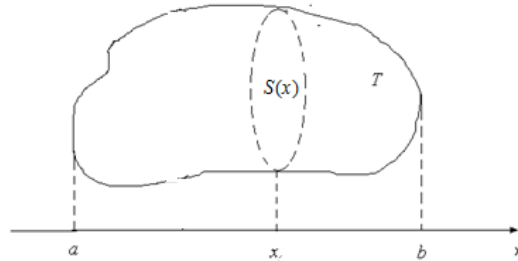


Рис. 10.4

Ця площа, очевидно, буде функцією змінної $x \in [a, b]$: $S = S(x)$. Припустимо, що функція $S(x)$ неперервна на відрізку $[a, b]$. Тоді (див. п. 7.11) об'єм тіла T дорівнює:

$$V_T = \int_a^b S(x) dx. \quad (10.4.1)$$

Розглянемо тепер:

$$\iint_D f(x, y) dx dy, \quad (10.4.2)$$

де D – область на площині Oxy . Для спрощення вважатимемо, що $f(x, y) \geq 0$ в D . Тоді інтеграл (10.4.2) виражає об'єм циліндричного бруса, який обмежено зверху поверхнею $z = f(x, y)$, а знизу – областю D .

Припустимо, що область D обмежена графіками функцій $y = \varphi_1(x)$, $y = \varphi_2(x)$ і прямими $x = a$, $x = b$, причому $\varphi_1(x) \leq \varphi_2(x)$ при $a \leq x \leq b$. Назвемо таку область *областю 1-го типу* (рис. 10.5).

Розглянемо тепер циліндричний брус, об'єм якого дорівнює подвійному інтегралу (10.4.2). Проведемо переріз цього бруса вертикальною площиною $x = \text{const}$ ($a < x < b$) (рис. 10.6).

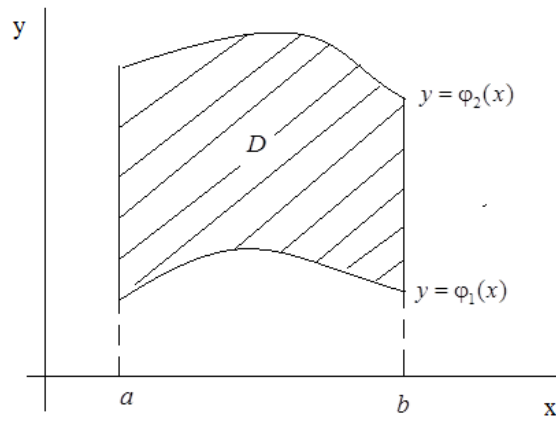


Рис. 10.5

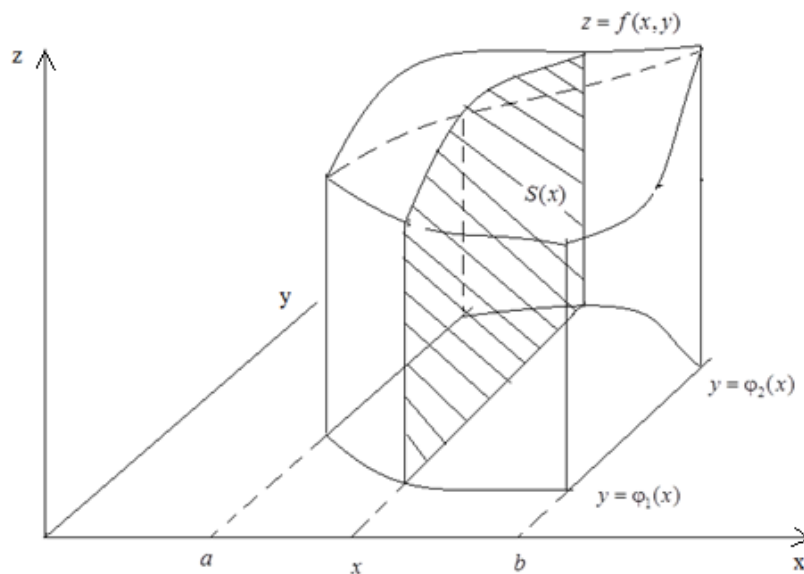


Рис. 10.6

Нехай $S(x)$ – площа отриманого перерізу. Тоді:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b S(x) dx. \quad (10.4.3)$$

Обчислимо площу $S(x)$. Це площа криволінійної трапеції, яку обмежено зверху графіком функції $z = f(x, y)$, а знизу – відрізком $[\varphi_1(x), \varphi_2(x)]$ вісі Oy . Змінна x розглядається як стала. Тому:

$$S(x) = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy.$$

І з урахуванням (10.4.3) остаточно маємо:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right) dx. \quad (10.4.4)$$

Тобто подвійний інтеграл по області 1-го типу обчислюється через повторний інтеграл. Можна довести, що формула (10.4.4) справедлива не тільки для випадку $f(x, y) \geq 0$, а й у загальному випадку також.

Якщо область D обмежено зліва і справа графіками функцій $x = \psi_1(y)$, $x = \psi_2(y)$, а зверху і знизу прямими $y = c$, $y = d$, то таку область назвемо *областю 2-го типу* (рис. 10.7).

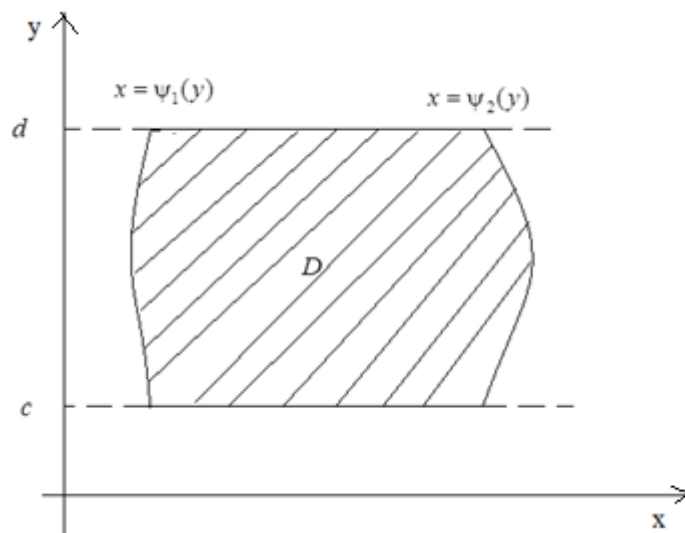


Рис. 10.7

Для такої області аналогічно дістаємо формулу:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx \right) dy. \quad (10.4.5)$$

Зауваження 1. Якщо область D є водночас і областю 1-го типу, і областю 2-го типу, то інтеграл можна обчислювати як за формулою (10.4.4), так і за формулою (10.4.5). Результати співпадатимуть. Зокрема, це стосується випадку, коли область D є прямокутником $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$ (рис. 10.8).

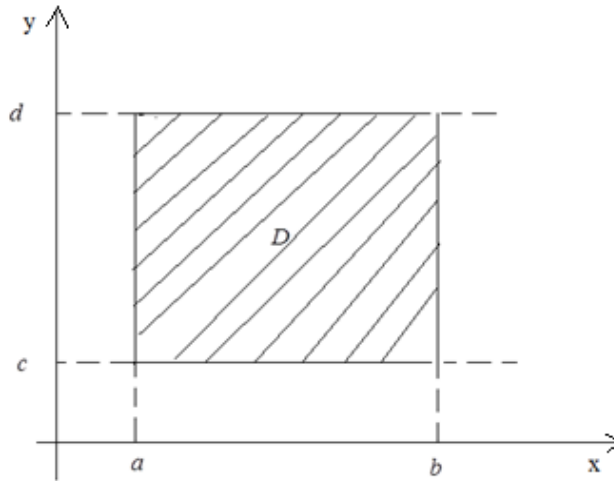


Рис. 10.8

Тоді маємо:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx. \quad (10.4.6)$$

Зауваження 2. Якщо область D не є ані областю 1-го, ані областю 2-го типу, то її намагаються розбити на частини, кожна з яких відноситься до одного з цих двох типів.

Приклади

1. Обчислити:

$$\iint_D (x^2 + y^2) dx dy,$$

де D – область, обмежена прямими $y = 0$, $y = 2x$, $x = 1$.

Область D має вигляд:

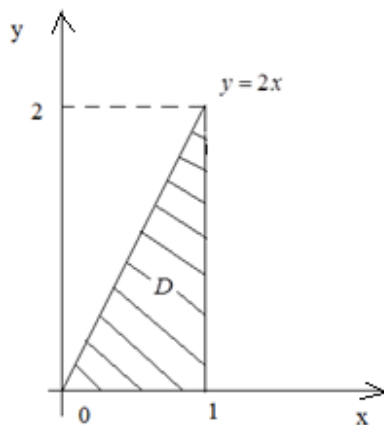


Рис. 10.9

Розглянемо цю область як область 1-го типу. Зліва і справа вона обмежена прямими $x=0$ та $x=1$, а зверху і знизу – лініями $y=0$ та $y=2x$. Тому:

$$\begin{aligned} \iint_D (x^2 + y^2) dx dy &= \int_0^1 dx \int_0^{2x} (x^2 + y^2) dy = \int_0^1 \left(x^2 y \Big|_0^{2x} + \frac{y^3}{3} \Big|_0^{2x} \right) dx = \int_0^1 \left(2x^3 + \frac{8x^3}{3} \right) dx = \\ &= \frac{14}{3} \int_0^1 x^3 dx = \frac{14}{3} \cdot \frac{x^4}{4} \Big|_0^1 = \frac{7}{6}. \end{aligned}$$

А тепер розглянемо цю ж область як область 2-го типу. Знизу і зверху вона обмежена прямими $y=0$ та $y=2$, а зліва і справа – лініями $x=y/2$ (рівняння лінії $y=2x$ тут треба переписати у вигляді залежності x від y) та $x=1$. Тому:

$$\begin{aligned} \iint_D (x^2 + y^2) dx dy &= \int_0^2 dy \int_{y/2}^1 (x^2 + y^2) dx = \int_0^2 \left(\frac{x^3}{3} \Big|_{y/2}^1 + y^2 x \Big|_{y/2}^1 \right) dy = \\ &= \int_0^2 \left(\frac{1}{3} - \frac{y^3}{24} + y^2 - \frac{y^3}{2} \right) dy = \frac{1}{3} y \Big|_0^2 - \frac{y^4}{96} \Big|_0^2 + \frac{y^3}{3} \Big|_0^2 - \frac{y^4}{8} \Big|_0^2 = \frac{2}{3} - \frac{1}{6} + \frac{8}{3} - 2 = \frac{7}{6}. \end{aligned}$$

Як бачимо, результати співпадають.

Іноді простіше розглядати область, по якій береться інтеграл, як область 1-го типу, а іноді – як область 2-го типу. Тому виникає задача так званої зміни порядку інтегрування: від повторного інтеграла, що виражає даний подвійний інтеграл, якщо область розглядається як область 1-го типу, перейти до повторного інтегралу, що виражає той самий подвійний інтеграл, якщо та ж сама область розглядається як область 2-го типу, і навпаки.

Для того, щоб правильно розставити межі інтегрування у повторному інтегралі, можна користуватися таким правилом. Припустимо, ми розглядаємо дану область як область 1-го типу. Тоді проектуємо цю область на вісь Ox . Отримаємо деякий відрізок $[a, b]$. Числа a і b будуть відповідно нижньою і верхньою межею зовнішнього інтеграла (за змінною x). Потім треба мислено провести вертикальні прямі лінії знизу вгору через дану область і подивитись, через яку лінію вони

входять в область і через яку виходять з неї. Рівняння лінії входу в область, яке записано у вигляді залежності y від x ($y = \varphi_1(x)$) буде нижньою межею внутрішнього інтеграла (за змінною y), а рівняння лінії виходу ($y = \varphi_2(x)$) – верхньою межею внутрішнього інтеграла (рис. 10.10).

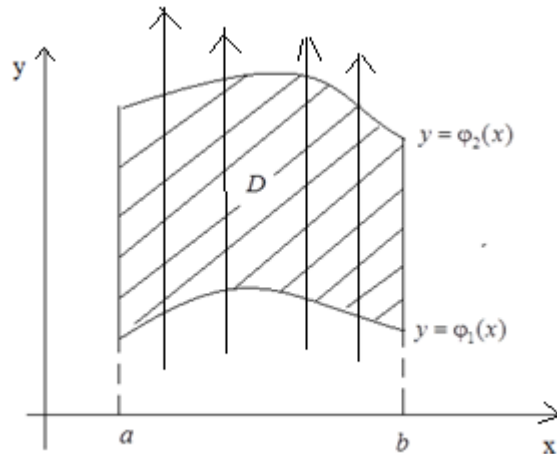


Рис. 10.10

Аналогічно розставляються межі у випадку області 2-го типу. Тепер треба область проектувати на вісь Oy , отримуємо відрізок $[c, d]$. Числа c і d є відповідно нижньою і верхньою межею зовнішнього інтеграла (за змінною y). Потім проводимо горизонтальні прямі лінії зліва направо через область. І знову дивимось, через яку лінію

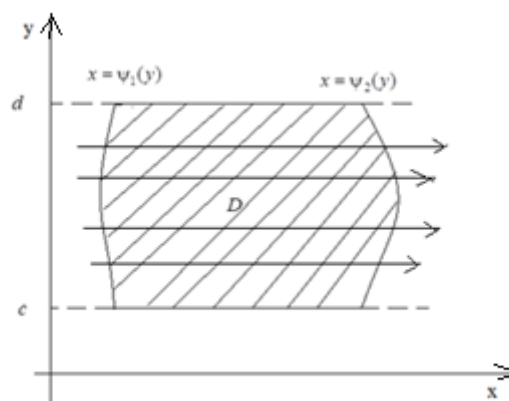


Рис. 10.11

вони входять в область, і через яку виходять з неї. Рівняння лінії входу в область, яке записано у вигляді залежності x від y ($x = \psi_1(y)$)

буде нижньою межею внутрішнього інтеграла (за змінною x), а рівняння лінії виходу ($x = \psi_2(y)$) – верхньою межею внутрішнього інтеграла (рис. 10.11).

1. Обчислити:

$$\iint_D y \cos^2 x \, dx dy,$$

де $D = \{0 \leq x \leq 2\pi, 0 \leq y \leq a\}$.

Оскільки область D є прямокутником, то за формулою (10.4.6) маємо:

$$\begin{aligned} \iint_D y \cos^2 x \, dx dy &= \int_0^{2\pi} dx \int_0^a y \cos^2 x \, dy = \int_0^{2\pi} \cos^2 x \, dx \int_0^a y \, dy = \\ &= \int_0^{2\pi} \cos^2 x \, dx \cdot \int_0^a y \, dy = \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 2x}{2} \, dx \cdot \frac{a^2}{2} = \frac{a^2}{4} \cdot 2\pi = \frac{\pi a^2}{2}. \end{aligned}$$

У даному випадку повторний інтеграл є добутком двох незалежних один від одного інтегралів. Взагалі, якщо $f(x, y) = f_1(x)f_2(y)$, і область D – прямокутник $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$, то:

$$\begin{aligned} \iint_D f(x, y) \, dx dy &= \int_a^b dx \int_c^d f_1(x)f_2(y) \, dy = \int_a^b f_1(x) \, dx \int_c^d f_2(y) \, dy = \\ &= \int_a^b f_1(x) \, dx \cdot \int_c^d f_2(y) \, dy, \end{aligned}$$

оскільки внутрішній інтеграл $\int_c^d f_2(y) \, dy$ є сталою величиною, отже її можна винести за знак зовнішнього інтеграла.

2. Змінити порядок інтегрування у повторному інтегралі:

$$\int_0^1 dx \int_{x^2+2}^{4-x} f(x, y) \, dy.$$

З'ясуємо вигляд області D , по якій береться подвійний інтеграл, якому відповідає даний повторний. Проекцією цієї області на вісь Ox

є відрізок $[0,1]$. Знизу ця область обмежена параболою $y = x^2 + 2$, а зверху – прямою лінією $y = 4 - x$. Таким чином, область має вигляд, який зображено на рис. 10.12.

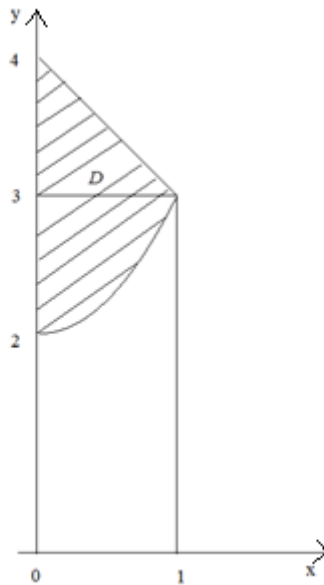


Рис. 10.12

Область D є стандартною 1-го типу. Подивимось на неї як на стандартну 2-го типу. Проекцією цієї області на вісь Oy є відрізок $[2,4]$. Зліва область обмежена віссю Oy , тобто прямою $x = 0$, а справа – суцільною лінією, яка на різних ділянках відрізка $[2,4]$ задається різними рівняннями. На відрізку $[2,3]$ осі Oy область обмежена параболою, рівняння якої, якщо його записати у вигляді залежності x від y , має вигляд: $x = \sqrt{y-2}$. А на відрізку $[3,4]$ осі Oy область справа обмежена прямою $x = 4 - y$ (знову рівняння пишемо у вигляді залежності x від y). Отже, ми повинні повторний інтеграл розбити на суму двох інтегралів:

$$\int_0^1 dx \int_{x^2+2}^{4-x} f(x, y) dy = \iint_D f(x, y) dx dy = \int_2^3 dy \int_0^{\sqrt{y-2}} f(x, y) dx + \int_3^4 dy \int_0^{4-y} f(x, y) dx.$$

3. Змінити порядок інтегрування у повторному інтегралі:

$$\int_{-1/\sqrt{2}}^0 dy \int_{-y}^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx + \int_0^{1/\sqrt{2}} dy \int_y^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx.$$

Ця задача у певному сенсі є оберненою до попередньої – тепер вже ми початково маємо суму двох повторних інтегралів. І треба з'ясувати вигляд області D , по якій береться подвійний інтеграл, що цій сумі відповідає, а потім змінити порядок інтегрування. Проекцією області D на вісь Oy є об'єднання відрізків $[-1/\sqrt{2}, 0]$ і $[0, 1/\sqrt{2}]$, тобто відрізок $[-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}]$. На відрізку $[-1/\sqrt{2}, 0]$ область зліва обмежена прямою $x = -y$, а справа – кривою $x = \sqrt{1-y^2}$, що є дугою кола $x^2 + y^2 = 1$. На відрізку $[0, 1/\sqrt{2}]$ область зліва обмежена прямою $x = y$, а справа – теж кривою $x = \sqrt{1-y^2}$. Тобто область D має вигляд, який зображено на рис. 10.13 – це круговий сектор.

Щоб змінити порядок інтегрування (тобто зовнішній інтеграл тепер має бути за змінною x), спроектуємо нашу область на вісь Ox – це буде відрізок $[0, 1]$. На частині $[0, 1/\sqrt{2}]$ цього відрізка область обмежена знизу прямою $y = -x$, а зверху – прямою $y = x$. На частині $[1/\sqrt{2}, 1]$ і зверху і знизу область обмежена дугами кола $x^2 + y^2 = 1$: знизу дугою $y = -\sqrt{1-x^2}$, а зверху дугою $y = \sqrt{1-x^2}$. Отже і тут ми маємо розбити повторний інтеграл на суму двох інтегралів:

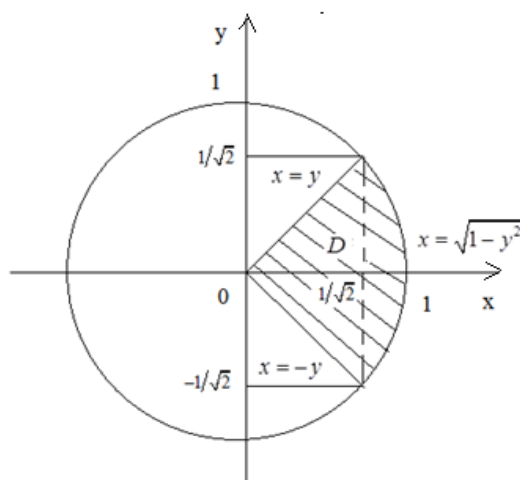


Рис. 10.13

$$\int_{-1/\sqrt{2}}^0 dy \int_{-y}^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx + \int_0^{1/\sqrt{2}} dy \int_y^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx = \iint_D f(x, y) dx dy =$$

$$= \int_0^{1/\sqrt{2}} dx \int_{-x}^x f(x, y) dy + \int_{1/\sqrt{2}}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy.$$

10.5. Заміна змінних у подвійному інтегралі

Нехай на площині Oxy задано область D , яку обмежено замкненою кривою L . Припустимо, що координати x, y довільної точки області D є функціями змінних u, v :

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v), \quad (10.5.1)$$

де функції $\varphi(u, v)$, $\psi(u, v)$ неперервні та мають неперервні частинні похідні 1-го порядку в деякій області D' площини Ouv . Кожній парі значень u, v відповідає єдина пара значень x, y . Припустимо також, що й кожній парі значень x, y відповідає єдина пара значень u, v . Тобто формули (10.5.1) здійснюють взаємно однозначну відповідність між областями D та D' – кожній точці $P(x, y) \in D$ відповідає одна й тільки одна точка $P'(u, v) \in D'$ і навпаки. Числа u, v називаються *криволінійними координатами точки P* .

Замкненій кривій L на площині Oxy відповідатиме також замкнена крива L' на площині Ouv (рис. 10.14).

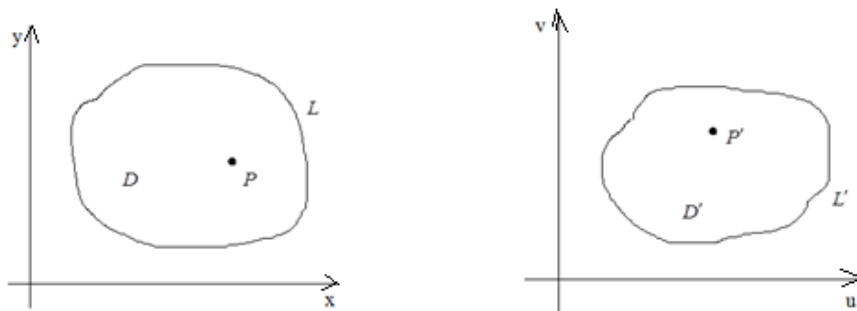


Рис. 10.14

Позначимо:

$$J(u, v) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial u} & \frac{\partial \varphi}{\partial v} \\ \frac{\partial \psi}{\partial u} & \frac{\partial \psi}{\partial v} \end{pmatrix}.$$

Цей визначник називається *визначником Якобі (якобіаном)* функцій $\varphi(u, v)$, $\psi(u, v)$.

Справедлива наступна теорема, яку ми наводимо без доведення.

