

К. М. КОПІЙКА  
Д. Д. ПОЛІЩУК

НАУКОВА БІБЛІОТЕКА ОНУ ІМЕНІ І. МЕЧНИКОВА

# ЗБІРНИК ЗАДАЧ

**з молекулярної  
фізики**

22.36  
К658

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Одеський національний університет ім. І. І. Мечникова

*К. М. Копійка, Д. Д. Поліщук*

**Збірник задач  
з  
молекулярної  
фізики**

Рекомендовано  
Міністерством освіти і науки України  
як навчальний посібник для студентів  
вищих навчальних закладів  
за № 14/18.2-430 від 27.02.2002

Одеса  
«Астропринт»  
2002

ББК 22.36я73  
К658  
УДК 539.1(076)

Збірник задач з молекулярної фізики складений відповідно до програми курсу «Загальна фізика» фізичних спеціальностей університетів. Він охоплює основні розділи молекулярної фізики. Кожен розділ збірника має декілька параграфів. На початку кожного параграфу приведені короткі теоретичні положення, формули з даної теми, методичні вказівки та зразок розв'язання декількох типових задач даного параграфу. У кінці вміщені задачі для аудиторних та домашніх занять.

Збірник містить понад 300 задач з усіх розділів молекулярної фізики, а також відповіді до них та необхідні таблиці. Задачі підібрані з різних популярних збірників, деякі складені авторами. Задачі є різного типу і різної складності.

Посібник розрахований на студентів фізичних спеціальностей університетів. Може бути використаний студентами інших вузів з менш глибокою програмою.

Рецензенти:

*І. М. Вікулін*, д-р фіз.-мат. наук, професор,  
*С. В. Козицький*, д-р фіз.-мат. наук, професор

К 1604090000-135 Без оголош.  
549-2002

ISBN 966-549-822-3

1382121  
Національна бібліотека  
України  
І. І. Мечникова

© К. М. Копійка,  
Д. Д. Поліщук, 2002

## ВСТУП

Розв'язування задач з «Молекулярної фізики» передбачає, перш за все, поглиблення знань про внутрішню будову тіл у різних агрегатних станах і їх фізичні властивості. Вміння розв'язувати задачі розвиває творчий підхід до проблем, які виникають при вивченні молекулярних фізичних явищ, дає можливість самостійно відпрацьовувати і приймати рішення. Найкращим методичним засобом у цьому плані завжди була самостійна робота студентів під час розв'язування задач.

Брак необхідної літератури значно ускладнює самостійну роботу. Крім того, в залежності від рівня підготовки, студентові потрібні хоча б початкові методичні рекомендації та зразок їх виконання.

Пропонований посібник є збірником задач за програмою курсу «Загальна фізика» для державних університетів. До збірника включені найбільш характерні задачі молекулярної фізики з відомих популярних збірників Д. В. Сивухіна, І. Є. Іродова, Д. І. Сахарова, І. В. Савельєва. Посібник складається з трьох розділів, кожен з яких містить мінімум необхідних теоретичних відомостей, деякі методичні поради, приклади розв'язування задач та їх набір для аудиторних і домашніх занять.

Задачі є різного типу і різної складності: від самих легких до складних. Деякі з них вимагають глибокого знання лекційного матеріалу, а також специфічних прийомів розв'язування.

У кінці приводяться відповіді розв'язків аудиторних та домашніх задач, а також короткий додаток таблиць і основних математичних формул, якими можуть користуватися студенти при розв'язуванні задач.

Розрахований посібник на студентів фізичних та фізико-технічних спеціальностей вузів, де фізика входить до складу фундаментальних і професійно-орієнтованих дисциплін і на її вивчення відводиться необхідна кількість годин.

## МОЛЕКУЛЯРНО-КІНЕТИЧНА ТЕОРІЯ

Молекулярно-кінетична теорія пояснює властивості молекулярних систем, а також фізичні явища, які відбуваються з системами як сумарний результат дії молекул. При цьому вона користується статистичним методом, цікавлячись не рухом окремих молекул, а тільки такими середніми величинами, які характеризують рух великої кількості молекул чи атомів. Молекулярно-кінетична теорія встановлює зв'язок між макроскопічними параметрами та середніми значеннями мікроскопічних величин, а також дає спосіб розрахунку цих середніх значень на основі законів руху окремих молекул.

### § 1. Рівняння молекулярно-кінетичної теорії газів. Закони ідеальних газів

Основне рівняння молекулярно-кінетичної теорії газів має вигляд:

$$p = \frac{2}{3} n \langle \mathcal{E} \rangle,$$

де  $p$  — тиск газу,  $n = \frac{N}{V}$  — концентрація молекул,  $\langle \mathcal{E} \rangle = \langle \frac{mv^2}{2} \rangle$  — середня кінетична енергія молекул.

Залежність середньої кінетичної енергії молекул від температури:

$$\langle \frac{mv^2}{2} \rangle = \frac{3}{2} kT,$$

де  $k$  — постійна Больцмана.  $k = \frac{R}{N_A}$ , тут  $R$  — універсальна газова стала,  $N_A$  — число Авогадро.

Рівняння стану ідеального газу

$$p = nkT.$$

Рівняння Клапейрона-Менделєєва

$$pV = \frac{M}{\mu} RT,$$

де  $\frac{M}{\mu} = \frac{N}{N_A} = \nu$  — кількість молів газу,  $M$  — маса газу,  $\mu$  — молярна маса газу.

Об'єднаний газовий закон має вигляд:

$$\frac{pV}{T} = const$$

для даної маси газу.

Тиск суміші ідеальних газів визначається законом Дальтона:

$$p = \sum p_i = \frac{RT}{V} \sum \frac{M_i}{\mu_i},$$

де  $p_i$  — парціальний тиск  $i$ -ої компоненти.

#### Методичні вказівки

При розв'язанні задач слід пам'ятати, що рівнянням Клапейрона-Менделєєва можна користуватись лише для газів, які знаходяться при умовах, що не набагато відрізняються від нормальних, тобто ( $t = 0^\circ \text{C}$ ,  $p = 1 \cdot 10^5 \text{ Па}$ ), а також для розріджених газів. Для досить сильно стислих газів ( $p > 10^7 \text{ Па}$ ) користуватись рівнянням не доцільно.

Пристаюючи до розв'язання задачі, перш за все, слід чітко уявити, що відбувається з газом, з якого стану в який він переходить, при яких умовах, в яких кількостях, чи змінюється при цьому маса газу? Якщо маса не змінюється, то слід записати рівняння для двох чи декількох станів з відповідними умовами. У розгорнутому вигляді представити необхідні параметри  $p$ ,  $V$ ,  $T$ ,  $M$ ,  $\nu$ , виразивши їх через задані величини. Записати допоміжні умови, які витікають із задачі і розв'язати систему отриманих рівнянь відносно невідомих величин. При визначенні тиску в деяких задачах слід згадати закон Паскаля. В інших задачах, де розглядаються процеси, зв'язані зі зміною стану декількох газів, що відокремлені один від одного, або входять в суміш газів, рівняння стану спочатку записують для кожного газу окремо, а потім уже користуються законом Дальтона, якщо в цьому є потреба.

При розв'язуванні задач рекомендується користуватися абсолютною шкалою температур, тому слід з самого початку перевести градуси по шкалі Цельсія в градуси по шкалі Кельвіна. Що стосується тиску, то слід пам'ятати співвідношення між деякими позасистемними одиницями, які приведені в додатку.

### Приклади розв'язування задач

1. Тиск газу в посудині дорівнює  $10^4$  Па, а середня квадратична швидкість 500 м/с. Знайти густину газу.

$$\text{Дано: } p = 10^4 \text{ Па, } v_{\text{кв}} = 500 \text{ м/с} \\ \rho = ?$$

**Розв'язання.** Густина газу  $\rho = \frac{M}{V}$ , де  $M$  — маса газу, а  $V$  — об'єм. Масу газу можна записати так  $M = mN$ , де  $m$  — маса однієї молекули,

а  $N$  — загальна кількість молекул. Тоді  $\rho = \frac{mN}{V}$ . Величина  $\frac{N}{V} = n$  є концентрація молекул. Таким чином  $\rho = nm$ . Скористуємось основним рівнянням молекулярно-кінетичної теорії  $p = \frac{2}{3}n \langle \mathcal{E} \rangle =$

$= \frac{2}{3}n \langle \frac{mv^2}{2} \rangle$ , з якого виразимо  $n$  і підставимо його в формулу для густини. Отримаємо  $\rho = \frac{3p}{\langle v^2 \rangle}$ . Оскільки середня квадратична швидкість  $v_{\text{кв}} = \sqrt{\langle v^2 \rangle}$ , то густина  $\rho = \frac{3p}{v_{\text{кв}}^2} = \frac{3 \cdot 10^4}{(5 \cdot 10^2)^2} = 0,12 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$ .

2. Сосуд із об'ємом  $V = 20$  л містить суміш водню та гелію при температурі  $t = 20$  °С і тискові  $p = 20$  атм. Маса суміші  $M = 50$  г. Знайти окремо маси водню та гелію в цій суміші.

$$\text{Дано: } V = 20 \text{ л} = 2 \cdot 10^{-2} \text{ м}^3; p = 2 \text{ атм} = 2 \cdot 10^5 \text{ Па}; M = 50 \text{ г} = 5 \cdot 10^{-3} \text{ кг}; T = 293 \text{ К} \\ M_1 = ? \quad M_2 = ?$$

**Розв'язання.** Суміш газів водню та гелію характеризується певними параметрами  $p, V, T, M$ . Умови близькі до нормальних, тому газу можна вважати ідеальними і скористуватись рівнянням Клапейрона-

Менделєєва. Запишемо його для кожного газу окремо: для водню

$$p_1 V = \frac{M_1}{\mu_1} RT, \text{ для гелію } p_2 V = \frac{M_2}{\mu_2} RT, \text{ де } p_1, p_2 \text{ — парціальні тиски водню і гелію, а } M_1 \text{ і } M_2 \text{ — їх маси. Згідно закону Дальтона загальний тиск } p = p_1 + p_2. \text{ Знайдемо } p_1 \text{ і } p_2 \text{ з рівняння Клапейрона-Менделєєва і тоді для закону Дальтона отримаємо}$$

$$p = \frac{RT}{V} \left( \frac{M_1}{\mu_1} + \frac{M_2}{\mu_2} \right).$$

Додатковою умовою є така рівність

$$M = M_1 + M_2.$$

Останні два рівняння складають систему рівнянь з двома невідомими  $M_1$  і  $M_2$ , які легко знайти.

$$M_2 = \frac{\frac{M}{\mu_1} - \frac{pV}{RT}}{\frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_1 \mu_2}} = 3,42 \cdot 10^{-3} \text{ кг},$$

$$M_1 = M - M_2 = 1,58 \cdot 10^{-3} \text{ кг}.$$

3. Компресор нагнітає повітря в автомобільний балон. При кожному качанні він захоплює з атмосфери  $V_0 = 1$  л повітря при нормальному тиску і температурі 0 °С. Об'єм балону  $V = 0,5$  м<sup>3</sup>. Температура повітря в балоні 17 °С. Скільки качань повинен зробити компресор, щоб площа співдотику покришки з полотном дороги зменшилась на  $\Delta S = 100$  см<sup>2</sup>, якщо до цього вона дорівнювала  $S = 450$  см<sup>2</sup>, а навантаження становить  $F = 4,9$  кН?

$$\text{Дано: } V_0 = 1 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3; p_1 = 1 \cdot 10^5 \text{ Па}; T_1 = 273 \text{ К}; V_2 = 0,5 \text{ м}^3; T_2 = 290 \text{ К}; \Delta S = 100 \text{ см}^2 = 1 \cdot 10^{-2} \text{ м}^2; S = 450 \text{ см}^2 = 4,5 \cdot 10^{-2} \text{ м}^2; F = 4,9 \cdot 10^3 \text{ Н} \\ n = ?$$

З атмосфери деяку масу повітря, що має параметри  $p_1, V_1, T_1$ , компресор перекачує в автомобільний балон, де ці параметри змінюються і становлять  $p_2, V_2, T_2$ . Оскільки маса повітря незмінна, то для неї можна записати об'єднаний газовий закон у вигляді:

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2}.$$

Тут  $p_1, T_1, V_2, T_2$  відомі величини, а  $V_1$  і  $p_2$  необхідно встановити. Якщо при одному качанні компресор захвачує об'єм  $V_0$ , то  $V_1 = nV_0$ , де  $n$  — кількість качань. Для визначення тиску  $p_2$  врахуємо, що з са-

мого початку надлишковий тиск  $p_n$  в балоні становив  $p_n = \frac{F}{S}$ . Після

того, як балон накачали повітрям, тиск зріс на  $\Delta p$  і став рівним  $p_n + \Delta p$ . При цьому площа співдотуку зменшилась на  $\Delta S$  і стала рівною  $S - \Delta S$ .

Оскільки навантаження не змінилось, то  $p_n + \Delta p = \frac{F}{S - \Delta S}$ . Врахову-

ючи, що  $p_n = \frac{F}{S}$ , а  $\Delta p = p_2$ , знаходимо тиск  $p_2$

$$p_2 = \frac{F}{S - \Delta S} - \frac{F}{S} = \frac{F \Delta S}{S(S - \Delta S)}$$

У кінцевому вигляді об'єднаний газовий закон після підстановки  $V_1$  і  $p_2$  має вигляд:

$$\frac{p_1 n V_0}{T_1} = \frac{F \Delta S V_2}{S(S - \Delta S) T_2}$$

звідки

$$n = \frac{F \Delta S V_2 T_1}{p_1 S(S - \Delta S) V_0 T_2} = 148 \text{ качань.}$$

4. Колбу об'ємом  $V = 1,5 \cdot 10^3 \text{ см}^3$  відкачують вакуумним ротаційним насосом від атмосферного тиску  $p_0 = 760 \text{ мм рт. ст.}$  до  $p_k = 0,1 \text{ мм рт. ст.}$  Швидкість відкачування насоса для вказаного інтервалу тиску стала величина і дорівнює  $k = 180 \text{ см}^3/\text{с.}$  Вважаючи процес ізотермічним, знайти час відкачування.

Дано:  $V = 1,5 \cdot 10^3 \text{ см}^3$ ;  $p_0 = 760 \text{ мм рт. ст.}$ ;  $p_k = 0,1 \text{ мм рт. ст.}$   $k = 180 \text{ см}^3/\text{с.}$

$t = ?$

**Розв'язання.** Швидкість відкачування вакуумного насоса показує, який об'єм за одиницю часу переходить з колби в камеру насоса, а потім в атмосферу, і тому її можна записати так  $k = \frac{dV}{dt} = \text{const.}$

Оскільки процес відкачування проходить ізотермічно, то

$$pdV + Vdp = 0.$$

Розділимо обидві частини рівняння на  $dt$  і, враховуючи, що  $\frac{dV}{dt} = k$ ,

маємо

$$pk + V \frac{dp}{dt} = 0.$$

Отримане диференціальне рівняння виражає залежність тиску в колбі від часу. Розділимо змінні величини в цьому рівнянні і враховуючи, що при зміні часу від нуля до  $t$ , тиск змінюється від  $p_0$  до  $p_k$  після інтегрування отримаємо

$$\frac{k}{V} dt = -\frac{dp}{p}; \quad \frac{k}{V} \int_0^t dt = -\int_{p_0}^{p_k} \frac{dp}{p}; \quad \frac{k}{V} t = \ln \frac{p_0}{p_k},$$

звідки

$$t = \frac{V}{k} \ln \frac{p_0}{p_k} = 74 \text{ с.}$$

5. Знайти найменший можливий тиск ідеального газу в процесі, що описується законом  $T = T_0 + \alpha V^2$ , де  $T_0$  і  $\alpha$  — додатні сталі величини, а  $V$  — об'єм одного молю газу. Намалуйте графік цього процесу в координатах  $p, V$ .

Дано:  $T = T_0 + \alpha V^2$ ;  $\nu = 1 \text{ моль}$

$p_{\min} = ?$

**Розв'язання.** Запишемо рівняння Клапейрона-Менделєєва для одного молю

$$pV = RT.$$

Знайдемо  $P$  і замість  $T$  підставимо  $T_0 + \alpha V^2$ , тоді залежність тиску від об'єму виражається так:

$$p = \frac{R(T_0 + \alpha V^2)}{V}.$$

Тиск досягає мінімального значення, коли  $\frac{dp}{dV} = 0$ ,

$$\frac{dp}{dV} = -\frac{RT_0}{V^2} + R\alpha = 0.$$

Звідси  $V_{\min} = \sqrt{\frac{T_0}{\alpha}}$ . Підставляючи це значення в формулу для тис-

ку, знаходимо  $p_{\min} = 2R\sqrt{\alpha T_0}$ . Якісний вигляд графічної залежності тиску від об'єму зображено на рис. 1.

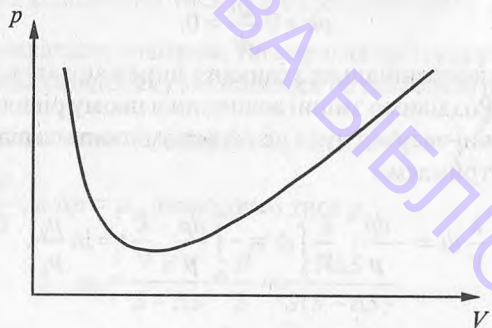


Рис. 1.

#### Задачі для аудиторних та домашніх занять

- Скільки молекул знаходиться в одному грамі води?
- Скільки молекул знаходиться в одному кубічному сантиметрі повітря при нормальних умовах?
- Сучасні вакуумні насоси дозволяють одержати тиск до  $p = 4 \cdot 10^{-15}$  атм (при кімнатній температурі). Вважаючи, що газом є азот, знайти число молекул в  $1 \text{ см}^3$  і пересічну віддаля між ними при цьому тискові.
- В посудині об'ємом  $230 \text{ см}^3$  знаходиться газ під тиском  $0,01 \text{ мм рт. ст.}$  і температурі  $7^\circ \text{C}$ . Скільки молекул знаходиться в посудині?
- Який тиск створює суміш газів у колбі об'ємом  $2,5 \text{ л}$ , якщо в ній знаходиться  $10^{15}$  молекул кисню,  $4 \cdot 10^{15}$  молекул азоту і  $3,3 \cdot 10^7$  аргону? Температура суміші  $150^\circ \text{C}$ .
- Густина газу, що складається із суміші гелію і аргону при тиску  $152 \text{ кПа}$  і температурі  $300 \text{ К}$ , дорівнює  $2 \text{ кг/м}^3$ . Скільки атомів гелію знаходиться в  $1 \text{ см}^3$  суміші?
- Густина суміші азоту і водню при температурі  $47^\circ \text{C}$  і тиску  $2 \text{ атм.}$  дорівнює  $0,3 \text{ г/л}$ . Яка концентрація молекул водню в суміші?
- У скляній посудині сферичної форми з внутрішнім діаметром  $3 \text{ см}$  знаходиться азот, тиск якого при температурі  $190^\circ \text{C}$  дорівнює  $0,01 \text{ мм рт. ст.}$  На стінках посудини є мономолекулярний шар адсорбованого азоту. Площа, яку займає одна молекула азоту на стінці, дорівнює  $1 \cdot 10^{-15} \text{ см}^2$ . Яким буде тиск азоту в посудині при температурі  $427^\circ \text{C}$ , при якій азот повністю десорбується із стінок.
- Балон об'ємом  $V = 30 \text{ л}$  містить суміш водню і гелію при температурі  $T = 300 \text{ К}$  і тиску  $p = 828 \text{ кПа}$ . Маса суміші дорівнює  $24 \text{ г}$ . Визначити масу  $M_1$

водню і масу  $M_2$  гелію.

10. Чому дорівнює маса  $M$  кисню і його тиск  $p$  в балоні, якщо кінетична енергія поступального руху молекул дорівнює  $2 \cdot 10^3 \text{ Дж}$ , а середня квадратична швидкість молекул дорівнює  $10^3 \text{ м/с}$ ? Об'єм балона  $V = 0,01 \text{ м}^3$ .

11. У посудині об'ємом  $V = 5,0 \text{ л}$  знаходиться азот масою  $M = 1,4 \text{ г}$  при температурі  $T = 1800 \text{ К}$ . Знайти тиск газу, маючи на увазі, що при цій температурі  $\alpha = 30\%$  молекул дисоційовано на атоми.

12. Маємо суміш різних ідеальних газів з масами  $M_1, M_2, M_3, \dots$  і відносними молекулярними масами  $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots$  — відповідно. Довести, що рівняння

стану такої суміші можна записати у вигляді  $pV = \frac{M}{\mu} RT$ , де  $M = M_1 + M_2 + M_3 + \dots$  — повна маса суміші, а постійна  $\mu$  відіграє роль пересічної відносної молекулярної маси суміші. Знайти  $\mu$ .

13. Визначити молекулярну масу газу, властивості якого відповідають властивостям суміші  $160 \text{ г}$  кисню та  $120 \text{ г}$  азоту.

14. У посудині знаходиться суміш  $M_1 = 7,0 \text{ г}$  азоту і  $M_2 = 11 \text{ г}$  вуглекислого газу при температурі  $T = 290 \text{ К}$  і тискові  $p_0 = 1,0 \text{ атм.}$  Знайти густину цієї суміші, вважаючи гази ідеальними.

15. Визначити густину суміші  $4 \text{ г}$  водню і  $32 \text{ г}$  кисню при температурі  $7^\circ \text{C}$  і при тиску  $700 \text{ мм рт. ст.}$

16. Газ має такий склад:  $\text{CO}_2$  —  $21,4\%$ ,  $\text{H}_2\text{O}$  —  $6,8\%$ ,  $\text{N}_2$  —  $71,8\%$ . Знайти питомий об'єм такого газу при тискові  $10^5 \text{ Н/м}^2$  і температурі  $500 \text{ К}$ .

17. У балоні міститься  $M_1 = 0,2 \text{ г}$  водню і  $M_2 = 3,2 \text{ г}$  кисню при температурі  $t_1 = 27^\circ \text{C}$ . Водень змішується з киснем. Після закінчення реакції тиск всередині балона збільшився в три рази. Яка встановилась температура всередині балона?

18. Три балона ємністю  $3, 7$  і  $5 \text{ л}$  заповнені відповідно киснем ( $2 \text{ атм.}$ ), азотом ( $3 \text{ атм.}$ ) і вуглекислим газом ( $0,6 \text{ атм.}$ ) при однаковій температурі. Балони з'єднують між собою, при цьому утворюється суміш тієї ж температури. Визначити тиск суміші.

19. Скільки качань треба зробити, щоб за допомогою насоса, який при кожному качанні захоплює  $40 \text{ см}^3$  повітря, наповнити пусту камеру шини велосипеда настільки, щоб площа її стикання з дорогою дорівнювала  $60 \text{ см}^2$ ? Навантаження на колесо дорівнює  $350 \text{ Н}$ , об'єм камери дорівнює  $2000 \text{ см}^3$ . Тиск атмосфери прийняти рівним  $10^5 \text{ Н/м}^2$ . Жорсткості камери знехтувати.

20. Компресор при кожному качанні захоплює  $4 \text{ л}$  повітря при атмосферному тискові й температурі  $-3^\circ \text{C}$  та нагнічує його в резервуар ємністю  $1,5 \text{ м}^3$ , причому температура повітря в резервуарі тримається біля  $45^\circ \text{C}$ . Скільки качань повинен зробити компресор, щоб тиск у резервуарі збільшився на  $2 \cdot 10^5 \text{ Н/м}^2$ ?

21. Балон ємністю  $20 \text{ л}$  наповнений стисненим повітрям. При температурі  $20^\circ \text{C}$  манометр показує тиск  $1,2 \cdot 10^7 \text{ Н/м}^2$ . Який об'єм води можна витиснути з цистерни підводного човна повітрям цього балона, якщо витис-

нення проводиться на глибині 30 м і температурі 5 °С? Прийняти, що тиск стовпа води висотою 10 м дорівнює  $10^5 \text{ Н/м}^2$ . Тиск атмосфери прийняти рівним  $10^5 \text{ Н/м}^2$ .

22. У вертикальному закритому з двох торців циліндрі знаходиться легкорухомий поршень, по обидві сторони якого міститься по одному моллю повітря. У рівноважному стані при температурі  $T_0 = 300 \text{ К}$  об'єм верхньої частини в  $\eta = 4$  рази більше об'єму нижньої частини. При якій температурі відношення цих об'ємів буде дорівнювати  $\eta' = 3,0$ ?

23. У запаяній циліндричній трубці, розміщеній горизонтально, міститься повітря при нормальних умовах. Трубку розділено легкорухомим поршнем на дві частини, об'єми яких відносяться як 1:2. До якої температури  $T_1$  слід нагріти меншу частину і до якої  $T_2$  охолодити більшу, щоб поршень поділив трубку на дві рівні частини. Нагрівання і охолодження відбувається при умові  $\frac{V}{T} = \text{const}$ .

24. Посудину з газом розділено рухомою перегородкою на дві частини, відношення об'ємів яких  $\frac{V_1}{V_2} = \frac{2}{3}$ . Температура газу в меншому об'ємі  $t_1 = 177 \text{ }^\circ\text{С}$ , у більшому об'ємі —  $t_2 = 267 \text{ }^\circ\text{С}$ . Тиск в обох частинах посудини однаковий і дорівнює  $p$ . Яким буде відношення об'ємів, якщо температури вирівняються?

25. Дві однакові посудини з'єднані трубою з краном. У першій посудині міститься деяка кількість ідеального газу при  $t_1 = 27 \text{ }^\circ\text{С}$ , а в другій — інша кількість того ж газу при  $t_2 = 227 \text{ }^\circ\text{С}$ . Тиск в посудинах однаковий. У скільки разів зміниться тиск газу, якщо відкрити кран і довести температуру газу в посудинах до  $t_3 = 127 \text{ }^\circ\text{С}$ .

26. Три посудини об'ємами  $V_0, V_1, V_2$ , що містять ідеальний газ, з'єднані тонкими трубками. Температура в посудинах однакова і рівна  $T_0$ , тиск дорівнює  $p_0$ . Посудину об'ємом  $V_0$  залишають при температурі  $T_0$ , а посудини об'ємами  $V_1$  і  $V_2$  нагрівають до температур  $T_1$  і  $T_2$ . Знайти тиск, що встановився в посудинах.

27. Циліндрична посудина з газом поділена поршнем на дві камери. Стан газу в обох камерах характеризується відповідно параметрами  $p_1, V_1, T_1$  і  $p_2, V_2, T_2$ . При якому тиску поршень буде знаходитись в рівновазі, якщо його звільнити, а газ в першій камері нагріти на  $\Delta T$ ?