Теорема. Нехай функція $z = f(x, y)$ неперервна в області D , функції $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$ неперервні і мають неперервні частинні похідні 1-го порядку в області D' , і якобіан $J(u, v)$ в області D' відмінний від нуля. Тоді має місце формула:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D'} F(u, v) |J(u, v)| du dv. \quad (10.5.2)$$

Формула (10.5.2) називається *формулою заміни змінних у подвійному інтегралі*.

Приклад. Обчислити:

$$\iint_D y^3 dx dy,$$

якщо D – область, обмежена параболою $y = x^2$, $y = 2x^2$ та гіперболами $xy = 1$, $xy = 2$.

Область D має вигляд, який показано на рис. 10.15.

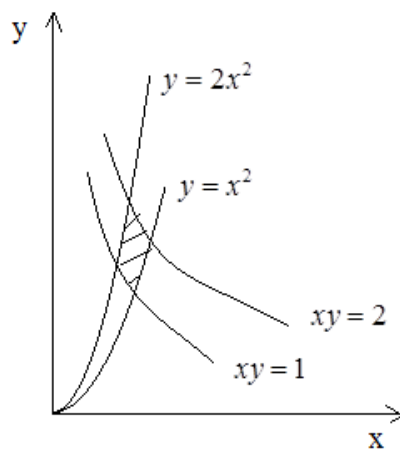


Рис. 10.15

Зробимо заміну змінних:

$$u = \frac{y}{x^2}, \quad v = xy.$$

Тоді області D на площині Oxy відповідатиме область $D' = \{1 \leq u \leq 2, 1 \leq v \leq 2\}$ (тобто квадрат) на площині Ouv . Далі маємо:

$$x = \varphi(u, v) = u^{-1/3} v^{1/3}, \quad y = \psi(u, v) = u^{1/3} v^{2/3};$$

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial u} & \frac{\partial \varphi}{\partial v} \\ \frac{\partial \psi}{\partial u} & \frac{\partial \psi}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{1}{3} u^{-4/3} v^{1/3} & \frac{1}{3} u^{-1/3} v^{-2/3} \\ \frac{1}{3} u^{-2/3} v^{2/3} & \frac{2}{3} u^{1/3} v^{-1/3} \end{vmatrix} = -\frac{2}{9} u^{-1} - \frac{1}{9} u^{-1} = -\frac{1}{3u}.$$

Тому:

$$\iint_D y^3 dx dy = \int_1^2 du \int_1^2 uv^2 \frac{1}{3u} dv = \frac{1}{3} \int_1^2 du \int_1^2 v^2 dv = \frac{7}{9}.$$

10.6. Подвійний інтеграл у полярних координатах

Важливим частинним випадком заміни змінних у подвійному інтегралі є перехід до полярних координат. Особливо він ефективний, коли область D є областю кругового типу, тобто має форму круга або його частин. Як відомо (див. п. 3.12), зв'язок між декартовими координатами x, y точки на площині та її полярними координатами ρ, φ задається формулами:

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad \rho \geq 0.$$

Якобіан цієї заміни дорівнює:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\rho \sin \varphi \\ \sin \varphi & \rho \cos \varphi \end{vmatrix} = \rho.$$

Тому подвійний інтеграл в полярних координатах набуває вигляду:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D'} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho d\varphi,$$

де D' – область на площині $O\rho\varphi$. Припустимо, що D' – область 1-го типу, тобто $D' = \{\varphi_0 \leq \varphi \leq \varphi_1, \rho_1(\varphi) \leq \rho(\varphi) \leq \rho_2(\varphi)\}$. Тоді область D на площині Oxy має бути обмеженою двома променями, що виходять з початку координат під кутами φ_0 та $\varphi_1 > \varphi_0$ до додатного напрямку осі Ox , та двома кривими, рівняння яких у полярній системі координат мають вигляд $\rho = \rho_1(\varphi)$ та $\rho = \rho_2(\varphi)$, причому $\rho_1(\varphi) \leq \rho_2(\varphi)$ при $\varphi_0 \leq \varphi \leq \varphi_1$ (рис. 10.16). Щоб правильно розставити межі інтегрування в полярних координатах у цьому випадку, не обов'язково зображувати область D' на площині $O\rho\varphi$. Достатньо «затиснути» область D між двома променями, що виходять з початку координат, і подивитись, які кути вони утворюють з додатним напрямом осі Ox . Менший з цих кутів буде нижньою межею зовнішнього інтеграла, а більший – верхньою. Потім з початку координат провести промені через область D і подивитись, через яку лінію вони входять в область (рівняння цієї прямої буде нижньою межею внутрішнього інтеграла), і через яку виходять з області (рівняння цієї прямої буде верхньою межею внутрішнього інтеграла). Тобто матимемо:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} d\varphi \int_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho. \quad (10.6.1)$$

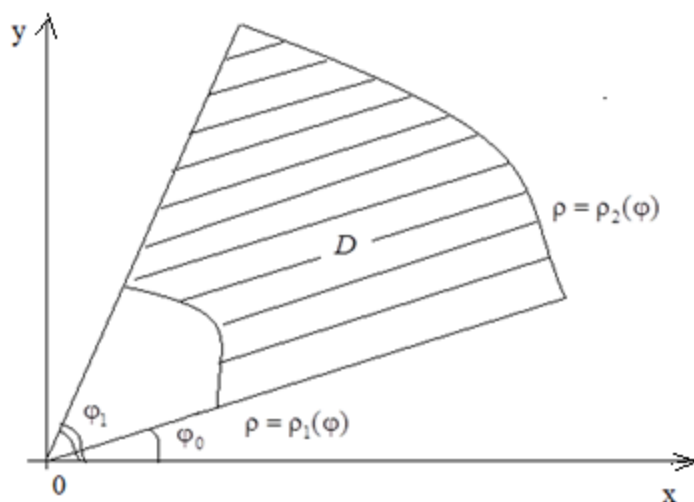


Рис. 10.16

Приклади

1. Обчислити:

$$\iint_D \operatorname{arctg} \frac{y}{x} dx dy, \quad D = \left\{ 1 \leq x^2 + y^2 \leq 9, \frac{x}{\sqrt{3}} \leq y \leq x\sqrt{3} \right\}.$$

Область D зображено на рис. 10.17.

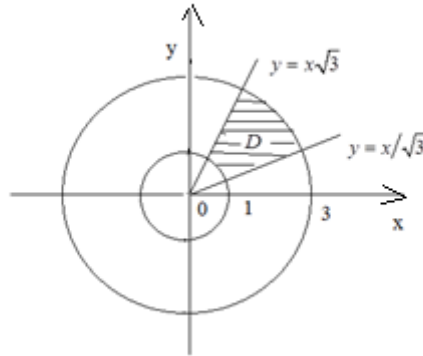


Рис. 10.17

Ця область обмежена променями $\varphi = \pi/6$ (пряма $y = x/\sqrt{3}$), $\varphi = \pi/3$ (пряма $y = x\sqrt{3}$) та дугами кіл $\rho = 1$ ($x^2 + y^2 = 1$) та $\rho = 3$ ($x^2 + y^2 = 9$).

Тому:

$$\begin{aligned} \iint_D \operatorname{arctg} \frac{y}{x} dx dy &= \int_{\pi/6}^{\pi/3} d\varphi \int_1^3 \operatorname{arctg} \frac{\rho \sin \varphi}{\rho \cos \varphi} \rho d\rho = \int_{\pi/6}^{\pi/3} d\varphi \int_1^3 \varphi \rho d\rho = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \varphi d\varphi \int_1^3 \rho d\rho = \\ &= \left(\frac{\varphi^2}{2} \Big|_{\pi/6}^{\pi/3} \right) \cdot \left(\frac{\rho^2}{2} \Big|_1^3 \right) = \frac{1}{4} \left(\frac{\pi^2}{9} - \frac{\pi^2}{36} \right) \cdot (9 - 1) = \frac{\pi^2}{6}. \end{aligned}$$

2. Перейти у подвійному інтегралі:

$$\iint_D f(x, y) dx dy$$

до полярних координат і розставити межі інтегрування.

1) Область D обмежено колами $x^2 + y^2 = 4x$ та $x^2 + y^2 = 8x$.

Область D зображено на рис. 10.18.

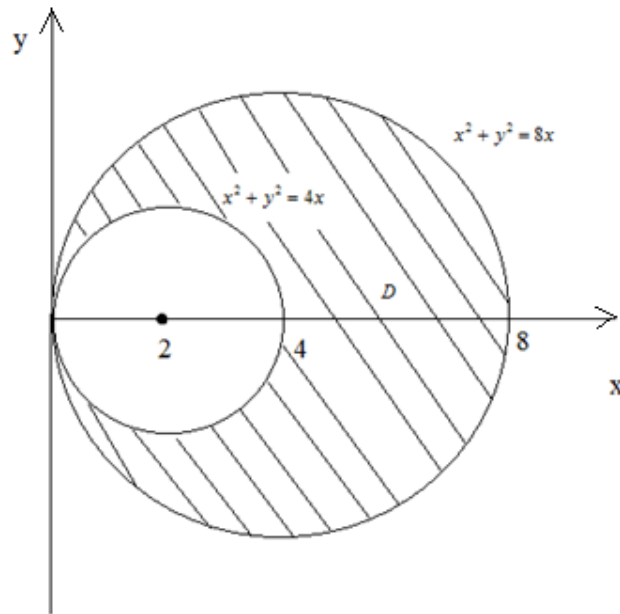


Рис. 10.18

Прямі, між якими «затиснуто» цю область – від’ємний та додатний напрями осі Oy , тобто лінії, рівняннями яких у полярній системі координат відповідно є: $\varphi = -\pi/2$, $\varphi = \pi/2$. Якщо з початку координат провести промені через область D , то лінією їх входу буде коло $x^2 + y^2 = 4x$, рівнянням якого у полярній системі координат є $\rho = 4\cos\varphi$, а лінією виходу – коло $x^2 + y^2 = 8x$, рівнянням якого у полярній системі координат є $\rho = 8\cos\varphi$. Тому, згідно з формулою (10.6.1), маємо:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_{4\cos\varphi}^{8\cos\varphi} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi) \rho d\rho.$$

2) Область D – менший з двох сегментів, на які пряма $x + y = 2$ поділяє круг $x^2 + y^2 \leq 4$.

Область D зображено на рис. 10.19.

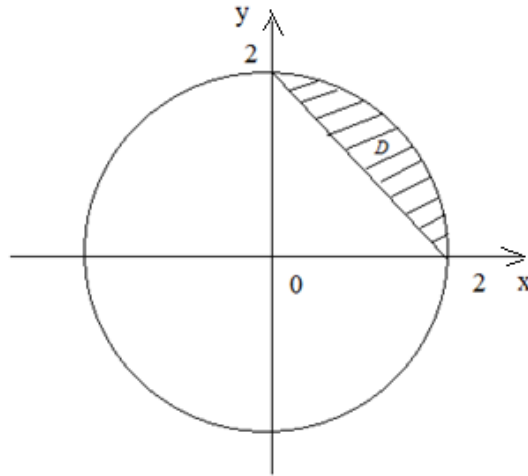


Рис. 10.19

Цю область «затиснуто» між додатним напрямом осі Ox (лінія $\varphi = 0$) і додатним напрямом осі Oy (лінія $\varphi = \pi/2$). Якщо провести промені з початку координат через область, то лінією входу в область буде відрізок прямої $x + y = 2$, рівняння якої в полярній системі координат має вигляд:

$$\rho = \frac{2}{\cos \varphi + \sin \varphi}.$$

Лінією виходу буде дуга кола $x^2 + y^2 = 4$, рівняння якого в полярній системі координат має вигляд: $\rho = 2$. Отже, згідно з формулою (10.6.1) маємо:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_{\frac{2}{\cos \varphi + \sin \varphi}}^2 f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho.$$

3) Область D – спільна частина кругів $x^2 + y^2 \leq ax$, $x^2 + y^2 \leq by$ ($a, b > 0$).

Область D зображено на рис. 10.20.

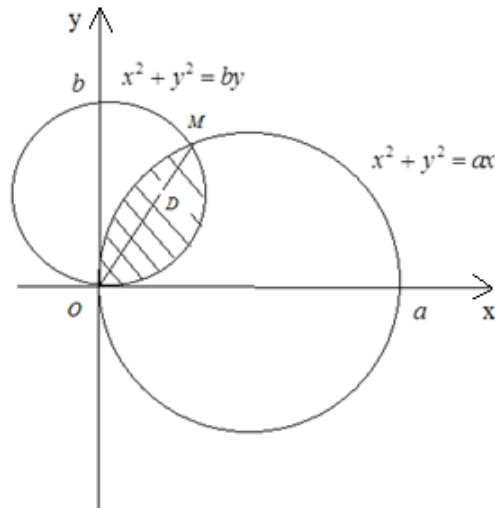


Рис. 10.20

Кола $x^2 + y^2 = ax$ та $x^2 + y^2 = by$ перетинаються у точках $O(0,0)$ та $M\left(\frac{ab^2}{a^2 + b^2}, \frac{a^2b}{a^2 + b^2}\right)$. Відрізок OM утворює з додатним напрямом осі Ox кут $\alpha = \operatorname{arctg} \frac{a}{b}$. Якщо проводити промені з початку координат через область D , то всі вони входять в область через точку $\rho = 0$, а вихід з області буде здійснюватись через дугу кола $x^2 + y^2 = by$, якщо ці промені утворюють з додатним напрямом осі Ox кут $\varphi \in (0, \alpha)$, і через дугу кола $x^2 + y^2 = ax$, якщо промені утворюють з додатним напрямом осі Ox кут $\varphi \in (\alpha, \pi/2)$. Рівняння кола $x^2 + y^2 = by$ у полярній системі координат має вигляд $\rho = b \sin \varphi$, а кола $x^2 + y^2 = ax$ має вигляд $\rho = a \cos \varphi$. Отже, при переході до полярних координат, необхідно розбити повторний інтеграл на суму двох інтегралів:

$$\begin{aligned} \iint_D f(x, y) dx dy &= \\ &= \int_0^{\operatorname{arctg} \frac{a}{b}} d\varphi \int_0^{b \sin \varphi} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho + \int_{\operatorname{arctg} \frac{a}{b}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{a \cos \varphi} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho. \end{aligned}$$

10.7. Геометричні застосування подвійного інтеграла

I. Обчислення об'ємів тіл

Нехай задано тіло, яке обмежене замкненою обмеженою областю D площини Oxy , поверхнею $z = f(x, y)$, $f(x, y) \geq 0$ в області D , та циліндричною поверхнею, напрямною якої є межа області D , а твірні паралельні осі Oz (рис. 10.21).

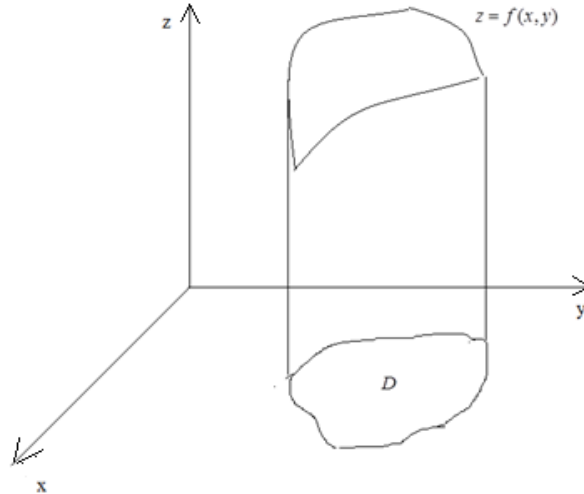


Рис. 10.21

Згідно з геометричним змістом подвійного інтеграла об'єм цього тіла обчислюється за формулою:

$$V = \iint_D f(x, y) dx dy. \quad (10.7.1)$$

Приклад 1. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y + z = 1$.

Дане тіло є трикутною пірамідою (рис. 10.22 а). Областю D є прямокутний трикутник на площині Oxy (рис. 10.22 б). Тому:

$$\begin{aligned} V &= \iint_D (1 - x - y) dx dy = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (1 - x - y) dy = \\ &= \int_0^1 \left[(1-x)y \Big|_0^{1-x} - \frac{y^2}{2} \Big|_0^{1-x} \right] dx = \int_0^1 \left[(1-x)^2 - \frac{(1-x)^2}{2} \right] dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (1-x)^2 dx = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

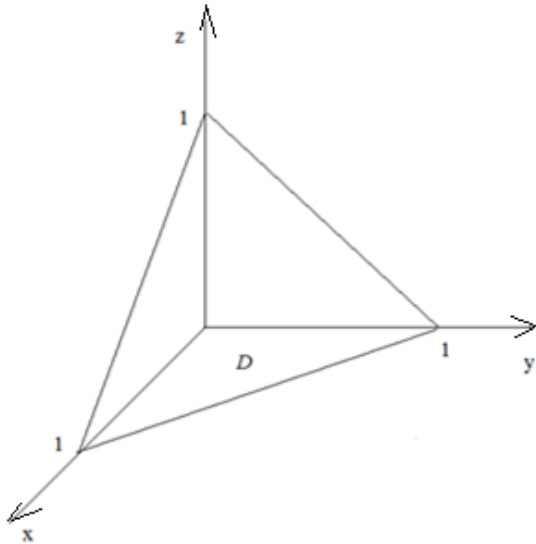


Рис. 10.22а

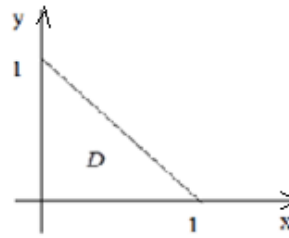


Рис. 10.22б

Приклад 2. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $x^2 + y^2 = Rx$, $z = 0$.

Дане тіло є частиною півкулі радіуса R , що знаходиться всередині кругового циліндру з радіусом основи $R/2$, причому твірна циліндру проходить через центр півкулі (рис. 10.24а). Крива, яку вирізає циліндр на кулі, називається *кривою Вівіані*. Очевидно, що дане тіло обмежено знизу областю D площини Oxy , яка є кругом радіуса $R/2$ з центром у точці $(R/2, 0)$ (рис. 10.24б), а зверху – півсферою $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$. Тому:

$$V = \iint_D \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \, dx dy.$$

Цей інтеграл обчислимо, переходячи до полярних координат:

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \rho \leq R \cos \varphi$$

(тут враховано, що рівняння кола $x^2 + y^2 = Rx$ у полярних координатах має вигляд $\rho = R \cos \varphi$). Отже:

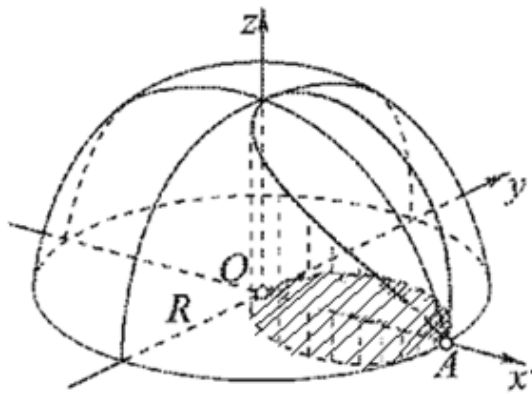


Рис. 10.24а

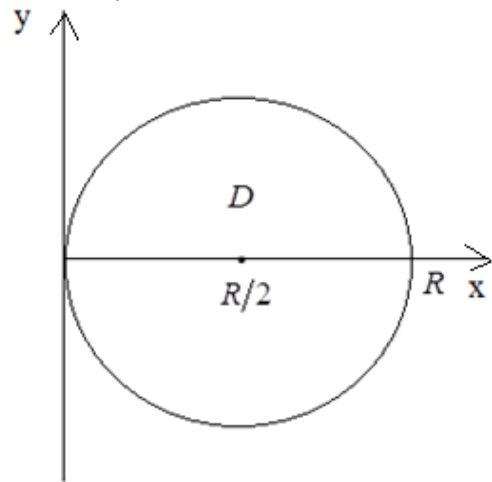


Рис. 10.24б

$$\begin{aligned}
 V &= \iint_D \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \, dx dy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{R \cos \varphi} \sqrt{R^2 - \rho^2} \rho d\rho = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{R \cos \varphi} \sqrt{R^2 - \rho^2} \rho d\rho = \\
 &= - \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{R \cos \varphi} \sqrt{R^2 - \rho^2} \, d(R^2 - \rho^2) = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{2(R^2 - \rho^2)^{\frac{3}{2}}}{3} \Big|_0^{R \cos \varphi} \right] d\varphi = \\
 &= - \frac{2}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[(R^2 - R^2 \cos^2 \varphi)^{\frac{3}{2}} - R^3 \right] d\varphi = - \frac{2}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (R^3 \sin^3 \varphi - R^3) d\varphi = \\
 &= \frac{2R^3}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^3 \varphi) d\varphi = \frac{2R^3}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi - \frac{2R^3}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \varphi d\varphi = \frac{\pi R^3}{3} - \frac{4R^3}{9}.
 \end{aligned}$$

II. Обчислення площ областей

Складемо інтегральну суму для функції $f(x, y) \equiv 1$ по області D :

$$\sum_{j=1}^n 1 \cdot \Delta S_j.$$

Очевидно, що ця сума дорівнюватиме площі області D при будь-якому способі розбиття. Тоді, переходячи до границі при рангу розбиття прямуючому до нуля, також дістанемо площу області D :

$$S(D) = \iint_D dx dy. \quad (10.7.2)$$

Приклад. Знайти площу фігури, яку обмежено лініями $y^2 = 10x + 25$, $y^2 = -6x + 9$.

Знайдемо точки перетину вказаних ліній, для чого розв'яжемо рівняння:

$$10x + 25 = -6x + 9,$$

звідки $x = -1$, тоді $y^2 = 15$, і $y = \pm\sqrt{15}$. Область D зображено на рис. 10.25.

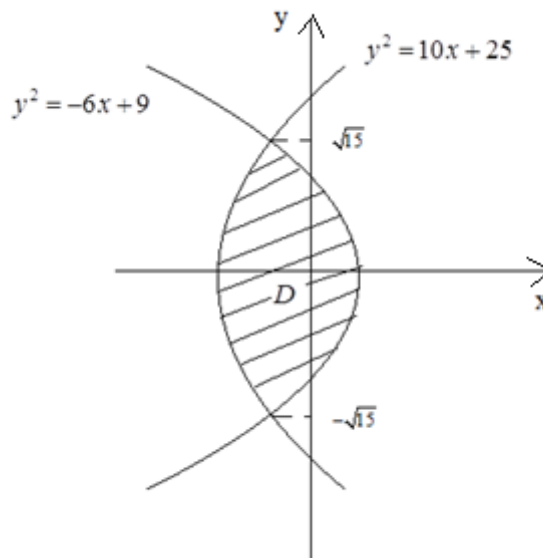


Рис. 10.25

Ця область симетрична відносно осі Ox . Тому:

$$S = \iint_D dx dy = 2 \int_0^{\sqrt{15}} dy \int_{\frac{y^2-25}{10}}^{\frac{9-y^2}{6}} dx = 2 \int_0^{\sqrt{15}} \left(\frac{9-y^2}{6} - \frac{y^2-25}{10} \right) dy = \frac{16\sqrt{15}}{3}$$

(обчислення інтеграла перевірте самостійно).

10.7. Механічні застосування подвійного інтеграла

I. Маса і координати центру тяжіння

Нехай є матеріальна пластина, яка займає область D площини Oxy і має змінну поверхневу густину $\gamma(x, y)$. Тоді маса пластини обчислюється за формулою:

$$m = \iint_D \gamma(x, y) dx dy. \quad (10.8.1)$$

Статичні моменти M_x, M_y пластини відносно осей Ox і Oy визначаються формулами:

$$M_x = \iint_D y\gamma(x, y) dx dy, \quad M_y = \iint_D x\gamma(x, y) dx dy. \quad (10.8.2)$$

Координати x_C, y_C центру тяжіння знаходять за формулами:

$$x_C = \frac{M_y}{m} = \frac{\iint_D x\gamma(x, y) dx dy}{\iint_D \gamma(x, y) dx dy}, \quad y_C = \frac{M_x}{m} = \frac{\iint_D y\gamma(x, y) dx dy}{\iint_D \gamma(x, y) dx dy}. \quad (10.8.3)$$

Моменти інерції I_x, I_y, I_O пластини відносно осей Ox, Oy і початку координат визначаються формулами:

$$I_x = \iint_D y^2 \gamma(x, y) dx dy, \quad I_y = \iint_D x^2 \gamma(x, y) dx dy, \\ I_O = I_x + I_y = \iint_D (x^2 + y^2) \gamma(x, y) dx dy. \quad (10.8.4)$$

Приклад. Знайти масу квадратної пластини із стороною $2a$, якщо її густина пропорційна квадрату відстані від точки перетину діагоналей і у вершинах квадрату дорівнює 1.

Розташуємо квадрат так, щоб його сторони були паралельні осям координат, а центр перетину діагоналей знаходився у початку координат (рис. 10.26).

Тоді за умовою задачі густина $\gamma(x, y) = k(x^2 + y^2)$, де k – коефіцієнт пропорційності. Визначимо його з умови, що у вершинах квадра-

та густина дорівнює одиниці. Тоді $\gamma(a, a) = k(a^2 + a^2) = 1$, звідки $k = 1/2a^2$, і таким чином:

$$\gamma(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{2a^2}.$$

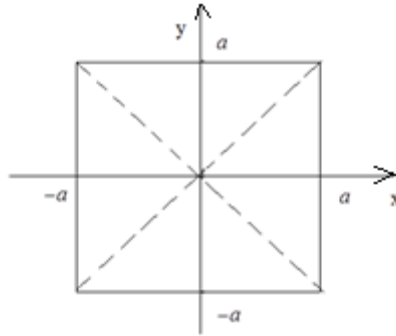


Рис. 10.26

Масу квадрата тепер знайдемо за формулою (10.8.1):

$$m = \iint_D \frac{x^2 + y^2}{2a^2} dx dy = \frac{4}{2a^2} \int_0^a dx \int_0^a (x^2 + y^2) dy = \frac{4a^2}{3}.$$

За формулами (10.8.2) знайдемо статичні моменти:

$$\begin{aligned} M_x &= \iint_D y \gamma(x, y) dx dy = \frac{1}{2a^2} \iint_D y(x^2 + y^2) dx dy = \\ &= \frac{1}{2a^2} \int_{-a}^a dx \int_{-a}^a (yx^2 + y^3) dy = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_y &= \iint_D x \gamma(x, y) dx dy = \frac{1}{2a^2} \iint_D x(x^2 + y^2) dx dy = \\ &= \frac{1}{2a^2} \int_{-a}^a dx \int_{-a}^a (x^3 + xy^2) dy = 0. \end{aligned}$$

(обчислення інтегралів перевірте самостійно). Звідси за формулами (10.8.3) дістаємо: $x_C = y_C = 0$.

Моменти інерції відносно осей координат і початку координат знайдемо за формулами (10.8.4):

$$I_x = \iint_D y^2 \gamma(x, y) dx dy = \frac{1}{2a^2} \iint_D y^2 (x^2 + y^2) dx dy =$$

$$= \frac{1}{2a^2} \int_{-a}^a dx \int_{-a}^a (x^2 y^2 + y^4) dy = \frac{28a^4}{45},$$

$$I_y = \iint_D x^2 \gamma(x, y) dx dy = \frac{1}{2a^2} \iint_D x^2 (x^2 + y^2) dx dy =$$

$$= \frac{1}{2a^2} \int_{-a}^a dx \int_{-a}^a (x^4 + x^2 y^2) dy = \frac{28a^4}{45},$$

$$I_O = \frac{56a^4}{45}.$$

10.9. Потрійний інтеграл, означення та умови існування

Нехай у просторі задано замкнену область V , яку обмежено замкненою поверхнею S , і $P(x, y, z)$ – довільна точка області V . Нехай в області V та на її межі визначено деяку функцію $u = f(P) = f(x, y, z)$. Розіб'ємо область V довільною обраною сіткою поверхонь на частинні області V_i ($i = \overline{1, n}$), які не мають спільних внутрішніх точок. Позначимо через ΔV_i – об'єм області V_i . У кожній частинній області V_i довільним чином оберемо одну внутрішню точку $P_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$. Утворимо суму:

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta V_i, \quad (10.9.1)$$

яку назвемо *інтегральною сумою* для функції $u = f(x, y, z)$ по області V , що відповідає даному розбиттю. Позначимо $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} d(V_i)$, де $d(V_i)$ – діаметр області V_i , і назвемо цю величину *рангом розбиття*.

Означення. Якщо існує скінченна границя інтегральної суми (10.9.1) при $\lambda \rightarrow 0$, яка не залежить ані від способу розбиття області V на частинні, ані від способу вибору внутрішніх точок P_i , то ця границя називається *потрійним інтегралом* від функції $u = f(x, y, z)$ по області V і позначається

$$\iiint_V f(P)dV = \iiint_V f(x, y, z)dxdydz.$$

Таким чином, за означенням:

$$\iiint_V f(x, y, z)dxdydz = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta V_i. \quad (10.9.2)$$

Якщо існує границя (10.9.2), то функція $u = f(x, y, z)$ називається *інтегрованою в області V* .

Потрійний інтеграл має просту фізичну інтерпретацію. Припустимо, що ми маємо деяке об'ємне тіло V , по якому розподілено масу, причому в точці $P(x, y, z) \in V$ густина дорівнює $\gamma(P) = \gamma(x, y, z)$. Тоді маса всього тіла V дорівнює:

$$m = \iiint_V \gamma(x, y, z)dxdydz. \quad (10.9.3)$$

Потрійний інтеграл є безпосереднім узагальненням понять звичайного одновимірного інтеграла Рімана, а також подвійного інтеграла на тривимірний простір. Тому він має умови існування, а також властивості, які в більшості аналогічні умовам існування та властивостями подвійного інтеграла. Сформулюємо деякі з них.

1. Якщо функція $u = f(x, y, z)$ інтегровна в області V , то вона обмежена в цій області.

2. Якщо функція $u = f(x, y, z)$ неперервна в замкненій обмеженій області V , то вона інтегровна в області V .

Як і у випадках одновимірного та подвійного інтеграла, обернені твердження до цих двох тверджень, взагалі кажучи, несправедливі. Не будь-яка обмежена функція є інтегрованою, і не будь-яка інтегровна функція є неперервною.

3. Сталий множник можна виносити за знак потрійного інтеграла:

$$\iiint_V Cf(P)dV = C \iiint_V f(P)dV.$$

4. Потрійний інтеграл від суми (різниці) двох інтегровних функцій дорівнює сумі (різниці) інтегралів від цих функцій:

$$\iiint_V (f(P) \pm g(P))dV = \iiint_V f(P)dV \pm \iiint_V g(P)dV.$$

5. Якщо в області V функція $f(P) \geq 0$, то:

$$\iiint_V f(P)dV \geq 0.$$

6. Якщо в області V виконано $f(P) \geq g(P)$, то:

$$\iiint_V f(P)dV \geq \iiint_V g(P)dV .$$

7. Якщо функція $u = f(x, y, z)$ неперервна в замкненій та обмеженій області V , яка має об'єм V^* , то:

$$mV^* \leq \iiint_V f(x, y, z)dxdydz \leq MV^* ,$$

де $m = \min_V f(x, y, z)$, $M = \max_V f(x, y, z)$.

8. Якщо функція $u = f(x, y, z)$ неперервна в замкненій та обмеженій області V , яка має об'єм V^* , то в цій області існує точка $P_0(x_0, y_0, z_0)$ така, що:

$$\iiint_V f(P)dV = f(P_0)V^* .$$

Величина $f(P_0) = f(x_0, y_0, z_0)$ називається середнім значенням функції $u = f(P) = f(x, y, z)$ в області V .

10.10. Обчислення потрійного інтеграла

Нехай область V обмежено знизу і зверху (під напрямом «вверх» розуміється додатний напрям осі Oz) поверхнями $z = z_1(x, y)$, $z = z_2(x, y)$, а з боків – циліндричною поверхнею, твірні якої паралельні осі Oz (рис. 10.27). Позначимо $D = np_{Oxy}V$ і вважатимемо, що функції $z_1(x, y)$, $z_2(x, y)$ неперервні в D . Тоді:

$$\iiint_V f(x, y, z)dxdydz = \iint_D dx dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z) dz . \quad (10.10.1)$$

Якщо область D є областю 1-го типу, тобто $a \leq x \leq b$, $\varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)$, то

$$\iiint_V f(x, y, z)dxdydz = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z) dz . \quad (10.10.2)$$

Відповідні формули можна одержати, коли D є областю 2-го типу, а також якщо область D проектується на якусь іншу координатну площину.

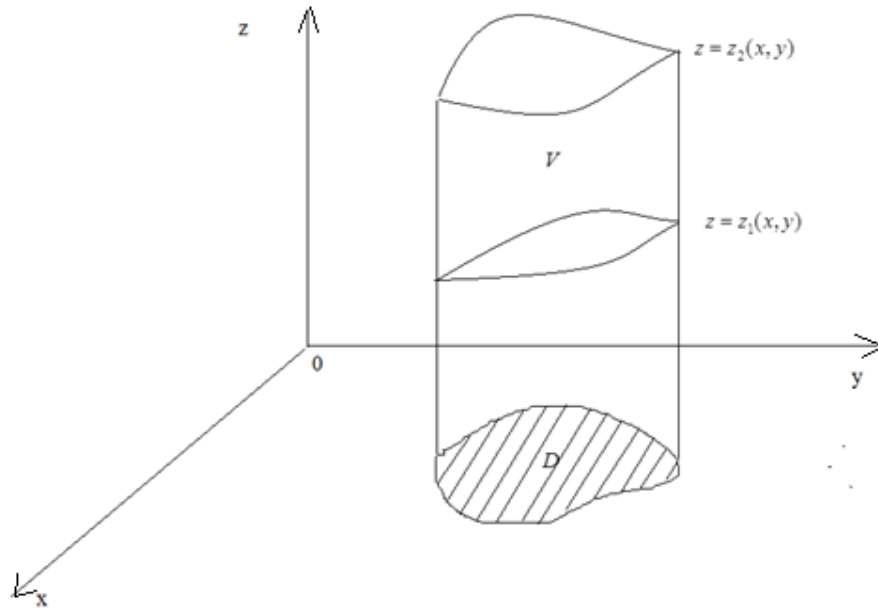


Рис. 10.27

Приклад. Обчислити:

$$\iiint_V \frac{dx dy dz}{(1+x+y+z)^3},$$

де V – область, обмежена площинами $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+y+z=1$.

Область V зображено на рис. 10.22а, а область $D = \text{пр}_{Oxy} V$ – на рис. 10.22б. Згідно з формулою (10.10.2) маємо:

$$\iiint_V \frac{dx dy dz}{(1+x+y+z)^3} = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} \frac{dz}{(1+x+y+z)^3}.$$

Обчислимо спочатку внутрішній інтеграл (за змінною z):

$$\int_0^{1-x-y} \frac{dz}{(1+x+y+z)^3} = -\frac{1}{2(1+x+y+z)^2} \Big|_0^{1-x-y} = \frac{1}{2(1+x+y)^2} - \frac{1}{8}.$$

Далі обчислимо інтеграл за змінною y :

$$\int_0^{1-x} \left(\frac{1}{2(1+x+y)^2} - \frac{1}{8} \right) dy = -\frac{1}{2(1+x+y)} \Big|_0^{1-x} - \frac{y}{8} \Big|_0^{1-x} = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2(1+x)} - \frac{1-x}{8}.$$

І нарешті зовнішній інтеграл (за змінною x):

$$\int_0^1 \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{2(1+x)} - \frac{1-x}{8} \right) dx = \frac{(x-1)^2}{16} \Big|_0^1 + \frac{1}{2} \ln(x+1) \Big|_0^1 - \frac{x}{4} \Big|_0^1 = \frac{\ln 2}{2} - \frac{5}{16}.$$

10.11. Заміна змінних у потрійному інтегралі

Нехай замкнена обмежена область V_1 в системі координат $Oxyz$ взаємно однозначно відображається на область V_2 в системі координат $Ouvw$ за допомогою неперервно диференційованих функцій $x = x(u, v, w)$, $y = y(u, v, w)$, $z = z(u, v, w)$, якобіан яких в області V_2 відмінний від нуля:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} \neq 0.$$

І нехай функція $f(x, y, z)$ неперервна в області V_1 . Тоді:

$$\iiint_{V_1} f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{V_2} f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) |J| du dv dw.$$

На практиці найчастіше використовується перехід до циліндричних та сферичних координат.

І. Циліндричні координати

Нехай в системі координат $Oxyz$ задано точку $M(x, y, z)$. Спроектуємо точку M на площину Oxy і позначимо $M' = np_{Oxy}M$, $\rho = |\overline{OM'}|$, φ – кут між радіусом-вектором $\overline{OM'}$ і додатним напрямом осі Ox . Величини ρ, φ, z називаються *циліндричними координатами* точки M (рис. 10.28). Легко помітити, що ρ, φ є полярними координатами точки M' на площині Oxy . Тому зв'язок між декартовими та циліндричними координатами точки M встановлюється дуже просто:

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad z = z.$$

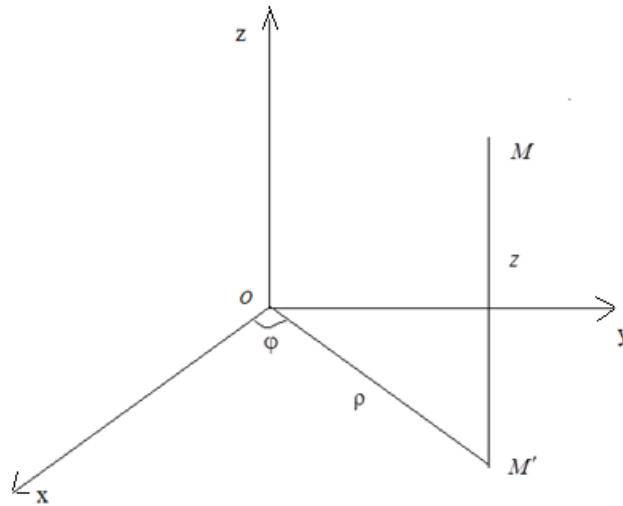


Рис. 10.28

Знайдемо якобіан перетворення:

$$J = \begin{vmatrix} -\rho \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ \rho \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\rho.$$

Тому потрібний інтеграл в циліндричних координатах запишеться наступним чином:

$$\iiint_{V_1} f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{V_2} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi, z) \rho d\rho d\varphi dz.$$

Сама назва «циліндричні координати» свідчить про те, що їх доцільно використовувати, коли область V_1 є областю циліндричного типу.

Приклад. Обчислити:

$$\iiint_V z \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz,$$

якщо область V обмежено площинами $z = 0$, $z = 2$ і циліндром $x^2 + y^2 = 2x$.

Областю V є круговий циліндр, основою якого є круг $x^2 + y^2 = 2x$ на площині Oxy , тобто круг з центром в точці $(1; 0)$ і радіусом 1. Висота циліндра дорівнює 2 (рис. 10.29).

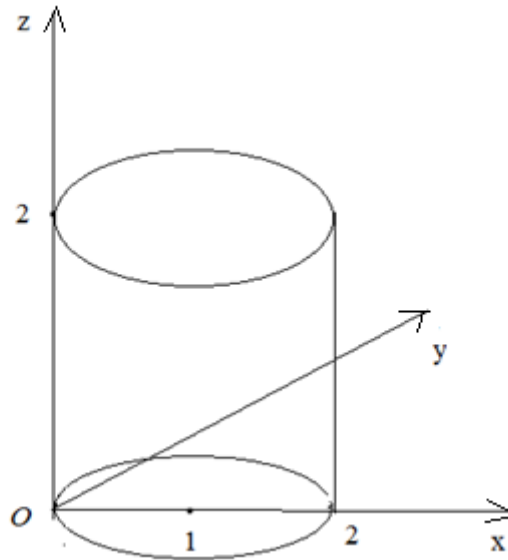


Рис. 10.29

Маємо: $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq \rho \leq 2 \cos \varphi$, $0 \leq z \leq 2$;

$$\begin{aligned} \iiint_V z \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2 \cos \varphi} d\rho \int_0^2 z \rho^2 dz = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2 \cos \varphi} \rho^2 d\rho \int_0^2 z dz = \\ &= 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2 \cos \varphi} \rho^2 d\rho = \frac{2}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 8 \cos^3 \varphi d\varphi = \frac{32}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 \varphi d\varphi = \\ &= \frac{32}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 \varphi) d \sin \varphi = \frac{32}{3} \cdot \sin \varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{32}{3} \cdot \frac{\sin^3 \varphi}{3} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{64}{9}. \end{aligned}$$

II. Сферичні координати

Нехай M – довільна точка простору, x, y, z – її декартові координати. Розглянемо сферичні координати ρ, θ, φ точки M (див. п. 8.21).

Зв'язок між декартовими та сферичними координатами точки M встановлюється за формулами:

$$x = \rho \cos \theta \cos \varphi, \quad y = \rho \cos \theta \sin \varphi, \quad z = \rho \sin \theta.$$

Самостійно перевірте, що якобіан цього перетворення $J = -\rho^2 \cos \theta$. Отже, у сферичних координатах потрібний інтеграл набуває вигляду:

$$\begin{aligned} & \iiint_{V_1} f(x, y, z) dx dy dz = \\ & = \iiint_{V_2} f(\rho \cos \theta \cos \varphi, \rho \cos \theta \sin \varphi, \rho \sin \theta) \rho^2 |\cos \theta| d\varphi d\theta d\rho. \end{aligned}$$

Сферичні координати доцільно використовувати, коли область V_1 є областю кульового типу.

Приклад. Обчислити повторний інтеграл:

$$\int_{-R}^R dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy \int_0^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} (x^2 + y^2) dz.$$

Легко перевірити, що даний інтеграл дорівнює потрібному інтегралу від функції $u = x^2 + y^2$ по області V_1 , яка обмежена півсферою $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ і площиною $z = 0$. Перейдемо до сферичних координат. У даному випадку $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \rho \leq R$. Тому:

$$\begin{aligned} & \int_{-R}^R dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy \int_0^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} (x^2 + y^2) dz = \iiint_{V_1} (x^2 + y^2) dx dy dz = \\ & = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \int_0^R \rho^4 |\cos^3 \theta| d\rho = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} |\cos^3 \theta| d\theta \cdot \frac{R^5}{5} = \frac{2\pi R^5}{5} \int_0^{\pi} |\cos \theta|^3 d\theta = \end{aligned}$$

$P(x, y), Q(x, y)$

$$\begin{aligned} & = \frac{2\pi R^5}{5} \left(\int_0^{\pi/2} (1 - \sin^2 \theta) d \sin \theta + \int_{\pi/2}^{\pi} (\sin^2 \theta - 1) d \sin \theta \right) = \\ & = \frac{2\pi R^5}{5} \left(\sin \theta \Big|_0^{\pi/2} - \frac{\sin^3 \theta}{3} \Big|_0^{\pi/2} + \frac{\sin^3 \theta}{3} \Big|_{\pi/2}^{\pi} - \sin \theta \Big|_{\pi/2}^{\pi} \right) = \frac{8\pi R^5}{15}. \end{aligned}$$

10.12. Застосування потрійного інтеграла

I. Обчислення об'ємів тіл

Розглянемо потрійний інтеграл від функції $u = f(x, y, z)$ по області V :

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_V f(P) dV.$$

Якщо функція $u = f(x, y, z)$ тотожно дорівнює 1 в області V , то тоді цей інтеграл, очевидно, буде дорівнювати об'єму V^* тіла V , тобто одержуємо:

$$V^* = \iiint_V dx dy dz = \iiint_V dV.$$

Приклад. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями $z = x^2 + y^2$, $z = x^2 + 2y^2$, $y = x$, $y = 2x$, $x = 1$.

Знизу тіло обмежено параболоїдом обертання $z = x^2 + y^2$, а зверху – еліптичним параболоїдом $z = x^2 + 2y^2$. Проекцією тіла на площину Oxy є область D , яку обмежено прямими $x = 1$, $y = x$, $y = 2x$. Тому:

$$\begin{aligned} V^* &= \iiint_V dx dy dz = \iint_D dx dy \int_{x^2+y^2}^{x^2+2y^2} dz = \int_0^1 dx \int_x^{2x} dy \int_{x^2+y^2}^{x^2+2y^2} dz = \\ &= \int_0^1 dx \int_x^{2x} y^2 dy = \frac{7}{3} \int_0^1 x^3 dx = \frac{7}{12}. \end{aligned}$$

II. Механічні застосування потрійного інтеграла

Нехай V – замкнена обмежена область простору, яку займає деяке матеріальне тіло з густиною $\gamma(x, y, z)$, де $\gamma = \gamma(x, y, z)$ – неперервна в області V функція. Тоді згідно з формулою (10.9.3) маса цього тіла обчислюється за формулою:

$$m = \iiint_V \gamma(x, y, z) dx dy dz.$$

Статичні моменти тіла відносно координатних площин обчислюються за формулами:

$$M_{yz} = \iiint_V x\gamma(x, y, z) dx dy dz, \quad M_{xz} = \iiint_V y\gamma(x, y, z) dx dy dz,$$

$$M_{xy} = \iiint_V z\gamma(x, y, z) dx dy dz.$$

Координати центра мас тіла обчислюються за формулами:

$$x_C = \frac{M_{yz}}{m}, \quad y_C = \frac{M_{xz}}{m}, \quad z_C = \frac{M_{xy}}{m}.$$

Моменти інерції тіла відносно осей координат обчислюються за формулами:

$$I_x = \iiint_V (y^2 + z^2) \gamma(x, y, z) dx dy dz,$$

$$I_y = \iiint_V (x^2 + z^2) \gamma(x, y, z) dx dy dz,$$

$$I_z = \iiint_V (x^2 + y^2) \gamma(x, y, z) dx dy dz.$$

Моменти інерції тіла відносно координатних площин обчислюються за формулами:

$$I_{xy} = \iiint_V z^2 \gamma(x, y, z) dx dy dz, \quad I_{xz} = \iiint_V y^2 \gamma(x, y, z) dx dy dz,$$

$$I_{yz} = \iiint_V x^2 \gamma(x, y, z) dx dy dz.$$

Момент інерції тіла відносно початку координат обчислюється за формулою:

$$I_0 = \iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) \gamma(x, y, z) dx dy dz.$$

Приклад. Знайти масу куба $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, $0 \leq z \leq 1$, густина якого в кожній його точці дається формулою: $\gamma = x + y + z$.