28. У посудині об'ємом  $V = 30 \text{ л}$  знаходиться ідеальний газ при температурі  $0 \text{ }^\circ\text{С}$ . Після того, як частину газу випустили, тиск у посудині знизився на  $\Delta p = 0,75 \text{ атм}$ . (без зміни температури). Знайти масу газу, який випущено. Густина газу при нормальних умовах  $\rho = 1,3 \text{ г/л}$ .

29. Яку кількість кисню випустили з балону ємністю  $V = 10 \text{ л}$ , якщо тиск в ньому змінився від  $140 \text{ атм}$ . до  $7 \text{ атм}$ ., а температура зменшилась від  $t_1 = 27 \text{ }^\circ\text{С}$  до  $t_2 = 7 \text{ }^\circ\text{С}$ .

30. З балону ємністю  $V$ , тиск в якому  $p$ , відкачують повітря. Скільки ка-

чань має зробити поршневий насос об'ємом  $V_0$ , щоб тиск в балоні зменшився в  $k$  разів? Температура в балоні не змінюється.

31. Знайти зв'язок тиску в посудині, з якої відкачують повітря з кількістю циклів відкачування. За один цикл з об'єму  $V$  захоплюється  $\Delta V$ . Процес вважати ізотермічним, а газ ідеальним.

32. Знайти тиск у посудині, з якої відкачують повітря як функцію часу відкачки, якщо об'єм посудини  $V$ , початковий тиск  $p_0$ , швидкість відкачки  $C$ . Процес вважати ізотермічним.

33. Камеру об'ємом  $V = 87 \text{ л}$  відкачують насосом, швидкість відкачування якого  $c = 10 \text{ л/с}$ . Через який час тиск у камері зменшиться в  $\eta = 1000$  разів?

34. Знайти максимально можливу температуру ідеального газу в кожному із нижчеперелічених процесів: а)  $p = p_0 - \alpha V^2$ ; б)  $p = p_0 e^{\beta V}$ , де  $p_0, \alpha$  і  $\beta$  — додатні сталі величини.

35. У вертикальному закритому з обох торців циліндрі з перерізом  $S$  знаходиться газ, молярна маса якого дорівнює  $\mu$ . Поршень масою  $M_0$  ділить об'єм газу на дві частини з об'ємами  $V_1$  і  $V_2$ . Температура системи постійна і дорівнює  $t$ . Знаючи, що період коливань поршня дорівнює  $t$ , знайти масу газу в циліндрі. Вважати, що під поршнем і над поршнем маса газу однакова. Тертям поршня об стінки циліндра знехтувати.

## § 2. Елементи статистичної фізики

Кількість молекул, модулі швидкості яких знаходяться в інтервалі  $(v, v + dv)$ , дорівнює

$$dN = N \cdot f(v)dv,$$

де  $N$  — загальна кількість молекул,

$f(v)$  — функція розподілу молекул за швидкостями, або густина імовірностей того, що молекула маси  $m$  має модуль швидкості  $v$ .

Функція розподілу молекул за абсолютними значеннями швидкості (розподіл Максвелла) має вигляд:

$$f(v) = 4\pi \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} v^2 \cdot e^{-\frac{mv^2}{2kT}}.$$

Умовою нормування функції  $f(v)$  є:  $\int_0^{\infty} f(v)dv = 1$ .

Функція розподілу молекул за компонентами швидкостей, наприклад, для  $v_x$ , записується так:

$$f(v_x) = \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{1/2} e^{-\frac{mv_x^2}{2kT}}.$$



Умова нормування цієї функції:  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(v_x) dv_x = 1$ .

У приведеному вигляді розподіл Максвелла має вигляд:

$$dN = N \frac{4}{\sqrt{\pi}} u^2 e^{-u^2} du,$$

де  $u = \frac{v}{v_{im}}$ , а  $v_{im}$  — найбільш імовірна швидкість.

Середнє значення фізичної величини  $a$  в загальному випадку

$$\bar{a} = \frac{\int af(a)da}{\int f(a)da},$$

а у випадку, коли функція розподілу нормована на одиницю

$$\bar{a} = \int af(a)da,$$

тут інтегрування ведеться по всій сукупності зміни величини  $a$ .

Характерні швидкості розподілу розраховуються за формулами:

$$v_{im} = \sqrt{\frac{2kT}{m}} = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}} \quad \text{— найбільш імовірна;}$$

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi \mu}} \quad \text{— середня арифметична;}$$

$$v_{кв} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}} \quad \text{— середня квадратична.}$$

Розподіл молекул у силовому потенціальному полі (розподіл Больцмана) виражається формулою:

$$n = n_0 e^{\frac{-(U-U_0)}{kT}},$$

де  $n$  і  $n_0$  — концентрації молекул в точках з відповідними потенціальними енергіями  $U$  і  $U_0$ .

Для газу, що знаходиться в полі сили земного тяжіння  $(U - U_0) = mgh$ , розподіл Больцмана має вигляд:

$$n = n_0 e^{-\frac{mgh}{kT}}.$$

Барометрична формула, що виражає розподіл тиску в однорідному полі сили тяжіння

$$p = p_0 e^{-\frac{mgh}{kT}}.$$

### Методичні вказівки

Розв'язування задач на розподіли Максвелла та Больцмана часто потребують вміння виконувати такі математичні дії, як диференціювання та інтегрування.

Якщо в задачах розглядаються інтервали зміни фізичних величин, які значно менші, ніж самі величини, наприклад  $dv \ll v$ , то для визначення кількості молекул або імовірностей необов'язково проводити інтегрування. У цих випадках можна скористатись формулою  $\Delta N = N \cdot f(v) \Delta v$ . Якщо ж в задачах розглядається широкий інтервал змін фізичних величин, або границі дорівнюють нескінченності, то рівняння слід інтегрувати в цих границях.

У деяких задачах необхідно користуватись характерними швидкостями молекул. При цьому слід пам'ятати, що середньою квадратичною швидкістю користуються в тих випадках, коли необхідно знайти фізичну величину, яка пропорційна квадрату швидкості, наприклад кінетична енергія поступального руху молекул газу, тиск газу. Середня арифметична швидкість дозволяє розраховувати середні значення таких фізичних величин, що характеризують властивості газу, в формулах яких швидкість входить в першому степені, наприклад: середнє число зіткнень молекул в одиницю часу, середній імпульс молекул, середній час вільного пробігу молекул. Найбільш імовірною швидкістю користуються в задачах, де зручно розглядати розподіл Максвелла в приведеному вигляді.

У задачах на розподіл Больцмана, перш за все необхідно встановити значення потенціальної енергії. Вияснити, чи це поле однорідне, чи ні, де знаходиться початок відрахунку енергії. Якщо відомі лише сили, то можна скористатись формулою зв'язку між силою та енергією  $F = -\text{grad } U$ .

### Приклади розв'язування задач

1. При якій температурі кількість молекул азота, швидкості яких лежать в інтервалі 299-301 м/с, дорівнює кількості молекул в інтервалі швидкості 599-601 м/с?

Дано:  $\Delta v_1 = (299-301) \text{ м/с}$ ;  $\Delta v_2 = (599-601) \text{ м/с}$ ;  $\mu_n = 28 \cdot 10^{-3} \frac{\text{кг}}{\text{моль}}$ ;  $\Delta N_1 = \Delta N_2$   
 $T = ?$

**Розв'язання.** Кількість молекул азоту, швидкості яких лежать в інтервалах  $\Delta v_1$  і  $\Delta v_2$ , дорівнюють  $\Delta N_1 = Nf(v_1)\Delta v_1$  і  $\Delta N_2 = Nf(v_2)\Delta v_2$ . Оскільки згідно з умовою задачі  $\Delta v_1 = \Delta v_2 = 2 \text{ м/с}$  і  $\Delta N_1 = \Delta N_2$ , маємо  $f(v_1) = f(v_2)$ . Прирівнюючи функції розподілу в розгорнутому вигляді для швидкостей  $v_1$  і  $v_2$ , запишемо:

$$4\pi \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} v_1^2 e^{-\frac{mv_1^2}{2kT}} = 4\pi \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} v_2^2 e^{-\frac{mv_2^2}{2kT}}$$

Звідси знаходимо  $\frac{v_2^2}{v_1^2} = \frac{e^{-\frac{mv_2^2}{2kT}}}{e^{-\frac{mv_1^2}{2kT}}}$ , або  $\frac{v_2^2}{v_1^2} = e^{\frac{m}{2kT}(v_1^2 - v_2^2)}$ .

Прологарифмуємо останнє рівняння і знайдемо  $T$

$$T = \frac{m(v_2^2 - v_1^2)}{2k \ln \frac{v_2^2}{v_1^2}}$$

Для зручності розрахунку чисельник і знаменник правої частини останнього рівняння домножимо на число Авогадро. Враховуючи, що  $mN_A = \mu$ , а  $kN_A = R$ , отримаємо

$$T = \frac{\mu(v_2^2 - v_1^2)}{2 \cdot R \ln \frac{v_2^2}{v_1^2}} = \frac{28 \cdot 10^{-3} (36 \cdot 10^4 - 9 \cdot 10^4)}{2 \cdot 8,31 \ln \frac{36}{9}} = 328 \text{ К.}$$

2. Користуючись розподілом Максвелла, знайти середню арифметичну швидкість молекул газу.

**Розв'язання.** Із означення середнього значення фізичної величини у випадку, коли функція розподілу нормована на одиницю, для середньої арифметичної швидкості маємо:

$$\bar{v} = \int_0^{\infty} v f(v) dv = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{m}{2kT} \right)^{3/2} \int_0^{\infty} v^3 e^{-\frac{mv^2}{2kT}} dv.$$

Зробимо заміну змінної величини  $\frac{mv^2}{2kT} = x$ ;  $dv = \frac{kT}{mv} dx$ , отримаємо:

мо:

$$\bar{v} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{m}{2kT} \right)^{3/2} \frac{kT}{m} \frac{2kT}{m} \int_0^{\infty} x e^{-x} dx.$$

Оскільки інтеграл  $\int_0^{\infty} x e^{-x} dx = 1$ , то середня арифметична швидкість

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi \mu}}$$

3. Скільки відсотків складають молекули, швидкості яких відрізняються не більше, ніж на 1% від значення:

- найбільш імовірної швидкості;
- середньої квадратичної швидкості.

Дано:  $\Delta v_1 = 0,02 v_{im}$ ;  $\Delta v_2 = 0,02 v_{ср}$ ;

$$\frac{\Delta N_1}{N} = ?, \frac{\Delta N_2}{N} = ?$$

**Розв'язання.** Оскільки відхилення  $\pm 1\%$  є незначним порівняно з найбільш імовірною і середньою квадратичною швидкостями, то для знаходження відносного числа молекул, що попадають в інтервал  $\Delta v_1$  і  $\Delta v_2$ , можна з достатньою точністю скористуватись формулою

$\frac{\Delta N}{N} = f(v)\Delta v$ . Після підстановки значення функції розподілу  $f(v)$  от-

римаємо  $\frac{\Delta N}{N} = 4\pi \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} \Delta v$ .

Скориставшись тим, що  $v_{im} = \left( \frac{2kT}{m} \right)^{1/2}$ , останню формулу перепишемо у вигляді:

$$\frac{\Delta N}{N} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \frac{v^2}{v_{im}^3} e^{-\frac{v^2}{v_{im}^2}} \Delta v.$$

За умовою задачі у випадку а)  $v = v_{im}$ , а  $\Delta v_1 = v_{im} \cdot 0,02$ . Отже,

$$\frac{\Delta N_1}{N} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} e^{-1} \cdot 0,02 = 0,0166, \text{ тобто } 1,66\%.$$

У випадку б) скористаємось зв'язком між найбільш імовірною швидкістю і середньою квадратичною

$$v_{im} = \left( \frac{2kT}{m} \right)^{1/2} = \left( \frac{2}{3} \right)^{1/2} v_{кв}.$$

Якщо  $v = v_{кв}$  і  $\Delta v_2 = 0,02 v_{кв}$  то

$$\frac{\Delta N_2}{N} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{3}{2} \right)^{3/2} e^{-3/2} \cdot 0,02 = 0,0185, \text{ тобто } 1,85\%.$$

4. Скільки відсотків складають молекули, швидкості яких перевищують найбільш імовірну швидкість?

**Розв'язання.** У цій задачі мова йде про молекули, швидкості яких містяться в інтервалі від найбільш імовірної до нескінченності, і тому необхідно користуватись диференціальною формулою розподілу,

$$\text{тобто } \frac{dN}{N} = f(v)dv.$$

Інтегруючи цей вираз по  $v$  від  $v_{im}$  до  $\infty$ , маємо

$$\frac{\Delta N}{N} = 4\pi \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \int_{v_{im}}^{\infty} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}} dv.$$

Оскільки інтегрування проводиться в границях від  $v_{im}$  до  $\infty$ , зручніше в даному випадку скористатись приведеною формою розподілу Максвелла

$$\frac{\Delta N}{N} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_1^{\infty} u^2 e^{-u^2} du, \text{ де } u = \frac{v}{v_{im}}.$$

Щоб уникнути математичних труднощів, пов'язаних із знаходженням невластивого інтегралу, скористаємось тим, що швидкості всіх  $N$  молекул лежать в інтервалі від 0 до  $\infty$  і ймовірність попадання в цей інтервал дорівнює одиниці. Якщо позначити через  $\frac{\Delta N'}{N}$  відносну кількість молекул, що попадають в інтервал від 0 до  $v_{im}$ , то очевидно є рівність

$$\frac{\Delta N'}{N} + \frac{\Delta N}{N} = 1, \text{ звідки } \frac{\Delta N}{N} = 1 - \frac{\Delta N'}{N}.$$

Таким чином, замість того, щоб шукати  $\frac{\Delta N}{N}$ , значно легше знайти

$$\frac{\Delta N'}{N} \text{ за формулою } \frac{\Delta N'}{N} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_0^1 u^2 e^{-u^2} du, \text{ а потім уже і } \frac{\Delta N}{N}.$$

Інтеграл в останній формулі належить до інтегралу типу похибок  $\text{erf}x$  і його знаходять методом наближеного інтегрування шляхом розкладу підінтегральної функції в ряд Макларена

$$e^{-u^2} = 1 - \frac{u^2}{1!} + \frac{u^4}{2!} - \frac{u^6}{3!} + \frac{u^8}{4!} - \dots$$

$$u^2 \cdot e^{-u^2} = u^2 - \frac{u^4}{1!} + \frac{u^6}{2!} - \frac{u^8}{3!} + \frac{u^{10}}{4!} - \dots$$

$$\text{Таким чином } \frac{\Delta N'}{N} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_0^1 \left( u^2 - \frac{u^4}{1!} + \frac{u^6}{2!} - \frac{u^8}{3!} + \frac{u^{10}}{4!} - \dots \right) du.$$

Після інтегрування маємо:

$$\frac{\Delta N'}{N} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{14} - \frac{1}{54} + \frac{1}{264} - \dots \right) = 0,43.$$

Відносна кількість молекул, що попадають в інтервал по  $u$  від 1 до  $\infty$ , або по  $v$  від  $v_{im}$  до  $\infty$ , дорівнює

$$1 - 0,43 = 0,57, \text{ тобто } 57\%.$$

5. За допомогою розподілу Максвелла знайти тиск газу на стінку посудини, якщо температура газу  $T$ , а концентрація молекул  $n$ .

**Розв'язання.** Спрямуємо вісь  $x$  перпендикулярно до стінки. Тоді тиск на стінку при зіткненні будуть спричиняти ті молекули, нормальна складова швидкості яких  $v_x$  буде направлена вздовж цієї осі. За

означенням тиск  $p = \frac{F_x}{S}$ , де  $F_x$  — сумарна нормальна сила, що діє на стінку площею  $S$  з боку усіх молекул. Для однієї молекули, що має

проекцію швидкості  $v_x$  сила взаємодії  $f_x = \frac{\Delta(mv_x)}{\Delta t}$ , де  $\Delta(mv_x)$  — зміна кількості руху молекули, яка дорівнює  $mv_x - (-mv_x) = 2mv_x$ . Якщо вважати  $\Delta t = 1 \text{ сек.}$ , то сила, що діє з боку всіх молекул, що мають проекцію швидкості  $v_x$ , за одиницю часу на площу  $S$  дорівнює  $dF_x = 2mv_x S dz$ , де  $dz$  — кількість ударів молекул за одиницю часу в одиничну площадку. Оскільки  $dz = v_x dn_x$ , то  $dF_x = 2mv_x^2 S dn_x$ . Тут  $dn_x$  — концентрація молекул в об'ємі газу з проекцією швидкості  $v_x$  на вісь  $x$ .

Силу взаємодії з боку всіх молекул знайдемо, проінтегрувавши вираз  $dF_x$  по всім значенням  $v_x$  від 0 до  $\infty$  (молекули з від'ємними значеннями  $v_x$  рухаються від стінки і тиск не спричиняють). Тоді

$$F_x = \int_0^{\infty} 2mv_x^2 S dn_x.$$

Підставимо із розподілу Максвелла по компонентам швидкостей значення для  $dn_x = n \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{1/2} e^{-\frac{mv_x^2}{2kT}} dv_x$ , отримаємо

$$F_x = 2mSn \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{1/2} \int_0^{\infty} v_x^2 e^{-\frac{mv_x^2}{2kT}} dv_x.$$

Для тиску маємо:

$$p = 2mn \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{1/2} \int_0^{\infty} v_x^2 e^{-\frac{mv_x^2}{2kT}} dv_x.$$

Скористаємось тим, що  $v_{im} = \left( \frac{2kT}{m} \right)^{1/2}$ , а також введемо позначення  $z = \frac{v_x}{v_{im}}$ ,  $dv_x = v_{im} dz$ . Після підстановки отримаємо:

$$p = \left( \frac{2mn}{\sqrt{\pi}} \right) v_{im}^2 \int_0^{\infty} z^2 e^{-z^2} dz.$$

Оскільки  $\int_0^{\infty} z^2 e^{-z^2} dz = \frac{\sqrt{\pi}}{4}$ , для тиску отримаємо

$$p = \frac{2mn}{\sqrt{\pi}} \frac{2kT}{m} \frac{\sqrt{\pi}}{4} = nkT.$$

6. Ідеальний газ з молярною масою  $\mu$  знаходиться у високій вертикальній посудині на поверхні Землі. Площа перерізу циліндра  $S$ , висота  $h_0$ . Тиск на нижню основу  $p_0$ . Вважаючи, що температура газу  $T$  і прискорення вільного падіння  $g$  не залежать від висоти, знайти значення маси газу в посудині.

Дано:  $\mu, S, h_0, p_0, T, g$   
 $M - ?$

**Розв'язання.** Розіберемо циліндр висотою  $h_0$  на маленькі циліндрики висотою  $dh$  об'ємом  $dV$  і масою  $dM$ . У границях цього циліндра тиск є сталою величиною, і тоді масу  $dM$  можна знайти з рівняння Клапейрона-Менделєєва  $dM = \frac{pdV}{RT} \cdot \mu$ . З урахуванням  $dV = dhS$  для

$$dM \text{ маємо } dM = \frac{p\mu}{RT} S \cdot dh.$$

В останньому виразі  $p$  змінюється з висотою. Якщо скористуватись барометричною формулою  $p = p_0 e^{-\frac{mgh}{kT}}$ , то для елементарної маси

$$dM \text{ маємо } dM = \frac{p_0\mu}{RT} S e^{-\frac{mgh}{kT}} dh.$$

Масу газу всього циліндра знайдемо, якщо проінтегруємо елементарні маси по висоті від 0 до  $h_0$ , а також врахуємо, що  $mN_A = \mu$ , а  $kN_A = R$ .

$$M = \int_0^{h_0} \frac{p_0\mu}{RT} S e^{-\frac{\mu gh}{RT}} dh = \frac{p_0\mu}{RT} S \int_0^{h_0} e^{-\frac{\mu gh}{RT}} dh = \frac{p_0 S}{g} e^{-\frac{\mu gh_0}{RT}}.$$

#### Задачі для аудиторних та домашніх занять

36. На рис. 2 приведено графік закону розподілу Максвелла молекул газу за швидкостями. По осі абсцис відкладена швидкість молекул  $v$ ; по осі ординат відкладена величина  $\frac{1}{N} \frac{\Delta N}{\Delta v}$ , де  $\Delta N$  — число молекул, що мають швидкості в границях від  $v$  до  $v + \Delta v$ ,  $N$  — загальне число молекул у вибраному

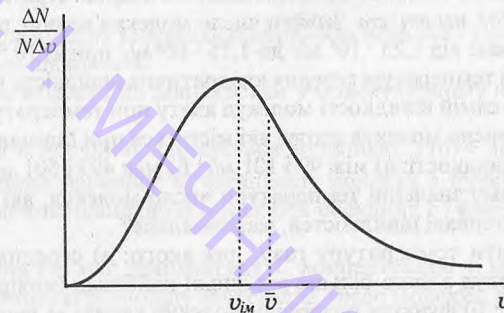


Рис. 2.

об'ємі. Відповіді: а) звідки видно, що середня арифметична швидкість більше від найбільш імовірної? б) чому дорівнює загальна площа, обмежена віссю абсцис і графіком? в) як треба змінити абсциси і ординати графіка, які відповідають температурі  $T_1$ , щоб одержати графік розподілу швидкостей при температурі  $T_2$ ? Намалювати наближений графік, який відповідає в 4 рази вищій температурі.

37. Чому дорівнює імовірність того, що будь-яка молекула має швидкість точно рівну найбільш імовірній швидкості?

38. Яка імовірність того, що молекула ідеального газу має швидкість, відмінну від  $\frac{v_{im}}{2}$  не більше ніж на 1%?

39. Знайти імовірність того, що дана молекула ідеального газу має швидкість яка відрізняється від  $2v_{im}$  не більше як на 1%.

40. Яка частина молекул азоту при  $t = 105^\circ\text{C}$  володіє швидкостями від 300 м/с до 325 м/с?

41. При якій температурі середня квадратична швидкість молекул азоту більша від найбільш імовірної швидкості на 50 м/с?

42. Визначити найбільш імовірну, середню арифметичну і середню квадратичну швидкості молекул газу, густина якого при нормальному тиску  $\rho = 1 \text{ г/л}$ .

43. Знайти середню арифметичну, середню квадратичну і найбільш імовірну швидкості молекул газу, густина якого при тиску 300 мм рт. ст. дорівнює 0,3 г/л?

44. Яка частина загального числа  $N$  молекул має швидкості: а) більші від найбільш імовірної, б) більші від середньої арифметичної.

45. У балоні знаходиться 2,5 г кисню. Знайти число молекул кисню, швидкості яких більші від значення середньої квадратичної швидкості?

46. Довести, що число молекул деякої маси газу, швидкості яких менші від середньої квадратичної швидкості і більші від середньої арифметичної, однакові для будь-якої температури.

47. У балоні, об'єм якого 12 л, знаходиться водень. При температурі 283 К тиск водню 745 мм рт. ст. Знайти число молекул водню, швидкості яких лежать в інтервалі від  $1,23 \cdot 10^3 \text{ м/с}$  до  $1,25 \cdot 10^3 \text{ м/с}$  при а)  $10^\circ\text{C}$ ; б)  $100^\circ\text{C}$ .

48. При якій температурі середня квадратична швидкість молекул кисню дорівнює такій самій швидкості молекул азоту при температурі  $100^\circ\text{C}$ ?

49. Знайти число молекул азоту, які містяться при нормальних умовах в  $1 \text{ см}^3$  і мають швидкості: а) між 99 і 101 м/с; б) між 499 і 501 м/с.

50. При якому значенні температури число молекул, які знаходяться в фіксованому інтервалі швидкостей, максимальне?

51. Визначити температуру газу, для якого: а) середня квадратична швидкість молекул водню більша від їхньої найбільш імовірної швидкості на  $\Delta v = 400 \text{ м/с}$ ; б) функція розподілу молекул кисню за швидкостями має максимум при швидкості  $v = 420 \text{ м/с}$ .

52. Суміш водню і гелію має температуру  $T = 300 \text{ К}$ . При якому значенні швидкості  $v$  молекул значення функції розподілу Максвелла будуть однаковими для обох газів?

53. При якому значенні швидкості  $v$  перетинаються криві розподілу Максвелла для температур  $T_1$  і  $T_2 = 2T_1$ ?

54. Записати вираз для середнього числа молекул газу, кінетичні енергії яких знаходяться між  $\epsilon$  і  $\epsilon + d\epsilon$ .

55. Знайти найбільш імовірне значення кінетичної енергії поступального руху молекул газу, тобто таке значення  $\epsilon_m$ , при якому в фіксованому інтервалі енергії  $(\epsilon, \epsilon + d\epsilon)$  в газі знаходиться максимальне число молекул.

56. Ідеальний газ знаходиться в посудині об'ємом  $V$  при нормальних умовах. Визначити число молекул газу, які мають кінетичні енергії в інтервалі від  $\epsilon$  до  $(\epsilon, \epsilon + d\epsilon)$ .

57. Знайти відносне число молекул ідеального газу, кінетична енергія яких відрізняється від найбільш імовірного значення не більше ніж на 0,1 %.

58. Визначити за допомогою розподілу Максвелла число  $\nu$  молекул газу, які падають за одиницю часу на одиничну площадку, якщо концентрація молекул  $n$ , температура  $T$  і маса кожної молекули  $m$ .

59. Вивести формулу для найбільш імовірного значення імпульсу молекул ідеального газу.

60. Знаючи функцію розподілу молекул за імпульсами, знайти середнє значення квадрата імпульсу.

61. За допомогою розподілу Максвелла знайти середнє значення проекції швидкості і середнє значення модуля цієї проекції на вісь  $x$ , якщо відомі маса кожної молекули  $m$  і температура газу  $T$ .

62. Знайти за допомогою розподілу Максвелла середнє значення квадрата  $v_x$  проекції швидкості молекул газу при температурі  $T$ . Маса кожної молекули  $m$ .

63. Скориставшись розподілом Максвелла, знайти середнє значення оберненої швидкості  $\frac{1}{v}$  молекул ідеального газу, що має температуру  $T$ , якщо маса кожної молекули  $m$ . Порівняйте отриману величину з оберненою величиною середньої швидкості.

64. Розподіл молекул по швидкостям у молекулярному пучку, що виходить із отвору в посудині, описується функцією  $f(v) = Av^3 e^{-\frac{mv^2}{2kT}}$ . Знайти найбільш імовірне значення: а) швидкості молекул в пучку, порівняйте з найбільш імовірною швидкістю молекул в посудині; б) кінетичної енергії в пучку.

65. Ідеальний газ має температуру  $T$ , концентрацію  $n$ , масу молекул  $m$ . Знайти за допомогою розподілу Максвелла число молекул, що попадають в одиницю часу на одиницю поверхні стінки під кутами  $\phi$ ,  $\phi + d\phi$  до її нормалі.