Знаходимо масу за формулою (10.9.3):

$$m = \iiint_V (x + y + z) dx dy dz = \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^1 (x + y + z) dz =$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^1 \left(\frac{(x + y + 1)^2}{2} - \frac{(x + y)^2}{2} \right) dy = \frac{1}{6} \int_0^1 \left((x + 2)^3 - 2(x + 1)^3 + x^3 \right) dx = \frac{3}{2}$$

10.13. Криволінійні інтеграли 1-го роду

Означення. Крива лінія називається *гладкою*, якщо в кожній її точці існує дотична, і при переході від точки до точки на кривій положення дотичної площини змінюється неперервно. Крива лінія називається *кусково-гладкою*, якщо вона складається із скінченного числа неперервно сполучених гладких кривих ліній.

Нехай в площині Oxy задано гладку криву AB , і на цій кривій визначено обмежену функцію $f(x, y)$. Розіб'ємо криву AB довільно обраними точками $A_0 = A, A_1, A_2, \dots, A_k, A_{k+1}, \dots, A_{n-1}, A_n = B$ на частинні дуги $A_k A_{k+1}$. На кожній з цих дуг довільним чином оберемо внутрішню точку $M_k(\xi_k, \eta_k)$ ($k = \overline{0, n-1}$) (рис. 10.30).

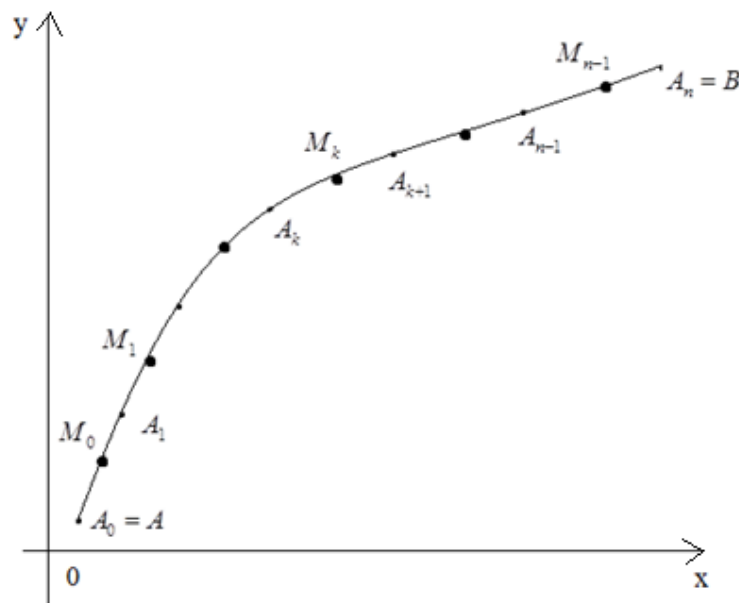


Рис. 10.30

Складемо суму:

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k, \eta_k) \Delta l_k,$$

де Δl_k – довжина дуги $A_k A_{k+1}$. Ця сума називається *інтегральною сумою* для функції $f(x, y)$ по кривій AB , яка відповідає даному розиттю. Позначимо $\lambda = \max_{0 \leq k \leq n-1} \Delta l_k$ і назвемо цю величину *рангом розбиття*.

Означення. Якщо існує скінченна границя:

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k, \eta_k) \Delta l_k,$$

яка не залежить від засобу розбиття кривої AB на частинні дуги і засобу обрання внутрішніх точок M_k , то ця границя називається *криволінійним інтегралом 1-го роду* (або *криволінійним інтегралом по довжині дуги*) від функції $f(x, y)$ по кривій AB , і позначається:

$$\int_{AB} f(x, y) dl.$$

Таким чином, за означенням:

$$\int_{AB} f(x, y) dl = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k, \eta_k) \Delta l_k.$$

Криволінійний інтеграл 1-го роду має низку властивостей, аналогічних властивостям звичайного інтеграла Рімана, а також подвійного та потрійного інтеграла. А саме, сталий множник можна виносити за знак інтеграла, інтеграл від суми функцій дорівнює сумі інтегралів від цих функцій тощо. Зосередимось на обчисленні криволінійного інтегралу 1-го роду.

Нехай криву AB задано параметричними рівняннями:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad t_0 \leq t \leq T,$$

де $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ – неперервно диференційовні на інтервалі (t_0, T) функції. Тоді елемент дуги dl обчислюється за формулою:

$$dl = \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} dt.$$

Весь інтеграл запишеться так:

$$\int_{AB} f(x, y) dl = \int_{t_0}^T f(\varphi(t), \psi(t)) \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} dt. \quad (10.13.1)$$

Нехай криву AB задано явним рівнянням $y = y(x)$ ($a \leq x \leq b$), де функція $y(x)$ неперервно диференційовна на інтервалі (a, b) . Тоді:

$$\int_{AB} f(x, y) dl = \int_a^b f(x, y(x)) \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx. \quad (10.13.2)$$

Аналогічно розглядається випадок просторової кривої AB , яку задано рівняннями $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $z = \chi(t)$, $t_0 \leq t \leq T$. Тоді:

$$\int_{AB} f(x, y, z) dl = \int_{t_0}^T f(\varphi(t), \psi(t), \chi(t)) \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2 + (\chi'(t))^2} dt. \quad (10.13.3)$$

Приклади

1. Обчислити $\int_L \frac{dl}{x-y}$, де L – відрізок прямої, що з'єднує точки $A(0; -2)$ і $B(4; 0)$.

Рівняння кривої L : $y = \frac{1}{2}x - 2$, $0 \leq x \leq 4$; $y'(x) = \frac{1}{2}$. Згідно з формулою (10.13.2) маємо:

$$\int_L \frac{dl}{x-y} = \int_0^4 \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{4}}}{x - \frac{1}{2}x + 2} dx = \sqrt{5} \int_0^4 \frac{dx}{x+4} = \sqrt{5} \ln(x+4) \Big|_0^4 = \sqrt{5} \ln 2.$$

2. Обчислити $\int_L (2z - \sqrt{x^2 + y^2}) dl$, де L – дуга кривої $x = t \cos t$,

$y = t \sin t$, $z = t$, $0 \leq t \leq 2\pi$ (конічна гвинтова лінія).

Знайдемо елемент дуги:

$$\begin{aligned} dl &= \sqrt{(\cos t - t \sin t)^2 + (\sin t + t \cos t)^2 + 1} dt = \\ &= \sqrt{\cos^2 t - 2t \cos t \sin t + t^2 \sin^2 t + \sin^2 t + 2t \sin t \cos t + t^2 \cos^2 t + 1} dt = \\ &= \sqrt{2 + t^2} dt. \end{aligned}$$

Тепер згідно з формулою (10.13.3):

$$\begin{aligned} \int_L (2z - \sqrt{x^2 + y^2}) dl &= \int_0^{2\pi} (2t - t) \sqrt{2 + t^2} dt = \int_0^{2\pi} t \sqrt{2 + t^2} dt = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{2 + t^2} d(2 + t^2) = \frac{1}{3} (2 + t^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^{2\pi} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \left(\sqrt{(2\pi^2 + 1)^3} - 1 \right). \end{aligned}$$

10.14. Застосування криволінійних інтегралів 1-го роду

I. Геометричні застосування

Нехай на площині Oxy задано кусково-гладку криву AB , замкнену чи незамкнену, і на цій кривій визначено функцію $f(x, y) \geq 0$. Тоді площу циліндричної поверхні, напрямною якої є крива AB , а твірні перпендикулярні до неї, і яку обмежено зверху поверхнею $z = f(x, y)$, а знизу – самою кривою AB , можна знайти за формулою:

$$P = \int_{AB} f(x, y) dl. \quad (10.14.1)$$

Довжину l кривої AB , очевидно, можна знайти за формулою:

$$l = \int_{AB} dl. \quad (10.14.2)$$

Приклади

1. Знайти площу циліндричної поверхні, напрямною якої є крива $x^2 + y^2 = R^2$, твірні паралельні осі Oz , знизу поверхня обмежена площиною Oxy , а зверху – поверхнею $z = R + \frac{x^2}{R}$.

Згідно з формулою (10.14.1) маємо:

$$\begin{aligned} P &= \int_{x^2+y^2=R^2} \left(R + \frac{x^2}{R} \right) dl = \left[\begin{array}{l} x = R \cos t, y = R \sin t, 0 \leq t \leq 2\pi, \\ dl = \sqrt{((R \cos t)')^2 + ((R \sin t)')^2} dt = R dt \end{array} \right] = \\ &= \int_0^{2\pi} \left(R + R \cos^2 t \right) R dt = R^2 \int_0^{2\pi} (1 + \cos^2 t) dt = R^2 \int_0^{2\pi} \left(1 + \frac{1 + \cos 2t}{2} \right) dt = 3\pi R^2. \end{aligned}$$

2. Знайти довжину дуги $y = \operatorname{ch} x$, $0 \leq x \leq \ln 2$ (ланцюгова лінія).

Згідно з формулою (10.14.2) маємо:

$$\begin{aligned} l &= \int_L dl = \int_0^{\ln 2} \sqrt{1 + ((\operatorname{ch} x)')^2} dx = \int_0^{\ln 2} \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 x} dx = \int_0^{\ln 2} \sqrt{\operatorname{ch}^2 x} dx = \int_0^{\ln 2} \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x \Big|_0^{\ln 2} = \\ &= \operatorname{sh}(\ln 2) = \frac{e^{\ln 2} - e^{-\ln 2}}{2} = \frac{2 - 1/2}{2} = \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

II. Механічні застосування

Нехай вздовж неоднорідної матеріальної кривої L розподілено масу з лінійною густиною $\gamma(x, y)$. Тоді маса кривої L обчислюється за формулою:

$$m = \int_L \gamma(x, y) dl. \quad (10.14.3)$$

Координати центра маси кривої L даються формулами:

$$x_c = \frac{\int x\gamma(x, y) dl}{m}, \quad y_c = \frac{\int y\gamma(x, y) dl}{m}. \quad (10.14.4)$$

Зокрема, якщо крива L однорідна, тобто має сталу густину γ_0 , то у чисельниках і знаменниках цих формул її можна винести за знаки інтегралів, скоротити на неї, і тоді формули (3.2.4) набувають вигляду:

$$x_c = \frac{\int x dl}{l}, \quad y_c = \frac{\int y dl}{l}, \quad (10.14.5)$$

де l – довжина кривої L .

Моменти інерції кривої L відносно вісей Ox, Oy і початку координат даються формулами:

$$I_x = \int_L y^2 \gamma(x, y) dl, \quad I_y = \int_L x^2 \gamma(x, y) dl, \quad I_0 = \int_L (x^2 + y^2) \gamma(x, y) dl. \quad (10.14.6)$$

Приклад. Знайти координати центра маси однорідної кривої $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ ($0 \leq t \leq \pi$) (циклоїда).

Знайдемо довжину кривої:

$$\begin{aligned} l &= \int_L dl = \int_0^\pi \sqrt{(a(t - \sin t)')^2 + (a(1 - \cos t)')^2} dt = a \int_0^\pi \sqrt{(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t} dt = \\ &= a \int_0^\pi \sqrt{2 - 2 \cos t} dt = 2a \int_0^\pi \sin \frac{t}{2} dt = 8a. \end{aligned}$$

Далі знайдемо:

$$\int_L x dl = \int_0^\pi a(t - \sin t) 2a \sin \frac{t}{2} dt = 2a^2 \left(\int_0^\pi t \sin \frac{t}{2} dt - \int_0^\pi \sin t \sin \frac{t}{2} dt \right) =$$

$$= 2a^2 \left(4 - \frac{4}{3} \right) = \frac{32a^2}{3};$$

$$\int_L y dl = \int_0^\pi a(1 - \cos t) 2a \sin \frac{t}{2} dt = 2a^2 \left(\int_0^\pi \sin \frac{t}{2} dt - \int_0^\pi \cos t \sin \frac{t}{2} dt \right) =$$

$$= 2a^2 \left(-\frac{2}{3} + 1 \right) = \frac{2a^2}{3}.$$

Тепер за формулами (10.14.5) дістанемо:

$$x_c = \frac{\frac{32a^2}{3}}{8a} = \frac{4a}{3}, \quad y_c = \frac{\frac{2a^2}{3}}{8a} = \frac{a}{12}.$$

10.15. Криволінійні інтеграли 2-го роду

Нехай в площині Oxy задано гладку криву AB , на якій визначено обмежену функцію $P(x, y)$. Визначимо на кривій AB напрям від точки A до точки B . Тобто точка A є початковою, а точка B – кінцевою. Розіб'ємо криву AB довільно обраними точками $A = A_0, A_1, \dots, A_k, A_{k+1}, \dots, A_{n-1}, A_n = B$ на n частинних дуг, і на кожній дузі $A_k A_{k+1}$ оберемо також довільним чином внутрішню точку $M_k(\xi_k, \eta_k)$ ($k = \overline{0, n-1}$). Позначимо: $\lambda = \max_{0 \leq k \leq n-1} \Delta l_k$, де Δl_k – довжина дуги $A_k A_{k+1}$. Складемо суму:

$$\sum_{k=0}^{n-1} P(\xi_k, \eta_k) \Delta x_k, \quad (10.15.1)$$

де Δx_k – проекція дуги $A_k A_{k+1}$ (або вектора $\overrightarrow{A_k A_{k+1}}$) на вісь Ox . Підкреслимо, що в цій інтегральній сумі використовуються не довжини Δl_k самих частинних дуг, як це було у випадку криволінійного інтеграла 1-го роду, а їх проекції на вісь Ox .

Означення. Якщо існує скінченна границя суми (10.15.1) при $\lambda \rightarrow 0$, яка не залежить ні від засобу розбиття кривої AB на частинні

дуги, ні від засобу внутрішніх точок M_k , то ця границя називається *криволінійним інтегралом від функції $P(x, y)$ по координаті x вздовж кривої AB* і позначається $\int_{AB} P(x, y)dx$.

Таким чином, за означенням:

$$\int_{AB} P(x, y)dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} P(\xi_k, \eta_k) \Delta x_k.$$

Аналогічно вводиться криволінійний інтеграл від функції $Q(x, y)$ по координаті y :

$$\int_{AB} Q(x, y)dy = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} Q(\xi_k, \eta_k) \Delta y_k,$$

де Δy_k – проекція дуги $A_k A_{k+1}$ (або вектора $\overrightarrow{A_k A_{k+1}}$) на вісь Oy (рис. 10.31).

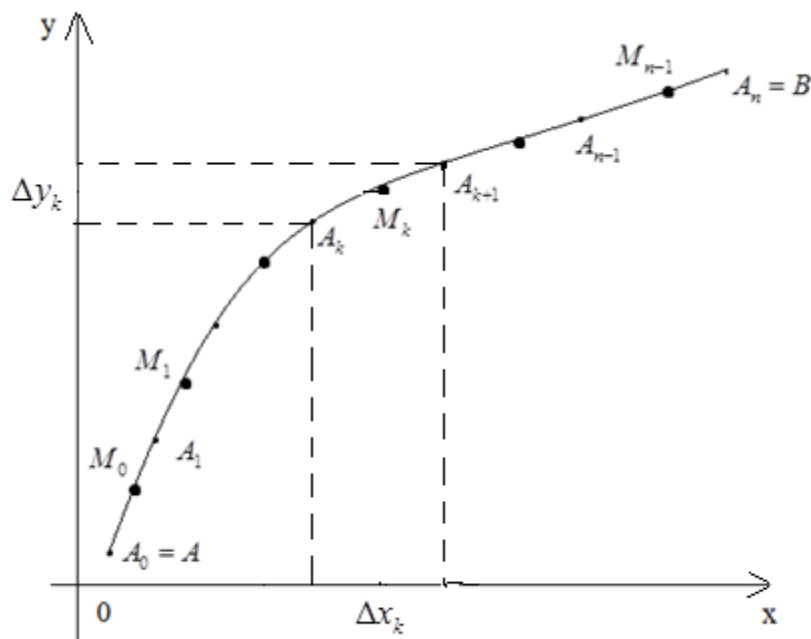


Рис. 10.31

Сума $\int_{AB} P(x, y)dx + \int_{AB} Q(x, y)dy$

називається *криволінійним інтегралом 2-го роду* (або *криволінійним інтегралом по координатах*) від функцій $P(x, y)$ і $Q(x, y)$ по кривій AB і позначається символом:

$$\int_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy.$$

Визначимо фізичний зміст криволінійного інтегралу 2-го роду. Нехай матеріальна точка $M(x, y)$ під дією змінної сили $\vec{F}(x, y) = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$ рухається на площині Oxy вздовж кривої BC . Треба обчислити роботу A сили \vec{F} при переміщенні точки M з точки B в точку C (рис. 10.32).

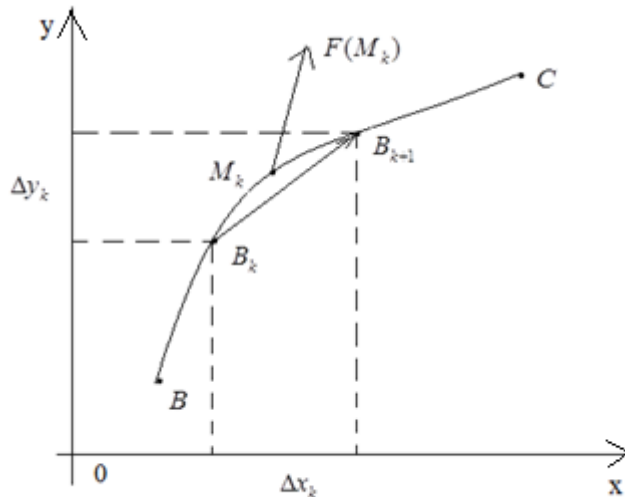


Рис. 10.32

Розіб'ємо криву BC довільно обраними точками ділення $B = B_0, B_1, \dots, B_k, B_{k+1}, \dots, B_{n-1}, B_n = C$ на n частин і на кожній окремій дузі $B_k B_{k+1}$ оберемо довільну точку $M_k(\xi_k, \eta_k)$ ($k = \overline{0, n-1}$). На цю точку діє сила $\vec{F}(M_k) = P(M_k)\vec{i} + Q(M_k)\vec{j}$. Роботу ΔA_k , яку виконує ця сила при переміщенні точки по вектору $\overrightarrow{B_k B_{k+1}}$ можна знайти як скалярний добуток:

$$\Delta A_k = \vec{F}(M_k) \cdot \overrightarrow{B_k B_{k+1}} = P(M_k)\Delta x_k + Q(M_k)\Delta y_k.$$

Ця робота наближено дорівнює роботі змінної сили \vec{F} при переміщенні матеріальної точки по дузі $B_k B_{k+1}$ довжиною Δl_k .

Робота сили при переміщенні вздовж ламаної $B_0, B_1, \dots, B_k, B_{k+1}, \dots, B_{n-1}, B_n$ дорівнює:

$$A_n = \sum_{k=0}^{n-1} P(\xi_k, \eta_k) \Delta x_k + Q(\xi_k, \eta_k) \Delta y_k.$$

Цей вираз дає наближене значення шуканої роботи A : $A \approx A_n$. Щоб знайти точний вираз для роботи, треба перейти до границі при $\lambda = \max_{0 \leq k \leq n-1} \Delta l_k \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} A &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} A_n = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \left(\sum_{k=0}^{n-1} P(\xi_k, \eta_k) \Delta x_k + Q(\xi_k, \eta_k) \Delta y_k \right) = \\ &= \int_{BC} P(x, y) dx + Q(x, y) dy. \end{aligned}$$

Отже фізичний зміст криволінійного інтегралу 2-го роду вздовж деякої кривої полягає в тому, що він дорівнює роботі змінної сили при переміщенні матеріальної точки вздовж цієї кривої.

Встановимо зв'язок між криволінійними інтегралами 1-го та 2-го роду. Розглянемо на площині Oxy гладку криву AB і точку $M(x, y)$ на ній. Проведемо в точці M дотичну до кривої AB і розглянемо кути α і β , які ця дотична утворює з вісями координат (рис. 10.33).

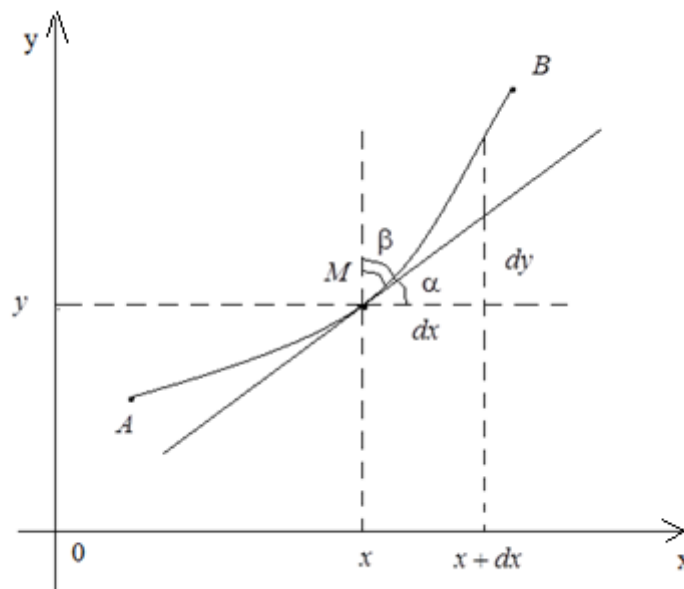


Рис. 10.33

Очевидно тоді, що для диференціалів dx та dy матимемо: $dx = \cos \alpha \cdot dl$, $dy = \cos \beta \cdot dl$, де dl – диференціал дуги. Отже:

$$\int_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_{AB} (P(x, y)\cos\alpha + Q(x, y)\cos\beta)dl.$$

Це й є формула, що пов'язує криволінійні інтеграли 1-го та 2-го роду.

10.16. Обчислення криволінійних інтегралів 2-го роду

Нехай криву AB задано параметричними рівняннями:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t) \quad (\alpha \leq t \leq \beta),$$

де функції $\varphi(t)$, $\psi(t)$ неперервні та неперервно диференційовні на відрізку $[\alpha, \beta]$, причому точці A відповідає значення $t = \alpha$, а точці B – значення $t = \beta$, тобто $A(\varphi(\alpha), \psi(\alpha))$, $B(\varphi(\beta), \psi(\beta))$. Припустимо, що функція $P(x, y)$ неперервна на кривій AB . Тоді за означенням:

$$\int_{AB} P(x, y)dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} P(\xi_k, \eta_k) \Delta x_k. \quad (10.16.1)$$

Згідно з формулою Лагранжа можемо записати:

$$\Delta x_k = x_{k+1} - x_k = \varphi(t_{k+1}) - \varphi(t_k) = \varphi'(\tau_k)(t_{k+1} - t_k) = \varphi'(\tau_k)\Delta t_k,$$

де t_k – значення параметра t , яке відповідає точці x_k , $\tau_k \in [t_k, t_{k+1}]$.

Оберемо точку (ξ_k, η_k) так, щоб $\xi_k = \varphi(\tau_k)$, $\eta_k = \psi(\tau_k)$. Тоді інтегральна сума у формулі (10.16.1) набуде вигляду:

$$\sum_{k=0}^{n-1} P(\varphi(\tau_k), \psi(\tau_k))\varphi'(\tau_k)\Delta t_k.$$

Це інтегральна сума для функції $P(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t)$ на відрізку $[\alpha, \beta]$, тому:

$$\int_{AB} P(x, y)dx = \int_{\alpha}^{\beta} P(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t) dt. \quad (10.16.2)$$

Аналогічно доводяться формули:

$$\int_{AB} Q(x, y)dy = \int_{\alpha}^{\beta} Q(\varphi(t), \psi(t))\psi'(t) dt, \quad (10.16.3)$$

$$\int_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_{\alpha}^{\beta} [P(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t) + Q(\varphi(t), \psi(t))\psi'(t)] dt. \quad (10.16.4)$$

Якщо криву AB задано явним рівнянням $y = y(x)$ ($a \leq x \leq b$), де функція $y = y(x)$ неперервна та неперервно диференційовна на проміжку $[a, b]$, то з формули (10.16.4) дістанемо:

$$\int_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_a^b [P(x, y(x)) + Q(x, y(x))y'(x)] dx. \quad (10.16.5)$$

Аналогічно, якщо криву AB задано рівнянням $x = x(y)$ ($c \leq y \leq d$), де функція $x = x(y)$ неперервна та неперервно диференційовна на проміжку $[c, d]$, то:

$$\int_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_c^d [P(x(y), y)x'(y) + Q(x(y), y)] dy. \quad (10.16.6)$$

Поняття криволінійного інтеграла 2-го роду можна поширити й на просторові криві. Нехай функції $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ визначені і неперервні на просторовій кривій AB , яку задано рівняннями:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t) \quad (\alpha \leq t \leq \beta),$$

де функції $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\chi(t)$ неперервні та неперервно диференційовні на відрізку $[\alpha, \beta]$, причому точці A відповідає значення $t = \alpha$, а точці B – значення $t = \beta$, тобто $A(\varphi(\alpha), \psi(\alpha), \chi(\alpha))$, $B(\varphi(\beta), \psi(\beta), \chi(\beta))$. Тоді існує криволінійний інтеграл:

$$\int_{AB} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz,$$

і справджується формула:

$$\begin{aligned} \int_{AB} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz = & \quad (10.16.7) \\ = \int_{\alpha}^{\beta} [P(\varphi(t), \psi(t), \chi(t))\varphi'(t) + Q(\varphi(t), \psi(t), \chi(t))\psi'(t) + R(\varphi(t), \psi(t), \chi(t))\chi'(t)] dt. \end{aligned}$$

На відміну від криволінійного інтеграла 1-го роду криволінійний ін-

теграл 2-го роду залежить від напрямку шляху інтегрування і при зміні цього напрямку змінює свій знак:

$$\int_{AB} Pdx + Qdy = - \int_{BA} Pdx + Qdy.$$

Це пояснюється тим, що при зміні напрямку інтегрування змінюються знаки проекцій Δx_k , Δy_k у відповідних інтегральних сумах.

Часто доводиться розглядати криволінійні інтеграли по *замкненому контуру*, тобто коли початкова та кінцева точки збігаються. Такий контур називається *додатно орієнтованим*, якщо при його обході область, що ним обмежується, залишається зліва (тобто обхід здійснюється проти годинникової стрілки). Інтеграли по замкненому контуру позначають так:

$$\oint_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy.$$

Приклади

1. Обчислити $\oint_L xydx + dy$, де L – замкнений контур, утворений

лініями $y = x^2$, $y = 1$, $x = 0$ (рис. 10.34). Обхід контуру здійснюється у додатному напрямі.

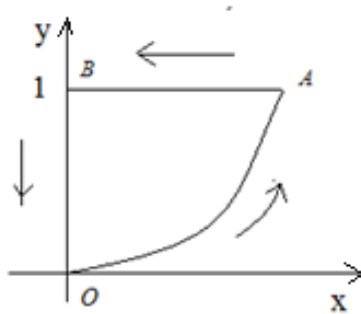


Рис. 10.34

Подамо контур L як об'єднання контурів OA , AB , BO . Тоді:

$$\oint_L = \int_{OA} + \int_{AB} + \int_{BO}.$$

Рівняння контуру OA : $y = x^2$, та x змінюється в напрямку від 0 до 1. Тому згідно з формулою (10.16.5):

$$\int_{OA} xydx + dy = \int_0^1 x \cdot x^2 dx + 2xdx = \int_0^1 (x^3 + 2x) dx = \frac{5}{4}.$$

Рівняння контуру AB : $y=1$, та цього разу x змінюється в напрямку від 1 до 0. Тому:

$$\int_{AB} xydx + dy = \int_1^0 x \cdot 1 dx = -\int_0^1 x dx = -\frac{1}{2}$$

(тут очевидно $dy=0$).

Рівняння контуру BO : $x=0$, та y змінюється в напрямку від 1 до 0. Тому:

$$\int_{BO} xydx + dy = \int_1^0 dy = -1.$$

Отже:

$$\oint_L xydx + dy = \frac{5}{4} - \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{4}.$$

2. Обчислити інтеграл $\int_L \frac{x}{y} dx + \frac{1}{y-a} dy$, де L – відрізок циклоїди

$x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ від $t = \pi/6$ до $t = \pi/3$.

Згідно з формулою (10.16.4) маємо:

$$\begin{aligned} \int_L \frac{x}{y} dx + \frac{1}{y-a} dy &= \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{a(t - \sin t)}{a(1 - \cos t)} a(1 - \cos t) dt + \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{a \sin t dt}{-a \cos t} = \\ &= a \frac{t^2}{2} \Big|_{\pi/6}^{\pi/3} + a \cos t \Big|_{\pi/6}^{\pi/3} + \ln |\cos t| \Big|_{\pi/6}^{\pi/3} = a \left(\frac{\pi^2}{24} + \frac{1 - \sqrt{3}}{2} \right) - \frac{\ln 3}{2}. \end{aligned}$$

3. Знайти роботу сили $\vec{F} = yx\vec{i} + (y+x)\vec{j}$ при переміщенні матеріальної точки по прямій $y = x$ з точки $O(0,0)$ в точку $B(1,1)$.

Згідно з фізичним змістом інтеграла 2-го роду маємо:

$$A = \int_{OB} yx dx + (y+x) dy = \int_0^1 x^2 dx + 2x dx = \frac{4}{3}.$$

10.17. Формула Гріна

Теорема. Нехай D – область, яку обмежено замкненим кусково-гладким контуром Γ , і функції $P(x, y), Q(x, y), \partial P(x, y)/\partial y, \partial Q(x, y)/\partial x$ неперервні в області D . Тоді справджується формула:

$$\oint_{\Gamma} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} \right) dx dy. \quad (10.17.1)$$

Доведення. Припустимо для спрощення, що область D стандартна водночас і 1-го і 2-го типу, тобто з одного боку $D = \{a \leq x \leq b, y_1(x) \leq y \leq y_2(x)\}$, причому $y_1(a) = y_2(a), y_1(b) = y_2(b)$, а з іншого боку $D = \{c \leq y \leq d, x_1(y) \leq x \leq x_2(y)\}$, причому $x_1(c) = x_2(c), x_1(d) = x_2(d)$ (рис. 10.35).

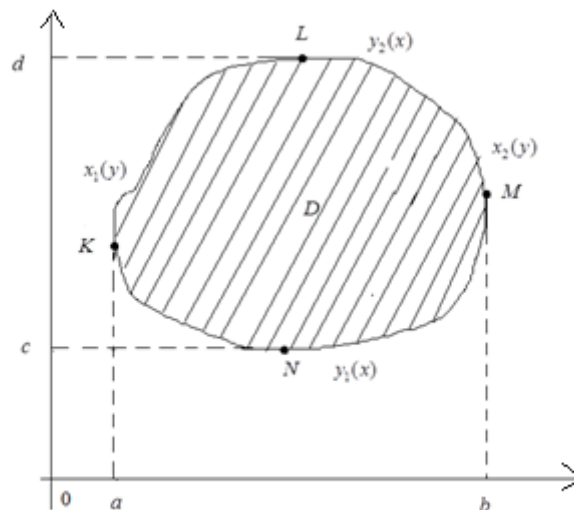


Рис. 10.35

Розглянемо з огляду на те, що область D стандартна 1-го типу:

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dx dy &= \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy = \int_a^b (P(x, y_2(x)) - P(x, y_1(x))) dx = \\ &= \int_a^b P(x, y_2(x)) dx - \int_a^b P(x, y_1(x)) dx = \int_{KLM} P(x, y) dx - \int_{KNM} P(x, y) dx = \end{aligned}$$

$$= \int_{KLM} P(x, y)dx + \int_{MNK} P(x, y)dx = -\oint_{\Gamma} P(x, y)dx.$$

Аналогічно, з оглядом на те, що область D стандартна 2-го типу:

$$\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy = \oint_{\Gamma} Q(x, y)dy.$$

Звідси дістаємо:

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_{\Gamma} P(x, y)dx + Q(x, y)dy,$$

що й треба було довести.

Наслідок. Площа плоскої фігури D одержується з формули Гріна, якщо покласти $P = -\frac{y}{2}$, $Q = \frac{x}{2}$:

$$S = \iint_D dx dy = \frac{1}{2} \oint_{\Gamma} x dy - y dx.$$

Приклад. Обчислити $\oint_L (x + y)^2 dx - (x^2 + y^2) dy$, де L – контур трикутника з вершинами $A(0;0)$, $B(2;0)$, $C(2;4)$ (рис. 10.36).

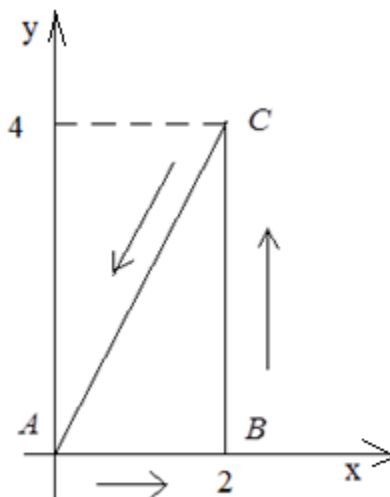


Рис. 10.36

Подамо контур L у вигляді об'єднання контурів AB , BC , CA . Тоді:

$$\oint_L = \int_{AB} + \int_{BC} + \int_{CA}.$$

Рівняння контуру AB : $y=0$, причому x змінюється від 0 до 2. Рівняння контуру BC : $x=2$, причому y змінюється від 0 до 4. Рівняння контуру CA : $y=2x$, причому x змінюється від 2 до 0. Тому:

$$\int_{AB} (x+y)^2 dx - (x^2 + y^2) dy = \int_0^2 x^2 dx = \frac{8}{3};$$

$$\int_{BC} (x+y)^2 dx - (x^2 + y^2) dy = -\int_0^4 (4+y^2) dy = -\frac{112}{3};$$

$$\int_{CA} (x+y)^2 dx - (x^2 + y^2) dy = \int_2^0 9x^2 dx - 5x^2 \cdot 2dx = \int_0^2 (10x^2 - 9x^2) dx = \frac{8}{3}.$$

Отже:

$$\oint_L (x+y)^2 dx - (x^2 + y^2) dy = \frac{8}{3} - \frac{112}{3} + \frac{8}{3} = -32.$$

Обчислимо тепер той самий інтеграл, використовуючи формулу Гріна. Якщо D – область, що обмежена контуром L , то:

$$\oint_L (x+y)^2 dx - (x^2 + y^2) dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \iint_D (-2x - 2(x+y)) dx dy =$$

$$= \iint_D (-4x - 2y) dx dy = -2 \iint_D (2x + y) dx dy = -2 \int_0^2 dx \int_0^{2x} (2x + y) dy =$$

$$= -2 \int_0^2 \left[\frac{(2x+y)^2}{2} \Big|_0^{2x} \right] dx = -2 \int_0^2 \left(\frac{16x^2}{2} - \frac{4x^2}{2} \right) dx = -12 \int_0^2 x^2 dx = -32,$$

тобто результати співпали, як і мало бути.

10.18. Умови незалежності криволінійного інтеграла 2-го роду від шляху інтегрування

Теорема. Нехай функції $P(x, y)$ і $Q(x, y)$ визначені і неперервні разом зі своїми похідними $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$ в деякій замкненій обмеженій області D . Тоді наступні чотири умови еквівалентні.

1) для довільної замкненої гладкої кривої L , що цілком лежить в області D , виконано:

$$\oint_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0;$$

2) для будь-яких точок M і N з області D інтеграл $\int_{MN} P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ не залежить від форми шляху, що з'єднує точки M і N , якщо тільки він цілком належить області D ;

3) вираз $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ є повним диференціалом деякої функції $U(x, y)$:

$$dU(x, y) = P(x, y)dx + Q(x, y)dy;$$

4) в усіх точках області D виконано:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Доведення. Доведемо теорему по схемі: 1) \Rightarrow 2) \Rightarrow 3) \Rightarrow 4) \Rightarrow 1).

1) \Rightarrow 2). Нехай MSN та MRN – дві довільні криві, що з'єднують точки M і N (рис. 10.37).

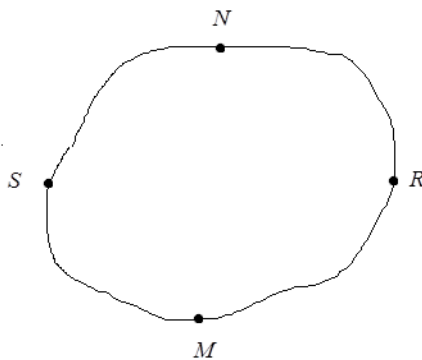


Рис. 10.37

За умовою: $L = MSNRM$, $\oint_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$. Тому:

$$\begin{aligned} \oint_L Pdx + Qdy &= \int_{MSN} Pdx + Qdy + \int_{NRM} Pdx + Qdy \Rightarrow \\ &\Rightarrow \int_{MSN} Pdx + Qdy = - \int_{NRM} Pdx + Qdy \Rightarrow \int_{MSN} Pdx + Qdy + \int_{MRN} Pdx + Qdy, \end{aligned}$$

що й треба було довести.

$2 \Rightarrow 3$). Нехай інтеграл $\int_{MN} Pdx + Qdy$ не залежить від форми кривої MN . Зафіксуємо точку $M(x_0, y_0)$. Тоді цей інтеграл буде деякою функцією $U(x, y)$ координат (x, y) точки $N(x, y)$:

$$U(x, y) = \int_{MN} Pdx + Qdy.$$

Покажемо, що $dU(x, y) = Pdx + Qdy$ в області D . Для цього достатньо показати, що:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = P(x, y), \quad \frac{\partial U}{\partial y} = Q(x, y).$$

Розглянемо (рис. 10.38):

$$\begin{aligned} \Delta_x U &= U(x + \Delta x, y) - U(x, y) = \int_{MC} Pdx + Qdy - \int_{MN} Pdx + Qdy = \\ &= \int_{NC} Pdx + Qdy = \int_x^{x+\Delta x} Pdx = P(x + \theta\Delta x, y)\Delta x, \quad 0 < \theta < 1 \end{aligned}$$

(з умови незалежності інтеграла від шляху інтегрування шлях NC можна вважати прямолінійним, тому $dy = 0$).

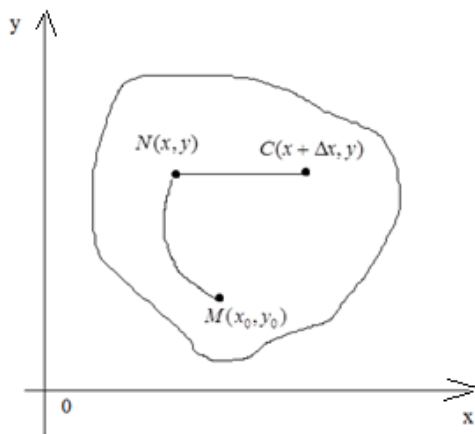


Рис. 10.38

Звідси:

$$\frac{\Delta_x U}{\Delta x} = P(x + \theta \Delta x, y) \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x U}{\Delta x} = P(x, y),$$

оскільки за умовою функція $P(x, y)$ неперервна в області D . Аналогічно доводиться, що $\frac{\partial U}{\partial y} = Q(x, y)$. Отже умову 3) виконано.

3 \Rightarrow 4). Нехай існує функція $U(x, y)$ така, що $dU = Pdx + Qdy$, тоді $\frac{\partial U}{\partial x} = P$, $\frac{\partial U}{\partial y} = Q$, звідки $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$.

4 \Rightarrow 1). Нехай $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, і L – довільна замкнена крива, яка належить цілком області D і обмежує деяку область $D^* \subset D$. Тоді за формулою Гріна:

$$\oint_L Pdx + Qdy = \iint_{D^*} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = 0.$$

Таким чином, теорему повністю доведено. В умовах цієї теореми, якщо $M(x_0, y_0)$, $N(x_1, y_1)$, то:

$$\int_{MN} Pdx + Qdy = U(x_1, y_1) - U(x_0, y_0). \quad (10.18.1)$$

Формулу (10.18.1) можна розглядати як узагальнення формули Ньютона-Лейбніца на випадок криволінійних інтегралів 2-го роду.

Зауваження. Аналогічним чином можна одержати узагальнення доведеної вище теореми на випадок криволінійного інтеграла 2-го роду по просторовій кривій:

$$\int_L P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz.$$

Означення. Тривимірна область G називається *поверхнево-однозв'язною*, якщо на будь-який кусково-гладкий замкнений контур, який належить G , можна «натягнути плівку», яка повністю лежить в G .

Теорема. Нехай функції $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ неперервні разом зі своїми похідними 1-го порядку в поверхнево-однозв'язній області G . Тоді наступні твердження еквівалентні:

1) для довільної замкненої кривої $L \subset G$ виконано:

$$\oint_L Pdx + Qdy + Rdz = 0;$$

2) криволінійний інтеграл $\int_{MN} Pdx + Qdy + Rdz$ не залежить від форми кривої, що з'єднує точки M і N , якщо тільки цей контур цілком належить G ;

3) вираз $Pdx + Qdy + Rdz$ є повним диференціалом деякої функції $U(x, y, z)$;

4) в усіх точках області G виконано:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}. \quad (10.18.2)$$

У цьому випадку, якщо $M(x_0, y_0, z_0)$, $N(x_1, y_1, z_1)$, то:

$$\int_{MN} Pdx + Qdy + Rdz = U(x_1, y_1, z_1) - U(x_0, y_0, z_0).$$

Приклади

1. Перевірити, що інтеграл не залежить від шляху інтегрування і обчислити його.

$$\int_{(-2;-1)}^{(3;0)} (x^4 + 4xy^3)dx + (6x^2y^2 - 5y^4)dy.$$

$$\text{Маємо:} \quad P = x^4 + 4xy^3, \quad Q = 6x^2y^2 - 5y^4, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = 12xy^2,$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 12xy^2, \text{ тобто інтеграл не залежить від шляху інтегрування.}$$

Знайдемо функцію $U(x, y)$. Оскільки $\frac{\partial U}{\partial x} = P = x^4 + 4xy^3$, то

$$U(x, y) = \frac{x^5}{5} + 2x^2y^3 + c(y), \text{ де } c(y) \text{ — довільна функція, що залежить}$$

лише від y . Звідси маємо: $\frac{\partial U}{\partial y} = 6x^2 y^2 + c'(y)$. З іншого боку $\frac{\partial U}{\partial y} = Q$,

тому $6x^2 y^2 + c'(y) = 6x^2 y^2 - 5y^4$, отже $c'(y) = -5y^4$, і тому $c(y) = -y^5 + c_1$, де c_1 – довільна стала. Таким чином:

$$U(x, y) = \frac{x^5}{5} + 2x^2 y^3 - y^5 + c_1.$$

Можемо покласти $c_1 = 0$, тоді $U(x, y) = \frac{x^5}{5} + 2x^2 y^3 - y^5$. І згідно з формулою (3.6.1) дістанемо:

$$\int_{(-2;-1)}^{(3;0)} (x^4 + 4xy^3) dx + (6x^2 y^2 - 5y^4) dy = U(3;0) - U(-2;-1) = 62.$$

2. Перевірити, що інтеграл не залежить від шляху інтегрування і обчислити його.

$$\int_{(1;0;-3)}^{(0;4;3)} x dx + y dy - z dz.$$

Маємо: $P = x$, $Q = y$, $R = -z$, і очевидно, що виконано умову (10.18.2). Легко показати, що

$$U(x, y, z) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} - \frac{z^2}{2},$$

тому:

$$\int_{(1;0;-3)}^{(0;4;3)} x dx + y dy - z dz = U(0;4;3) - U(1;0;-3) = \frac{15}{2}.$$

10.19. Поверхневі інтеграли 1-го роду

При розв'язуванні низки задач доводиться розглядати функції, визначені на деякій поверхні. Такими функціями є, наприклад, густина розподілу електричних зарядів на поверхні провідника, поверхнева густина маси, розподіленої на поверхні, швидкість рідини, що протікає через дану поверхню, освітленість поверхні, тощо. Відповідно до-

водиться мати справу з інтегралами від таких функцій. Зокрема, ті інтеграли, що розглядаються у цьому параграфі, є узагальненням подвійних інтегралів, аналогічним тому, якими криволінійні інтеграли 1-го роду є по відношенню до звичайних визначених інтегралів Рімана.

Означення. Поверхня називається *гладкою*, якщо в кожній її точці існує дотична площина, і при переході від точки до точки на поверхні положення дотичної площини змінюється неперервно. Поверхня називається *кусково-гладкою*, якщо вона складається із скінченного числа неперервно сполучених гладких поверхонь.

Нехай σ – кусково-гладка поверхня, на якій визначено обмежену функцію $f(M) = f(x, y, z)$ ($M(x, y, z)$ – довільна точка поверхні σ). Розіб'ємо поверхню σ на n довільних частин $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$. Площу частини σ_i позначимо $\Delta\sigma_i$. В кожній частині σ_i довільним чином обемо точку $M_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ і складемо суму:

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta\sigma_i. \quad (10.19.1)$$

Ця сума називається *інтегральною сумою* для функції $f(x, y, z)$ по поверхні σ . Легко бачити, що вона будується за тою ж схемою, за якою будувалися інтегральні суми у випадках визначеного інтеграла Рімана, подвійного інтеграла, потрійного інтеграла, криволінійного інтеграла 1-го роду.

Позначимо: $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} \text{diam}(\sigma_i)$.

Означення. Якщо існує скінченна границя інтегральної суми (10.19.1) при $\lambda \rightarrow 0$, яка не залежить ані від способу розбиття поверхні σ на частинні, ані від способу вибору точок M_i , то цю границю називають *поверхневим інтегралом 1-го роду* від функції $f(x, y, z)$ по поверхні σ і позначають $\iint_{\sigma} f(x, y, z) d\sigma$.