66. Виходячи із умови попередньої задачі, знайти число молекул, які по-

падають в одиницю часу на одиницю поверхні стінки зі швидкостями в інтервалі  $v, v + dv$ .

67. Через який час тиск повітря в тонкостінній відкачаній посудині, у стінці якої є отвір площею  $S = 10^{-6} \text{ см}^2$ , збільшиться від  $p_1 = 10^{-4}$  до  $p_2 = 10^{-2} \text{ мм рт. ст.}$ , якщо тиск зовнішнього повітря  $p_0 = 760 \text{ мм рт. ст.}$ , а температура  $20^\circ \text{C}$ ? Об'єм посудини  $V = 1 \text{ л.}$  Через який час тиск в посудині буде дорівнювати половині атмосферного тиску?

68. Тиск повітря на рівні моря  $p_0 = 750 \text{ мм рт. ст.}$ , а на вершині гори —  $590 \text{ мм рт. ст.}$  Визначити висоту гори при умові, що температура повітря дорівнює  $t = 5^\circ \text{C}$ .

69. Ідеальний газ з молярною масою  $\mu$  знаходиться в однорідному полі тяжіння, для якого прискорення вільного падіння дорівнює  $g$ . Вважаючи температуру газу всюди однаковою і рівною  $T$ , знайти висоту, на якій знаходиться центр тяжіння газу.

70. Припустимо, що всередині вертикальної труби висотою  $100 \text{ м}$  знаходиться повітря при температурі  $500 \text{ К}$ ; зовні труби повітря має температуру  $250 \text{ К}$ . Труба зверху відкрита, а знизу відділена від зовнішнього повітря затулкою площею  $300 \text{ см}^2$ . Яка сила діє на затулку, якщо тиск повітря біля верхнього кінця труби дорівнює  $740 \text{ мм рт. ст.}$ ?

71. Трубка довжиною  $22 \text{ см}$  обертається навколо вертикальної осі, яка проходить через її середину, з частотою обертів, рівною  $30 \text{ с}^{-1}$ . Температура повітря  $16^\circ \text{C}$ . Приймаючи тиск повітря поблизу відкритих кінців трубки рівним атмосферному ( $760 \text{ мм рт. ст.}$ ), визначити тиск на середині трубки.

72. Ідеальний газ обертається разом з циліндром радіусом  $R$ , висотою  $l$  навколо своєї осі з кутовою швидкістю  $\omega$ . Знайти тиск газу на бічну поверхню циліндра, якщо загальне число молекул у циліндрі дорівнює  $N_0$ , температура газу  $T$ , маса молекули газу  $m$ .

73. Потенціальна енергія молекул газу в деякому центральному полі залежить від відстані  $r$  до центра поля як  $U(r) = ar^2$ , де  $a$  — додатна стала. Температура газу  $T$ , концентрація молекул в центрі поля  $n_0$ . Знайти: а) число молекул, які знаходяться на відстані  $r, r + dr$  від центра поля; б) найбільш імовірну відстань молекул від центра поля; в) відносне число молекул, що знаходяться в шарі  $r, r + dr$ ; г) у скільки разів зменшиться концентрація молекул у центрі поля при зменшенні температури в  $\eta$  разів?

### § 3. Явища переносу

Середнє число зіткнень молекул газу за 1 секунду з іншими молекулами:

$$z = \sqrt{2} n \sigma \bar{v},$$

де  $\sigma$  — ефективний поперечний переріз зіткнення  $\sigma = \pi d^2$ , а  $d$  — газокінетичний діаметр молекули.

Середня довжина вільного пробігу молекули газу між двома зіткненнями

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2} n \sigma} = \frac{kT}{\sqrt{2} \pi d^2 p}$$

Відносна кількість молекул, які проходять відстань  $x$  в пучкові без зіткнення

$$\frac{\Delta N}{N} = e^{-\frac{x}{\lambda}}$$

Закон Фіка для стаціонарної дифузії газів

$$J = -D \frac{\partial \rho}{\partial x},$$

де  $J = \frac{\Delta M}{S \Delta t}$  — дифузійний потік маси  $\Delta M = Nm$  через площадку  $S$  за

час  $\Delta t$ ,  $D = \frac{1}{3} \lambda \bar{v}$  — коефіцієнт дифузії,  $\rho = nm$  — густина,  $\frac{\partial \rho}{\partial x}$  —

градієнт густини.

Закон Фур'є для стаціонарної теплопровідності газів

$$q = -\kappa \frac{\partial T}{\partial x},$$

де  $q = \frac{\Delta Q}{S \Delta t}$  — потік тепла,  $\kappa = \frac{1}{3} \lambda \bar{v} c_v \rho$  — коефіцієнт теплопровідності,

$c_v$  — питома теплоємність при сталому об'ємі,  $\frac{\partial T}{\partial x}$  — градієнт температури.

Закон Ньютона для внутрішнього тертя газів

$$L = -\eta \frac{\partial v}{\partial x},$$

де  $L = \frac{\Delta p}{S \Delta t}$  — потік імпульсу,  $\eta = \frac{1}{3} \lambda \bar{v} \rho$  — коефіцієнт внутрішнього

тертя (динамічної в'язкості),  $\frac{\partial v}{\partial x}$  — градієнт швидкості течії.

Оскільки  $\frac{\Delta p}{\Delta t} = F$ , то закон Ньютона для внутрішнього тертя записують так  $F = -\eta \frac{\partial v}{\partial x} S$ .



Співвідношення між коефіцієнтами переносу:

$$D = \frac{\eta}{\rho} = \nu \text{ — коефіцієнт кінематичної в'язкості,}$$

$$D = \frac{\kappa}{c_V \rho} = a \text{ — коефіцієнт температуропровідності.}$$

Для розріджених газів маса газу, що протікає через отвір за 1 секунду, дорівнює

$$M = \frac{1}{4} \bar{v} \frac{\mu}{RT} S \Delta p,$$

де  $\Delta p$  — різниця тисків,  $S$  — площа отвору,  $\mu$  — молярна маса газу.

### Методичні вказівки

Розв'язування задач на явища переносу в газах доцільно починати з задач на визначення таких величин, як ефективний поперечний переріз молекул, середнє число зіткнень, середня довжина вільного пробігу, а також їх залежності від макроскопічних параметрів  $p$ ,  $V$ ,  $T$ . Для визначення цих залежностей можна скористатись основним рівнянням кінетичної теорії газів, або рівнянням Клапейрона-Менделєєва. У задачах на розсіювання молекул у пучковій слід звернути увагу на коефіцієнт розсіювання, який визначає крутизну експоненціальної кривої і може залишатись сталою величиною, або змінюватись в залежності від умов задачі. Задачі на явища переносу в основному розглядаються для стаціонарних умов, коли градієнти густини, температури та швидкості з часом не змінюються. У цьому випадку можна користуватись рівняннями Фіка, Фур'є і Ньютона. Якщо ж градієнти відповідних величин з часом змінюються, то задача буде нестационарна. Для розв'язування таких задач у рівняння переносу слід ввести змінну величину, по якій потім буде проводитись інтегрування в заданих початкових і граничних умовах. Таким чином можна отримати рівняння, яке показує, як вирівнюються з часом концентрації, температури, чи швидкості у відповідних явищах дифузії, теплопровідності і в'язкості. Серед задач на теплопровідність та в'язкість зустрічаються такі, де явища переносу відбуваються не в газах, а в твердих тілах, або рідинах. У цих випадках також можна користуватись рівняннями Фур'є та Ньютона. Що ж стосується коефіцієнтів теплопровідності та в'язкості, то вони мають інший аналітичний вигляд і чисельно значно більші, ніж в газах.

При розв'язуванні задач на явища переносу в розріджених газах,

коли довжина вільного пробігу більша ніж характерний розмір посудини, і зіткнення між молекулами відсутні, слід пам'ятати, що рівновага встановиться в тому випадку, коли за один і той же час кількість молекул, що проходять у зворотніх напрямках, буде однаковою, на відміну від звичайних умов, де рівновагу встановлює рівність тисків.

### Приклади розв'язування задач

1. Балон, ємністю  $V = 10$  л наповнений воднем, маса якого  $M = 1$  г. Знайти середню довжину вільного пробігу молекул.

$$\text{Дано: } V = 10 \text{ л; } M = 1 \text{ г}$$

$$\bar{\lambda} - ?$$

Розв'язання. Середня довжина вільного пробігу молекул дорівнює

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2} \sigma n}, \text{ де } \sigma \text{ — ефективний поперечний переріз зіткнення молекул}$$

водню, а  $n$  — їхня концентрація. Ефективний переріз можна знайти за формулою  $\sigma = \pi d^2$ , де  $d$  — діаметр молекул. Середнє значення діаметра молекул водню візьмемо з таблиць  $d_{H_2} = 0,27$  нм. Концентрацію виразимо через відомі в задачі параметри  $p$  і  $M$ . Із рівняння стану

$p = nkT$  знаходимо  $n = \frac{p}{kT}$ . Невідомий тиск, в свою чергу, знайдемо із

рівняння Клапейрона-Менделєєва  $p = \frac{MRT}{\mu V}$ . Таким чином,  $n = \frac{MR}{\mu V k}$ .

Оскільки  $\frac{R}{k} = N_A$ , то  $n = \frac{M \cdot N_A}{\mu V}$ . Підставляючи отриману концентрацію в формулу середньої довжини вільного пробігу, отримаємо:

$$\lambda = \frac{\mu V}{\sqrt{2} \pi d^2 M N_A} = \frac{2 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-2}}{3,14 \cdot \sqrt{2} \cdot (0,27 \cdot 10^{-9})^2 \cdot 10^{-3} \cdot 6,02 \cdot 10^{23}} = 1,026 \cdot 10^{-7} \text{ м.}$$

2. Пучок молекул входить в посуд з газом. Знайти середню довжину вільного пробігу молекул пучка, якщо потік молекул у пучковій зменшується в  $\eta$  раз на відстані  $\Delta l$  вздовж пучка.

$$\text{Дано: } \eta, \Delta l$$

$$\bar{\lambda} - ?$$

Розв'язання. Через зіткнення молекул пучка з молекулами газу частина з них буде змінювати свій напрям і вибувати з пучка. Ослаб-

лення пучка відбувається за законом  $\Delta N = Ne^{-\frac{\Delta l}{\lambda}}$ . В останній формулі  $\frac{\Delta N}{N} = \eta$ . Тому  $\eta = e^{-\frac{\Delta l}{\lambda}}$ . Логарифмуючи останній вираз, отримаємо  $\ln \eta = -\frac{\Delta l}{\lambda}$ , звідки  $\lambda = \frac{\Delta l}{\ln \eta}$ .

3. Два однакових паралельних диска, осі обертання яких співпадають, розташовані на відстані  $h$  один від іншого. Радіус кожного з них  $a$ , причому  $a \gg h$ . Один з дисків обертається з кутовою швидкістю  $\omega$ , другий диск нерухомий. Знайти момент сил тертя, що діє на нерухомий диск, якщо коефіцієнт внутрішнього тертя газу між дисками дорівнює  $\eta$ .

Дано:  $h, a, \omega, \eta$   
 $M - ?$

**Розв'язання.** Нехай нижній диск нерухомий (Рис. 3), а верхній обертається з кутовою швидкістю  $\omega$ . Між дисками утворюються шари газу, кутові швидкості яких змінюються від 0 до  $\omega$ . Тобто існує градієнт швидкості в газі між верхнім та нижнім дисками. При невеликих кутових швидкостях градієнт є сталою величиною, і тому на кожен елементарну кільцеву доріжку шириною  $dr$ , що знаходиться від осі обертання нижнього диска на відстані  $r$ , буде діяти сила тертя з боку газу

$$dF = \eta \frac{\partial v}{\partial x} dS.$$

Градієнт швидкості в даному випадку можна записати так:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{v - 0}{h} = \frac{\omega r}{h}.$$

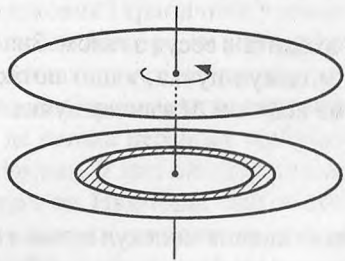


Рис. 3

Площа кільця дорівнює  $dS = 2\pi r dr$ . Тоді елементарний момент сили тертя, що діє на кільцеву доріжку з боку газу, дорівнює

$$dM = r \cdot dF = r \cdot \eta \frac{\omega r}{h} \cdot 2\pi r dr = \frac{2\pi\eta\omega}{h} r^3 dr.$$

Повний момент сили, що діє на нижній диск, знаходимо, інтегруючи  $dM$  по радіусу від 0 до  $a$ :

$$M = \int_0^a \frac{2\pi\eta\omega}{h} r^3 dr = \frac{1}{2} \frac{\pi\eta a^2 \omega}{h}.$$

4. Знайти розподіл температур в просторі між двома коаксіальними циліндрами з радіусами  $R_1$  і  $R_2$ , заповненому газом, якщо температури циліндрів сталі і дорівнюють відповідно  $T_1$  і  $T_2$ .

Дано:  $R_1, R_2, T_1, T_2$   
 $T = f(r) - ?$

**Розв'язання.** Оскільки температури з часом не змінюються, процес теплопровідності буде стаціонарним. Кількість теплоти, що проходить за одиницю часу через площу, умовно виділеного циліндра радіусом  $r$ , що знаходиться всередині простору між циліндрами радіусів  $R_1$  і  $R_2$ , буде сталою величиною. Запишемо рівняння Фур'є для цієї кількості теплоти

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = -\kappa \frac{dT}{dr} 2\pi r h,$$

тут  $h$  — висота циліндра, а  $\kappa$  — коефіцієнт теплопровідності. У даному рівнянні комплекс невідомих величин позначимо  $\frac{\Delta Q}{2\pi \cdot \kappa \cdot h \Delta t} = A$ .

Тоді рівняння теплопровідності має вигляд:  $A = -r \frac{dT}{dr}$ .

Розділимо змінні величини  $dT = -A \frac{dr}{r}$ . Проінтегруємо останнє

рівняння, враховуючи граничні умови:  $T_2 - T_1 = A \ln \frac{R_2}{R_1}$ , звідки невідо-

ма величина  $A = \frac{T_2 - T_1}{\ln \frac{R_2}{R_1}}$ .

Для циліндра радіуса  $r$ , що має температуру  $T$ , інтегрування дає



$$T = T_1 + \frac{T_2 - T_1}{\ln \frac{R_2}{R_1}} \ln \frac{r}{R_1}$$

Отримана залежність виражає розподіл температур вздовж радіуса між двома коаксіальними циліндрами.

5. Дві колби об'ємами  $V_1 = 1 \text{ л}$  і  $V_2 = 2 \text{ л}$  з'єднані трубкою довжиною  $l = 10 \text{ см}$  і поперечним перерізом  $S = 1 \text{ см}^2$ . У колбі  $V_2$  знаходиться суміш газів  $N_2$  і  $O_2$ . Парціальний тиск кисню  $p_{O_2} = 0,1 \text{ атм.}$ , а азоту  $p_{N_2} = 0,9 \text{ атм.}$  У колбі  $V_1$  знаходиться лише азот, тиск якого  $p_1 = 1 \text{ атм.}$  Температури газів однакові. Визначити коефіцієнт дифузії кисню, якщо за 8 годин різниця парціальних тисків кисню зменшилась в два рази.

Дано:  $V_1 = 1 \text{ л}$ ,  $V_2 = 2 \text{ л}$ ,  $l = 10 \text{ см}$ ,  $S = 1 \text{ см}^2$ ,  $p_{O_2} = 0,1 \text{ атм.}$ ,  $p_{N_2} = 0,9 \text{ атм.}$ ,

$$p_1 = 1 \text{ атм.}, T_1 = T_2, t = 8 \text{ год.}, \frac{\Delta p_0}{\Delta p} = 2.$$

$D = ?$

**Розв'язання.** Внаслідок нестационарної дифузії концентрація кисню в обох колбах буде вирівнюватись, тобто різниця концентрацій  $\Delta n = n_2 - n_1$ , з часом зменшується. Знайдемо закон, за яким буде змінюватись ця різниця. Для цього запишемо дифузійний потік кисню. За

законом Фіка  $j = -D \frac{\partial n}{\partial x}$ . Цей потік не є сталою величиною, з часом він змінюється. Виразимо його через кількість молекул, враховуючи,

що для умови задачі  $\frac{\partial n}{\partial x} = \frac{\Delta n}{l}$ . Тоді за нескінченно малий проміжок часу  $dt$  кількість молекул кисню, що продифундують в колбу  $V_1$  дорівнює

$dN = -D \frac{\Delta n}{l} S dt$ . Концентрація їх в другій колбі зменшиться на

$\frac{dN}{V_2}$ , а в першій збільшиться на  $\frac{dN}{V_1}$ . За час  $dt$  зміниться також і різниця

концентрацій, і буде дорівнювати не  $\Delta n$ , а  $\Delta n' = \Delta n - \left( \frac{1}{V_1} + \frac{1}{V_2} \right) dN$ .

Підставимо сюди значення  $dN$ . Тоді отримаємо

$$\Delta n' = \Delta n - D \frac{\Delta n}{l} \left( \frac{1}{V_1} + \frac{1}{V_2} \right) S dt. \text{ Величина } V_0 = \frac{V_1 V_2}{V_1 + V_2} \text{ є приведеним об'ємом.}$$

мом.

Таким чином, за час  $dt$  концентрація змінилась на

$$dn = \Delta n' - \Delta n = -D \frac{\Delta n S}{V_0 l} dt.$$

$$\text{Розділимо змінні величини } \frac{dn}{\Delta n} = -D \frac{S}{V_0 l} dt.$$

Після інтегрування знаходимо  $\ln \Delta n = -D \frac{S}{V_0 l} t + \ln A$ . Звідси

$$\Delta n = A e^{-D \frac{S}{V_0 l} t}. \text{ Сталу величину } A \text{ знайдемо з початкових умов. Коли}$$

$t = 0$ ,  $\Delta n = \Delta n_0$ . Отже,  $A = \Delta n_0$ . Тоді  $\Delta n = \Delta n_0 e^{-D \frac{S}{V_0 l} t}$ . Скористаємось цією формулою для визначення коефіцієнта дифузії. Якщо температура в обох колбах однакова, то, як витікає із основного рівняння стану газу  $p = nkT$ , замість  $\Delta n$  і  $\Delta n_0$  можна записати різницю парціальних тисків

$\Delta p$  і  $\Delta p_0$  відповідно. Тоді  $\Delta p = \Delta p_0 e^{-D \frac{S}{V_0 l} t}$ . Звідси знайдемо коефіцієнт дифузії кисню

$$D = \frac{\ln \frac{\Delta p_0}{\Delta p} V_0 l}{St} = \frac{\ln 2 \cdot 2 \cdot 10^{-3} \cdot 0,1}{3 \cdot 10^{-4} \cdot 28800} = 0,16 \cdot 10^{-4} \frac{m^2}{c}.$$

#### Задачі для аудиторних та домашніх занять

74. Довести, що середня відносна швидкість руху двох молекул дорівнює  $\bar{v}_{\text{відн}} = \bar{v} \sqrt{2}$ , де  $\bar{v}$  — середня швидкість відносно стінок посуду.

75. При якому тисковій середня довжина вільного пробігу молекул азоту дорівнює 1 мм, якщо при нормальному тисковій вона дорівнює  $6 \cdot 10^{-6} \text{ см}$ .

76. Знайти середню тривалість вільного пробігу молекул кисню при тисковій 2 мм рт. ст. при 27 °С.

77. У скільки разів середня довжина вільного пробігу молекул азоту при нормальних умовах більше ефектively відстані між його молекулами при тих же умовах.

78. Знайти середню довжину вільного пробігу молекул водню при тисковій  $p = 0,1 \text{ Па}$  і температурі  $T = 100 \text{ К}$ .

79. Чи можна вважати вакуум достатньо високим у колбі діаметром  $d = 20$  см, де знаходиться азот при температурі  $T = 280$  К і тискові  $p = 100$  мкПа.

80. Визначити густину розрідженого водню, якщо середня довжина вільного пробігу молекул дорівнює  $1$  см.

81. Довжина вільного пробігу молекул водню при атмосферному тиску  $\lambda = 1,28 \cdot 10^{-5}$  см. Знайти газокінетичний діаметр молекул водню.

82. Знайти середнє число зіткнень молекули кисню при нормальних умовах за  $1$  секунду.

83. Знайти число зіткнень, які відбуваються між всіма молекулами водню, що займають при нормальних умовах об'єм  $V = 1$  мм<sup>3</sup> за одну секунду.

84. Знайти залежність середньої довжини вільного пробігу молекул ідеального газу від тиску в процесах: а) ізохоричному; б) ізотермічному.

85. Знайти залежність середньої довжини вільного пробігу молекул ідеального газу від температури в процесах: а) ізохоричному; б) ізобаричному.

86. Знайти залежність середнього числа зіткнень молекули  $z$  ідеального газу від тиску в процесах: а) ізохоричному; б) ізотермічному, а також залежність  $z$  від температури в процесах: с) ізохоричному; д) ізобаричному.

87. Визначити, яка частина молекул газу: а) пролітає без зіткнень відстань, що перевищує середню довжину вільного пробігу  $\lambda$ ; б) має довжини вільного пробігу в інтервалі від  $\lambda$  до  $2\lambda$ ?

88. Нехай  $adt$  — імовірність того, що молекула газу зіткнеться з іншою протягом часу  $dt$ ,  $a$  — стала величина. Знайти: а) імовірність того, що молекула не зіткнеться протягом часу  $t$ ; б) середній час між зіткненнями.

89. Коефіцієнт в'язкості азоту при температурі  $0^\circ\text{C}$   $\eta = 16,8 \cdot 10^{-5} \frac{\text{дин} \cdot \text{с}}{\text{см}^2}$ .

Знайти середнє значення довжини вільного пробігу молекул азоту при цих умовах.

90. В'язкість аргону (відносна атомна маса  $A = 40$ ) при  $0^\circ\text{C}$   $\eta = 21 \cdot 10^{-5} \frac{\text{дин} \cdot \text{с}}{\text{см}^2}$ . Визначити такі величини для аргону при нормальних умовах: 1) середню арифметичну швидкість теплового руху атомів; 2) середню довжину вільного пробігу атома; 3) середнє число зіткнень атомів в  $1$  см<sup>3</sup> за секунду; 4) газокінетичний ефективний переріз атома; 5) газокінетичний радіус атома аргону.

91. Коефіцієнт дифузії кисню при температурі  $t = 0^\circ\text{C}$  дорівнює  $0,19$  см<sup>2</sup>/с. Знайти середню довжину вільного пробігу молекул кисню.

92. Визначити, у скільки разів відрізняється коефіцієнт дифузії кисню від коефіцієнта дифузії водню при однакових умовах.

93. Як зміняться коефіцієнти дифузії і в'язкості ідеального газу, якщо об'єм газу збільшити в  $n$  раз: а) ізотермічно; б) ізобарично.

94. Визначити залежність коефіцієнта дифузії від температури в процесах: 1) ізобаричному; 2) ізохоричному.

95. Визначити залежність коефіцієнта дифузії від тиску в процесах: 1) ізотермічному; 2) ізохоричному.

96. Визначити залежність коефіцієнта в'язкості від температури в процесах: 1) ізобаричному; 2) ізохоричному.

97. Визначити залежність коефіцієнта в'язкості від тиску в процесах: 1) ізотермічному; 2) ізохоричному.

98. Знайти залежність коефіцієнта теплопровідності від температури в процесах: 1) ізобаричному; 2) ізохоричному.

99. Знайти залежність коефіцієнта теплопровідності від тиску в процесах: а) ізотермічному; б) ізохоричному.

100. Внаслідок деякого процесу в'язкість ідеального газу збільшилась у  $\alpha = 2,0$  рази, а коефіцієнт дифузії в  $\beta = 4,0$  рази. Як і у скільки разів змінився тиск газу?

101. Знайти теплопровідність газу, газокінетичний радіус молекул якого  $1,5 \cdot 10^{-10}$  м, температура  $t = 10^\circ\text{C}$  і тиск  $0,98 \cdot 10^5$  Па.

102. Знайти коефіцієнт в'язкості гелію при нормальних умовах, якщо коефіцієнт дифузії при цих умовах дорівнює  $1,06 \cdot 10^{-4}$  м<sup>2</sup>/с.

103. Коефіцієнт теплопровідності гелію в  $8,7$  рази більше, ніж аргону (при нормальних умовах). Знайти відношення ефективних діаметрів атомів аргону і гелію.

104. Визначити, на який кут  $\varphi$  повернеться диск, підвішений на пружній нитці, якщо під ним на віддалі  $h = 1$  см обертається другий такий самий диск з кутовою швидкістю  $\omega = 50$  рад/с. Радіус дисків  $R = 10$  см, модуль кручення нитки  $G = 100$  дин  $\cdot$  см/рад. В'язкість повітря вважати рівною  $\eta = 1,8 \cdot 10^{-4}$  дин  $\cdot$  с/см<sup>2</sup>. Крайовими ефектами знехтувати. Рух повітря між дисками вважати ламінарним.

105. Газ заповнює простір між двома коаксіальними циліндрами, радіуси яких  $R_1$  і  $R_2$ , причому  $R_1 < R_2$ . Внутрішній циліндр нерухомий, а зовнішній обертається з невеликою кутовою швидкістю  $\omega$ . Момент сил тертя, що діє на одиницю довжини внутрішнього циліндра, дорівнює  $N_1$ . Знайти коефіцієнт в'язкості газу, маючи на увазі, що сила тертя, яка діє на одиницю

площі циліндричної поверхні радіуса  $r$ , визначається формулою  $\sigma = \eta r \left( \frac{\partial \omega}{\partial r} \right)$ .

106. Гелій при нормальних умовах заповнює простір між двома коаксіальними циліндрами. Середній радіус циліндрів  $R$ , проміжок між ними  $\Delta R$ , причому  $\Delta R \ll R$ . Внутрішній циліндр нерухомий, а зовнішній обертається з достатньо невеликою кутовою швидкістю  $\omega$ . Знайти момент сил тертя, що діють на одиницю довжини внутрішнього циліндра. До якого значення слід зменшити тиск гелію, не змінюючи температуру, щоб шуканий момент сил тертя зменшився в  $n = 10$  разів, якщо  $\Delta R = 6$  мм?

107. Простір між двома дуже довгими коаксіальними циліндрами з радіусами  $R_1$  і  $R_2$  ( $R_2 > R_1$ ) заповнений однорідним ідеальним газом, коефіцієнт

теплопровідності якого дорівнює  $\kappa$ . Зовнішній циліндр підтримується при температурі  $T_2$ , внутрішній — при температурі  $T_1$  ( $T_1 > T_2$ ). Вважаючи, що конвекція газу відсутня і що довжина вільного пробігу молекул газу менша від розмірів віддалі між циліндрами, знайти: а) закон розподілу температур у просторі між циліндрами; б) градієнт температури  $\frac{dT}{dr}$  в просторі між циліндрами; в) потік тепла  $q_1$ , який приходить на одиницю довжини циліндрів.

108. Один кінець теплоізоляованого стержня підтримується при температурі  $T_1$ , а другий — при температурі  $T_2$ . Сам стержень складається з двох частин, довжини яких  $l_1$  і  $l_2$ , а коефіцієнти теплопровідності  $\kappa_1$  і  $\kappa_2$ . Знайти температуру поверхні стикування цих частин стержня.

109. Два стержні довжинами  $l_1$  і  $l_2$  і коефіцієнтами теплопровідності  $\kappa_1$  і  $\kappa_2$ , складені з торців один до одного. Знайти коефіцієнт теплопровідності однорідного стержня довжини  $l_1 + l_2$ , який проводив би тепло так само, як і система із двох стержнів. Бокові поверхні теплоізоляовані.

110. Стержень довжиною  $l$  з теплоізоляованою бічною поверхнею зроблено з матеріалу, коефіцієнт теплопровідності якого змінюється з температурою за законом  $\kappa = \frac{\alpha}{T}$ , де  $\alpha$  — стала величина. Торці стержня підтримують при температурі  $T_1$  і  $T_2$ . Знайти залежність  $T(x)$ , де  $x$  — віддаль від торця з температурою  $T_1$ , а також густину потоку тепла.

111. Знайти розподіл температур у речовині, яка знаходиться між двома паралельними пластинами, які підтримуються при температурі  $T_1$  і  $T_2$ , віддаль між ними  $l$  і коефіцієнт теплопровідності речовини  $\kappa \sim \sqrt{T}$ .

112. Знайти розподіл температур у просторі між двома концентричними сферами з радіусами  $R_1$  і  $R_2$ , якщо температури їх сталі і відповідно дорівнюють  $T_1$  і  $T_2$ .

113. В однорідній кулі, радіус якої  $R$  і коефіцієнт теплопровідності  $\kappa$ , виділяється рівномірно по об'єму теплова потужність з об'ємною густиною  $\omega$ . Знайти розподіл температури в кулі, якщо температура на її поверхні стала і дорівнює  $T_0$ .

114. Тонкостінна посудина об'ємом  $V$  знаходиться при сталій температурі  $T$ . З посудини в безповітряний простір повільно витікає газ через отвір площею  $S$ . Через який час тиск в посудині зменшиться в  $e$  разів?

115. Дві посудини з'єднані трубою перерізом  $S$  і довжиною  $l$ . В одній посудині міститься азот, а в другій кисень. В обох посудинах тиск  $p$  і температура  $T$  однакові. Діаметри їх молекул приблизно рівні  $d$ . Скільки азоту продифундує в посудину з киснем за 1 с?

116. Дві теплоізоляовані посудини, об'єми яких дорівнюють  $V_1 = 10$  л і  $V_2 = 15$  л, наповнені киснем. Посудини з'єднані між собою теплоізоляованою трубою довжиною 5 см і поперечним перерізом  $S = 10$  см<sup>2</sup>. Посудини мають різну температуру  $t_1 = 50$  °C,  $t_2 = 0$  °C і однаковий тиск. Через який час різниця температур зменшиться в  $e$  разів, якщо коефіцієнт дифузії кисню  $D = 0,2$  см<sup>2</sup>/с.

## ТЕРМОДИНАМІКА

Термодинаміка, на відміну від молекулярно-кінетичної теорії, розглядає тіла або системи, не цікавлячись їх внутрішньою будовою чи механізмом молекулярного руху. Термодинаміка для описання стану тіл, їх властивостей та процесів, що відбуваються з ними, користується макроскопічними величинами, які характеризують їх в цілому і не мають сенсу в застосуванні до окремих частинок, наприклад, температура, тиск, об'єм.

Подібно тому, як у механіці, коли невідомими є сили взаємодії, координати, імпульси окремих тіл, — користуються законами збереження імпульсу, енергії, в молекулярній фізиці в таких випадках термодинаміка користується деякими загальними законами, які справедливі незалежно від характеру руху молекул, взаємодії між ними, структури речовини. Це так звані перший та другий закони термодинаміки. Закони є фундаментальними і характеризують енергію та її зміни. Особливе положення енергії в молекулярній фізиці зв'язане з тим, що будь-який вид енергії: механічна, електрична, енергія світла, хімічних реакцій в процесі перетворень може пройти через різні форми енергії, але кінцевим результатом цих перетворень неодмінно буде теплова енергія.

## § 1. Перший закон термодинаміки

Перший закон термодинаміки:

$$dQ = dU + dA,$$

де  $dQ$  — кількість теплоти, яка передається системі,  $dU$  — зміна внутрішньої енергії системи,  $dA$  — елементарна робота системи над зовнішніми тілами.

Внутрішня енергія газів дорівнює:

$$U = \frac{M}{\mu} N_A \frac{i}{2} kT = \frac{M}{\mu} C_V T = \frac{M}{\mu} \frac{RT}{\gamma - 1} = \frac{pV}{\gamma - 1}.$$

Тут  $i$  — число ступенів вільності,  $C_v$  — молярна теплоємність при сталому об'ємі,  $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$  — коефіцієнт Пуассона,  $C_p$  — молярна теплоємність при сталому тиску.

Елементарна робота  $dA = pdV$ .

Кількість теплоти  $dQ = cMdT$ ;  $dQ = C \frac{M}{\mu} dT$ , де  $c$  — питома теплоємність,  $C$  — молярна теплоємність.

Співвідношення Роберта-Майєра між молярними теплоємностями при сталому тиску та об'ємі

$$C_p - C_v = R, \quad C_v = \frac{i}{2}R, \quad C_p = \frac{i+2}{2}R.$$

Молярна теплоємність суміші газів:

$$C = \frac{C_1v_1 + C_2v_2 + \dots + C_nv_n}{v_1 + v_2 + \dots + v_n}; \quad v_i \text{ — кількість молів } i \text{ компоненти.}$$

Рівняння адиабатичного процесу (рівняння Пуассона):

$$pV^\gamma = \text{const.}$$

Рівняння політропного процесу:

$$pV^n = \text{const.},$$

де  $n = \frac{C - C_p}{C - C_v}$  — показник політропи.

Робота при ізопроцесах:

— ізохоричному  $A = 0$ ;

— ізобаричному  $A = \int pdV = p(V_2 - V_1)$ ;

— ізотермічному  $A = \frac{M}{\mu} RT \ln \frac{V_2}{V_1}$ ;

— адиабатичному  $A = -\Delta U = -\frac{M}{\mu} C_v (T_2 - T_1)$ ;  $A = \frac{p_1 V_1}{\gamma - 1} \left[ 1 - \left( \frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma - 1} \right]$ .

#### Методичні вказівки

Пристаючи до розв'язування задач по даній темі, насамперед необхідно вяснити, які процеси протікають у системі. При цьому слід

пам'ятати, що ці процеси є квазістатичними (тобто всі проміжні стани є рівноважними). Це дозволяє записати рівняння закону збереження енергії з самого початку в інтегральній формі. Використання диференціальної форми запису першого закону термодинаміки доцільно в тих випадках, коли необхідно в задачі знайти рівняння стану, або теплоємність газу.

Аналіз задач в багатьох випадках доцільно починати з графічного зображення процесів. Інколи для розв'язування необхідно залучати молекулярно-кінетичні уявлення, а також рівняння Клапейрона-Менделєєва. У більшості задач цієї теми розглядається ідеальний газ. Для молекул ідеального газу число ступенів вільності  $i = 3$ . Якщо мова йде про 2-атомний газ — кисень, водень, азот, число ступенів вільності при умовах порівняно близьких до нормальних,  $i = 5$ .

У задачах, де необхідно визначити або скористатись різницею фізичних величин у термодинамічних процесах і коли невідомий знак цієї різниці, слід від кінцевого значення віднімати початкове.

#### Приклади розв'язування задач

1. Кисень нагрівають від температури  $t_1 = 50^\circ\text{C}$  до  $t_2 = 80^\circ\text{C}$ . Маса кисню  $M = 160$  г. Знайти кількість теплоти, яку поглинає газ, а також зміну внутрішньої енергії при ізохоричному і ізобаричному процесах.

Дано:  $t_1 = 50^\circ\text{C}$ ,  $t_2 = 80^\circ\text{C}$ ,  $M = 160$  г

$$\Delta Q = ? \quad \Delta U = ?$$

Розв'язання задачі почнемо з графічного зображення процесів на діаграмі  $(p, V)$  (Рис. 4). Графіки ізобарного (1) та ізохорного (2) процесів при зміні температури від  $T_1$  до  $T_2$  будуть лежати між двома

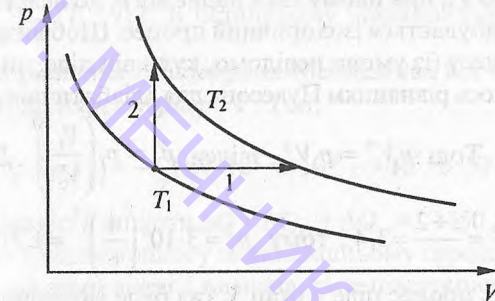


Рис. 4.

ізотермами. Це означає, що зміна внутрішньої енергії в обох випадках буде однакою і дорівнювати:

$$\Delta U = U_2 - U_1 = \frac{M}{\mu} \frac{iR}{2} (T_2 - T_1) = \frac{160}{32} \cdot \frac{5}{2} \cdot 8,3 \cdot 30 = 3112,5 \text{ Дж.}$$

Кількість теплоти, що поглинає газ при ізобаричному і ізохоричному процесах, буде різною, оскільки різними будуть теплоємності.

При ізохоричному процесі газ не здійснює роботи, і тому все тепло йде на зміну внутрішньої енергії

$$\Delta Q_V = \Delta U = 3112,5 \text{ Дж.}$$

При ізобаричному процесі теплота витрачається як на зміну внутрішньої енергії, так і на роботу, яку виконує газ при розширенні

$$\Delta Q_p = \frac{M}{\mu} C_p (T_2 - T_1) = \frac{M}{\mu} \frac{i+2}{2} R (T_2 - T_1) = 4357,5 \text{ Дж.}$$

Очевидно, що робота при ізобаричному процесі

$$A = \Delta Q_p - \Delta U = 1245 \text{ Дж.}$$

2. Двохатомний газ при тискові  $p_1 = 3 \text{ атм.}$  займає об'єм  $V_1 = 4 \text{ л.}$  Газ розширюють до об'єму  $V_2 = 6 \text{ л.}$ , при цьому тиск падає до  $p_3 = 1 \text{ атм.}$  Процес відбувається спочатку по адіабаті, а потім по ізохорі. Визначити роботу сили тиску газу, зміну його внутрішньої енергії та кількість теплоти при цьому переході.

Дано:  $p_1 = 3 \text{ атм.}, p_3 = 1 \text{ атм.}, V_1 = 4 \text{ л.}, V_2 = 6 \text{ л.}$   
 $A = ? \Delta U = ? \Delta Q = ?$

**Розв'язання.** Зобразимо обидва процеси на графіку в координатах ( $pV$ ) (Рис. 5). Як бачимо, газ спочатку розширюється по адіабаті від об'єму  $V_1$  до  $V_2$ , при цьому тиск падає від  $p_1$  до невідомого значення  $p_2$ . Потім відбувається ізохоричний процес. Щоб визначити характер цього процесу (із умови невідомо, куди він піде, чи в стан 3, чи в  $3'$ ), скористаємось рівнянням Пуассона для адіабатичного процесу (12)

і визначимо  $p_2$ . Тоді  $p_1 V_1^\gamma = p_2 V_2^\gamma$ , звідси  $p_2 = p_1 \left( \frac{V_1}{V_2} \right)^\gamma$ . Для 2-атомно-

го газу  $\gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{i+2}{i} = 1,4$ , тому  $p_2 = 3 \cdot 10^5 \left( \frac{4}{6} \right)^{1,4} = 1,7 \cdot 10^5 \text{ Па} > p_3 = 10^5 \text{ Па}$ . Отже, процес піде в стан 3, газ буде ізохорно охолоджуватись, тиск падатиме.

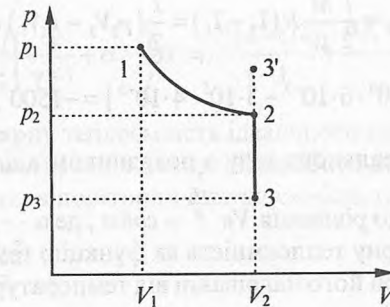


Рис. 5

Щоб визначити роботу і кількість теплоти при переході зі стану 1 у стан 3, розглянемо кожен з цих процесів окремо. При адіабатичному процесі (12) робота дорівнює:

$$A_{12} = -\Delta U_{12} = \frac{i}{2} \frac{M}{\mu} R (T_1 - T_2).$$

Оскільки температури невідомі, скористаємось рівнянням Клапейрона-Менделєєва і перейдемо до відомих у задачі змінних параметрів  $p$  і  $V$ . Тоді

$$A_{12} = \frac{i}{2} (p_1 V_1 - p_2 V_2) = \frac{5}{2} (3 \cdot 10^5 \cdot 4 \cdot 10^{-3} - 1,7 \cdot 10^5 \cdot 6 \cdot 10^{-3}) = 450 \text{ Дж.}$$

При ізохоричному процесі  $A_{23} = 0$ , тому загальна робота  $A = A_{12} + A_{23} = 450 \text{ Дж.}$

Кількість теплоти, що поглинає газ на ділянці 1, 2, дорівнює нулю, оскільки процес адіабатичний. На ділянці 2, 3 (ізохорне охолодження)  $\Delta Q_{23} = -\frac{M}{\mu} C_v (T_2 - T_3)$ . В останньому рівнянні також перейдемо за допомогою рівняння Клапейрона-Менделєєва від невідомих температур  $T_2$  і  $T_3$  до параметрів  $p$  і  $V$ . Тоді

$$\Delta Q_{23} = -\frac{i}{2} (p_2 V_2 - p_3 V_3) = -\frac{5}{2} (1,7 \cdot 10^5 \cdot 6 \cdot 10^{-3} - 1 \cdot 10^5 \cdot 6 \cdot 10^{-3}) = -1050 \text{ Дж.}$$

Загальна кількість теплоти  $\Delta Q = \Delta Q_{12} + \Delta Q_{23} = -1050 \text{ Дж}$ . Знак мінус показує, що газ віддає теплоту навколишньому середовищу.

Зміна внутрішньої енергії визначається початковим та кінцевим станом і не залежить від проміжних станів, тому

$$\Delta U_{13} = \frac{i}{2} \frac{M}{\mu} R (T_3 - T_1) = \frac{i}{2} (p_3 V_3 - p_1 V_1) = \\ = \frac{5}{2} (1 \cdot 10^5 \cdot 6 \cdot 10^{-3} - 3 \cdot 10^5 \cdot 4 \cdot 10^{-3}) = -1500 \text{ Дж.}$$

3. Один моль ідеального газу з показником адиабати  $\gamma$  здійснює процес відповідно до рівняння  $V e^{\frac{\alpha T}{R}} = \text{const}$ , де  $\alpha$  — додатна величина. Знайти: а) молярну теплоємність як функцію температури; б) передане газу тепло при його нагріванні від температури  $T_1$  до температури в  $n$  раз більшої.

Дано:  $\nu = 1$  моль,  $V e^{\frac{\alpha T}{R}} = \text{const}$ ,  $\alpha > 0$ ,  $T_1$ ,  $T_2 = nT_1$   
 $C = ?$   $\Delta Q = ?$

**Розв'язання.** Запишемо перший закон термодинаміки в диференціальній формі:  $dQ = dU + dA$ . Для одного моля газу  $C dT = C_V dT + p dV$ .

З рівняння даного процесу  $V e^{\frac{\alpha T}{R}} = \text{const}$  знайдемо зміну об'єму  $dV = \frac{\alpha}{R} V dT$ , а із рівняння Клапейрона-Менделєєва для одного моля знайдемо тиск  $p = \frac{RT}{V}$ . Підставимо  $dV$  і  $p$  в перший закон термодинаміки

$$C dT = C_V dT + \frac{RT}{V} \frac{\alpha V}{R} dT.$$

Після скорочення отримаємо  $C = C_V + \alpha T$ . Невідому молярну теплоємність  $C_V$  виразимо через відомий коефіцієнт Пуассона  $C_V = \frac{R}{\gamma - 1}$ .

Тоді  $C_V = \frac{R}{\gamma - 1} + \alpha T$ .

Оскільки теплоємність є функція температури, даний процес не є політропним.

Кількість теплоти можна виразити так:

$$\Delta Q = \int_{T_1}^{T_2} C dT.$$

Після підстановки отриманого значення теплоємності кількість теплоти дорівнює:

$$\Delta Q = \int_{T_1}^{T_2} \left( \frac{R}{\gamma - 1} + \alpha T \right) dT = \frac{T_2 (n - 1) R}{\gamma - 1} + \frac{\alpha T_1^2 (n^2 - 1)}{2}.$$

4. Знайти молярну теплоємність ідеального газу при політропному процесі  $pV^n = \text{const}$ , якщо показник адиабати дорівнює  $\gamma$ . При яких значеннях показника політропи  $n$  теплоємність газу буде від'ємною?

Дано:  $pV^n = \text{const}$ ,  $\gamma$   
 $C = ?$   $n = ?$

**Розв'язання.** У рівнянні політропного процесу  $pV^n = \text{const}$ , показник політропи дорівнює  $n = \frac{C - C_p}{C - C_V}$ . Звідси знайдемо теплоємність

$$C = \frac{n C_V - C_p}{n - 1} = \frac{1}{C_V} \cdot \frac{n - \gamma}{n - 1} \text{ і оскільки } C_V = \frac{R}{\gamma - 1}, C = \frac{(n - \gamma) R}{(\gamma - 1)(n - 1)}.$$

Аналіз цього виразу показує: якщо  $1 < n < \gamma$  — теплоємність від'ємна, якщо

$n > \gamma$  або  $n < 1$  — теплоємність додатна. Теплоємність  $C = \frac{dQ}{dT}$  буде від'ємною, коли  $dQ > 0$ , а  $dT < 0$ . Тобто системі тепло передається, а вона замість нагрівання охолоджується. Це буде в тому випадку, коли робота виконується газом як за рахунок тепла, що підводиться до системи, так і за рахунок внутрішньої енергії.

На графіку в координатах  $(p, V)$  ці процеси відбуваються в заштрихованій області (Рис. 6) між ізотермою та адиабатою як при стискуванні газу з якогось певного стану, так і при розширенні з цього ж стану.

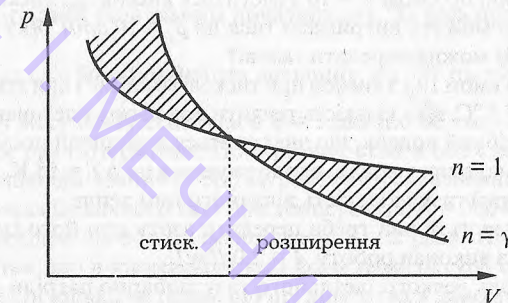


Рис. 6

5. Ідеальний газ складається із суміші 2 кіломоляв одноатомного газу і 0,5 кіломоля двоатомного. Визначити показник адиабати газу.

$$\text{Дано: } \nu_1 = 2, \nu_2 = 0,5, i_1 = 3, i_2 = 5 \\ \gamma = ?$$

**Розв'язання.** Внутрішня енергія суміші газів дорівнює сумі внутрішніх енергій окремих газів.

$$U = U_1 + U_2 = \nu_1 \frac{3}{2} RT + \nu_2 \frac{5}{2} RT.$$

З іншої сторони, за визначенням:

$$U = (\nu_1 + \nu_2) C_V T.$$

Таким чином для  $C_V$  знаходимо:

$$C_V = \frac{\nu_1 \frac{3}{2} R + \nu_2 \frac{5}{2} R}{\nu_1 + \nu_2} = 1,7 R.$$

Для  $C_p$  із співвідношення  $C_p = C_V + R = 2,7 R$ . Отже,

$$\gamma = \frac{C_p}{C_V} = \frac{2,7}{1,7} = 1,56.$$

#### Задачі для аудиторних та домашніх занять

117. Визначити кількість тепла, яка виділяється при ізотермічному стисненні  $M = 7 \text{ г}$  азоту, якщо при цьому тиск газу зростає в  $n = 50$  разів. Визначити також роботу, яку потрібно затратити на це стиснення. Температура газу  $T = 27^\circ \text{C}$ .

118. В посудині об'ємом  $V = 10 \text{ л}$  міститься кисень під тиском  $p_0 = 1 \text{ атм}$ . Стінки посудини можуть витримати тиск до  $p_1 = 10 \text{ атм}$ . Яку максимальну кількість тепла  $Q$  можна передати газіві?

119. Балон об'ємом  $10 \text{ л}$  з киснем при тискові  $80 \text{ кПа/см}^2$  і при температурі  $7^\circ \text{C}$  нагрівають до  $15,5^\circ \text{C}$ . Яка кількість теплоти при цьому поглинається газом?

120. Газоподібний водень, що знаходиться в закритій посудині об'ємом  $V = 5 \text{ л}$  при нормальних умовах, охолоджується на  $\Delta T = 55 \text{ К}$ . Знайти зміну внутрішньої енергії газу і кількість відданого ним тепла.

121. Яку кількість тепла треба передати азоту при його ізобарному нагріванні, щоб газ виконав роботу  $A = 2,0 \text{ Дж}$ ?

122. Один моль деякого ідеального газу ізобарно нагріли на  $\Delta T = 72 \text{ К}$ , передавши йому кількість тепла  $Q = 1,6 \text{ кДж}$ . Знайти виконану газом роботу, приріст його внутрішньої енергії і величину  $\gamma = \frac{C_p}{C_V}$ .

123. У замкненому просторі під поршнем циліндра знаходиться повітря. Яку роботу треба виконати, щоб підняти поршень на висоту  $h_1 = 10 \text{ см}$ , якщо початкова висота стовпа повітря дорівнює  $h_0 = 15 \text{ см}$ , а зовнішній тиск дорівнює  $p_0 = 760 \text{ мм рт. ст.}$ ? Площа поршня  $S = 10 \text{ см}^2$ . Вагою поршня знехтувати. Температура залишається незмінною.

124. Один моль кисню, який знаходиться при температурі  $T_0 = 290 \text{ К}$ , адиабатично стиснули так, що його тиск зріс в  $n = 10,0$  разів. Знайти: а) температуру газу після стискування; б) роботу, яка виконана над газом.

125. Яку кількість теплоти віддає моль одноатомного ідеального газу при його ізобарному охолодженні, якщо на стиснення газу в ході цього процесу витрачена робота  $A = 10 \text{ Дж}$ ?

126. Яку долю кількості теплоти, наданої ідеальному газу при ізобарному розширенні становить виконувана ним робота?

127. Знайти зміну внутрішньої енергії  $\Delta U$  моля ідеального одноатомного газу, який ізобарно розширюють від об'єму  $V_1 = 10 \text{ л}$  до об'єму  $V_2 = 20 \text{ л}$  при тиску  $p = 5 \text{ атм}$ .

128. У теплоізолюваному вертикальному циліндрі об'ємом  $V$  під невагим поршнем міститься  $\nu$  молів одноатомного ідеального газу. На поршень кладуть вантаж масою  $M$ , внаслідок цього поршень зміщується на відстань  $h$ . Визначити кінцеву температуру газу  $T_k$ , яка встановиться після переміщення поршня, якщо площа поршня дорівнює  $S$ , атмосферний тиск  $p_0$ .

129. Ідеальний газ, що займає об'єм  $V_0 = 5 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3$  і знаходиться під тиском  $p_0 = 2 \cdot 10^5 \text{ Н/м}^2$  при температурі  $T_0 = 290 \text{ К}$ , був нагрітий при сталому об'ємі, а потім розширений ізобарно. Робота розширення газу при цьому виявилась рівною  $200 \text{ Дж}$ . Наскільки нагрівся газ в ізобарному процесі?

130. Водень об'ємом  $V_0$  та тиском  $p_0$  спочатку ізохорно перевели в стан з тиском в  $n$  разів більшим від початкового, а потім ізобарно в стан з об'ємом в  $k$  разів більшим від початкового. Визначити зміну внутрішньої енергії газу, виконану газом роботу і одержану кількість теплоти.

131. Три молі ідеального газу, що знаходяться при температурі  $T_0 = 273 \text{ К}$ , ізотермічно розширили в  $n = 5$  разів, а потім ізохорно нагріли так, що в кінцевому стані його тиск став рівним початковому. За весь процес газу надали

кількість тепла  $Q = 80 \text{ кДж}$ . Знайти величину  $\gamma = \frac{C_p}{C_V}$  цього газу.

132. Деяку масу азоту стиснули в  $n = 5$  раз (по об'єму) один раз адиабатично, другий раз ізотермічно. Початковий стан в обох випадках однаковий. Знайти співвідношення робіт, затрачених на стиснення газу.

133. Два моля ідеального газу при температурі  $T_0 = 300 \text{ К}$  охолодили ізохорично, внаслідок чого тиск зменшився в  $n = 2$  рази. Потім газ ізобарно розширився так, що в кінцевому стані його температура стала рівною початковій. Знайти кількість тепла, що поглинув газ в даному процесі.

134. Деяка маса газу при тискові  $1 \text{ атм}$  мала об'єм  $5 \text{ л}$ , а при тискові  $3 \text{ атм}$ . — об'єм  $2 \text{ л}$ . Перехід з першого стану в другий був зроблений в два

етапи: спочатку по ізохорі, потім по ізобарі. Знайти зміну внутрішньої енергії, кількості теплоти та виконану роботу. Виконати ті ж самі розрахунки у випадку зворотнього ходу етапів: спочатку по ізобарі, потім по ізохорі. Чому результат різний?

135. Початковий і кінцевий стан деякої маси азоту такий самий, як і в попередній задачі. Перехід від першого стану в другий відбувається також в два етапи: спочатку по адіабаті, потім по ізохорі. Знайти зміну внутрішньої енергії, кількості теплоти та виконану роботу. Виконати ті ж самі розрахунки у випадку зворотнього ходу етапів переходу.