Тобто за означенням:

$$\iint_{\sigma} f(x, y, z) d\sigma = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta\sigma_i. \quad (10.19.2)$$

У цьому разі функція $f(x, y, z)$ називається *інтегрованою на поверхні* σ , а сама поверхня σ – *областю інтегрування*.

Поверхневий інтеграл 1-го роду має низку властивостей, аналогічних відповідним властивостям подвійних інтегралів та криволінійних інтегралів 1-го роду. А саме, якщо функція $f(x, y, z)$ неперервна на поверхні σ , то вона інтегровна на цій поверхні, інтеграл від суми двох інтегровних функцій дорівнює сумі інтегралів від цих функцій, сталий множник можна виносити за знак інтеграла тощо.

Обчислення поверхневого інтеграла 1-го роду зводиться до обчислення подвійного інтеграла. Нехай гладка поверхня σ , яку задано рівнянням $z = \varphi(x, y)$ проектується на площину Oxy в область D (рис. 10.39). Припустимо, що функція $f(x, y, z)$ неперервна на поверхні σ , а функції $\varphi(x, y)$, $\varphi'_x(x, y)$, $\varphi'_y(x, y)$ неперервні в області D . Тоді можна довести справедливість формули:

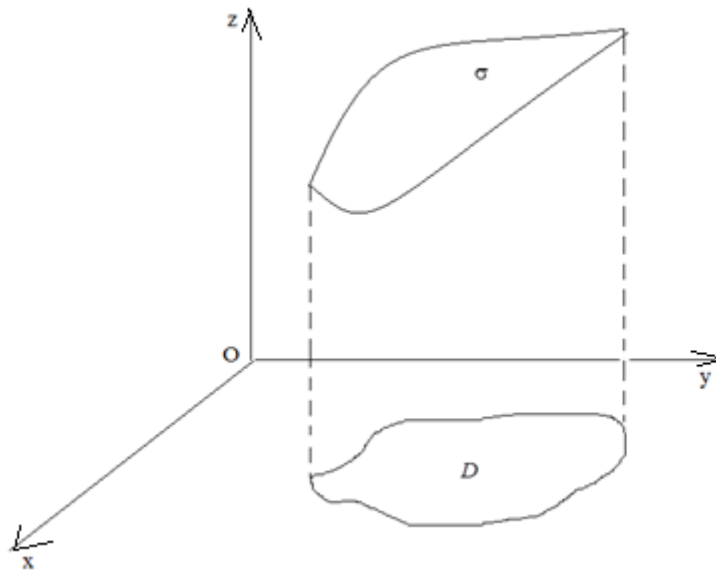


Рис. 10.39

$$\iint_{\sigma} f(x, y, z) d\sigma = \iint_D f(x, y, \varphi(x, y)) \sqrt{1 + (\varphi'_x(x, y))^2 + (\varphi'_y(x, y))^2} dx dy.$$

(10.19.3)

До механічних застосувань поверхневого інтеграла 1-го роду відноситься обчислення маси, координат центру тяжіння, статичних моментів, моментів інерції поверхні за відомою розподіленою на неї густиною $\gamma(x, y, z)$ тощо.

Розглянемо наступну задачу.

Нехай на поверхні σ неперервно розподілено масу з заданою в кожній точці поверхні густиною $\gamma(x, y, z)$. Нехай в точці $A(x_0, y_0, z_0)$, що не лежить на поверхні σ , знаходиться одиниця маси. Треба визначити величину і напрям сили \vec{F} , з якою точка A притягається поверхнею σ .

Якби точка A притягалася лише однією матеріальною точкою $M(x, y, z)$ маси m , то величина сили притягання дорівнює:

$$F = \frac{m}{r^2},$$

де $r = |AM| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$. Напрямні косинуси сили \vec{F} співпадають з напрямними косинусами вектора \vec{r} і дорівнюють відповідно $\frac{x - x_0}{r}$, $\frac{y - y_0}{r}$, $\frac{z - z_0}{r}$. Отже проекції сили \vec{F} на осі координат:

$$F_x = m \frac{x - x_0}{r^3}, \quad F_y = m \frac{y - y_0}{r^3}, \quad F_z = m \frac{z - z_0}{r^3}.$$

Розглянемо елемент $d\sigma$ поверхні σ . Відповідний елемент dm маси поверхні дорівнює $\gamma d\sigma$. Тоді сила притягання точки M елементом $d\sigma$ має проекції:

$$dF_x = \gamma \frac{x - x_0}{r^3} d\sigma, \quad dF_y = \gamma \frac{y - y_0}{r^3} d\sigma, \quad dF_z = \gamma \frac{z - z_0}{r^3} d\sigma.$$

Отже для всієї поверхні σ маємо:

$$F_x = \iint_{\sigma} \gamma(x, y, z) \frac{x - x_0}{r^3} d\sigma, \quad F_y = \iint_{\sigma} \gamma(x, y, z) \frac{y - y_0}{r^3} d\sigma,$$

$$F_z = \iint_{\sigma} \gamma(x, y, z) \frac{z - z_0}{r^3} d\sigma.$$

Приклад. Обчислити $\iint_{\sigma} \frac{d\sigma}{(1+x+z)^2}$, де σ – частина площини $x+y+z=1$, що належить 1-му октанту.

Легко зрозуміти, що проекцією поверхні σ на площину Oxy є трикутник D , який утворено прямими $x=0$, $y=0$, $x+y=1$. Тому згідно з формулою (10.19.3) маємо:

$$\iint_{\sigma} \frac{d\sigma}{(1+x+z)^2} = \sqrt{3} \iint_D \frac{dxdy}{(2-y)^2} = \sqrt{3} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \frac{dy}{(2-y)^2} = \sqrt{3} \left(\ln 2 - \frac{1}{2} \right).$$

10.20. Поверхневі інтеграли 2-го роду. Означення і властивості

Введемо поняття *сторони поверхні*. Візьмемо на гладкій поверхні σ довільну точку M , проведемо в цій точці нормаль \vec{n} певного напрямку (одного з двох можливих) і розглянемо на поверхні σ довільний замкнений контур L , який проходить через точку M і не перетинає межі поверхні σ (рис. 10.40).

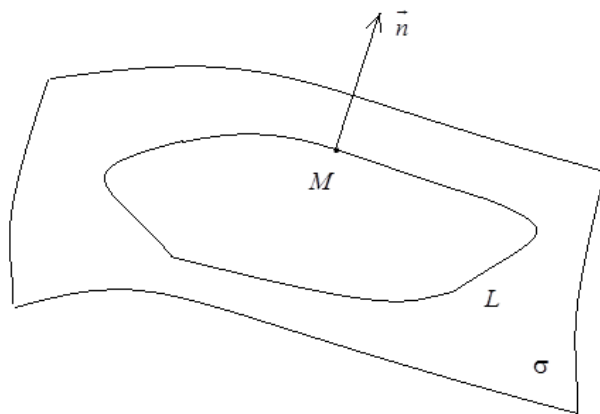


Рис. 10.40

Переміщатиме точку M вздовж контуру L разом з вектором \vec{n} так, щоб вектор \vec{n} весь час залишався нормаллю до поверхні σ . Тоді при обході контуру L ми можемо повернутися в точку M з тим самим, або з протилежним напрямком нормалі. Якщо у довільну точку M поверхні σ після обходу довільного замкненого контуру L , який

розміщено на поверхні σ і не перетинає її межу, ми повертаємось з початковим напрямом нормалі \vec{n} , то поверхню називають *двосторонньою*. Прикладами таких поверхонь є площина, сфера, конус тощо. Якщо при обході контуру напрям нормалі змінюється на протилежний, то поверхня називається *односторонньою*. Прикладом такої поверхні є так званий лист Мебіуса (рис. 10.41).

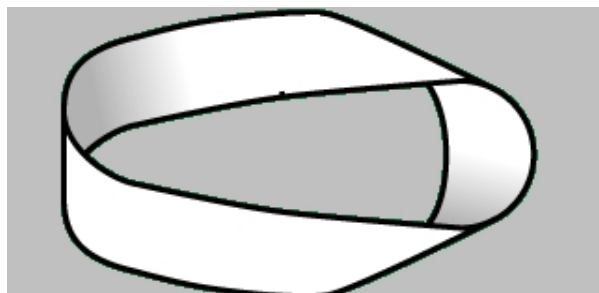


Рис. 10.41

Двосторонню поверхню називають *орієнтованою*, а вибір певної її сторони *орієнтацією поверхні*. Якщо поверхня замкнена і нормаль напрямлена всередину об'єма, обмеженого поверхнею, то дістаємо *внутрішню сторону* поверхні, а якщо нормаль напрямлена зовні цього об'єму, то дістаємо *зовнішню сторону*. Надалі розглядатимемо тільки двосторонні поверхні.

Нехай σ – орієтована поверхня, обмежена контуром L , який не має точок самоперетину. Будемо обходити контур у додатному напрямі, тобто проти годинникової стрілки (якщо змінити орієнтацію поверхні, то додатний напрям зміниться на від'ємний). Припустимо, що поверхню σ задано рівнянням $z = f(x, y)$, і $R(x, y, z)$ – обмежена функція, яку визначено на поверхні σ . Розіб'ємо поверхню σ довільним чином на m частин $\sigma_1, \dots, \sigma_m$. Позначимо $D_k = n p_{Oxy} \sigma_k$, а через Δs_k позначимо площу частини D_k , яку взято зі знаком «плюс», якщо обрано зовнішню сторону поверхні σ , і зі знаком «мінус», якщо внутрішню. Виберемо в кожній частині σ_k довільну точку $M_k(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)$ і складемо інтегральну суму:

$$\sum_{k=1}^m R(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \Delta s_k. \quad (10.20.1)$$

Позначимо: $\lambda = \max_{1 \leq k \leq n} \text{diam}(\sigma_k)$.

Означення. Якщо існує скінченна границя суми (10.20.1) при $\lambda \rightarrow 0$, яка не залежить ні від способу розбиття поверхні σ на частинні, ні від способу вибору точок M_k , то така границя називається *поверхневим інтегралом 2-го роду* від функції $R(x, y, z)$ по поверхні σ і позначається $\iint_{\sigma} R(x, y, z) dx dy$.

Таким чином, за означенням:

$$\iint_{\sigma} R(x, y, z) dx dy = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n R(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \Delta s_k. \quad (10.20.2)$$

Поверхню σ можна проектувати на координатні площини Oxz та Oyz . Тоді маємо ще два поверхневі інтеграли:

$$\iint_{\sigma} P(x, y, z) dy dz, \quad \iint_{\sigma} Q(x, y, z) dx dz,$$

де функції $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$ – функції, визначені в точках поверхні σ .

Нехай $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ – напрямні косинуси нормалі \vec{n} . Тоді $dx dy = \cos \gamma d\sigma$, $dx dz = \cos \beta d\sigma$, $dy dz = \cos \alpha d\sigma$. Звідси випливає справедливність формул:

$$\begin{aligned} \iint_{\sigma} R(x, y, z) dx dy &= \iint_{\sigma} R(x, y, z) \cos \gamma d\sigma, \\ \iint_{\sigma} Q(x, y, z) dx dz &= \iint_{\sigma} Q(x, y, z) \cos \beta d\sigma, \\ \iint_{\sigma} P(x, y, z) dy dz &= \iint_{\sigma} P(x, y, z) \cos \alpha d\sigma, \end{aligned}$$

тобто одержуємо зв'язок між поверхневими інтегралами 1-го та 2-го роду.

Наведені поверхневі інтеграли можна об'єднати в один:

$$\iint_{\sigma} P dy dz + Q dx dz + R dx dy = \iint_{\sigma} (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) d\sigma. \quad (10.20.3)$$

Розглянемо питання про фізичний зміст поверхневого інтеграла 2-го роду. Нехай вектор $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ є швидкість рідини. Тоді кількість Π рідини, що протікає через поверхню σ за одиницю часу,

називається потоком вектора \vec{F} через поверхню σ і знаходиться за формулою:

$$\Pi = \iint_{\sigma} (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) d\sigma.$$

10.21. Обчислення поверхневого інтеграла 2-го роду

Перейдемо до питання обчислення поверхневого інтеграла 2-го роду. Нехай функція $R(x, y, z)$ неперервна в усіх точках гладкої поверхні σ , яку задано рівнянням $z = z(x, y)$, $(x, y) \in D_{XY}$, де $D_{XY} = \text{пр}_{Oxy} \sigma$. Оберемо верхню сторону поверхні, тобто ту, де нормаль утворює гострий кут з віссю Oz . Тоді $\Delta s_k > 0$ ($k = 1, 2, \dots, n$), і для інтегральної суми (10.20.1) маємо:

$$\sum_{k=1}^n R(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \Delta s_k = \sum_{k=1}^n R(\xi_k, \eta_k, z(\xi_k, \eta_k)) \Delta s_k.$$

Перейшовши до границі при $\lambda \rightarrow 0$, дістанемо:

$$\iint_{\sigma} R(x, y, z) dx dy = \iint_{D_{XY}} R(x, y, z(x, y)) dx dy.$$

Якщо обрати нижню сторону поверхні (нормаль утворює тупий кут з віссю Oz), то:

$$\iint_{\sigma} R(x, y, z) dx dy = - \iint_{D_{XY}} R(x, y, z(x, y)) dx dy.$$

Аналогічно:

$$\iint_{\sigma} P(x, y, z) dy dz = \pm \iint_{D_{YZ}} P(x(y, z), y, z) dy dz,$$

$$\iint_{\sigma} Q(x, y, z) dx dz = \pm \iint_{D_{XZ}} Q(x, y(x, z), z) dx dz.$$

Тут D_{YZ} , D_{XZ} – проєкції поверхні σ відповідно на площини Oyz , Oxz . Знак «плюс» або «мінус» обирається в залежності від того, гострий, або тупий кут утворює нормаль до поверхні відповідно з осями Ox , Oy .

Приклади

1. Обчислити:

$$I = \iint_{\sigma} xz^2 dx dy + x dy dz + dx dz,$$

де σ – зовнішня сторона частини сфери $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, яка розташована у 1-му октанті.

Обчислимо спочатку $\iint_{\sigma} xz^2 dx dy$. Проекцією D_{xy} поверхні σ на площину Oxy є чверть круга $x^2 + y^2 = 1$, яка розташована у 1-му квадранті цієї площини. Нормаль до поверхні утворює гострий кут з віссю Oz . Тому:

$$\begin{aligned} \iint_{\sigma} xz^2 dx dy &= \iint_{D_{xy}} x(1 - x^2 - y^2) dx dy = \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^1 \rho \cos \varphi (1 - \rho^2) \rho d\rho = \\ &= \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^1 (\rho^2 - \rho^4) d\rho = \frac{2}{15}. \end{aligned}$$

Тепер обчислимо $\iint_{\sigma} x dy dz$. Проекцією D_{yz} поверхні на площину

Oyz є чверть круга $y^2 + z^2 = 1$, яка розташована у 1-му квадранті цієї площини. Нормаль до поверхні утворює гострий кут з віссю Ox . Тому:

$$\iint_{\sigma} x dy dz = \iint_{D_{yz}} \sqrt{1 - y^2 - z^2} dy dz = \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^1 \sqrt{1 - \rho^2} \rho d\rho = \frac{\pi}{6}.$$

І нарешті обчислимо $\iint_{\sigma} dx dz$. Проекцією D_{xz} поверхні на площину

Oxz є чверть круга $x^2 + z^2 = 1$, яка розташована у 1-му квадранті цієї площини. Нормаль до поверхні утворює гострий кут з віссю Oy .

Тому:

$$\iint_{\sigma} dx dz = \iint_{D_{xz}} dx dz = \frac{\pi}{4}.$$

Отже остаточно маємо:

$$I = \frac{2}{15} + \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} = \frac{2}{15} + \frac{5\pi}{12}.$$

2. Обчислити:

$$I = \iint_{\sigma} x dx dz,$$

де σ – зовнішня сторона трикутника, утвореного перетином площини $2x - 2y + z - 2 = 0$ з координатними площинами (рис. 10.42).

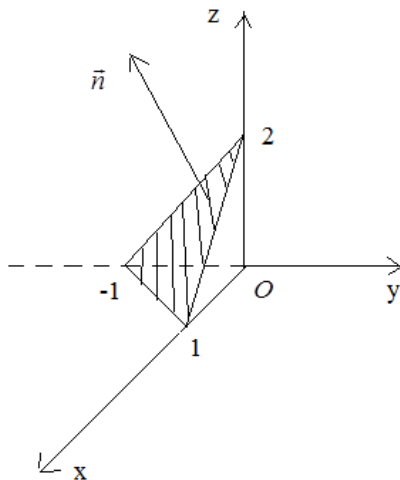


Рис. 10.42

Проекцією D_{xz} поверхні σ на площину Oxz є трикутник, який утворено прямими $x = 0$, $z = 0$, $2x + z - 2 = 0$. Нормаль \vec{n} до поверхні утворює тупий кут з віссю Oy .

Тому:

$$I = - \iint_{D_{xz}} x dx dz = - \int_0^1 dx \int_0^{2-2x} x dz = -\frac{1}{3}$$

(обчислення повторного інтеграла перевірте самостійно).

10.22. Формула Остроградського-Гаусса

Формула Остроградського-Гаусса встановлює зв'язок між поверхневим інтегралом 2-го роду по замкненій поверхні і потрійним інтегралом по просторовій області, яка обмежена цією поверхнею.

Нехай замкнена область $G \subset \mathbb{R}^3$ обмежена замкненою поверхнею σ , причому знизу та зверху обмежена гладкими поверхнями σ_1 та σ_2 , рівняння яких відповідно $z = z_1(x, y)$ та $z = z_2(x, y)$, і $D_{xy} = n p_{Oxy} G$ (рис. 10.43). Нехай в області G визначено неперервну функцію $R(x, y, z)$, яка в цій області має неперервну похідну $\frac{\partial R}{\partial z}$.

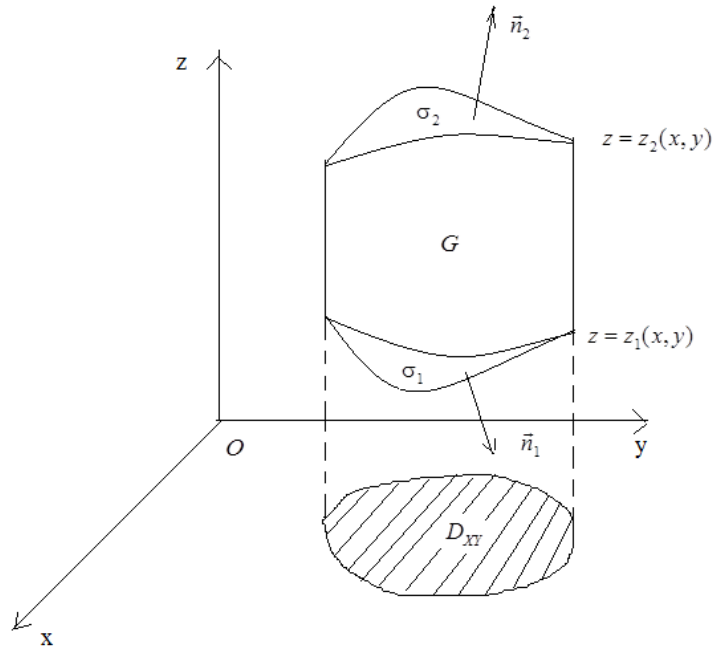


Рис. 10.44

Розглянемо потрійний інтеграл:

$$\begin{aligned} \iiint_G \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz &= \iint_{D_{XY}} dx dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z} dz = \\ &= \iint_{D_{XY}} R(x, y, z_2(x, y,)) dx dy - \iint_{D_{XY}} R(x, y, z_1(x, y,)) dx dy. \end{aligned}$$

У правій частині цієї рівності перший подвійний інтеграл дорівнює поверхневому інтегралу від функції $R(x, y, z)$ по зовнішній стороні поверхні σ_2 (тут нормаль \vec{n}_2 до цієї сторони утворює гострий кут з віссю Oz). Другий подвійний інтеграл дорівнює поверхневому інтегралу від функції $R(x, y, z)$ по зовнішній стороні поверхні σ_1 , який взято зі знаком «мінус», оскільки нормаль \vec{n}_1 до цієї сторони утворює тупий кут з віссю Oz . Отже:

$$\iiint_G \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz = \iint_{\sigma_1} R(x, y, z) dx dy + \iint_{\sigma_2} R(x, y, z) dx dy = \iint_{\sigma} R(x, y, z) dx dy. \quad (10.22.1)$$

Аналогічно у припущенні, що функції $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $\frac{\partial P}{\partial x}$, $\frac{\partial Q}{\partial y}$ неперервні в області G , дістанемо формули:

$$\iiint_G \frac{\partial P}{\partial x} dx dy dz = \iint_{\sigma} P(x, y, z) dy dz, \quad (10.22.2)$$

$$\iiint_G \frac{\partial Q}{\partial y} dx dy dz = \iint_{\sigma} Q(x, y, z) dx dz. \quad (10.22.3)$$

Склавши ліві та праві частини рівностей (10.22.1), (10.22.2), (10.22.3), дістанемо формулу:

$$\iiint_G \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz = \iint_{\sigma} P dy dz + Q dx dz + R dx dy, \quad (10.22.4)$$

яку називають *формулою Остроградського – Гаусса*. Використання цієї формули дозволяє у низці випадків значно полегшити обчислення поверхневих інтегралів 2-го роду по замкненим поверхням.

Приклад. Обчислити поверхневий інтеграл:

$$I = \iint_{\sigma} x^2 dy dz + 3y dx dz - 2xz dx dy,$$

де σ – зовнішня сторона поверхні піраміди, утвореної площинами $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+y+z=1$ (рис. 10.22a).

$$\text{Маємо: } P = x^2, \quad Q = 3y, \quad R = -2xz; \quad \frac{\partial P}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial Q}{\partial y} = 3, \quad \frac{\partial R}{\partial z} = -2x.$$

Згідно з формулою (10.22.4):

$$I = \iiint_G (2x + 3 - 2x) dx dy dz = 3 \iiint_G dx dy dz = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} dz = \frac{1}{2}.$$

Нескладно переконатися в тому, що безпосереднє обчислення цього поверхневого інтеграла потребує значно більшого обсягу обчислень.

10.23. Формула Стокса

Формула Стокса встановлює зв'язок між поверхневим і криволінійним інтегралами. Нехай σ – поверхня, яку задано рівнянням $z = f(x, y)$, причому функції $f(x, y)$, $f'_x(x, y)$, $f'_y(x, y)$ неперервні в області D , що є проекцією поверхні σ на площину Oxy . Нехай L – контур, який обмежує поверхню σ , а l – проекція цього контуру на площину Oxy . Таким чином, контур l є межею області D .