136. 14 г азоту адіабатично розширюється так, що тиск зменшується в п'ять разів, а потім ізотермічно стискають до початкового тиску. Початкова температура азоту  $T_1 = 420$  К. Знайти: а) температуру газу  $T_2$  в кінці процесу; б) кількість теплоти, відданої газом; в) приріст внутрішньої енергії газу; г) виконану газом роботу.

137. Суміш газів складається з 10 г гелію і 4 г водню. Визначити відношення  $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$  для даної суміші.

138. 25% молекул кисню дисоціювали на атоми. Визначити питомі теплоємності  $C_p$  і  $C_v$  такого газу.

139. Дана суміш газів, яка складається з неону, маса якого  $M_1 = 4$  кг, і водню, маса якого  $M_2 = 1$  кг. Гази вважати ідеальними. Визначте питомі теплоємності суміші в ізобаричному і ізохоричному процесах.

140. Знайти відношення  $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$  для суміші 3 молів аргону і 5 молів кисню.

141. Знайти питомі теплоємності для газової суміші, що складається із 70 г азоту і 20 г аргону. Гази вважати ідеальними.

142. При яких значеннях показника політропи  $n$  ідеальний газ нагрівається при стисканні, а при яких охолоджується.

143. При деякому політропному процесі об'єм аргону збільшився в  $\alpha = 4,0$  разів, а тиск зменшився в  $\beta = 8,0$  разів. Знайти молярну теплоємність аргону в цьому процесі, вважаючи аргон ідеальним газом.

144. Один моль аргону розширився по політропі з показником  $n = 1,5$ . При цьому температура газу змінилась на  $\Delta T = -26$  К. Знайти: а) кількість теплоти, отриману газом; б) роботу, виконану газом.

145. Ідеальний газ з показником адіабати  $\gamma$  розширили по закону  $p = \alpha V$ , де  $\alpha$  — стала величина. Початковий об'єм газу  $V_0$ . Внаслідок розширення об'єм збільшився в  $\eta$  разів. Знайти: а) приріст внутрішньої енергії газу; б) роботу, здійснену газом; в) молярну теплоємність газу в цьому процесі.

146. Один моль ідеального газу з показником адіабати  $\gamma$  здійснює процес, при якому його тиск залежить від температури по закону  $p = aT^\alpha$ , де  $a$  і  $\alpha$  — сталі величини. Знайти: а) роботу, що виконує газ, якщо його темпера-

тура збільшується на  $\Delta T$ ; б) молярну теплоємність газу в цьому процесі. При яких значеннях  $\alpha$  теплоємність буде від'ємною.

147. Ідеальний газ з показником адіабати  $\gamma$  здійснює процес, при якому внутрішня енергія залежить від об'єму по закону  $U = aV^\alpha$ , де  $a$  і  $\alpha$  сталі величини. Знайти: а) роботу, що виконує газ і тепло, яке необхідно подати газу, щоб його внутрішня енергія змінилась на  $\Delta U$ ; б) молярну теплоємність газу в цьому процесі.

148. Молярна теплоємність ідеального газу при сталому об'ємі дорівнює  $C_v$ . Знайти молярну теплоємність цього газу як функцію об'єму  $V$ , якщо газ здійснює процес за законом: а)  $T = T_0 e^{\alpha V}$ ; б)  $p = p_0 e^{\alpha V}$ , де  $T_0, p_0$  і  $\alpha$  сталі величини.

149. Показник адіабати ідеального газу  $\gamma$ . Його молярна теплоємність при деякому процесі змінюється за законом  $C = \frac{\alpha}{T}$ , де  $\alpha$  — стала величина.

Знайти: а) роботу, що виконує один моль газу при його нагріванні від температури  $T_0$  до температури в  $\eta$  раз більшої; б) рівняння процесу в параметрах  $p, V$ .

150. Знайти рівняння процесу для ідеального газу в змінних величинах  $T, V$ , якщо молярна теплоємність змінюється за законом: а)  $C = C_v + \alpha T$ ; б)  $C = C_v + \beta V$ ; в)  $C = C_v + \alpha p$ . Тут  $\alpha, \beta, a$  — сталі величини.

151. Один моль ідеального газу, теплоємність якого при сталому тиску дорівнює  $C_p$ , здійснює процес за законом  $T = T_0 + \alpha V$ , де  $T_0$  і  $\alpha$  — сталі величини. Знайти: а) теплоємність газу як функцію його об'єму; б) передану газу кількість тепла, якщо його об'єм збільшився від  $V_1$  до  $V_2$ .

152. Один моль ідеального газу з показником адіабати  $\gamma$  здійснює процес за законом  $p = p_0 + \alpha/V$ , де  $p_0$  і  $\alpha$  — сталі додатні величини. Знайти: а) теплоємність газу як функцію його об'єму; б) зміну внутрішньої енергії газу, виконану ним роботу, а також передану газу кількість теплоти, якщо об'єм збільшився від  $V_1$  до  $V_2$ .

153. Один моль азоту, що знаходиться при нормальних умовах, розширюється так, що із збільшенням об'єму його температура змінюється відповідно до рівняння  $T = \alpha V + \beta V^2$ , де  $\alpha$  і  $\beta$  — деякі постійні величини. Знайти зміну внутрішньої енергії газу при збільшенні його об'єму вдвічі. Визначити роботу газу при розширенні.

154. У циліндрі, закритому з обох кінців і наповненому повітрям, знаходиться поршень, який ділить простір у циліндрі на дві рівні частини. Тиск по обидві сторони поршня  $p_0 = 1$  атм. Поршень відхиляють від положення рівноваги на незначну відстань і він починає здійснювати коливальні рухи, причому процеси в газі адіабатичні. Знайти період цих коливань, якщо маса поршня  $M = 1,5$  кг, відстань від поршня до стінки  $l = 20$  см, площа поршня  $S = 100$  см<sup>2</sup>. Тертям знехтувати.



## § 2. Другий закон термодинаміки

Коефіцієнт корисної дії (ККД) теплової машини виражається так:

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1},$$

де  $A$  — механічна робота,  $Q_1$  — тепло від нагрівання,  $Q_2$  — тепло, що віддає робоче тіло холодильнику.

Коефіцієнт корисної дії *оборотного циклу Карно*:

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1},$$

де  $T_1$  — температура нагрівника,  $T_2$  — температура холодильника.

ККД будь-якого циклу не може бути більшим, ніж ККД оборотного циклу Карно за умови, що вони мають спільний нагрівник і холодильник з температурами  $T_1$  і  $T_2$  відповідно. Тобто

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} \leq \frac{T_1 - T_2}{T_1}.$$

*Нерівність Клаузіуса* має вигляд:

$$\oint \frac{dQ}{T} \leq 0,$$

де  $dQ$  — елементарне тепло, отримане системою. Інтеграл обчислюється по всьому замкненому контуру циклу.

*Зміна ентропії* розраховується так:

$$\Delta S \geq \int_1^2 \frac{dQ}{T}.$$

*Другий закон термодинаміки*: ентропія замкненої системи збільшується при необоротних процесах і залишається сталою у випадку оборотних процесів, тобто  $\Delta S \geq 0$ .

*Основна термодинамічна тотожність* для оборотних процесів

$$TdS = dU + pdV$$

*Вільна енергія*  $F = U - TS$ .

*Зв'язок між ентропією та термодинамічною імовірністю* виражається формулою:  $S = k \ln W + C$ , де  $k$  — стала Больцмана.

### Методичні вказівки

Пристаючи до розв'язування задач на кругові цикли, слід, перш

за все, зробити правильне графічне зображення даного циклу. Частіше всього його роблять в координатах  $pV$ , але це не обов'язково. Потім розібратись, на яких ділянках циклу тепло поступає в систему, на яких навпаки — система віддає тепло, яка робота при цьому виконується — додатна чи від'ємна, чому дорівнює сумарна за цикл робота, як змінюється температура. Якщо є необхідність, визначити кількість теплоти на кожній ділянці, роботу, зміну внутрішньої енергії, а потім розрахувати ККД, або холодильний коефіцієнт. При цьому частіше всього користуються першим законом термодинаміки. Рівність та нерівність Клаузіуса застосовують в задачах, де є необхідність порівняти ККД оборотних та необоротних теплових машин.

Для розрахунку зміни ентропії в більшості випадків слід користуватись основною термодинамічною тотожністю, з якої визначають елементарну зміну ентропії, а потім шляхом інтегрування, враховуючи умови задачі, знаходять повну зміну ентропії. Якщо розрахунок

зміни ентропії проводиться по формулі  $dS = \frac{dQ}{T}$ , слід пам'ятати, що  $dQ$  може бути як додатним, так і від'ємним, і тому зміна ентропії на окремих ділянках незамкненої системи може бути від'ємною, тобто ентропія може зменшуватись. Крім того, не забувати, що ентропія є функція стану системи, і тому повна зміна ентропії дорівнює алгебраїчній сумі змін ентропії на кожній ділянці. При адиабатичному процесі  $dQ = 0$  і тому  $\Delta S = 0$ , а це означає, що  $S = \text{const}$ , тобто ентропія не змінюється.

### Приклади розв'язування задач

1. Водень здійснює оборотний цикл Карно (Рис. 7). Знайти ККД циклу, якщо при адиабатичному розширенні: а) об'єм газу збільшився в  $n = 2$  рази; б) тиск зменшився в  $n = 2$  рази.

Дано: а)  $\frac{V_3}{V_2} = n = 2.0$  б)  $\frac{p_2}{p_3} = n = 2.0$

$\eta_a = ?$   $\eta_b = ?$

**Розв'язання.** Коефіцієнт корисної дії оборотного циклу Карно дорівнює

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1}.$$

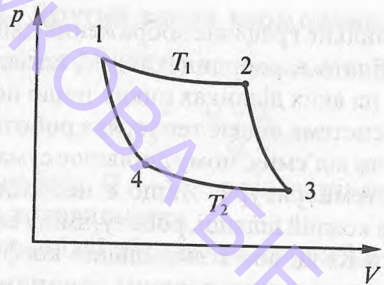


Рис. 7

У випадку а) запишемо зв'язок між температурою та об'ємом при адиабатичному розширенні  $T_1 V_2^{\gamma-1} = T_2 V_3^{\gamma-1}$ . Звідси

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_2}{V_3}\right)^{\gamma-1} = \left(\frac{1}{n}\right)^{\gamma-1} = n^{1-\gamma}.$$

Тоді  $\eta = 1 - n^{1-\gamma}$ . Оскільки водень — двоатомний газ,  $i = 5$ ,  $\gamma = 1,4$ , а  $\eta = 0,25$ .

У випадку б) зв'язок між температурою і тиском при адиабатично-му розширенні записується так  $T_1 p_2^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = T_2 p_3^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}$ . Відношення темпера-

тур дорівнює  $\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{p_2}{p_3}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = n^{\frac{1}{\gamma}-1}$ . Підставляючи це відношення у вираз для ККД, знаходимо

$$\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1} = 1 - n^{\frac{1}{\gamma}-1} = 0,18.$$

2. Знайти ККД оборотного теплового циклу Отто (Рис. 8), який включає дві адиабати 12, 34 і дві ізохори 23, 41, якщо робочим тілом є ідеальний газ і відомими є температури  $T_1$  і  $T_2$  в станах 1 і 2.

Дано:  $T_1, T_2$   
 $\eta = ?$

**Розв'язання.** Коефіцієнт корисної дії теплової машини Отто розрахуємо так:  $\eta = \frac{A}{Q_1}$ . Робота в даному випадку дорівнює  $A = A_{12} - A_{34}$ , де  $A_{12}$  — робота, яку виконує газ при адиабатичному розширенні, а

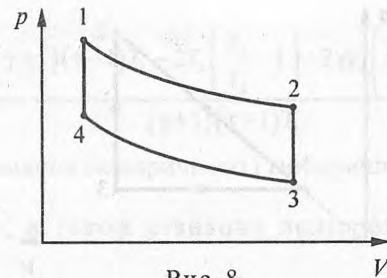


Рис. 8

$A_{34}$  — від'ємна робота, що виконується зовнішніми силами над газом при адиабатичному стисненні. Робота при ізохорних процесах  $A_{23} = A_{41} = 0$ . Кількість теплоти  $Q_1$ , що поступає в систему від нагрівника, може бути тільки при ізохорному нагріванні на дільниці 41. Тобто  $Q_1 = Q_{41}$ . Знайдемо ці величини, прийнявши для визначеності, що кількість газу (робочого тіла) дорівнює одному молу. Тоді

$$A_{12} = C_V(T_1 - T_2), A_{34} = C_V(T_4 - T_3), Q_{41} = C_V(T_1 - T_4).$$

Підставляючи ці величини у вираз для ККД, отримаємо:

$$\eta = \frac{T_1 - T_2 - T_4 + T_3}{T_1 - T_4} = 1 - \frac{T_2 - T_3}{T_1 - T_4}.$$

Температури  $T_3$  і  $T_4$  — невідомі. Для їх виключення скористаємось рівнянням Пуассона в адиабатичних процесах  $T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_2^{\gamma-1}$  і  $T_3 V_3^{\gamma-1} = T_4 V_4^{\gamma-1}$ . Оскільки  $V_2 = V_3$ , а  $V_1 = V_4$ , із останніх двох рівнянь

отримаємо співвідношення  $\frac{T_1}{T_4} = \frac{T_2}{T_3}$ , скориставшись яким, після нескладних математичних дій коефіцієнт корисної дії знаходимо у вигляді:

$$\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1}.$$

Такий же вигляд має і ККД оборотного циклу Карно, але слід пам'ятати, що температури  $T_1$  і  $T_2$  в даній задачі не є температурами нагрівника і холодильника.

3. Ідеальний газ з показником  $\gamma$  здійснює цикл (Рис. 9), в межах якого абсолютна температура змінюється в  $\tau$  раз. Знайти ККД циклу.

Дано:  $\frac{T_2}{T_1} = \tau$   
 $\eta = ?$

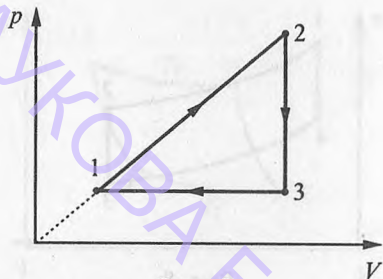


Рис. 9

У даному циклі на ділянці 12 відбувається політропний процес, при цьому тепло  $Q_{12}$  надходить до системи. На ділянці 23 відбувається ізохоричний процес, при якому система віддає тепло  $Q_{23}$ . Ділянка 31 відповідає ізобарному охолодженню, при якому система також віддає кількість тепла  $Q_{31}$ . Для визначення ККД знайдемо вищезазначені кількості теплот.

Теплоту  $Q_{12}$  можна знайти шляхом інтегрування виразу  $dQ = CdT$ , де  $C$  — молярна теплоємність політропного процесу. Теплоємність, в свою чергу, можна визначити із означення показника політропи

$n = \frac{C - C_p}{C - C_v}$ . У даній задачі рівняння політропи має вигляд  $pV^{-1} = const$ .

Тобто показник політропи  $n = -1$ . Враховуючи, що  $C_v = \frac{R}{\gamma - 1}$ , знаходимо

$$C = \frac{R\gamma + 1}{2\gamma - 1}. \text{ Тоді } Q_{12} = \int_{T_1}^{T_2} CdT = \frac{R(\gamma + 1)(T_2 - T_1)}{2(\gamma - 1)}.$$

Теплота  $Q_{23}$  при ізохоричному охолодженні від'ємна

$$Q_{23} = -C_v(T_2 - T_3) = -\frac{R}{\gamma - 1}(T_2 - T_3).$$

Теплота  $Q_{31}$  при ізобаричному охолодженні також від'ємна

$$Q_{31} = -C_p(T_3 - T_1) = -\frac{\gamma R}{\gamma - 1}(T_3 - T_1).$$

ККД циклу знаходимо по формулі  $\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}$ , де  $Q_1 = Q_{12}$ , а

$Q_2 = Q_{23} + Q_{31}$ . Тоді  $\eta = \frac{Q_{12} - Q_{23} - Q_{31}}{Q_{12}}$ . Підставляючи відповідні значення теплот і враховуючи, що  $\frac{T_2}{T_1} = \tau$ , знаходимо

$$\eta = \frac{(\gamma + 1)(\tau - 1)T_1 - 2T_3\left(\frac{T_2}{T_3} - 1\right) - 2\gamma T_3\left(1 - \frac{T_1}{T_3}\right)}{(\gamma + 1)(\tau - 1)T_1}.$$

Застосовуючи рівняння ізохоричного і ізобаричного процесів 23 і 31

$\frac{T_2}{T_3} = \frac{p_2}{p_1}, \frac{T_1}{T_3} = \frac{V_1}{V_2}$ , а також рівняння політропного процесу 12

$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^\gamma = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{-1}, \frac{V_1}{V_2} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{1}{\gamma - 1}} = \tau^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{\tau}}$ , знаходимо ККД даного

циклу:

$$\eta = 1 - 2 \frac{\gamma + \sqrt{\tau}}{(\gamma + 1)(\sqrt{\tau} + 1)}.$$

4. Змішуються  $V_1 = 5$  л і  $V_2 = 3$  л двох різних, хімічно не реагуючих газів, що мають однакову температуру  $T = 300$  К і тиск  $p = 1$  атм. Знайти зміну ентропії, яка при цьому відбувається.

Дано:  $V_1 = 5$  л,  $V_2 = 3$  л,  $T = 300$  К,  $p = 1$  атм.

$\Delta S = ?$

**Розв'язання.** Згідно до умови задачі змішуються два хімічно не реагуючі різномолярні гази, тому загальна зміна ентропії буде дорівнювати алгебраїчній сумі змін ентропії кожного газу, тобто

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2.$$

Зміну ентропії для кожного газу окремо можна підрахувати, користуючись основною термодинамічною тотожністю  $TdS = C_v dT +$

$+ pdV$ . Звідси  $dS = \frac{C_v dT}{T} + \frac{pdV}{T}$ . Оскільки процес змішування відбу-

вається при сталій температурі,  $dT = 0$ , і тому  $dS = \frac{pdV}{T}$ . Із рівняння

Клапейрона-Менделєєва знаходимо  $\frac{p}{T} = \frac{M}{\mu V} R$ . Після підстановки останнього виразу в формулу для елементарної зміни ентропії, отримаємо:

$$dS = \frac{M}{\mu} R \frac{dV}{V}.$$

Інтегрування останнього виразу дає можливість знайти кінцеву зміну ентропії після змішування для кожного газу окремо:

$$\Delta S_1 = \frac{M_1}{\mu_1} R \ln \frac{V_1 + V_2}{V_1}; \quad \Delta S_2 = \frac{M_2}{\mu_2} R \ln \frac{V_1 + V_2}{V_2}.$$

Замінивши  $\frac{M_1}{\mu_1} R$  і  $\frac{M_2}{\mu_2} R$  із рівняння Клапейрона-Менделєєва відповідно на  $\frac{p}{T} V_1$  і  $\frac{p}{T} V_2$ , знаходимо загальну зміну ентропії

$$\Delta S = \frac{p}{T} \left( V_1 \ln \frac{V_1 + V_2}{V_1} + V_2 \ln \frac{V_1 + V_2}{V_2} \right) = 0,43 \frac{\text{кал}}{\text{град}}.$$

5. Один моль ідеального газу з показником адиабати  $\gamma$  здійснює політропний процес, в якому абсолютна температура газу збільшується в  $\tau$  раз. Показник політропи  $n$ . Знайти приріст ентропії газу в даному процесі.

Дано:  $\nu = 1$  моль,  $\gamma, n, \frac{T_2}{T_1} = \tau$ .

$\Delta S = ?$

**Розв'язання.** Для розрахунку зміни ентропії скористаємось означенням  $dS = \frac{dQ}{T}$ . Тут  $dQ$  — кількість теплоти, яка була передана одному молу газу  $dQ = CdT$ , де  $C$  — молярна теплоємність даного політропічного процесу. Теплоємність можна визначити через відомі показники адиабати  $\gamma$  і політропи  $n$

$$C = \frac{(n - \gamma)R}{(n - 1)(\gamma - 1)}.$$

Приріст ентропії знайдемо шляхом інтегрування елементарної зміни ентропії в границях, заданих умовою задачі

$$\Delta S = \int_{T_1}^{T_2} \frac{dQ}{T} = C \int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} = \frac{(n - \gamma)R}{(n - 1)(\gamma - 1)} \ln \tau.$$

6. У невеликій теплоізоляованій посудині, що поділена на дві рівні частини, в кожній знаходиться по  $1 \cdot 10^{-8}$  моля вуглекислого газу при температурах  $t_1 = 28^\circ\text{C}$  і  $t_2 = 27^\circ\text{C}$ . Визначити, у скільки разів зросте ймовірність стану системи при вирівнюванні температур. Знайти зміну

ймовірності при спонтанному переході такої ж кількості тепла від менш нагрітого газу до більш нагрітого.

Дано:  $\nu = 1 \cdot 10^{-8}$  моля  $\text{CO}_2$ ,  $t_1 = 28^\circ\text{C}$ ,  $t_2 = 27^\circ\text{C}$

$\frac{W_2}{W_1} = ?$

Згідно зі співвідношенням Больцмана, зв'язок між ентропією і термодинамічною ймовірністю системи записується у вигляді  $S_1 = k \ln W_1$ . Після того, як температури обох частин посудини зрівнялись, ентропія збільшилась і дорівнює  $S_2 = k \ln W_2$ . Знайдемо зміну ентропії

$$\Delta S = S_2 - S_1 = k \ln \frac{W_2}{W_1}, \text{ звідки } \frac{W_2}{W_1} = e^{\frac{\Delta S}{k}}.$$

Таким чином, для розрахунку відношення ймовірності необхідно визначити зміну ентропії  $\Delta S$ .

Оскільки об'єми обох частин однакові і кількості вуглекислого газу в них також однакові, то внаслідок теплообміну при ізохорному процесі, кількість теплоти, яку віддає перша частина, дорівнює кількості теплоти, що отримує друга частина  $Q_{12} = Q_{21}$ . А, оскільки  $Q_{12} = \nu C_V \Delta T$ ,

то це означає, що  $\Delta T = \frac{T_1 - T_2}{2} = \frac{301 - 300}{2} = 0,5 \text{ град}$ .

Зміну ентропії всієї системи розрахуємо як сумарний результат зміни ентропії кожної частини

$$\Delta S = \int_{T_1}^{T_1 - \Delta T} \frac{dQ}{T} + \int_{T_2}^{T_2 + \Delta T} \frac{dQ}{T}.$$

Після інтегрування отримаємо:

$$\Delta S = \nu C_V \left( \ln \frac{T_1 - \Delta T}{T_1} + \ln \frac{T_2 + \Delta T}{T_2} \right).$$

Оскільки  $\Delta T \ll T_2 \approx T_1$ , натуральні логарифми можна розкласти в степеневий ряд і обмежитись тільки першими членами. Тоді

$$\Delta S = \nu C_V \Delta T \left( -\frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} \right),$$

де  $\nu C_V \Delta T = Q_{12}$ .

Для вуглекислого газу  $C_V = \frac{i}{2} R$ ,  $i = 6$ , тоді  $Q_{12} = 1,25 \cdot 10^{-7} \text{ Дж}$ , а  $\Delta S = 1,38 \cdot 10^{-12} \text{ Дж/град}$ . Відношення термодинамічних ймовірностей

$$\frac{W_2}{W_1} = e^{\frac{\Delta S}{k}} = \exp 10^{11}.$$

Якщо тепло в такій же кількості буде переходити від менш нагрітого газу до більш нагрітого, то зміну ентропії розраховують за формулою:

$$\Delta S' = \nu C_v \Delta T \left( \frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right).$$

У даному випадку вона буде відм'ємна  $\Delta S' = -1,38 \cdot 10^{-12}$  Дж/град.; відповідно до відношення ймовірностей

$$\frac{W_2'}{W_1} = \frac{1}{\exp 10^{11}} \approx 10^{-48}.$$

Таким чином, отриманий результат показує, що спонтанний перехід тепла від менш нагрітої частини до більш нагрітої практично неможливий.

#### Задачі для аудиторних та домашніх занять

155. В якому випадку ККД циклу Карно підніметься більше: при збільшенні температури нагрівника на  $\Delta T$ , чи при зменшенні температури холодильника на таку ж величину?

156. У тепловій машині, що працює за циклом Карно, температура нагрівника в  $n = 1,6$  разів більше температури холодильника. За один цикл машина виконує роботу  $A = 12,0$  кДж. Яка робота за цикл витрачається на ізотермічне стискування робочої речовини?

157. Теплова машина Карно, що має ККД  $\eta = 40\%$ , використовується при тих самих теплових резервуарах, як холодильна машина. Скільки тепла  $Q_2$  ця машина може перевести від холодильника до нагрівника за один цикл, якщо до неї за кожен цикл підводиться робота  $A = 10$  кДж?

158. Теплова машина Карно використовується як холодильна машина для підтримки деякого резервуара при температурі  $t_2 = -3$  °С. Температура навколишнього повітря  $t_1 = 27$  °С. Яку механічну роботу необхідно затратити для виконання одного циклу, якщо при цьому від резервуара відводиться  $Q = 900$  кал. тепла?

159. Для забезпечення тепловою енергією використовують ідеальний тепловий насос, що працює за циклом Карно тільки в оберненому напрямку. При цьому необхідно в нагрівнику підтримувати температуру  $100$  °С при зовнішній температурі  $0$  °С. Знайти ККД такого теплового насосу.

160. Теплову машину, що працює за циклом Карно з ККД  $\eta = 10\%$ , використовують при тих самих теплових резервуарах як холодильну машину. Знайти її холодильний коефіцієнт.

161. На рисунку 10 зображена діаграма оборотного циклу, що виконується одним молем ідеального газу. Знайти роботи  $A_{ik}$ , що виконує машина і кількості теплот  $Q_{ik}$ , які отримує газ на кожному етапі циклу. Знайти ККД, виразивши його як функцію  $T_1$  і  $T_2$ , якщо відомі теплоємності  $C_p$  і  $C_v$ . Процес 31 — ізотермічний.

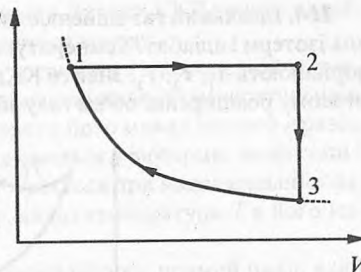


Рис. 10

162. Теплова машина з ідеальним газом як робочим тілом, здійснює цикл, який складається з ізотерми 31 при температурі  $T_1$ , ізобари 12 і ізохори 23 (Рис. 11). Знайти кількість тепла, одержаного робочим тілом, на кожному етапі циклу. Знайти також ККД цього циклу як функцію максимальної  $T_1$  і мінімальної  $T_2$  температури робочого тіла.

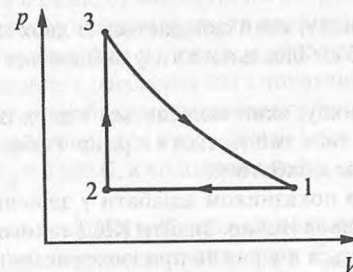


Рис. 11

163. Знайти ККД оборотної теплової машини з ідеальним газом. Машина здійснює цикл (Рис. 12), який складається з адіабати 12, ізобари 23 і ізохори 31. Виразити ККД циклу через максимальну  $T_1$  і мінімальну  $T_3$  температури робочої речовини.

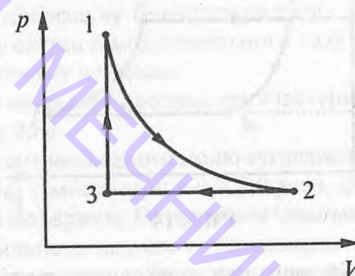


Рис. 12

164. Ідеальний газ здійснює цикл (Рис. 13), який складається із послідовних ізотерм і адіабат. Температури, при яких проведені ізотермічні процеси, дорівнюють  $T_1, T_2, T_3$ . Знайти ККД такого циклу, якщо при кожному ізотермічному розширенні об'єм газу збільшується в одне і те саме число разів.

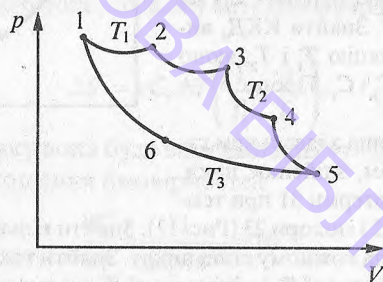


Рис. 13

165. Знайти ККД циклу, який складається із двох ізохор і двох адіабат, якщо в межах циклу об'єм ідеального газу змінюється в 10 разів. Робочою речовиною є азот.

166. Знайти ККД циклу, який складається з двох ізобар і двох адіабат, якщо в границях циклу тиск змінюється в  $n$  разів. Робочою речовиною є ідеальний газ з показником адіабати  $\gamma$ .

167. Ідеальний газ з показником адіабати  $\gamma$  здійснює цикл, який складається із двох ізохор і двох ізобар. Знайти ККД такого циклу, якщо температура  $T$  газу збільшується в  $n$  раз як при ізохорному нагріванні, так і при ізобарному розширенні.

168. Цикл складається з двох ізотерм  $T_1 = 600$  К і  $T_2 = 300$  К і двох ізобар ( $p_1 = 4p_2$ ) (Рис. 14). Визначити ККД циклу, якщо робочим тілом є ідеальний газ, число ступенів вільності молекул якого  $i = 5$ .

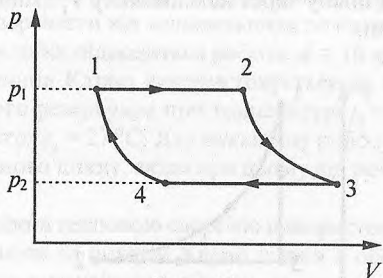


Рис. 14

169. Ідеальний газ здійснює цикл, який складається із: а) ізохори, адіабати і ізотерми; б) ізобари, адіабати і ізотерми; причому ізотермічний процес

відбувається при мінімальній температурі циклу. Знайти ККД кожного циклу, якщо температура  $T$  в його межах змінюється в  $n$  раз.

170. Ідеальний газ здійснює цикли, такі ж самі, як і в попередній задачі, тільки ізотермічний процес відбувається при максимальній температурі циклу. Знайти ККД, якщо температура змінюється в його межах також в  $n$  разів.

171. Ідеальний газ виконує цикл, що складається з ізотерми, політропи і адіабати, причому ізотермічний процес відбувається при максимальній температурі циклу. Знайти ККД такого циклу, якщо температура  $T$  в його межах змінюється в  $n$  разів.

172. Ідеальний газ з показником адіабати  $\gamma$  здійснює прямий цикл, який складається із адіабати, ізохори, ізобари. Знайти ККД циклу, якщо при адіабатичному процесі об'єм ідеального газу: а) збільшується в  $n$  разів; б) зменшується в  $n$  разів.

173. Знайти ККД циклу, що складається з ізотерми, ізобари і ізохори, якщо при ізотермічному процесі об'єм ідеального газу з показником адіабати  $\gamma$ : а) збільшується в  $n$  разів; б) зменшується в  $n$  разів.

174. Знайти ККД циклу, що складається з двох ізохор і двох ізотерм, якщо в межах циклу об'єм змінюється у  $v$  разів, а абсолютна температура — в  $t$  разів. Робочою речовиною є ідеальний газ з показником адіабати  $\gamma$ .

175. Яку максимальну роботу може виконати теплова машина, якщо нагрівником у ній використовується кусок заліза маси  $M = 100$  кг з початковою температурою  $T_{10} = 1500$  К, а холодильником — вода океану з температурою  $T_2 = 285$  К.

176. Скориставшись нерівністю Клаузіуса, показати, що ККД всіх циклів, що мають однакову максимальну температуру  $T_{\max}$  і однакову мінімальну температуру  $T_{\min}$ , менше ніж в циклі Карно при тих самих температурах.

177. За основні змінні величини, які характеризують стан тіла, можна вибрати температуру і ентропію. Зобразити графічно цикл Карно на діаграмі, відкладаючи по осі абсцис ентропію, а по осі ординат температуру. Обчислити за допомогою цього графіка ККД циклу.

178. Теплові машини з будь-яким робочим тілом здійснюють оборотні термодинамічні цикли, зображені на Рис. 15 а), б). Виразити ККД цих циклів через максимальну і мінімальну температури газу.

179. Знайти зміну ентропії моля ідеального газу при ізохоричному, ізотермічному і ізобаричному процесах.

180. Знайти зміну ентропії 5 г водню, який ізотермічно розширюється від об'єму 10 л до об'єму 25 л.

181. Знайти зміну ентропії одного моля вуглекислого газу при збільшенні його термодинамічної температури в  $n = 2,0$  рази, якщо процес нагрівання був: а) ізохорним; б) ізобарним. Газ вважати ідеальним.

182. Два моля ідеального газу спочатку ізохорно охолодили, а потім ізобарно розширили так, що температура газу стала рівною початковій. Знайти приріст ентропії газу, якщо його тиск у даному процесі змінився в  $n = 3,3$  раза.

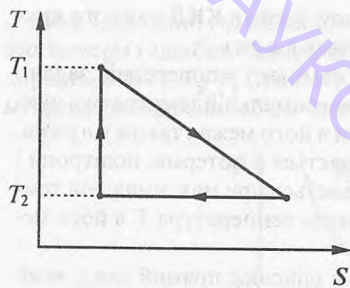


Рис. 15 а

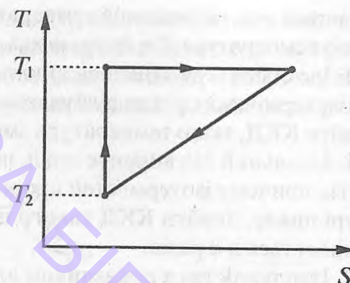


Рис. 15 б

184. Знайти зміну ентропії двох молів ідеального газу з показником адіабати  $\gamma = 1,3$ , якщо внаслідок деякого процесу об'єм газу збільшився в  $\alpha = 2,0$  раза, а тиск зменшився в  $\beta = 3,0$  раза.

185. Процес розширення двох молів аргону здійснюється так, що тиск газу збільшується прямо пропорційно його об'єму. Знайти приріст ентропії газу при збільшенні його об'єму в  $\alpha = 2,0$  раза.

186. У скільки разів слід збільшити ізотермічно об'єм ідеального газу в кількості  $\nu = 4,0$  моля, щоб його ентропія збільшилась на  $\Delta S = 23 \text{ Дж/град.}$ ?

187. У посудинах 1 і 2 знаходиться по  $\nu = 1,2$  молів газоподібного гелію.

Відношення об'ємів посудин  $\frac{V_2}{V_1} = \alpha = 2,0$ , а відношення абсолютних тем-

ператур гелію в них  $\frac{T_1}{T_2} = \beta = 1,5$ . Вважаючи газ ідеальним, знайти різницю

ентропій гелію в цих посудинах.

188. Визначити зміну ентропії 1 г водню в наступних випадках: а) газ спочатку адіабатично стискається до вдвічі меншого об'єму, потім ізохорично охолоджується до початкової температури; б) газ спочатку адіабатично стискається до вдвічі меншого об'єму, потім ізотермічно розширюється до початкового об'єму.

189. Теплоізольована посудина розділена перегородкою на дві частини так, що об'єм однієї з них в  $n = 2$  рази більше об'єму другої. У меншій частині знаходиться  $\nu_1 = 0,3$  моля азоту, а в більшій частині  $\nu_2 = 0,7$  моля кисню. Температура газів однакова. У перегородці відкрили отвір, і гази перемішалися. Знайти приріст ентропії всієї системи, вважаючи гази ідеальними.

190. Два балони з об'ємами  $V = 1 \text{ л}$  кожний з'єднані трубою з краном. В одному з них знаходиться водень при тискові  $1 \text{ атм.}$  і температурі  $t_1 = 20 \text{ }^\circ\text{C}$ , у другому — гелій при тискові  $3 \text{ атм.}$  і температурі  $t_2 = 100 \text{ }^\circ\text{C}$ . Знайти зміну ентропії системи після відкриття крану і досягнення рівноважного стану. Стінки балонів і трубки забезпечують певну теплоізоляцію газів від навколишнього середовища.

191. Знайти зміну ентропії 30 г льоду при перетворенні його в пару, якщо початкова температура льоду  $-40 \text{ }^\circ\text{C}$ , а температура пари  $100 \text{ }^\circ\text{C}$ . Теплоємність води і льоду вважати постійними, всі процеси відбуваються при атмосферному тискові. Питома теплоємність льоду  $0,5 \text{ кал/г} \cdot \text{град.}$

192. 200 г заліза при  $100 \text{ }^\circ\text{C}$  занурені в калориметр, в якому знаходиться 300 г води при  $12 \text{ }^\circ\text{C}$ . Як зміниться ентропія після вирівнювання температур?

Питоми теплоємності заліза  $c = 0,11 \frac{\text{кал.}}{\text{г} \cdot \text{град.}}$ , води  $c = 1 \frac{\text{кал.}}{\text{г} \cdot \text{град.}}$ .

193. У калориметр, де знаходиться 250 г води при  $23 \text{ }^\circ\text{C}$ , кидають 27 г льоду при  $0 \text{ }^\circ\text{C}$ . Визначіть зміну ентропії, яка мала місце на момент закінчення плавлення льоду. Теплоємністю калориметра знехтувати. Питома теплоємність льоду  $79,6 \text{ кал/г.}$

194. Знайти ентропію одного моля азоту при температурі  $T_0 = 300 \text{ К}$ , якщо при оборотному адіабатичному стискуванні його в  $\eta = 5,0$  рази приріст вільної енергії  $\Delta F = -48,5 \text{ кДж.}$  Газ вважати ідеальним.

195. В результаті оборотного адіабатного розширення температура моля одноатомного ідеального газу знижується на  $\Delta T = 10 \text{ К}$ . Ентропія газу  $S = 20 \text{ Дж/моль} \cdot \text{град.}$  Знайти приріст вільної енергії газу.

196.  $N$  атомів газоподібного гелію знаходиться при кімнатній температурі в кубічній посудині об'ємом  $1,0 \text{ см}^3$ . Знайти: а) ймовірність того, що всі атоми зберуться в одній половині посудини; б) приблизне число значення  $N$ , при якому цей випадок можна очікувати протягом  $t \approx 10^{10}$  років (вік Всесвіту).

197. Знайти статистичну вагу найбільш ймовірного розподілу  $N = 10$  однакових молекул по двох однакових половинках посудини. Знайти математичну ймовірність такого розподілу.

198.  $N$  молекул ідеального газу знаходяться в деякій посудині. Поділивши умовно посудину на дві однакові половини А і В, знайти ймовірність того, що в половині А зберуться  $n$  молекул. Розглянути випадки, коли  $N = 5$ , а  $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ .

199. Ідеальний газ знаходиться при нормальних умовах. Знайти діаметр сфери, в об'ємі якої відносна флуктуація числа молекул  $\eta = 1 \cdot 10^{-3}$ . Яке середнє число молекул всередині такої сфери?

## РЕАЛЬНІ ГАЗИ, РІДИНИ, ТВЕРДІ ТІЛА, ФАЗОВІ ПЕРЕХОДИ

Наявність міжмолекулярних сил і визначенні розміри молекул є основною відмінністю реальних газів від ідеальних. Між атомами та молекулами діють сили притягання і сили відштовхування. І ті, і інші зменшуються із збільшенням відстані між частинками. Існує певна відстань  $r_0$ , на якій сила притягання зрівноважується силою відштовхування. Такій відстані відповідає мінімальна потенціальна енергія  $U_{min}$ . Якщо  $U_{min} \ll kT$ , то речовина знаходиться в газоподібному стані. Умова  $U_{min} \approx kT$  відповідає рідинному стану, а  $U_{min} \gg kT$  — твердому.

За своїми властивостями рідини схожі як з газами, так і з твердими тілами. Такий подвійний характер пов'язаний з особливостями руху їх молекул. У газах молекули рухаються хаотично, в їхньому розташуванні відсутній будь-який порядок. Навпаки, в кристалічних твердих тілах частинки здійснюють коливальні рухи навколо певних положень рівноваги, які називаються вузлами кристалічної решітки. Молекули рідин, подібно частинкам твердого тіла, здійснюють коливання навколо положення рівноваги. Разом з тим, на відміну від твердих тіл, ці положення рівноваги постійно і хаотично зміщуються в речовині на невеликі відстані.

Перехід від одного агрегатного стану до іншого відбувається при стрибкоподібній зміні внутрішньої енергії речовини. У молекулярній фізиці поняття агрегатного стану відрізняється від поняття фази. Фазою називають сукупність атомів або молекул, яка має визначені фізико-хімічні властивості та структуру. Термодинаміка визначає фазу як однорідну частину системи, яка відокремлена від інших частин системи границями розділу і може бути механічно вилучена із системи.

### § 1. Реальні гази. Ефект Джоуля-Томсона

Рівняння стану реального газу у більшості випадків записують у вигляді рівняння Ван-дер-Ваальса:

$$\left(p + v^2 \frac{a}{V^2}\right)(V - vb) = \nu RT,$$

де  $\nu$  — кількість молів даного газу.

Критичні параметри через поправки  $a$  і  $b$  виражаються таким чином:

$$p_k = \frac{a}{27b^2}, V_{0k} = 3b, T_k = \frac{8a}{27Rb}.$$

Зведене рівняння Ван-дер-Ваальса записується так:

$$\left(\pi + \frac{3}{\omega^2}\right)\left(\omega - \frac{1}{3}\right) = \frac{8}{3}\theta, \text{ де } \pi = \frac{p}{p_k}, \theta = \frac{T}{T_k}, \omega = \frac{V}{V_{0k}}.$$

Внутрішня енергія одного моля реального газу

$$U = \left(C_v T - \frac{a}{V_0}\right).$$

Зміна температури в ефекті Джоуля-Томсона дорівнює:

$$\Delta T = T_2 - T_1 = \frac{1}{C_v + R} \left( \frac{RT_1 b}{V_1 - b} - \frac{2a}{V_1} \right).$$

Температура інверсії, при якій можлива зміна знаку в ефекті Джоуля-Томсона  $T_1 = \frac{2a}{Rb}$ .

#### Методичні вказівки

Частіше всього в умовах задач даного параграфу наведені випадки, коли газ слід розглядати як реальний. Якщо ж з умови задачі неможливо зробити висновок про те, яким слід вважати газ, можна знайти його молярний об'єм і порівняти з молярним об'ємом газу при нормальних умовах ( $22,4 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3/\text{моль}$ ). Якщо  $V_0 \ll V_{\text{норм}}$ , то газ реальний. Слід також пам'ятати, що поправки  $a$  і  $b$  для кожного газу мають свої числові значення, які можна взяти із таблиць додатку. У задачах, де необхідно знайти такі термодинамічні величини, як внутрішня енергія, робота, що її виконує реальний газ, теплоємність, ент-



ропія, користуються такими ж методами, як і в термодинаміці ідеального газу з урахуванням рівняння Ван-дер-Ваальса, а також залежності внутрішньої енергії як від температури, так і від об'єму.

При досить малій адиабатній зміні тиску і об'єму газу, коли він дроселюється через пористу перегородку, зміну температури визначає диференціальний ефект Джоуля-Томсона. При значній зміні тиску (об'єму) необхідно просумувати малі зміни температури. Сумарний ефект зміни температури характеризуватиме інтегральний ефект Джоуля-Томсона.

### Приклади розв'язування задач

1. У дуже міцному закритому сталевому балоні знаходиться вода, яка займає при кімнатній температурі половину об'єму балона. Знайти тиск і густину водяної пари при нагріванні балона до  $t = 400^\circ\text{C}$ .

$$\text{Дано: } \frac{V_{\text{пара}} = 2V_{\text{вода}}, t = 400^\circ\text{C}}{p - ? \rho - ?}$$

**Розв'язання.** Густина води при кімнатній температурі  $\rho_w = 1 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$ . Оскільки після нагрівання вода перетворюється на пару і займає об'єм у два рази більший, то це означає, що густина пари в два рази менша і дорівнює  $\rho = 0,5 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$ . Це досить густа пара, і щоб знайти її тиск, необхідно скористатись рівнянням реального газу. У даному випадку доцільно розглянути рівняння Ван-дер-Ваальса для одного моля газу:

$$\left(p + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT,$$

звідки  $p = \frac{RT}{V - b} - \frac{a}{V^2}$ . Тут  $V$  — об'єм одного моля. Його можна знайти через густину водяної пари  $V = \frac{\mu}{\rho}$ , де  $\mu$  — молярна маса. Підставляючи це значення в формулу для тиску, маємо:

$$p = \frac{RT}{\frac{\mu}{\rho} - b} - \frac{a\rho^2}{\mu^2}.$$

Значення констант  $a$  і  $b$  візьмемо з таблиць  $a = 0,55 \text{ м}^3\text{Н/моль}^2$ ,  $b = 3,0 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3\text{моль}$ ,  $\mu = 0,018 \text{ кг/моль}$ ,  $T = 673 \text{ К}$ . Виконавши розрахунки, отримаємо  $p = 5,1 \cdot 10^8 \text{ Па} \approx 5 \cdot 10^3 \text{ атм}$ .

2. Яку частину об'єму  $V$  скляної ампули повинен займати рідкий ефір об'ємом  $V_p$  при  $t = 20^\circ\text{C}$ , щоб при його нагріванні можна було б спостерігати перехід речовини через критичний стан, якщо для ефіру відомі:  $\mu = 0,074 \text{ кг/моль}$ ,  $\rho = 714 \text{ кг/м}^3$ ,  $t_k = 194^\circ\text{C}$ ,  $p_k = 35,6 \text{ атм}$ .

**Розв'язання.** Для того, щоб спостерігати перехід ефіру, що знаходиться в ампулі через критичний стан, необхідно, щоб при досягненні критичної температури об'єм ампули дорівнював критичному об'єму  $V = V_k$ . Тоді невідоме в задачі відношення  $\frac{V_p}{V}$  дорівнює  $\frac{V_p}{V_k}$ . У

даному випадку  $V_k = \nu V_{0k}$ , де  $\nu = \frac{M}{\mu}$ , а  $V_{0k}$  — критичний об'єм одного молю. Враховуючи також, що  $M/V_p = \rho$ , невідоме відношення запишемо так:  $\frac{V_p}{V} = \frac{V_p}{V_k} = \frac{V_p \mu}{M V_{0k}} = \frac{\mu}{\rho V_{0k}}$ . Скориставшись зв'язком між критичними параметрами, знайдемо критичний об'єм одного моля

$$V_{0k} = \frac{3T_k R}{8p_k}.$$

Підставивши це значення у вираз для співвідношення об'ємів, отримаємо відповідь:

$$\frac{V_p}{V} = \frac{8\mu p_k}{3R\rho T_k} = 0,25.$$

3. Знайти вираз для роботи одного моля реального газу при ізо-термічному розширенні з температурою  $T$  від об'єму  $V_1$  до об'єму  $V_2$ .

**Розв'язання.** Загальний вираз для елементарної роботи  $dA = pdV$ . У даному випадку  $p$  знайдемо з рівняння Ван-дер-Ваальса для одного

$$\text{моля } p = \frac{RT}{V - b} - \frac{a}{V^2}.$$

Підставляючи це значення у вираз для роботи, маємо

$$dA = \frac{RT}{V - b} dV - \frac{a}{V^2} dV.$$

Інтегруючи останній вираз при сталій температурі в межах від  $V_2$  до  $V_1$ , отримаємо відповідь:

$$A = RT \ln \frac{V_2 - b}{V_1 - b} - a \left( \frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2} \right).$$

4. Знайти рівняння політропічного процесу реального газу, молярна теплоємність якого дорівнює  $C$ .

**Розв'язання.** Запишемо перший закон термодинаміки

$$dQ = dU + pdV.$$

В даному випадку для одного молю газу  $dQ = CdT$ , а  $dU = C_v dT + \frac{a}{V^2} dV$ . Тоді  $CdT = C_v dT + \left(p + \frac{a}{V^2}\right) dV$ , або з урахуванням рівняння Ван-дер-Ваальса  $CdT = C_v dT + \frac{RT}{V-b} dV$ . Розділимо

змінні величини:  $\frac{(C-C_v)}{R} \cdot \frac{dT}{T} = \frac{dV}{V-b}$ . Після інтегрування отримаємо

мо  $T^{\frac{C-C_v}{R}} (V-b)^{-1} = const$ , або  $T(V-b)^{\frac{R}{C-C_v}} = const$ . Останній вираз можна спростити за допомогою того ж рівняння Ван-дер-Ваальса

$$\left(p + \frac{a}{V^2}\right) (V-b)^{\frac{C-C_v-R}{C-C_v}} = const.$$

Якщо  $\frac{C-C_v-R}{C-C_v}$  позначити через  $n$  і вважати його показником політропи реального газу, тоді рівняння політропічного процесу для моля газу має вигляд:

$$\left(p + \frac{a}{V^2}\right) (V-b)^n = const.$$

5. Показати, що газ, який описується рівнянням Ван-дер-Ваальса з  $b = 0$  у дослідах Джоуля-Гомсона охолоджується.

**Розв'язання.** В ефекті Джоуля-Гомсона ентальпія  $H = U + pV$  не змінюється.

Якщо  $b = 0$ , рівняння Ван-дер-Ваальса для одного моля має вигляд  $\left(p + \frac{a}{V^2}\right) V = RT$ , або  $pV = RT - \frac{a}{V}$ . Внутрішня енергія для одного моля  $U = C_v T - \frac{a}{V}$ .

Оскільки  $H = const$ , то  $U_1 + p_1 V_1 = U_2 + p_2 V_2$ , або  $U_2 - U_1 = p_1 V_1 - p_2 V_2$ . Після підстановки відповідних значень отримаємо

$$C_v (T_2 - T_1) - a \left( \frac{1}{V_2} - \frac{1}{V_1} \right) = RT_1 - \frac{a}{V_1} - RT_2 + \frac{a}{V_2}.$$

З цього рівняння знаходимо  $\Delta T = T_2 - T_1$ .

$$\Delta T = \frac{2a \left( \frac{1}{V_2} - \frac{1}{V_1} \right)}{C_v + R}.$$

Так як  $V_2 > V_1$ , то  $\Delta T < 0$ , тобто  $T_2 < T_1$  — газ охолоджується.

### Задачі для аудиторних та домашніх занять

200. Який фізичний зміст виразу  $\left(p + \frac{a}{V^2}\right)$ ?

201. Знайти температуру, при якій тиск кисню, що має густину  $100 \text{ г/л}$ , дорівнює  $70 \text{ атм}$ . Порівняти з ідеальним газом.

202. У балоні ємністю  $20 \text{ л}$  знаходиться  $80 \text{ молів}$  деякого газу. При  $14^\circ \text{C}$  тиск газу дорівнює  $90 \text{ атм}$ ., при  $63^\circ \text{C}$  тиск газу дорівнює  $109 \text{ атм}$ . Знайти константи Ван-дер-Ваальса для цього газу.

203. Який тиск повинен мати вуглекислий газ при температурі  $T = 300 \text{ К}$ , щоб його густина дорівнювала  $\rho = 500 \text{ г/л}$ ? Розрахунок провести як для ідеального, так і для реального газу.

204. Один моль азоту знаходиться в посудині об'ємом  $V = 1 \text{ л}$ . Знайти: а) температуру азоту, при якій похибка в тискові, визначеному з рівняння стану ідеального газу, складає  $10\%$  порівняно з тиском реального газу; б) тиск газу при цій температурі.

205. У балоні ємністю  $V = 8 \text{ л}$  знаходиться кисень масою  $M = 0,3 \text{ кг}$  при температурі  $T = 300 \text{ К}$ . Знайти, яку частину балону складає власний об'єм молекул газу. Знайти також відношення внутрішнього тиску  $p'$  до тиску  $p$  газу на стінки балона.

206. Один моль деякого газу знаходиться в посудині об'ємом  $V = 0,25 \text{ л}$ . При температурі  $T_1 = 300 \text{ К}$  тиск газу  $p_1 = 90 \text{ атм}$ ., а при  $T_2 = 350 \text{ К}$  тиск  $p_2 = 110 \text{ атм}$ . Знайти константи Ван-дер-Ваальса для цього газу.

207. Знайти коефіцієнт ізотермічної стисливості ван-дер-ваальсовського газу як функцію об'єму  $V$  при температурі  $T$ . Примітка: за визначенням

$$\kappa = -\frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial p}.$$

208. Знайти критичну густину води.

209. Визначити константи Ван-дер-Ваальса для вуглекислого газу, якщо його критична температура  $T_k = 304 \text{ К}$  і критичний тиск  $p_k = 73 \text{ атм}$ .

210. Знайти температуру і густину вуглекислого газу в критичному стані, вважаючи газ ван-дер-ваальсовським.

211. Константа Ван-дер-Ваальса  $a = 0,453 \text{ Дж}\cdot\text{м}^3/\text{моль}^2$ , а критична температура  $T_k = 282,7 \text{ К}$ . Визначити ефективний діаметр молекули цього газу.

212. Знайти ефективний діаметр молекули кисню з відомих критичних величин  $T_k = 282,7 \text{ К}$  і  $p_k = 5,07 \text{ МПа}$ .