Виберемо верхню сторону поверхні σ (рис. 10.44). Нехай функція $P(x, y, z)$ неперервна разом зі своїми частинними похідними 1-го порядку на поверхні σ . Розглянемо криволінійний інтеграл 2-го роду:

$$\oint_L P(x, y, z) dx.$$

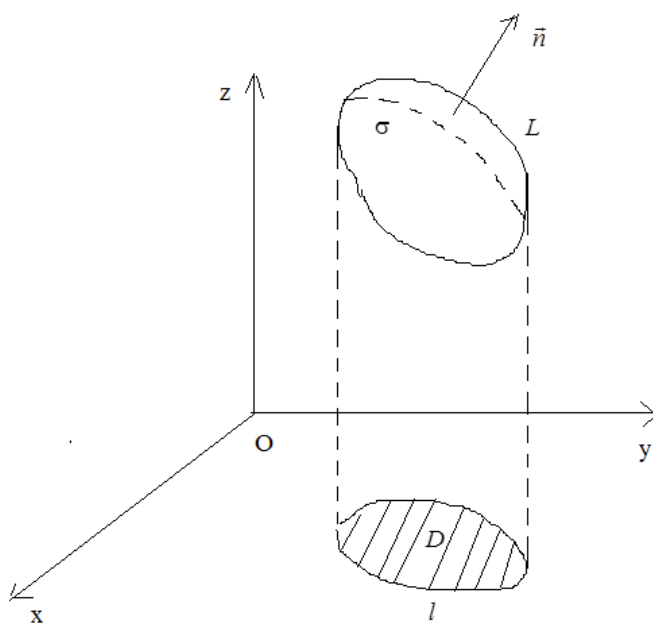


Рис. 10.44

Оскільки контур L лежить на поверхні σ , то координати його точок задовольняють рівняння $z = f(x, y)$, і тому значення функції $P(x, y, z)$ в точках контуру L дорівнюють значенням функції $P(x, y, f(x, y))$ у відповідних точках контуру l . Звідси випливає, що:

$$\oint_L P(x, y, z) dx = \oint_l P(x, y, f(x, y)) dx.$$

До інтегралу, що стоїть у правій частині цієї рівності, застосуємо формулу Гріна (див. п. 10.17).

$$\oint_l P(x, y, f(x, y)) dx = - \iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} \cdot \frac{\partial f}{\partial y} \right) dx dy.$$

Оскільки розглядаємо верхню сторону поверхні σ , то $\cos \gamma > 0$, де γ – кут між нормаллю \vec{n} до поверхні і віссю Oz (у даному випадку цей кут гострий). Оскільки напрям нормалі до поверхні $z = f(x, y)$ співпадає з напрямом градієнта функції $F(x, y, z) = f(x, y) - z$, то можемо у якості нормалі взяти саме градієнт, і тоді $\vec{n} = \left\{ \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, -1 \right\}$.

Нехай $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ – напрямні косинуси нормалі. Тоді $\frac{\cos \beta}{\cos \gamma} = \frac{\partial f / \partial y}{-1} = -\frac{\partial f}{\partial y}$. Звідси дістаємо:

$$\begin{aligned} - \iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} \right) dx dy &= - \iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial z} \cdot \frac{\cos \beta}{\cos \gamma} \right) dx dy = \\ &= - \iint_{\sigma} \left(\frac{\partial P}{\partial y} \cos \gamma - \frac{\partial P}{\partial z} \cos \beta \right) d\sigma. \end{aligned}$$

Отже,

$$\oint_L P(x, y, z) dx = \iint_{\sigma} \left(\frac{\partial P}{\partial z} \cos \beta - \frac{\partial P}{\partial y} \cos \gamma \right) d\sigma.$$

Аналогічно при виконанні відповідних умов доводиться справедливність формул:

$$\oint_L Q(x, y, z) dy = \iint_{\sigma} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} \cos \gamma - \frac{\partial Q}{\partial z} \cos \alpha \right) d\sigma,$$

$$\oint_L R(x, y, z) dz = \iint_{\sigma} \left(\frac{\partial R}{\partial y} \cos \alpha - \frac{\partial R}{\partial x} \cos \beta \right) d\sigma.$$

Додаючи ліві і праві частини трьох останніх рівностей, дістаємо формулу:

$$\oint_L P dx + Q dy + R dz = \iint_{\sigma} \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cos \alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cos \beta + \right.$$

$$+ \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cos \gamma \Big] d\sigma, \quad (10.23.1)$$

яка називається *формулою Стокса*. Її можна записати у іншому вигляді, більш зручному для запам'ятовування:

$$\oint_L P dx + Q dy + R dz = \iint_{\sigma} \begin{vmatrix} \cos \alpha & \cos \beta & \cos \gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} d\sigma.$$

За допомогою формули (10.20.3), що пов'язує поверхневі інтеграли 1-го та 2-го роду, формулу Стокса можна також записати з використанням поверхневого інтегралу 2-го роду:

$$\begin{aligned} \oint_L P dx + Q dy + R dz &= \\ &= \iint_{\sigma} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dx dz + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy. \end{aligned}$$

Приклад. За допомогою формули Стокса обчислити інтеграл:

$$I = \oint_L x^2 y^3 dx + dy + z dz,$$

де L – коло $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$, а поверхня σ – верхня сторона півсфери $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z > 0$, і обхід контуру L здійснюється у додатному напрямі.

Маємо: $P = x^2 y^3$, $Q = 1$, $R = z$,

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = -3x^2 y^2, \quad \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} = 0.$$

Проекцією D_{xy} поверхні σ на площину Oxy є круг $x^2 + y^2 \leq 1$. За формулою Стокса дістаємо:

$$I = -3 \iint_{\sigma} x^2 y^2 dx dy = -3 \iint_{D_{xy}} x^2 y^2 dx dy = -3 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho^5 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi d\rho = -\frac{\pi}{8}$$

(обчислення повторного інтеграла перевірте самостійно).

Контрольні запитання до глави 10

1. Які множини називаються відкритими, а які – замкненими?
2. Що називається подвійним інтегралом від функції $z = f(x, y)$ по області D ? У чому полягає його геометричний зміст та фізичний зміст?
3. Які достатні умови існування подвійного інтеграла?
4. Яка область називається стандартною 1-го типу, і яка область називається стандартною 2-го типу?
5. Як обчислюється подвійний інтеграл по стандартним областям? За яким принципом розставляються межі інтегрування у повторному інтегралі? Які існують можливості для обчислення подвійного інтегралу, якщо область не є стандартною?
6. Сформулювати теорему про заміну змінних у подвійному інтегралі.
7. Чому дорівнює якобіан перетворення при переході у подвійному інтегралі до полярних координат?
8. За яким принципом розставляються межі інтегрування у повторному інтегралі при переході до полярних координат?
9. Які існують геометричні застосування подвійного інтеграла?
10. Які існують механічні застосування подвійного інтеграла?
11. Що називається потрійним інтегралом від функції $u = f(x, y, z)$ по області V ? Які необхідні умови його існування? Які достатні умови?
12. Як обчислюється потрійний інтеграл у випадку стандартних областей?
13. Як здійснюється перехід у потрійному інтегралі до сферичних і циліндричних координат? Чому дорівнює якобіан перетворення у кожному з цих випадків?
14. Які існують геометричні застосування потрійного інтеграла?
15. Які існують механічні застосування потрійного інтеграла?
16. Що таке криволінійний інтеграл 1-го роду. Як обчислюється?
17. Які існують геометричні застосування криволінійного інтеграла 1-го роду? Які існують його механічні застосування?
18. Що таке криволінійний інтеграл 2-го роду. Як він обчислюється? У чому полягає його фізичний зміст?
19. Якою формулою встановлюється зв'язок між подвійним інтегралом по області D і криволінійним інтегралом 2-го роду по замкненому контуру, що цю область обмежує?

20. За яких умов криволінійний інтеграл 2-го роду не залежить від шляху інтегрування?
21. Що таке поверхневий інтеграл 1-го роду? Як обчислюється?
22. Які існують механічні застосування поверхневих інтегралів 1-го роду?
23. Які поверхні називаються односторонніми, а які двосторонніми?
24. Що таке поверхневий інтеграл 2-го роду, які його основні властивості?
25. Як обчислюється поверхневий інтеграл 2-го роду?
26. Якою формулою задається зв'язок між потрійним інтегралом по області V і поверхневим інтегралом 2-го роду по поверхні, що цю область обмежує?
27. Якою формулою задається зв'язок між поверхневим інтегралом 2-го роду по поверхні σ і криволінійним інтегралом 2-го роду по контуру, що цю поверхню обмежує?

Вправи для самостійного розв'язання

10.1. Обчислити повторні інтеграли.

$$1) \int_0^1 dx \int_1^3 (x+y) dy; \quad 2) \int_{-1}^2 dy \int_{-2}^1 (2x^3 - 3y^2) dx; \quad 3) \int_1^3 dy \int_0^2 \sqrt{xy} dx;$$

$$4) \int_0^1 dx \int_{-1}^0 xe^{xy} dy; \quad 5) \int_3^4 dx \int_1^2 \frac{dy}{(x+y)^2}; \quad 6) \int_{-4}^1 dx \int_{3x}^{4-x^2} (y-x) dy;$$

$$7) \int_0^2 dx \int_{x/2}^x \frac{xdy}{x^2 + y^2}; \quad 8) \int_0^{2\pi} dx \int_0^{2+\sin x} y dy; \quad 9) \int_0^1 dy \int_{1-y}^{\sqrt{1-y^2}} dx;$$

$$10) \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{a \cos \varphi} \rho \sin \varphi d\rho; \quad 11) \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-x^2-y^2} dy.$$

10.2. Обчислити подвійні інтеграли по прямокутним областям інтегрування D , що задано нерівностями у дужках.

$$1) \iint_D xy(x-y) dx dy \quad (0 \leq x \leq 1, 1 \leq y \leq 3);$$

$$2) \iint_D e^{x+y} dx dy \quad (-1 \leq x \leq 0, 0 \leq y \leq 2);$$

- 3) $\iint_D \frac{x^2}{1+y^2} dx dy$ ($0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$);
- 4) $\iint_D y \cos^2 x dx dy$ ($0 \leq x \leq 2\pi, 0 \leq y \leq a$);
- 5) $\iint_D \ln(x+y) dx dy$ ($1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1$);
- 6) $\iint_D x^2 y e^{xy} dx dy$ ($0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2$).

10.3. Записати подвійний інтеграл $\iint_D f(x, y) dx dy$ у вигляді повторного,

а) вважаючи зовнішній інтеграл за змінною x , а внутрішній за змінною y ;

б) вважаючи зовнішній інтеграл за змінною y , а внутрішній за змінною x .

1) D – прямокутник з вершинами $A(1;1), B(1;3), C(4;3), E(4;1)$;

2) D – трикутник з вершинами $A(1;0), B(3;0), C(3;4)$;

3) D – трапеція з вершинами $O(0;0), A(2;0), B(1;1), C(0;1)$;

4) D – паралелограм з вершинами $A(1;2), B(2;4), C(2;7), E(1;5)$;

5) D – фігура, обмежена лініями $y = 0, y = 2x, x = 3$;

6) D – фігура, обмежена лініями $x = 0, y = 0, 2x + 3y = 6$;

7) D – фігура, обмежена кривою $x^2 + y^2 - 4x = 0$;

8) D – фігура, що міститься у першому квадранті та обмежена лініями $y = x, x^2 + y^2 = 2, y = 0$;

9) D – фігура, обмежена лініями $x = 0, y = x^2, y = 2 - x^2$;

10) D – фігура, обмежена лініями $y = \sqrt{2x - x^2}, y = \sqrt{2x}, x = 2$.

10.4. Змінити порядок інтегрування.

- 1) $\int_0^2 dy \int_y^2 f(x, y) dx$; 2) $\int_0^1 dy \int_y^{\sqrt{y}} f(x, y) dx$; 3) $\int_{-1}^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy$;

$$4) \int_0^r dx \int_x^{\sqrt{2rx-x^2}} f(x, y) dy; \quad 5) \int_{-2}^2 dx \int_{-\sqrt{\frac{4-x^2}{2}}}^{\sqrt{\frac{4-x^2}{2}}} f(x, y) dy; \quad 6) \int_0^1 dx \int_{x^2+2}^{4-x} f(x, y) dy;$$

$$7) \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x, y) dx; \quad 8) \int_0^{\pi} dx \int_0^{\sin x} f(x, y) dy; \quad 9) \int_0^1 dy \int_{y^2/2}^{\sqrt{3-y^2}} f(x, y) dx;$$

$$10) \int_0^1 dx \int_0^x f(x, y) dy + \int_1^2 dx \int_0^{2-x} f(x, y) dy;$$

$$11) \int_0^{R\sqrt{2}/2} dx \int_0^x f(x, y) dy + \int_{R\sqrt{2}/2}^R dx \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} f(x, y) dy;$$

$$12) \int_0^1 dx \int_0^{x^2/3} f(x, y) dy + \int_1^2 dx \int_0^{1-\sqrt{4x-x^2-3}} f(x, y) dy.$$

10.5. Обчислити подвійні інтеграли.

1) $\iint_D (2x - 3y) dx dy$, де область D обмежено прямими $x = 0$, $y = 0$,

$$x + y = 4;$$

2) $\iint_D (x^2 + y^2) dx dy$, де область D обмежено прямими

$$y = 0, y = 2x, x = 1;$$

3) $\iint_D \left(\frac{x}{2} + \frac{y}{3} \right) dx dy$, де область D обмежено лініями $y = 2x$, $y = \frac{x^2}{2}$;

4) $\iint_D xy dx dy$, де область D обмежено лініями $y^2 = 2x$, $x = 2$;

5) $\iint_D x^2 y^2 dx dy$, де область D – круг $x^2 + y^2 \leq R^2$;

6) $\iint_D (x^2 + y) dx dy$, де область D обмежено лініями $y^2 = 4x$, $x^2 = 4y$;

7) $\iint_D \frac{x^2}{y^2} dx dy$, де область D обмежено лініями $x = 2$, $y = x$, $xy = 1$;

8) $\iint_D \cos(x+y) dx dy$, де область D обмежено прямими

$$x=0, y=\pi, y=x;$$

9) $\iint_D e^{\frac{x}{y}} dx dy$, де область D обмежено лініями $x=y^2, x=0, y=1$;

10) $\iint_D y^2 \cos xy dx dy$, де область D обмежено прямими

$$y=0, y=\sqrt{\pi}, y=x;$$

11) $\iint_D \frac{x}{x^2+y^2} dx dy$, де область D обмежено лініями $y=x \operatorname{tg} x, y=x$;

12) $\iint_D \frac{dx dy}{\sqrt{2a-x}}$, де область D – круг радіуса a , який дотикається до

осей Ox та Oy і лежить у 1-му квадранті.

10.6. У подвійному інтегралі $\iint_D f(x,y) dx dy$ перейти до полярних ко-

ординат і розставити межі інтегрування.

1) D – область, що обмежена колами $x^2+y^2=6x, x^2+y^2=10x$ і прямими $y=x, y=2x$;

2) D – трикутник з вершинами $O(0;0), A(1;0), B(0;1)$;

3) D – квадрат з вершинами $O(0;0), A(0;1), B(1;0), C(1;1)$;

4) D – область, що обмежена правою петлею лемніскати Бернуллі $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$;

5) D – менший з двох сегментів, на які пряма $y=2$ розділяє круг $x^2+y^2 \leq 3y$.

10.7. Повторні інтеграли записати також як повторні, але у полярних координатах.

$$1) \int_{R/2}^{2R} dy \int_0^{\sqrt{2Ry-y^2}} f(x,y) dx; \quad 2) \int_0^2 dx \int_0^x f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) dy; \quad 3) \int_0^1 dx \int_0^1 f(x,y) dy;$$

$$4) \int_0^2 dx \int_x^{x\sqrt{3}} f(x,y) dy; \quad 5) \int_0^2 dx \int_0^{x^2} f(x,y) dy; \quad 6) \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x,y) dx;$$

$$7) \int_0^{R/\sqrt{1+R^2}} dx \int_0^{Rx} f\left(\frac{x}{y}\right) dy + \int_{R/\sqrt{1+R^2}}^R dx \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} f\left(\frac{y}{x}\right) dy.$$

10.8. За допомогою переходу до полярних координат обчислити інтеграли.

$$1) \iint_D \ln(1+x^2+y^2) dx dy, \text{ де } D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq R^2\};$$

$$2) \iint_D \frac{x^2}{x^2+y^2} dx dy, \text{ де } D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq ax\};$$

$$3) \iint_D \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} dx dy, \text{ де } D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq ay\};$$

$$4) \iint_D x\sqrt{x^2+y^2} dx dy, \text{ де } D - \text{область, що обмежена правою петлею}$$

лемніскати Бернуллі $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$;

$$5) \iint_D \frac{\ln(x^2+y^2)}{x^2+y^2} dx dy, \text{ де } D - \text{верхнє півкільце між колами радіусів } e \text{ і}$$

e^2 з центром у початку координат.

10.9. За допомогою переходу за відповідними формулами до нових змінних u і v обчислити інтеграли.

$$1) \iint_D xy dx dy, \text{ де } D - \text{область, обмежена лініями } xy = 1, x + y = 5/2;$$

$$2) \iint_D \sqrt{xy} dx dy, \text{ де } D - \text{область, обмежена кривими } y^2 = ax, y^2 = bx,$$

$xy = p, xy = q$ ($0 < a < b, 0 < p < q$);

$$3) \iint_D (x^2 y^2 + y^2) dx dy, \text{ де } D - \text{область, обмежена кривими } y = 1/x,$$

$y = 2/x, y = x, y = 3x$;

$$4) \iint_D \frac{(x+y)^2}{x} dx dy, \text{ де } D - \text{область, обмежена прямими } y = 1-x,$$

$y = 3-x, y = x/2, y = 2x$;

5) $\iint_D x^2 dx dy$, де D – область, обмежена лініями $y = x^3$, $y = 2x^3$,

$y = x/2$, $y = 3x$.

10.10. За допомогою подвійного інтеграла обчислити об'єми тіл, обмежених заданими поверхнями.

1) $x + y + z = 4$, $x = 2$, $y = 3$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$;

2) $x + y + z = 6$, $3x + y = 6$, $3x + 2y = 12$, $y = 0$, $z = 0$;

3) $x + y + z = 3$, $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$;

4) $\frac{x}{4} + \frac{y}{2} + \frac{z}{4} = 1$, $x = 2y^2$, $z = 0$;

5) $y = 16\sqrt{2x}$, $y = \sqrt{2x}$, $z = 0$, $x + z = 2$;

6) $x^2 + y^2 = 6x$, $x^2 + y^2 = 9x$, $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $z = 0$, $y = 0$ ($y \leq 0$);

7) $x^2 + y^2 = 2ax$, $z = x$, $z = 3x$;

8) $x^2 + y^2 = 2y$, $z = \frac{13}{4} - x^2$, $z = 0$;

9) $z = x^2 + y^2$, $y = 6 - x$, $y = 2x$, $y = 1$, $z = 0$;

10) $2z = y^2$, $2x + 3y = 12$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ ($y > 0$);

11) $y = \ln x$, $y = \ln^2 x$, $z = 0$, $z = 1 - y$;

12) $x^2 + y^2 = 4$, $z = x + y + 10$, $z = 0$;

13) $x^2 + y^2 = 2ax$, $za = x^2 + y^2$, $z = 0$;

14) $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$, $9z/2 = x^2 + y^2$.

10.11. За допомогою подвійного інтеграла знайти площі областей, обмежених заданими лініями.

1) $4y = x^2 - 4x$, $x - y - 3 = 0$; 2) $y^2 = 10x + 25$, $y^2 = -6x + 9$;

3) $y^2 - 2y + x^2 = 0$, $y^2 - 4y + x^2 = 0$, $y = x/\sqrt{3}$, $y = x\sqrt{3}$; 4)

$xy = 4$, $x + y = 5$;

5) $2xy = a^2$, $xy = 2a^2$, $2y = x$, $y = 2x$; 6) $xy = 1$, $xy = 8$, $y^2 = x$, $y^2 = 8x$;

7) $\rho \cos \varphi = 1$, $\rho = 2$ (не містить полюса); 8)

$\rho = a(1 + \cos \varphi)$, $\rho = a \cos \varphi$ ($a > 0$);

9) $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$; 10) $(x^2 + y^2)^3 = a^2(x^4 + y^4)$.

10.12. Знайти масу, статичні моменти відносно осей Ox і Oy і координати центру тяжіння фігури, обмеженої заданими лініями за заданою поверхневою густиною γ .

1) $x=0, y=0, x=a, y=b$ ($a, b > 0$); $\gamma = x^2 + y^2$;

2) $x=0, y=0, x=a, y=b$ ($a, b > 0$); $\gamma = x + 2$;

3) $x=y, x-3y=1, y=1, y=3$; $\gamma = y$;

4) $x=1, y=0, y^2=4x$ ($y \geq 0$); $\gamma = 7x^2 + y$;

5) $x^2 + y^2 = 4, x^2 + y^2 = 25, x=0, y=0$ ($x \geq 0, y \leq 0$);

$\gamma = (2x - 3y)/(x^2 + y^2)$.

10.13. Записати потрійний інтеграл у вигляді:

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z) dz.$$

1) $\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz$, де V – область, обмежена площинами

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1,$$

$x=0, y=0, z=0$ ($a > 0, b > 0, c > 0$);

2) $\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz$, де V – область, обмежена еліпсоїдом

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1;$$

3) $\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz$, де V – область, обмежена поверхнями

$$x^2 + y^2 = 1, z=0, z=1$$
 ($x \geq 0, y \geq 0$);

4) $\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz$, де V – область, обмежена поверхнями

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}, z = 2;$$

5) $\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz$, де V – область, обмежена поверхнями

$$z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}, \quad x^2 + y^2 = Ry, \quad z = 0.$$

10.14. Обчислити потрійні інтеграли.

1) $\iiint_V xyz dx dy dz$, де V – область, обмежена поверхнями $y = x^2$, $x = y^2$,

$$z = xy, \quad z = 0;$$

2) $\iiint_V (x - y) dx dy dz$, де V – область, обмежена площинами

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0, \quad x + y + z = 1;$$

3) $\iiint_V x dx dy dz$, де V – область, обмежена поверхнями $z = 1$, $z = x^2 + y^2$;

4) $\iiint_V (2x + 3y - z) dx dy dz$, де V – область, обмежена площинами $z = 0$,

$$z = a, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad x + y = b \quad (a > 0, b > 0);$$

5) $\iiint_V xy^2 z^3 dx dy dz$, де V – область, обмежена поверхнями $z = xy$,

$$y = x, \quad x = 1, \quad z = 0;$$

6) $\iiint_V 2y^2 e^{xy} dx dy dz$, де V – область, обмежена площинами $x = 0$, $y = 1$,

$$y = x, \quad z = 0, \quad z = 1;$$

10.15. Обчислити потрійні інтеграли за допомогою переходу до циліндричних координат.

1) $\int_0^{2r} dx \int_{-\sqrt{2rx-x^2}}^{\sqrt{2rx-x^2}} dy \int_0^{\sqrt{4r^2-x^2-y^2}} dz$;

2) $\iiint_V dx dy dz$, де V – область, обмежена поверхнями $x^2 + y^2 + z^2 = 2Rz$

, $x^2 + y^2 = z^2$, що містить точку $(0; 0; R)$;

3) $\iiint_V (x^2 + z^2) dx dy dz$, де V – область, обмежена поверхнями

$$2y = x^2 + z^2, \quad y = 2;$$

4) $\iiint_V (x^2 + y^2)^{3/2} dx dy dz$, де V – область, обмежена поверхнями $z = x^2 + y^2$, $z = 1$.

10.16. Записати потрібний інтеграл $\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz$ у вигляді повторного у циліндричній системі координат, розставивши межі інтегрування.

1) $V = \left\{ (x, y, z) : \frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} \leq 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0 \right\};$

2) $V = \left\{ (x, y, z) : x^2 + y^2 \leq z, 0 \leq z \leq H \right\};$

3) $V = \left\{ (x, y, z) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1 \right\};$

4) $V = \left\{ (x, y, z) : (x - R)^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, x^2 + (y - R)^2 + z^2 \leq R^2 \right\};$

5) $V = \left\{ (x, y, z) : x^2 + y^2 \leq 2ax, x^2 + y^2 \leq a^2 - az, z \geq 0 \right\};$

6) $V = \left\{ (x, y, z) : 4x^2 + 3y^2 + z^2 \leq 48, 0 \leq 2z \leq 4x^2 + 3y^2 \right\};$

7) $V = \left\{ (x, y, z) : |z| \leq 5 - \sqrt{3x^2 + 3y^2}, z^2 \leq x^2 + y^2 + 1 \right\}.$

10.17. Обчислити потрібні інтеграли за допомогою переходу до сферичної системи координат.

1) $\iiint_V (x^2 + y^2) dx dy dz$, де $V = \left\{ (x, y, z) : r^2 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2 \right\};$

2) $\iiint_V \frac{dx dy dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - 2)^2}}$, де $V = \left\{ (x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \right\};$

3) $\iiint_V \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz$, де $V = \left\{ (x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq z \right\};$

4) $\iiint_V \frac{dx dy dz}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2 - z^2}}$, де

$V = \left\{ (x, y, z) : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2 \right\};$

5) $\iiint_V \frac{dxdydz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$, де V – область, обмежена кульовим сектором з

центром у точці $O(0;0;0)$, радіусом R і кутом 2α ($0 < \alpha < \pi$) при вершині.

10.18. Записати потрійний інтеграл $\iiint_V f(x, y, z)dxdydz$ у вигляді по-

вторного у сферичній системі координат, розставивши межі інтегрування.

1) $V = \left\{ (x, y, z) : \frac{x}{3} + \frac{y}{4} + \frac{z}{5} \leq 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0 \right\};$

2) $V = \left\{ (x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4Rz, x^2 + y^2 + z^2 \geq Rz, x^2 + y^2 \leq z^2/3 \right\};$

3) $V = \left\{ (x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, x^2 + y^2 + z^2 \leq 2zR \right\};$

4) $V = \left\{ (x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 2yR, x^2 + y^2 \leq z^2 \right\};$

5) $V = \left\{ (x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 8z - 8, 3(x^2 + y^2) \leq z^2 \right\}.$

10.19. За допомогою потрійного інтеграла обчислити об'єми тіл, обмежених заданими поверхнями.

1) $z = xy, z = x + y, x + y = 1, x = 0, y = 0$; 2) $y = x^2 + z^2, y = 1$;

3) $y^2 + z^2 = 2ax, y^2 + z^2 = 2az, x = 0$ ($a > 0$); 4) $z = x^2 + y^2, z = x + y$;

5) $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, z^2 = x^2 + y^2$ ($a > 0$) (зовні конуса);

6) $z = \ln(x + 2), z = \ln(6 - x), x = 0, x + y = 2, x - y = 2$.

10.20. Знайти масу тіла густиною γ , обмеженого заданими поверхнями.

1) $z^2 = x^2 + y^2, z = h; \gamma = z$;

2) $2x + z = 2a, x + z = a, y^2 = ax, y = 0$ ($y > 0$); $\gamma = y$;

3) $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}, z = 0; \gamma = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$;

4) $z = x^2 + y^2, z = 2y; \gamma = y$; 5) $x + y + z = 2, x = 0, y = 0, z = 0$;
 $\gamma = x + y + z$;

6) $x = y^2, x = 4, z = 2, z = 5; \gamma = |y|$.

10.21. Обчислити криволінійні інтеграли 1-го роду.

1) $\int_L (x - 2y) dl$, де L – відрізок прямої між точками $A(1;1)$ і $B(0;-2)$;

2) $\int_L xy dl$, де L – контур квадрата з вершинами у точках

$O(0;0)$, $A(2;0)$, $B(2;2)$, $C(0;2)$;

3) $\int_L y dl$, де L – дуга параболи $y^2 = 4x$, відсічена параболою $x^2 = 4y$;

4) $\int_L y dl$, де L – дуга синусоїди $y = \sin x$ ($0 \leq x \leq \pi$);

5) $\int_L (x^2 + y^2)^n dl$, де L – коло $x^2 + y^2 = R^2$;

6) $\int_L \sqrt{x^2 + y^2} dl$, де L – коло $x^2 + y^2 = ax$ ($a > 0$);

7) $\int_L y^2 dl$, де L – арка циклоїди $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ ($0 \leq t \leq 2\pi$);

8) $\int_L xy dl$, де L – чверть еліпса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, що розташована у 1-му

квadrанті;

9) $\int_L \sqrt{x^2 + y^2} dl$, де L – дуга кривої $x = a(\cos t + t \sin t)$,

$y = a(\sin t - t \cos t)$ ($0 \leq t \leq 2\pi$);

10) $\int_L x \sqrt{x^2 - y^2} dl$, де L – половина лемніскати $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$,

що лежить у правій півплощині;

11) $\int_L \arctg \frac{y}{x} dl$, де L – частина спіралі Архімеда $\rho = 2\varphi$, що міститься

всередині круга радіуса R з центром у полюсі;

12) $\int_L e^{\sqrt{x^2 + y^2}} dl$, де L – контур кругового сектора $\rho = a$, $\varphi = 0$, $\varphi = \frac{\pi}{4}$;

13) $\int_L (x + 2y^2 - 3z) dl$, де L – відрізок прямої від точки $A(0;1;2)$ до то-

чки $B(2;-1;0)$;

14) $\int_L \frac{z^2 dl}{x^2 + y^2}$, де L – перший виток гвинтової лінії $x = a \cos t$,

$y = a \sin t$, $z = at$.

10.24. Обчислити довжини дуг заданих кривих (всі параметри вважаються додатними).

1) $y = \ln x$ ($\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{8}$); 2) $y = \sqrt{x - x^2} + \arcsin \sqrt{x}$;

3) $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ ($0 \leq t \leq 2\pi$);

4) $x = 3t$, $y = 3t^2$, $z = 2t^3$ від точки $O(0;0;0)$ до точки $A(3;2;2)$;

5) $x = ae^t \cos t$, $y = ae^t \sin t$, $z = ae^t$ ($0 \leq t \leq \pi$).

10.25. Знайти площі заданих циліндричних поверхонь, розміщених між площиною Oxy і зазначеними поверхнями.

1) $y = \frac{3}{8}x^2$, $x = 0$, $y = 6$, $z = x$; 2) $x^2 + y^2 = 4$, $4z = xy$;

3) $y^2 = 2px$, $z = \sqrt{2px - 4x^2}$; 4) $y = \frac{4}{9}(x-1)^3$, $z = 2 - \sqrt{x}$

5) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $z = kx$ ($z \geq 0$); 6) $y = 2px$, $x = \frac{8}{9}p$, $z = y$.

10.26. Обчислити маси заданих кривих, якщо відомо густину γ в кожній точці кривої.

1) $x = 3 \cos t$, $y = 3 \sin t$, $z = 4t$ ($0 \leq t \leq 2\pi$); $\gamma(x, y, z) = 4z$;

2) $x^2 + y^2 = 1$, $y \geq 0$; $\gamma(x, y) = y$;

3) $y = \ln x$ ($0 \leq x \leq 3$); $\gamma(x, y) = x^2$;

4) $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$ ($0 \leq x \leq a$); $\gamma(x, y) = \frac{k(1+x)}{y}$, $\gamma(0, a) = \delta$;

5) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$; $\gamma(x, y) = |y|$;

10.27. Обчислити криволінійні інтеграли 2-го роду.

1) $\int_L (x + y^2) dx + y dy$, де L – відрізок прямої $y = x - 2$ від точки

$A(1; -1)$ до точки $B(-1; -3)$;

2) $\int_L (3x^3y - 2xy^3)dx - 2x^2dy$, де L – відрізок прямої від точки $A(0;1)$ до

точки $B(2;5)$;

3) $\int_L \frac{ydx + xdy}{1 + x^2y^2}$, де L – відрізок прямої від точки $O(0;0)$ до точки

$B(-2;2)$;

4) $\oint_L (-x^2ydx + xy^2dy)$, де L – коло $x^2 + y^2 = r^2$, причому обхід здійс-

нюється у додатному напрямку;

5) $\int_{OA} (x^2 - y)dx - y^2dy$ від точки $O(0;0)$ до точки $A(1;1)$, якщо ці точки

сполучаються між собою:

а) відрізком прямої $y = x$; б) дугою параболи $y = x^2$; в) дугою параболи $y^2 = x$; г) ламаною OBA , де $B(0;1)$; д) ламаною OCA , де $C(1;0)$;

б) $\int_L xdy$, де L – права половина кола $x^2 + y^2 = a^2$ від точки $A(0;-a)$

до точки $B(0;a)$ ($a > 0$);

7) $\int_L (y + \pi)dx + x \cos y dy$, де L – частина кривої $\pi \ln x - y + \sin y = 0$ від

точки $A(1;0)$ до точки $B(e;\pi)$;

8) $\int_L (2a - y)dx - (a - y)dy$, де L – перша арка циклоїди $x = a(t - \sin t)$,

$y = a(1 - \cos t)$ ($0 \leq t \leq 2\pi$);

9) $\int_L \frac{x^2dy - y^2dx}{x^{5/3} + y^{5/3}}$, де L – чверть астроїди $x = R \cos^3 t$, $y = R \sin^3 t$ від то-

чки $(R;0)$ до точки $(0;R)$;

10) $\int_L \frac{xdx + ydy + zdz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - x - y + 2z}}$, де L – відрізок прямої від точки

$A(1;1;1)$ до точки $B(4;4;4)$;

11) $\int_L yz dx + z\sqrt{R^2 - y^2} dy + xy dz$, де L – дуга гвинтової лінії $x = R \cos t$,

$y = R \sin t$, $z = \frac{at}{2\pi}$ від точки перетину лінії з площиною $z = 0$ до точ-

ки її перетину з площиною $z = a$;

12) $\int_L y^2 dx + z^2 dy + x^2 dz$, де L – лінія перетину сфери $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ і

циліндра $x^2 + y^2 = Rx$ ($R > 0, z \geq 0$), причому обхід здійснюється проти годинникової стрілки, якщо дивитися з початку координат.

10.28. Обчислити криволінійні інтеграли по замкненому контуру: 1) безпосереднім інтегруванням; 2) за допомогою формули Гріна.

1) $\oint_L x dy$, де L – контур трикутника, утвореного осями координат і

прямою $3x + 2y - 6 = 0$;

2) $\oint_L (x^2 + y^2) dy$, де L – контур чотирикутника з вершинами в точках

$O(0;0)$, $A(2;0)$, $B(4;4)$, $C(0;4)$;

3) $\oint_L (1 - x^2) y dx + (1 + y^2) x dy$, де L – коло $x^2 + y^2 = R^2$;

4) $\oint_L y \cos x dx + (\cos y + \sin x) dy$, де L – еліпс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$;

5) $\oint_L e^x [(1 - \cos y) dx - (y - \sin y) dy]$, де L – контур, який обмежує об-

ласть $0 \leq x \leq \pi$, $0 \leq y \leq \sin x$;

6) $\oint_L (xy + x + y) dx + (xy + x - y) dy$, де L – коло $x^2 + y^2 = ax$.

10.29. Переконатися, що криволінійні інтеграли не залежать від форми шляху інтегрування, і обчислити їх.

1) $\int_{(-1;2)}^{(2;3)} x dy + y dx$; 2) $\int_{(0;1)}^{(3;4)} x dx + y dy$; 3) $\int_{(0;0)}^{(1;1)} (x + y)(dx + dy)$; 4)

$\int_{(3;4)}^{(5;12)} \frac{x dx + y dy}{x^2 + y^2}$;

$$5) \int_{(0;1)}^{(1;2)} \frac{2xdx}{y^3} + \frac{y^2 - 3x^2}{y^4} dy; \quad 6) \int_{(1;\pi)}^{(2;\pi)} \left(1 - \frac{y^2}{x^2} \cos \frac{y}{x} \right) dx + \left(\sin \frac{y}{x} + \frac{y}{x} \cos \frac{y}{x} \right) dy;$$

$$7) \int_{(1;-1;2)}^{(2;1;3)} xdx - y^2 dy + z dz; \quad 8) \int_{(7;2;3)}^{(5;3;1)} \frac{zx dy + xy dz - yz dx}{(x - yz)^2}.$$

10.30. У кожній точці площини на матеріальну точку діє сила $\vec{F} = x^2 y \vec{i} + (y - x) \vec{j}$. Обчислити роботу при переміщенні точки з початку координат у точку $A(1;1)$:

1) по прямій $y = x$; 2) по параболі $y = x^2$; 3) по кубічній параболі $y = x^3$; 4) по ламаній, що сполучає точки $O(0;0)$, $C(1;0)$, $A(1;1)$; 5) по ламаній, що сполучає точки $O(0;0)$, $B(0;1)$, $A(1;1)$.

10.31. Обчислити поверхневі інтеграли 1-го роду.

1) $\iint_{\sigma} (2x + y + z - 1) d\sigma$, де σ – частина площини $3x + y + z = 1$, розміщена у першому октанті;

2) $\iint_{\sigma} \left(z + 2x + \frac{4}{3} y \right) d\sigma$, де σ – частина площини $6x + 4y + 3z = 12$, розміщена у першому октанті;

3) $\iint_{\sigma} \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} d\sigma$, де σ – півсфера $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$;

4) $\iint_{\sigma} x d\sigma$, де σ – частина сфери $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, розміщена в першому октанті;

5) $\iint_{\sigma} (x^2 + y^2) d\sigma$, де σ – частина конічної поверхні $z^2 = x^2 + y^2$, розміщена між площинами $z = 0$ і $z = 1$;

6) $\iint_{\sigma} \frac{d\sigma}{r^2}$, де σ – частина циліндричної поверхні $x^2 + y^2 = R^2$, обмежена площинами $z = 0$ і $z = H$, а r – відстань від точки поверхні до початку координат;

7) $\iint_{\sigma} \frac{d\sigma}{r}$, де σ – частина гіперболічного параболоїда $z = xy$, що відтинається циліндром $x^2 + y^2 = R^2$, а r – відстань від точки поверхні до осі Oz .

10.32. Знайти масу сфери $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, якщо поверхнева густина в кожній її точці дорівнює квадрату відстані від цієї точки до деякого фіксованого діаметра сфери.

10.33. Обчислити поверхневі інтеграли 2-го роду.

1) $\iint_{\sigma} xz^2 dx dy$, де σ – зовнішня сторона частини сфери $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, розміщена в першому октанті;

2) $\iint_{\sigma} 2x dy dz - y dx dz$, де σ – зовнішня сторона частини поверхні циліндра $x^2 + y^2 = 1$, $0 \leq z \leq 1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$;

3) $\iint_{\sigma} yz dy dz + xz dx dz + xy dx dy$, де σ – зовнішня сторона поверхні трикутника, утвореного перетином площин $x + y + z = a$ ($a > 0$) з координатними площинами;

4) $\iint_{\sigma} x^2 dy dz + y^2 dx dz + z^2 dx dy$, де σ – зовнішня сторона частини сфери $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, що лежить у першому октанті;

5) $\iint_{\sigma} (y - z) dy dz + (z - x) dx dz + (x - y) dx dy$, де σ – зовнішня сторона конічної поверхні $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $0 \leq z \leq h$;

6) $\iint_{\sigma} xz dx dy + xy dy dz + yz dx dz$, де σ – зовнішня сторона піраміди, обмеженої площинами $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y + z = 1$;

7) $\iint_{\sigma} x^3 dy dz$ – де σ – верхня сторона верхньої половини еліпсоїда

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1;$$

8) $\iint_{\sigma} y^2 z dx dy + xz dy dz + x^2 y dx dz$, де σ – зовнішня сторона поверхні,

розміщеної в першому октанті і обмеженої параболоїдом $z = x^2 + y^2$, циліндром $x^2 + y^2 = 1$ і координатними площинами;

9) $\iint_{\sigma} x^2 dy dz + y^2 dx dz + z^2 dx dy$, де σ – зовнішня повна поверхня конуса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = \frac{z^2}{b^2} \quad (0 \leq z \leq b);$$

10) $\iint_{\sigma} \frac{dy dz}{x} + \frac{dx dz}{y} + \frac{dx dy}{z}$, де σ – зовнішня сторона еліпсоїда

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

10.34. Обчислити поверхневі інтеграли за допомогою формули Остроградського – Гаусса.

1) $\iint_{\sigma} (x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma) d\sigma$, де σ – зовнішня сторона еліпсоїда

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1;$$

2) $\iint_{\sigma} x dy dz + y dx dz + z dx dy$, де σ – повна зовнішня поверхня циліндра

$$x^2 + y^2 = a^2, \quad -H \leq z \leq H;$$

3) $\iint_{\sigma} 2xy dy dz + 3xy dx dz - 4yz dx dy$, де σ – зовнішня сторона замкненої

поверхні, утвореної площиною $z = 0$ та верхньою частиною сфери $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

10.35. Обчислити криволінійні інтеграли 2-го роду за допомогою формули Стокса.

1) $\oint_L y^2 dx + z^2 dy + x^2 dz$, де L – контур трикутника ABC з вершинами

$$A(a; 0; 0), \quad B(0; a; 0), \quad C(0; 0; a);$$

2) $\oint_L xdx + (x + y)dy + (x + y + z)dz$, де L – крива $x = a \sin t$, $y = a \cos t$,
 $z = a(\sin t + \cos t)$ ($0 \leq t \leq 2\pi$);

3) $\oint_L (y + z)dx + (z + x)dy + (x + y)dz$, де L – коло, що отримано перетином сфери $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ з площиною $x + y + z = 0$;

4) $\oint_L y^2 dx - x^2 dy + z^2 dz$, де L – контур, який отримано перетином параболоїда $x^2 + z^2 = 1 - y$ з координатними площинами.

Зміст

Глава 8. Векторна алгебра і аналітична геометрія у просторі	3
8.1. Скалярні та векторні величини	3
8.2. Лінійні операції над векторами	5
8.3. Проекція вектора на вісь. Основна теорема про проекцію	8
8.4. Компланарні та не компланарні вектори. Базис у просторі	11
8.5. Прямокутна декартова система координат у просторі	14
8.6. Довжина і напрям вектора у ПДСК	16
8.7. Операції над векторами у координатній формі	18
8.8. Скалярний добуток векторів	21
8.9. Векторний добуток векторів	25
8.10. Мішаний добуток векторів	28
8.11. Поверхні та лінії у просторі	31
8.12. Площина у просторі. Рівняння площини	35
8.13. Кут між двома площинами. Умови паралельності та перпендикулярності площин	39
8.14. Рівняння площини, що проходить через три задані точки	40
8.15. Нормальне рівняння площини	42
8.16. Пряма лінія у просторі	45
8.17. Кут між двома прямими. Умови паралельності та перпендикулярності прямих	50
8.18. Кут між прямою лінією та площиною. Перетин прямої лінії та площини	52
8.19. Відстань від точки до прямої	55
8.20. Поверхні другого порядку	57
8.21. Сферична система координат у просторі	68
<i>Контрольні запитання до глави 8</i>	70
<i>Вправи для самостійного розв'язання</i>	71
Глава 9. Диференціальне числення функцій багатьох змінних	75
9.1. Поняття функції багатьох змінних	75
9.2. Границя і неперервність функції багатьох змінних	79
9.3. Частинні похідні функції багатьох змінних	84
9.4. Диференційовність функції багатьох змінних	88
9.5. Диференціал функції багатьох змінних	91

9.6. Застосування диференціала до наближених обчислень	93
9.7. Похідна функції за заданим напрямом	95
9.8. Градієнт функції	97
9.9. Складені функції та їх диференціювання	101
9.10. Неявні функції та їх диференціювання	103
9.11. Дотична площина і нормаль до поверхні	105
9.12. Частинні похідні та диференціали вищих порядків	110
9.13. Формула Тейлора для функції багатьох змінних	113
9.14. Екстремум функції двох змінних	115
9.15. Найбільше та найменше значення функції в замкненій обмеженій множині	119
9.16. Умовний екстремум	122
9.17. Побудова емпіричних залежностей методом найменших квадратів	127
9.18. Поняття про лінійне програмування	130
9.19. Задача лінійного програмування для функції двох змінних	133
<i>Контрольні запитання до глави 9</i>	139
<i>Вправи для самостійного розв'язання</i>	141
Глава 10. Інтегральне числення функцій багатьох змінних	147
10.1. Області на площині та у просторі	147
10.2. Задачі, що приводять до поняття подвійного інтеграла	150
10.3. Означення подвійного інтеграла. Умови його існування та властивості	152
10.4. Обчислення подвійного інтеграла	155
10.5. Заміна змінних у подвійному інтегралі	164
10.6. Подвійний інтеграл у полярних координатах	166
10.7. Геометричні застосування подвійного інтеграла	172
10.8. Механічні застосування подвійного інтеграла	176
10.9. Потрійний інтеграл, означення та умови існування	178
10.10. Обчислення потрійного інтеграла	180
10.11. Заміна змінних у потрійному інтегралі	182
10.12. Застосування потрійного інтеграла	186
10.13. Криволінійні інтеграли 1-го роду	188
10.14. Застосування криволінійних інтегралів 1-го роду	191

10.15. Криволінійні інтеграли 2-го роду	193
10.16. Обчислення криволінійних інтегралів 2-го роду	197
10.17. Формула Гріна	201
10.18. Умови незалежності криволінійного інтеграла 2-го роду від шляху інтегрування	204
10.19. Поверхневі інтеграли 1-го роду	208
10.20. Поверхневі інтеграли 2-го роду. Означення і властивості	212
10.21. Обчислення поверхневого інтеграла 2-го роду	215
10.22. Формула Остроградського–Гаусса	217
10.23. Формула Стокса	220
<i>Контрольні запитання до глави 10</i>	223
<i>Вправи для самостійного розв'язання</i>	224

Навчальне видання

Щоголев Сергій Авенірович
Кореновський Аркадій Олександрович

ОСНОВИ ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ

Том 2. Частина 1

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК

За редакцією авторів

Підп. до друку. 13.11.2018. Формат 60x84/16.
Ум.-друк. арк. 14,7. Тираж 30 пр.
Зам. № 2011.

Видавець і виготовлювач
Одеський національний університет
імені І. І. Мечникова
Свідоцтво ДК № 4215 від 22.11.2011 р.

65082, м. Одеса, вул. Єлісаветинська, 12, Україна
Тел.: (048) 723 28 39.
E-mail: druk@onu.edu.ua