213. Знайти питомий об'єм бензолу  $\text{C}_6\text{H}_6$  у критичному стані, якщо його критична температура  $T_k = 562 \text{ К}$  і критичний тиск  $p_k = 47 \text{ атм}$ .

214. Яка маса ефіру має бути в ампулі об'ємом  $28,5 \text{ см}^3$ , щоб можна було спостерігати в ній критичний стан? Для ефіру  $T_k = 467 \text{ К}$ ,  $p_k = 3,6 \text{ МПа}$ , молярна маса  $\mu = 74 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$ .

215. Посудину об'ємом  $V_1 = 10^{-3} \text{ м}^3$  треба наповнити водою при температурі  $t_1 = 18^\circ\text{C}$  так, щоб при нагріванні її в даній посудині (попередньо відкачаний і запаяний) до критичної температури в ній встановився критичний тиск. Вважаючи, що вода задовольняє рівнянню стану Ван-дер-Ваальса, знайти, який об'єм води треба налити в посудину. Критична температура води  $T_k = 647 \text{ К}$ , критичний тиск  $p_k = 2,2 \cdot 10^7 \text{ Н/м}^2$ , густина при  $18^\circ\text{C}$   $\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$ , молярна маса  $\mu = 18 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$ .

216. У балоні об'ємом  $0,01 \text{ м}^3$  знаходиться  $0,32 \text{ кг}$  кисню при тискові  $2,5 \cdot 10^5 \text{ Па}$ . Критичний тиск і критична температура відповідно дорівнюють  $5,04 \cdot 10^6 \text{ Па}$  і  $154 \text{ К}$ . Визначити температуру газу.

217. Довести, що положення прямої 1-5 (Рис. 16) на ізотермі Ван-дер-Ваальса таке, що площі (123) і (345) обмежені цією прямою і ізотермою однакові.

218. Один моль кисню розширили від об'єму  $V_1 = 1 \text{ л}$  до  $V_2 = 5 \text{ л}$  при сталій температурі  $T = 280 \text{ К}$ . Знайти: а) зміну внутрішньої енергії газу; б) кількість теплоти, що поглинув газ. Газ вважати ван-дер-ваальсовським.

219. Яку кількість теплоти слід надати  $\nu = 3,0$  молям вуглекислого газу, щоб при розширенні у вакуумі від об'єму  $V_1 = 5,0 \text{ л}$  до  $V_2 = 10 \text{ л}$  температура його не змінилась?

220. Яку кількість тепла слід надати одному молу газу Ван-дер-Ваальса, щоб при розширенні в пустоту від об'єму  $V_1$  до об'єму  $V_2$  його тиск залишався сталим і рівним  $p$ ?

221. Моль азоту розширюється в пустоту від початкового об'єму  $V_1$  до кінцевого  $V_2$ . Знайти зниження температури  $T$  при такому процесі.

222.  $0,5$  кмоль трьохатомного газу адіабатно розширюється в пустоту від  $V = 0,5 \text{ м}^3$  до  $V_2 = 3 \text{ м}^3$ . Температура при цьому зменшується на  $12,2^\circ$ . Знайти за цими даними константу  $a$  рівняння Ван-дер-Ваальса.

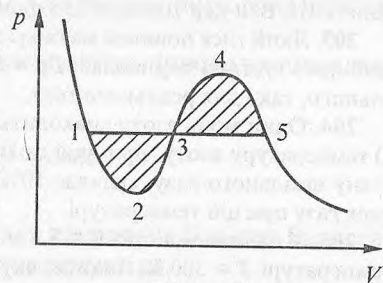


Рис. 16

223. Два балони об'ємами  $V_1 = V_2 = 1 \text{ л}$  з'єднані трубкою з краном. В об'ємі  $V_1$  знаходиться 2 моли азоту, а об'єм  $V_2$  відкачаний до високого вакууму. Вважаючи, що стінки балонів і трубки адіабатні, визначити, на скільки зміниться температура газу після відкриття крану. Знайти зміну внутрішньої енергії та виконану азотом роботу проти внутрішнього тиску. Для азоту  $T_k = 126 \text{ К}$  і  $p_k = 3,4 \cdot 10^6 \text{ Па}$ .

224. Два теплоізоляованих балони з'єднані між собою трубкою з краном. В одному балоні об'ємом  $V_1 = 10 \text{ л}$  знаходиться  $\nu = 2,5$  моля вуглекислого газу. Другий балон об'ємом  $V_2 = 100 \text{ л}$  відкачаний до високого вакууму. Кран відкрили і газ адіабатно розширився. Вважаючи газ реальним, знайти зміну температури внаслідок розширення.

225. Знайти  $C_p - C_v$  для моля газу Ван-дер-Ваальса.

226. Знайти для ван-дер-ваальсового газу рівняння адіабати в змінних  $T$  і  $V$ , якщо його теплоємність при сталому об'ємі дорівнює  $C_v$ .

227. Знайти зміну ентропії одного моля ван-дер-ваальсового газу при ізотермічній зміні його об'єму від  $V_1$  до  $V_2$ .

228. Один моль газу Ван-дер-Ваальса здійснює цикл, який складається із двох ізохор з об'ємами  $V_1$  і  $V_2$  і двох адіабат. Вважаючи, що стала  $b$  є відомою, а теплоємність  $C_v$  не залежить від температури, знайти ККД циклу.

229. Один моль ван-дер-ваальсового газу розширили ізотермічно при температурі  $T$  від об'єму  $V_1$  до  $V_2$ . Знайти зміну вільної енергії газу.

230. Показати, що газ, який описується рівнянням Ван-дер-Ваальса з  $a = 0$  в дослідах Джоуля-Томсона нагрівається.

231. Показати, що в процесі Джоуля-Томсона ентропія газу зростає.

232. Знайти зв'язок між температурою інверсії ефекту Джоуля-Томсона і критичною температурою  $T_k$  газів, стан яких описується рівнянням Ван-дер-Ваальса. Яка температура інверсії для гелію, якщо  $T_k = 5,3 \text{ К}$ ?

233. Знайти значення температури  $T_1$  водню з початковим молярним об'ємом  $V_1 = 0,16 \text{ л/моль}$ , при яких ефект Джоуля-Томсона буде додатним (тобто  $T_2 < T_1$ ).

## § 2. Рідини. Поверхневий натяг

Час релаксації (осідлого життя) молекул рідини виражається формулою:

$$\tau = \tau_0 e^{\frac{W}{kT}},$$

де  $\tau_0$  — середній період коливань молекули навколо положення рівноваги, а  $W$  — енергія активації.

Коефіцієнт стисливості рідини визначається співвідношенням

$$\kappa = -\frac{1}{V} \left( \frac{dV}{dp} \right)_T.$$

(Для рідин  $\alpha$  в  $10^4$  —  $10^6$  разів менша ніж у газах).

Коефіцієнт теплового (об'ємного) розширення рідини дорівнює

$$\alpha = \frac{1}{V_0} \left( \frac{dV}{dT} \right)_p$$

(У рідин  $\alpha$  значно менший, ніж у газах, і слабкіше залежить від температури).

Температурний коефіцієнт тиску

$$\lambda = \frac{1}{p_0} \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_V$$

Коефіцієнт поверхневого натягу рідини  $\sigma = \frac{\Delta A}{\Delta S}$  дорівнює роботі,

яку потрібно затратити, щоб створити одиницю поверхні рідини, або  $\sigma = F/l$  — силі натягу плівки на одиницю довжини.

Тиск, зумовлений кривизною поверхні рідини

$$\Delta p = \sigma \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right),$$

де  $R_1$  і  $R_2$  — радіуси кривизни поверхні.

Висота підняття рідини в капілярі

$$h = \frac{2\sigma \cos \theta}{r \rho g}$$

Осмотичний тиск визначається формулою:

$$p_{осм} V = \nu RT,$$

тут  $\nu$  — число молів розчиненої речовини.

Тиск насичених парів над розчином (закон Рауля) дорівнює

$$p_A = \frac{v_A}{v_A + v_B} \cdot p_A^o, \quad p_B = \frac{v_B}{v_A + v_B} \cdot p_B^o,$$

тут  $v_{A,B}$  — кількість молів речовин  $A$  і  $B$ ,  $p_A^o$ ,  $p_B^o$  — тиск насиченої пари чистих речовин  $A$  і  $B$ .

### Методичні вказівки

Пристаючи до розв'язання задач, слід уважно ознайомитись з теорією рідин, їх структурою, фізичними явищами, які відбуваються в рідинах, чітко уявити відмінність різних термодинамічних параметрів та термодинамічних коефіцієнтів рідин від аналогічних вели-

чин в газах. У задачах на поверхневий натяг слід звернути увагу на енергію поверхневого шару рідини, на залежність внутрішнього тиску від кривизни поверхні, явище капілярності. Яким би тонким не був шар рідини, наприклад, мильні бульбашки, він завжди має дві поверхні: внутрішню і зовнішню. У задачах на осмос і осмотичні явища використовується формула Вант-Гофа.

### Приклади розв'язування задач

1. Оцінити середню арифметичну швидкість переміщення молекул у воді при кімнатній температурі. Порівняти її зі швидкістю молекул водяної пари при тих же умовах.

**Розв'язання.** Молекули води згідно діркової теорії Френкеля здійснюють коливальні рухи навколо положення рівноваги протягом деякого часу (осідлого життя)  $\tau$ . Потім стрибком за час  $\tau'$  зміщуються на відстань, яка по порядку величини дорівнює середній відстані  $\delta$  між сусідніми молекулами. Таким чином, повний час переміщення  $t = \tau + \tau'$ . Оскільки  $\tau' \ll \tau$ , то середню швидкість переміщення молеку-

ли води можна знайти як:  $\bar{v} = \frac{\delta}{\tau}$ , де  $\tau = \tau_0 e^{\frac{w}{kT}}$ . Середню відстань  $\delta$  між

молекулами води можна оцінити як:  $\delta = \sqrt[3]{\frac{1}{n_0}}$ , де  $n_0$  — концентрація

молекул води  $n_0 = \frac{\rho N_A}{\mu}$ , або  $\delta = \sqrt[3]{\frac{\mu}{N_A \rho}}$ . Тоді  $\bar{v} = \frac{\sqrt[3]{\frac{\mu}{N_A \rho}}}{\tau_0} e^{\frac{w}{kT}}$ . Наймен-

ше значення енергії активації має порядок  $kT$ , а  $\tau_0 \approx 5 \cdot 10^{-12}$  сек. Підставляючи числові значення у вираз для середньої швидкості, знаходимо середню швидкість переміщення молекул води. Вона дорівнює 22 м/с. Середню арифметичну швидкість молекул водяної пари при кімнатній

температурі розрахуємо за формулою  $\bar{v} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi \mu}} = 585$  м/с. Таким чи-

ном, для молекул води середня швидкість переміщення в 26 разів менша, ніж середня швидкість молекул водяної пари при тій самій температурі.

2. Знайти зв'язок між похідними коефіцієнтів стисливості, об'ємного теплового розширення та температурного коефіцієнта тиску.

**Розв'язання.**

$$\kappa = -\frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial p} \right)_T; \alpha = \frac{1}{V_0} \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_p; \lambda = \frac{1}{p_0} \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_V.$$

Якщо нагрівати рідину, то вона розширюється, тобто збільшує свій об'єм. Шляхом стискування можна зберегти початковий об'єм.

Отже, між величинами  $\frac{\partial V}{\partial T}$ ,  $\frac{\partial V}{\partial p}$  і  $\frac{\partial p}{\partial T}$  існує зв'язок. Дійсно, нехай

між тиском, об'ємом і температурою є зв'язок, і він визначається невідомим рівнянням  $p = f(V, T)$ . Запишемо повний диференціал для тиску

$$dp = \left( \frac{\partial p}{\partial V} \right)_T dV + \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_V dT.$$

Якщо підібрати відношення зміни об'єму  $dV$  до зміни температури  $dT$  таким чином, щоб тиск залишався сталим, тобто щоб  $dp = 0$ , то це відношення через часткову похідну повинно бути записано у вигляді:

$\left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_p$ . Із попереднього рівняння при умові  $dp = 0$  знаходимо

$$\left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_p = -\frac{\left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_V}{\left( \frac{\partial p}{\partial V} \right)_T}, \text{ або, приймаючи до уваги, що } \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_V = \frac{1}{\left( \frac{\partial T}{\partial p} \right)_V},$$

отримаємо зв'язок між похідними:

$$\left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_p \left( \frac{\partial p}{\partial V} \right)_T \left( \frac{\partial T}{\partial p} \right)_V = -1.$$

3. Краплину води масою  $M$  ввели між двома плоскими і паралельними пластинами, а потім пластини притиснули одну до одної таким чином, що відстань між ними дорівнювала  $d$ . При цьому вода розтекла між пластинами, утворивши коло, не доходячи до країв пластинок. З якою силою слід розтягувати пластинки, щоб їх роз'єднати? Коефіцієнт поверхневого натягу води дорівнює  $\sigma$ .

Дано:  $M, d, \sigma, \rho$   
 $F = ?$

**Розв'язання.** Між пластинами утворилось водяне коло, поперечний переріз якого зображений на рис. 17.

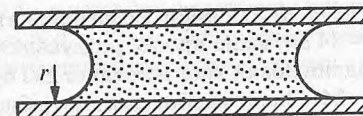


Рис. 17

Радіус меніска значно менший, ніж радіус самого кола. Сили поверхневого натягу у випадку викривленої поверхні створюють додатковий тиск. Для увігнутої поверхні в даному випадку цей тиск від'ємний. Величину тиску можна розрахувати, скориставшись формулою Лапласа.

$$\Delta p = \sigma \left( \frac{1}{R} + \frac{1}{r} \right).$$

Оскільки  $r \ll R$ ,  $\Delta p = \frac{\sigma}{r} = \frac{2\sigma}{d}$ . Для того, щоб роз'єднати пластини, необхідно прикласти силу  $F = \Delta p S$ , де  $S$  — площа водяного кола.

Площу, в свою чергу, можна знайти так:  $M = V\rho = Sdp$ , звідки  $S = \frac{M}{\rho d}$ .

$$\text{Тоді } F = \frac{2\sigma M}{d^2 \rho}.$$

#### Задачі для аудиторних та домашніх занять

234. Оцінити коефіцієнт дифузії молекул води при кімнатній температурі, користуючись законом Фіка. Порівняти його з коефіцієнтом дифузії водяних парів при таких самих умовах. Примітка: у формулі для  $D$  коефіцієнт  $1/3$  для рідин в два рази менший. Середній період коливань молекул навколо положення рівноваги  $\tau_0 \approx 10^{-12}$  с.

235. Довести, що коефіцієнт теплового розширення  $\alpha$ , коефіцієнт ізотермічної стисливості  $\kappa$  і температурний коефіцієнт тиску  $\lambda$  фізично однорідної рідини зв'язані співвідношенням:  $V_0 \alpha = \rho_0 V \lambda \kappa$ .

236. Коефіцієнт об'ємного розширення ртуті  $\alpha$  при  $0^\circ\text{C}$  і атмосферному тиску дорівнює  $0,00018^\circ\text{C}^{-1}$ . Стисливість  $\kappa = 3,9 \cdot 10^{-6} \text{ атм}^{-1}$ . Розрахувати температурний коефіцієнт тиску  $\lambda$  для ртуті.

237. Знайти густину морської води на глибині 5 км, якщо на поверхні густина  $\rho = 1,03 \text{ г/см}^3$ , а стисливість води в границях тиску від 1 до 500 атм. дорівнює  $\kappa = 47,5 \cdot 10^{-6} \text{ атм}^{-1}$ .

238. У дні посудини з ртуттю є круглий отвір діаметром  $d = 70 \text{ мкм}$ . При якій максимальній товщині ртуті вона не буде витікати через отвір, якщо для ртуті  $\sigma = 490 \text{ мН/м}$ ,  $\rho = 13,6 \text{ ч/см}^3$ ?

239. Визначити кількість енергії, яка звільняється при злитті дрібних водяних крапель туману  $r = 2 \cdot 10^{-3} \text{ мм}$  в одну велику краплину радіуса  $R = 2 \text{ мм}$ .

240. а) Яку роботу слід виконати, щоб видути мильну бульбу діаметром  $d = 14$  см, якщо процес роздування бульби ізотермічний? б) Чому дорівнює надлишковий тиск всередині цієї бульби?

241. Знайти роботу, яку потрібно виконати, щоб ізотермічно видути мильну бульбу радіуса  $R$ , якщо тиск навколишнього повітря  $p_0$  і поверхневий натяг мильної води  $\sigma$ .

242. Поверхневий натяг на межі вода-масло можна прийняти рівним  $\sigma = 18$  ерг/см<sup>2</sup>. Яку роботу слід виконати, щоб краплю масла з масою  $M = 1$  г роздробити всередині води на крапельки діаметром  $d = 2 \cdot 10^{-4}$  см, якщо процес дроблення відбувається ізотермічно? Густина масла  $\rho = 0,9$  г/см<sup>3</sup>.

243. Знайти вільну енергію поверхневого шару: а) краплі ртуті діаметром  $d = 1,4$  мм; б) мильної бульби діаметром  $d = 6,0$  мм, якщо поверхневий натяг мильної води  $\sigma = 45$  мН/м.

244. Розрахувати приріст вільної енергії поверхневого шару при ізотермічному злитті двох однакових крапель ртуті діаметром  $d = 1,5$  мм.

245. У посудині з повітрям при тиску  $p_0$  міститься мильна бульбашка діаметром  $d$ . Тиск повітря ізотермічно зменшили в  $n$  разів, внаслідок чого діаметр бульбашки збільшився в  $\alpha$  разів. Знайти поверхневий натяг мильної води.

246. Знайти тиск у бульбашці повітря діаметром  $d = 4,0$  мкм, яка знаходиться у воді на глибині  $h = 5,0$  м. Атмосферний тиск  $p_0$  нормальний.

247. На дні ставка виділилась бульбашка газу діаметром 4 мкм. Коли вона піднялась на поверхню води, її діаметр збільшився в  $n = 1,1$  раза. Знайти глибину ставка, якщо процес розширення бульбашки був ізотермічний, а зовнішній тиск нормальний.

248. У воду опущено на незначну глибину скляну трубку з внутрішнім діаметром  $d = 1$  мм. Знайти масу  $M$  води, що ввійшла в трубку.

249. На яку висоту  $h$  підніметься вода між двома паралельними скляними пластинами, якщо відстань між ними дорівнює 0,2 мм?

250. Дві вертикальні і паралельні скляні пластини частково занурені у воду. Відстань між пластинами  $d = 0,1$  мм, їхня ширина  $l = 12$  см. Вважаючи, що вода не доходить до їхніх верхніх країв і що змочування повне, знайти силу, з якою вони притягуються одна до одної.

251. Скляний капіляр довжиною  $l = 110$  мм з діаметром внутрішнього каналу  $d = 20$  мкм опустили вертикально у воду. Верхній кінець капіляра запаяний. Зовнішній тиск нормальний. Яка довжина капіляра  $h$  повинна бути занурена у воду, щоб рівень всередині капіляра співпадав з поверхнею води ззовні його?

252. У рідину опущено дві вертикальні капілярні трубки з внутрішніми діаметрами  $d_1 = 0,05$  см і  $d_2 = 0,1$  см. Різниця рівнів рідини в трубках дорівнює 11,6 мм. Густина  $\rho$  рідини дорівнює 0,8 г/см<sup>3</sup>. Знайти поверхневий натяг рідини.

253. Знайти різницю рівнів ртуті у двох сполучених вертикальних капілярах, діаметри яких  $d_1 = 0,5$  мм і  $d_2 = 1,0$  мм, якщо крайовий кут  $\phi = 138^\circ$ .

254. Скляний стержень діаметром  $d_1 = 1,5$  мм вставили симетрично в скляний капіляр з діаметром внутрішнього каналу  $d_2 = 20$  мм. Потім всю систему занурили вертикально у воду. На яку висоту підніметься вода в такому капілярі?

255. Капіляр, який наполовину заповнений рідиною, обертається навколо осі  $OO'$  (Рис. 18). Довжина капіляра  $2l$ , його радіус  $r$ . Густина рідини  $\rho$ , а коефіцієнт поверхневого натягу  $\sigma$ . При якій кутовій швидкості капіляра рідина почне витікати? Змочування вважати повним.

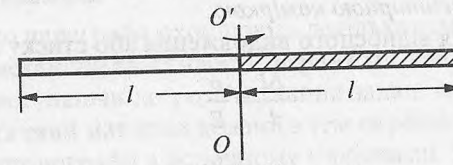


Рис. 18

256. Розглянувши цикл Карно для плівки рідини при умові, що температури нагрівника і холодильника нескінченно мало відрізняються одна від одної, знайти похідну поверхневого натягу рідини від температури.

257. Знайти вираз для внутрішньої енергії поверхневої плівки.

258. Показати, що поблизу абсолютного нуля поверхневий натяг рідини перестає залежати від температури, тобто  $\lim_{T \rightarrow 0} \frac{d\sigma}{dT} = 0$ . (Конкретно мова може йти лише про гелій).

259. Знайти осмотичний тиск  $p_{осм}$  п'ятипроцентного розчину тростинного цукру ( $C_{12}H_{22}O_{11}$ ) у воді при  $18^\circ C$ .

260. Осмотичний тиск розчину  $M = 36$  г глюкози в 2,24 л води при  $t = 27^\circ C$  дорівнює 1,1 атм. Знайти відносну молекулярну масу  $\mu$  глюкози.

261. При якій температурі осмотичний тиск двоохпроцентного розчину солі у воді буде дорівнювати 15 атм.? Вважати, що ступінь дисоціації  $\alpha$  солі дорівнює 75%.

262. Який тиск насичених парів води  $p$  над розчином цукру, якщо число молів цукру складає 5% від загального числа молів розчинника? Температура розчину  $20^\circ C$ . Тиск насиченої водяної пари при  $20^\circ C$  дорівнює  $p_0 = 17,535$  мм рт. ст.

263. Тиск насиченої пари нелетючої речовини над розчином менший, ніж над чистим розчинником. Виразити різницю цих тисків через відношення загальної кількості молів  $v'$ , розчиненої речовини до кількості молів  $v$  розчинника, маючи на увазі, що розчин — розбавлений.

### § 3. Тверді тіла. Фазові переходи

Положення вузла кристалічної ґратки визначається вектором

$$\vec{r} = m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c},$$

де  $m, n, p$  — цілі числа номера вузла по відповідним осям  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  — вектори переносу. Модулі їх дорівнюють міжатомним відстаням у кристалічній ґратці. Паралелепіпед, утворений векторами переносу, називається елементарною коміркою.

Закон Гука для відносного видовження або стиску має вигляд:

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{p}{E},$$

тут  $p = \frac{F}{S}$  — напруга розтягу чи стиску,  $E$  — модуль Юнга, або модуль пружності.

Коефіцієнтом Пуассона називається відношення відносного поперечного до відносного поздовжнього видовжень чи стисків:

$$\mu = \frac{\Delta r/r}{\Delta l/l}$$

Відносна зміна об'єму при всебічному розтязі, або стиску

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{p}{M},$$

тут  $M$  — модуль всебічного розтягу, чи стиску.

Для деформації зсуву закон Гука має вигляд:

$$\gamma = \frac{\tau}{G},$$

де  $\tau = \frac{F}{S}$  — тангенціальна напруга,  $\gamma$  — кут зсуву,  $G$  — модуль зсуву.

Атомна теплоємність твердих тіл визначається законом Дюлонга і Пті:

$$C_v = \left( \frac{dU}{dT} \right)_v = 3R.$$

При температурах  $T \ll \Theta$ , де  $\Theta = \frac{h\nu_{\max}}{k}$  — температура Дебая.

$$C_v = \frac{12\pi^4}{5} N_A k \left( \frac{T}{\Theta} \right)^3.$$

Рівняння Клапейрона-Клаузіуса для фазових переходів має вигляд:

$$\frac{dp}{dT} = \frac{q}{T(V_2 - V_1)},$$

тут  $q$  — питома теплота фазового переходу,  $V_2$  і  $V_1$  — питомі об'єми фаз 2 і 1.

#### Методичні вказівки

Задачі цього параграфу охоплюють декілька тем: симетрія і будова кристалів, механічні властивості твердих тіл, теплоємність, фазові переходи. Приступаючи до розв'язування задач, слід ретельно проробити теоретичний матеріал кожної з тем окремо.

Задачі кристолографії в основному є якісними. Вони не потребують складних математичних викладок. Для отримання відповіді необхідно глибоке розуміння змісту фізичних величин та понять про будову кристалів, мати чітке уявлення про різні кристалічні ґратки, елементи симетрії, тощо.

Задачі теми "Механічні властивості твердих тіл" потребують знань про різні види деформації і зв'язок між параметрами, що характеризують ці деформації. У задачах, де існують складні деформації, зручно користуватись тензором деформації. Для цього необхідно знати його властивості і вміти з ним працювати.

Розглядаючи задачі на теплоємність твердих тіл, перш за все слід звернути увагу на температуру і визначитись, якою теорією слід користуватись. При досить високих температурах — законом Дюлонга і Пті, при температурах, значно менших, ніж температура Дебая, — законом кубів Дебая.

Остання тема "Фазові переходи" стосується не лише твердих тіл, а також рідин і газів. Слід пам'ятати, що фазові переходи першого роду характеризуються в точці переходу стрибкоподібною зміною густини, енергії, ентальпії, ентропії, вільної енергії. При цьому переході виділяється чи поглинається системою певна кількість теплоти. Температура і тиск залишаються незмінними. До фазових переходів першого роду відносяться: кипіння, конденсація, плавлення, сублімація, різні алотропічні перетворення. Під час фазових переходів другого роду густина, та інші термодинамічні функції змінюються безперервно, а похідні цих функцій — стрибкоподібно. Теплота фазового переходу II роду дорівнює нулю. У задачах на фазові переходи першого роду користуються рівнянням Клапейрона-Клаузіуса, залежністю тиску насиченої пари від температури.

НАУКОВИЙ БІБЛІОТЕКА

### Приклади розв'язування задач

1. Площина перетинає координатні осі кристала на відстанях, що дорівнюють відповідно 4, 1, 2 міжатомні відстані від початку координат. Запишіть положення цієї площини за допомогою індексів Мілера.

**Розв'язання.** Обернені значення параметрів ґратки будуть  $1/4, 1/1, 1/2$ . Приведемо їх до загального знаменника і відкинемо його. Чисельники і дають індекси Мілера (1, 4, 2). Цей набір індексів визначає не одну площину, а ціле сімейство паралельних площин.

2. Знайти число вузлів, що припадає на одну елементарну комірку в ґранецентрованій кубічній ґратці (ГЦК).

**Розв'язання.** Як видно з Рис. 19, в кубічній ґратці є вузли двох типів:  $A$  (які знаходяться на вершині куба) і  $B$  (що знаходяться в точці перетину діагоналей на гранях ґратки). Вузол  $A$  одночасно належить до восьми елементарних комірок. Це означає, що в кожну з них він входить з долею  $1/8$ . Вузол  $B$  одночасно належить двом коміркам і відповідно в дану комірку він входить з долею  $1/2$ . Якщо врахувати, що число вузлів типу  $A$  в комірці дорівнює восьми, а число вузлів типу  $B$  — шести, то загальна кількість вузлів, що припадає на одну елементарну комірку в ґранецентрованій кубічній ґратці, дорівнює  $n = (1/8) \cdot 8 + (1/2) \cdot 6 = 4$  вузли.

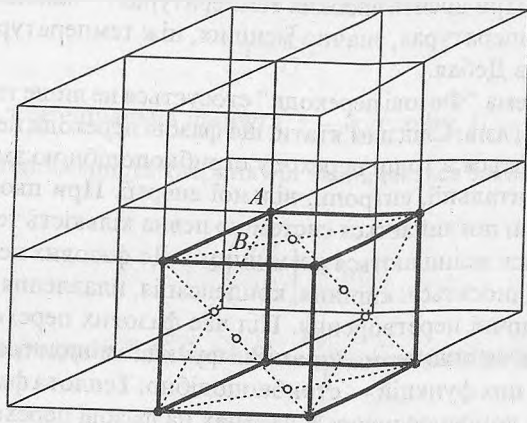


Рис. 19.

3. Знайти параметр  $a$  ґратки та відстань між найближчими сусідніми атомами кристала кальцію, що має ґранецентровану кубічну структуру. Густина  $\rho$  кристала кальцію дорівнює  $1,55 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$ .

**Розв'язання.** Об'єм елементарної комірки  $V = a^3$ . З іншого боку, об'єм елементарної комірки дорівнює відношенню молярного об'єму до кількості елементарних комірок в одному молі кристала  $V = \frac{V_m}{Z_m}$ .

Тоді  $a^3 = \frac{V_m}{Z_m}$ . Молярний об'єм кальцію визначимо так  $V_m = \frac{\mu}{\rho}$ , де  $\mu$  — молярна маса, а  $\rho$  — густина кальцію. Кількість елементарних комірок в одному молі  $Z_m = \frac{N_A}{n}$ , де  $N_A$  — число Авогадро, а  $n = 4$  (дивись попередню задачу). Тоді отримаємо  $a = \sqrt[3]{\frac{\mu \rho}{n N_A}}$ . Після підстановки числових значень отримаємо  $a = 0,556 \text{ нм}$ . Відстань між найближчими сусідніми атомами знаходимо із простих геометричних уявлень  $d = a/\sqrt{2} = 0,393 \text{ нм}$ .

4. Знайти об'ємну густину потенціальної енергії пружно деформованого тіла: а) при деформації розтягу; б) при деформації зсуву, якщо відомі  $p$  і  $\tau$  — напруга розтягу і тангенціальна напруга.

**Розв'язання.** Потенціальна енергія пружно деформованого тіла при розтягу дорівнює  $W_n = \frac{1}{2} F \Delta l$ . Скориставшись законом Гука, знайдемо  $\Delta l = \frac{F l}{S E}$ , де  $E$  — модуль Юнга. Підставляючи це значення у вираз для  $W_n$ , отримаємо  $W_n = \frac{1}{2E} \frac{F^2 l}{S}$ . Для того, щоб знайти об'ємну густину потенціальної енергії, розділимо обидві частини на об'єм  $V = lS$ , тоді  $w_n = \frac{1}{2E} \frac{F^2}{S^2}$ . А, оскільки  $\frac{F}{S} = p$  є напруга розтягу, в кінцевому вигляді  $w_n = \frac{p^2}{2E}$ .

Для деформації зсуву закон Гука має вигляд  $\gamma = \frac{\tau}{G}$ , тут  $\tau = \frac{F}{S}$  — тангенціальна напруга. Для спрощення викладок будемо вважати, що деформоване тіло є куб зі стороною  $l$ . Тоді тангенціальна сила  $F$  дорівнює  $F = G\gamma l^2$ . При нескінченно малому зсувові  $d\gamma$  площа, до якої прикладена сила  $F$ , зміщується на величину  $dx = l d\gamma$ . Тому елементар-



на робота, яку виконують зовнішні сили, дорівнює  $dA = Fdx = Fld\gamma = GI^3\gamma d\gamma$ . Для кінцевого зсуву  $A = W_n = GI^3 \int_0^{\gamma} \gamma d\gamma = \frac{G\gamma^2}{2} l^3$

Об'ємна густина потенціальної енергії  $w_n = \frac{W_n}{l^3} = \frac{1}{2} G\gamma^2$ . Скориставшись законом Гука для зсуву, отримаємо:  $w_n = \frac{\tau^2}{2G}$ .

5. Чому дорівнює коефіцієнт Пуассона для тіл, які під час деформації не змінюють свого об'єму?

**Розв'язання.** Для визначеності розглянемо тіло, що має форму циліндра. Його об'єм дорівнює  $V = \pi r^2 l$ . Під дією зовнішньої сили циліндр видовжується на  $dl$ , а радіус його зменшується на  $dr$ . Тоді зміна об'єму  $dV = \pi(2lrdr + r^2 dl)$ . Для того, щоб  $dV = 0$ , необхідно  $2lrdr = -r^2 dl$ . Звідки  $\frac{dr}{r} = -\frac{1}{2} \frac{dl}{l}$ . Із останнього виразу знаходимо коефіцієнт Пуассона  $\mu = \frac{\Delta r/r}{\Delta l/l} = \frac{1}{2}$ .

6. Знайти молярну теплоємність твердих з'єднань типу  $XY$  і  $XY_2$ , вважаючи справедливим класичний закон розподілу енергії за степенями вільності.

**Розв'язання.** Кожен атом молекули має три степені вільності. Згідно з класичним законом на один степінь вільності коливального руху атома припадає енергія  $kT$ . Якщо в молекулі  $n$  атомів, то середня енергія однієї молекули дорівнює  $3nkT$ , а молекулярна теплоємність  $3nR$ . Тому для з'єднань типу  $XY$  молярна теплоємність дорівнює  $6R$ , а для з'єднань типу  $XY_2 - 9R$ .

7. Кристалева ромбічна сірка перетворюється в моноклинну. Зміна ентропії при цьому перетворенні дорівнює  $25,2 \text{ Дж/кг}\cdot\text{град.}$ , а зміна питомих об'ємів  $\Delta V = 0,014 \text{ см}^3/\text{г}$ . Чому дорівнює зміщення температури від точки переходу при зміні тиску на  $\Delta p = 1 \text{ атм}$ .

Дано:  $\Delta S = 25,2 \text{ Дж/кг}\cdot\text{град.}$ ,  $\Delta V = 0,014 \text{ см}^3/\text{г}$ ,  $\Delta p = 1 \text{ атм}$ .

$\Delta T = ?$

**Розв'язання.** Перехід сірки, що має ромбічну кристалічну ґратку, в моноклинну є фазовий перехід першого роду. Тому для знаходження температурного зміщення скористуємось рівнянням Клапейрона-

Клаузіуса:  $\frac{dp}{dT} = \frac{q}{T\Delta V}$  і знайдемо  $dT = \frac{Tdp\Delta V}{q}$ . Для наближеного роз-

в'язку замінимо елементарні зміни  $dT$ ,  $dp$ ,  $\Delta V$  на кінцеві  $\Delta T$ ,  $\Delta p$ ,  $\Delta V$  а  $q$  — питому теплоту фазового переходу виразимо через зміну ентропії

$$q = \Delta S \cdot T. \text{ Тоді } \Delta T = \frac{\Delta p \cdot \Delta V}{\Delta S} = \frac{1 \cdot 10^5 \cdot 0,014 \cdot 10^{-3}}{25,2} = 0,055 \text{ К.}$$

8. Як змінюється тиск насиченої пари зі зміною температури, якщо вважати теплоту фазового переходу сталою величиною?

**Розв'язання.** Скористаємось рівнянням Клапейрона-Клаузіуса

$\frac{dp}{dT} = \frac{q}{T(V_n - V_p)}$ . Якщо температура, при якій відбувається фазовий перехід, набагато менша від критичної, то можна вважати, що в рівнянні Клапейрона-Клаузіуса  $V_{\text{пару}} \gg V_{\text{рідини}}$  і знехтувавши  $V_p$ , отримаємо:  $\frac{dp}{dT} = \frac{q}{TV_n}$ .

Вважаючи насичену пару ідеальним газом, знайдемо  $V_n$  із рівняння Клапейрона-Менделєєва і підставимо його в попереднє рівняння.

$$\text{Отримаємо } \frac{dp}{dT} = \frac{q}{TV_n} = \frac{qp}{T^2 R}.$$

Розділимо змінні величини  $\frac{dp}{p} = \frac{qdT}{RT^2}$ , після інтегрування матимемо  $p = Ae^{-\frac{q}{RT}}$ .

Таким чином, залежність  $p$  від  $T$  для насиченої пари носить експоненціальний характер.

#### Задачі для аудиторних та домашніх занять

264. Скільки поворотних осей симетрії і якого порядку має кристалічна ґратка кубічної системи?

265. У гексагональній ґратці Браве через центр основи проходить вісь  $AB$ . Віссю симетрії якого порядку вона є?

266. Зобразіть на рисунках площини кубічної кристалічної ґратки, що мають позначення: (001), (010), (100), (110), (111),  $(\bar{1}\bar{1}\bar{1})$ .

267. Які індекси мають напрямки в кубічній ґратці Браве, якщо вони

співпадають: а) з осями решітки? б) з діагоналями граней? в) з просторовою діагоналлю; г) з просторовою діагоналлю третього квадранта?

2678. Визначити тип решітки Браве в структурах NaCl, алмаз,  $\text{Cu}_2\text{O}$ , CsCl,  $\alpha$ -залізо.

2679. Як зміниться кількість вузлів в кристалічній ґратці, якщо утворюється дефект: а) типу Шоткі? б) за Френкелем?

2770. Визначити відносну щільність пакування для твердого аргону, що має гранецентровану кубічну структуру.

2771. Знайти зміну об'єму при поліморфному переході  $\gamma$ -заліза, що має гранецентровану кубічну (ГЦК) структуру в  $\alpha$ -залізо, що має об'ємноцентровану кубічну (ОЦК) структуру, якщо атомний радіус Fe в ГЦК структурі дорівнює  $1,27 \text{ \AA}$ , а в ОЦК структурі —  $1,241 \text{ \AA}$ .

2772. Знайти найбільшу довжину свинцевого дроту, при якій, підвищений за один кінець, дріт не обірветься від власної ваги?

2773. Стальний дріт діаметром  $1 \text{ мм}$  має довжину  $5 \text{ м}$ , коли на ньому висить вантаж вагою  $20 \text{ кг}$ . На скільки видовжиться дріт, якщо вантаж збільшити ще на  $10 \text{ кг}$ ?

2774. Горизонтальний сталевий стержень довжиною  $l = 150 \text{ см}$  обертається навколо вертикальної осі, що проходить через його середину. При якій частоті обертів він може зруйнуватись?

2775. Сталевий дріт довжиною  $l = 4 \text{ м}$  і діаметром  $d = 2 \text{ мм}$  розтягується силою  $F = 100 \text{ кГ}$ . На скільки зміниться при цьому: а) його об'єм? б) його бокова поверхня?

2776. Сталевий дріт діаметром  $d = 1,0 \text{ мм}$  натягнутий в горизонтальному положенні між двома затискачами, які знаходяться на відстані  $l = 2,0 \text{ м}$  один від одного. До середини дроту в точці  $O$  підвісили груз масою  $M = 0,25 \text{ кг}$ . На скільки сантиметрів опуститься точка  $O$ ?

2777. Тонкий однорідний мідний стержень довжиною  $l$  і масою  $M$  рівномірно обертається з кутовою швидкістю  $\omega$  в горизонтальній площині навколо вертикальної осі, що проходить через один із його кінців. Знайти силу натягу в стержні в залежності від відстані  $r$  до осі обертання, а також видовження стержня.

2778. Суцільний мідний циліндр довжиною  $l = 65 \text{ см}$  поставили на горизонтальну поверхню і зверху приклали вертикальну силу стиску  $F = 1000 \text{ Н}$ , яка рівномірно розподілена по торцевій стороні. На скільки кубічних міліметрів зміниться при цьому об'єм циліндра?

2779. Мідний стержень довжиною  $l$  підвісили за один кінець до стелі. Знайти: а) видовження стержня під дією власної ваги; б) відносну зміну об'єму  $\frac{\Delta V}{V}$ .

280. Знайти зв'язок між модулем всебічної деформації і модулем Юнга, а також між модулем зсуву і модулем Юнга.

281. Отримати зв'язок між відносною зміною об'єму і модулем Юнга при всебічному розтязті чи стиску.

282. Показати, що відносна зміна об'єму при довільній деформації дорівнює сумі діагональних елементів тензора деформації.

283. Знайти енергію пружної деформації сталевого стержня маси  $M = 3,1 \text{ кг}$ , який розтягнутий так, що відносне видовження  $\epsilon = 1,0 \cdot 10^{-3}$ .

284. Знайти об'ємну густину потенціальної енергії пружно деформованого тіла при всебічній деформації стиску.

285. Знайти об'ємну густину енергії пружної деформації у воді на глибині  $h = 1000 \text{ м}$ .

286. Знайти енергію пружно деформованого сталевого стержня, у якого один кінець закріплений, а другий закручений на кут  $\phi$ . Довжина стержня  $l$ , а радіус  $r$ .

287. Між двома стінками затиснуті два бруски (Рис. 20) 1-й і 2-й однакової довжини і однакового поперечного перерізу, але виготовлені з різних матеріалів, які відрізняються механічними і тепловими властивостями. Яким повинно бути співвідношення між модулями Юнга і температурними коефіцієнтами лінійного розширення, щоб при нагріванні положення границі  $AB$  між брусками не змінилось?

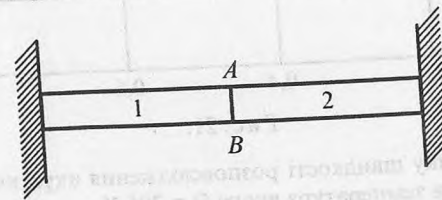


Рис. 20

288. На основі класичного закону розподілу енергії за ступенями вільності знайти питомі теплоємності KCl і NaCl.

289. Питомі теплоємності кобальта і золота відповідно дорівнюють  $c_1 = 0,104 \text{ кал/г} \cdot \text{град}$  і  $c_2 = 0,0312 \text{ кал/г} \cdot \text{град}$ . Знайти їхні атомні теплоємності.

290. Знайти значення середньої коливальної енергії теплового руху для двох різних атомних осциляторів при температурі  $27^\circ \text{C}$ . Частота коливаний одного  $\nu = 10^{13} \text{ с}^{-1}$ , другого  $\nu_2 = 10^{14} \text{ с}^{-1}$ . Порівняйте знайдені величини зі значенням середньої енергії, яка припадає на один степінь вільності коливального руху згідно з теоремою про рівномірний розподіл енергії за ступенями вільності.

291. Дати оцінку максимальному значенню енергії та імпульсу фонуна (звукового кванта) в міді, температура Дебая якої дорівнює  $330 \text{ К}$ .

292. Чи можна вважати температури  $20$  і  $30 \text{ К}$  низькими для заліза, теплоємність якого при цих температурах дорівнює  $0,226$  і  $0,760 \text{ Дж/моль} \cdot \text{К}$ ?

293. На рис. 21 показаний графік залежності теплоємності кристала від температури (за Дебаєм). Тут  $C_{\text{кл}}$  — класична теплоємність,  $\Theta$  — дебаївська

температура. Знайти за допомогою цього графіка: а) дебаївську температуру для срібла, якщо при  $T = 65$  К його молярна теплоємність дорівнює  $15 \text{ Дж/моль}\cdot\text{К}$ ; б) молярну теплоємність алюмінію при  $T = 80$  К, якщо при  $T = 250$  К вона дорівнює  $22,4 \text{ Дж/моль}\cdot\text{К}$ ; в) максимальну частоту коливань для міді, у якій при  $T = 125$  К теплоємність відрізняється від класичного значення на 25%.

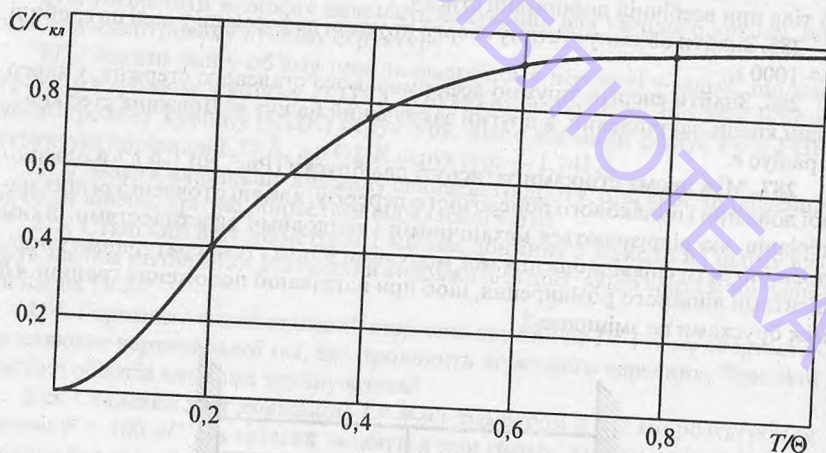


Рис. 21.

294. Дайте оцінку швидкості розповсюдження акустичних коливань в алюмінії, дебаївська температура якого  $\Theta = 396$  К.

295. Відомі ентропії одиниці маси деякої речовини в газоподібному ( $S_p$ ), рідинному ( $S_r$ ) та твердому ( $S_m$ ) станах і температури плавлення ( $T_{пл}$ ), сублімації ( $T$ ) і випаровування ( $T_{ан}$ ). Визначити приховані теплоти  $q_{пл}$ ,  $q_c$ ,  $q_{ан}$  відповідних фазових переходів.

296. Обчислити  $\frac{dT}{dp}$  для плавлення нафталіну, якщо відомо, що він плавиться при  $80,1$  °С, його прихована теплота плавлення  $q = 1,911 \cdot 10^4 \text{ Дж/моль}$ , а збільшення об'єму при плавленні дорівнює  $18,7 \text{ см}^3/\text{моль}$ .

297. Оцтова кислота при атмосферному тиску плавиться при температурі  $t = 16,6$  °С. Різниця питомих об'ємів рідкої і твердої фаз  $\Delta V = 0,16 \text{ см}^3/\text{г}$ . Точка плавлення оцтової кислоти зміщується на  $\Delta T = 1$  К при зміні тиску на  $\Delta p = 41 \text{ атм}$ . Знайти питому теплоту плавлення оцтової кислоти.

298. Кусок льоду знаходиться в адіабатичній оболонці при температурі  $0$  °С і атмосферному тиску. Як зміниться температура льоду, якщо його адіабатично стиснути до тиску  $p = 100 \text{ атм}$ ? Яка доля льоду  $\frac{\Delta M}{M}$  розплавиться? Питомий об'єм води  $V_w = 1 \text{ см}^3/\text{г}$ , льоду  $V_l = 1,09 \text{ см}^3/\text{г}$ . Теплоємності води і льоду зв'язані співвідношенням  $C_w = 0,6C_l$ .

299. Знайти питомий об'єм водяної пари при  $100$  °С і нормальному тиску, якщо відомо, що при тиску  $735,5 \text{ мм рт. ст.}$  температура кипіння води дорівнює  $99,1$  °С. Питома теплота випаровування при  $100$  °С  $q = 539 \text{ кал/г}$ .

300. У закритій посудині при температурі  $t = 20$  °С знаходиться вологе повітря з відносною вологістю  $f = 80\%$ . На скільки градусів слід знизити температуру стінок посудини, щоб на них почала випадати роса? Питома теплота випаровування води при  $20$  °С  $q = 600 \text{ кал/г}$ . Водяну пару вважати ідеальним газом.

301. Температура води в потрійній точці  $t = 0,0075$  °С, питома теплота плавлення льоду при цій температурі  $q_{12} = 80 \text{ кал/г}$ . Питомий об'єм водяної пари в потрійній точці  $V_3 = 206000 \text{ см}^3/\text{г}$ . В порівнянні з ним питомими об'ємами льоду  $V_1$  та води  $V_2$  можна знехтувати. Що більше — тиск насиченої пари над водою  $p_1$ , чи над льодом  $p_2$  при температурі  $0$  °С? Чому дорівнює різниця  $p_1 - p_2$ ?

## ДОДАТКИ

### 1. Основні одиниці Сі в молекулярній фізиці

**Кельвін** — одиниця термодинамічної температури, яка дорівнює 1/273,16 частини термодинамічної температури потрійної точки води.

**Моль** — одиниця кількості речовини, яка дорівнює кількості речовини молекулярної системи, в якій міститься стільки ж структурних елементів (атомів, молекул, іонів), скільки міститься атомів у вуглецеві — 12 масою 0,012 кг.

### 2. Основні фізичні константи в молекулярній фізиці

Число Авогадро  $N_A = 6,02 \cdot 10^{23}$  моль<sup>-1</sup>  
 Число Лошмідта  $L = 2,71 \cdot 10^{25}$  м<sup>-3</sup>  
 Стала Больцмана  $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$  Дж/К

Універсальна газова стала  $R = 8,31 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}$

Об'єм моля ідеального газу при нормальних умовах  $V_0 = 22,4 \cdot 10^{-3}$  м<sup>3</sup>/моль

Атомна одиниця маси  $= \begin{cases} 1,660 \cdot 10^{-27} \text{ кг} \\ 931,4 \text{ MeV} \end{cases}$

Тепловий еквівалент 1 кал. = 4,2 Дж.

### 3. Одиниці тиску та співвідношення між ними

1 фізична атмосфера =  $1,013 \cdot 10^5$  Н/м<sup>2</sup> (Паскалів, Па)

1 технічна атмосфера =  $0,98 \cdot 10^5$  Н/м<sup>2</sup>

1 кг/м<sup>2</sup> = 9,8 Н/м<sup>2</sup>

1 дн/см<sup>2</sup> = 0,1 Н/м<sup>2</sup>

1 мм. рт. ст. = 133,3 Н/м<sup>2</sup>

### 4. Таблиці деяких визначених інтегралів:

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-x} dx = n!$$

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-ax} dx = \frac{n!}{a^{n+1}}$$

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$\int_0^{\infty} x e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2a}$$

$$\int_0^{\infty} x^2 e^{-ax^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4} \cdot a^{-3/2}$$

$$\int_0^{\infty} x^3 e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2} a^{-2}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{x^n dx}{e^x - 1} = \begin{cases} 2,31 & n = 1/2 \\ \pi^2/6 & n = 1 \\ 2,405 & n = 2 \\ \pi^4/15 & n = 3 \\ 24,9 & n = 4 \end{cases}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = \begin{cases} 0,225 & \alpha = 1 \\ 1,18 & \alpha = 2 \\ 2,56 & \alpha = 3 \\ 4,91 & \alpha = 5 \\ 6,43 & \alpha = 10 \end{cases}$$

### 5. Основні фізичні величини для газів

| Газ             | Молекулярна маса $\mu$ , г/моль | Густина $\rho$ , кг/м <sup>3</sup> | В'язкість $\eta$ , мкПа·с | Теплопровідність $i$ , мВт/м·К | Теплоємність при сталому тиску $C_p$ , Дж/г·К | $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$ |
|-----------------|---------------------------------|------------------------------------|---------------------------|--------------------------------|---|----------------------------|
| водень          | 2                               | 0,09                               | 8,4                       | 168,4                          | 14,27   | 1,41                       |
| гелій           | 4                               | 0,18                               | 18,9                      | 141,5                          | 5,24  | 1,67                       |
| аргон           | 40                              | 1,78                               | 22,1                      | 16,2                           | 0,52  | 1,67                       |
| азот            | 28                              | 1,25                               | 16,7                      | 24,3                           | 1,038   | 1,40                       |
| кисень          | 32                              | 1,43                               | 19,2                      | 24,4                           | 0,91  | 1,40                       |
| вуглекислий газ | 44                              | 1,98                               | 14,0                      | 23,2                           | 0,84  | 1,30                       |
| водяна пара     | 18                              | 0,76                               | 9,0                       | 15,8                           | 1,87  | 1,32                       |
| повітря         | 29                              | 1,29                               | 17,2                      | 24,1                           | 0,99  | 1,40                       |

Примітка: значення  $\rho$ ,  $\eta$  і  $i$  — при нормальних умовах.

### 6. Критичні параметри і поправки Ван-дер-Ваальса

| Газ              | Критична температура $T_c$ , К | Критичний тиск $p_c$ , МПа | Діаметр молекул $d$ , нм | Поправки Ван-дер-Ваальса                  |   |
|------------------|--------------------------------|----------------------------|--------------------------|---|---|
|                  |                                |                            |                          | $a$ , Н·м <sup>4</sup> /моль <sup>2</sup> | $b$ , 10 <sup>-5</sup> м <sup>3</sup> /моль |
| H <sub>2</sub>   | 33,0                           | 1,30                       | 0,27                     | 0,024                                     | 2,70  |
| He               | 5,2                            | 0,23                       | 0,20                     | 0,003                                     | 2,20  |
| Ar               | 151,0                          | 4,86                       | 0,35                     | 0,134                                     | 3,22  |
| N <sub>2</sub>   | 126,0                          | 3,40                       | 0,37                     | 0,135                                     | 3,86  |
| O <sub>2</sub>   | 154,0                          | 5,04                       | 0,35                     | 0,136                                     | 3,17  |
| CO <sub>2</sub>  | 304,0                          | 7,40                       | 0,40                     | 0,361                                     | 4,28  |
| H <sub>2</sub> O | 647,0                          | 22,00                      | 0,30                     | 0,545                                     | 3,04  |

### 7. Основні фізичні величини для рідин

| Рідина        | Формула                                      | Густина $\rho$ , г/см <sup>3</sup> | Коефіцієнт в'язкості $\eta$ , 10 <sup>-3</sup> кг/м·с | Коефіцієнт теплопровідності $\kappa$ , Вт/м·К | Коефіцієнт поверхневого натягу $\sigma$ , 10 <sup>-3</sup> Н/м |
|---------------|--|------------------------------------|---|---|--|
| Ацетон        | C <sub>3</sub> H <sub>6</sub> O              | 0,790                              | 0,32  | 0,162   | 23,30  |
| Бензол        | C <sub>6</sub> H <sub>6</sub>                | 0,890                              | 0,63  | 0,143   | 29,20  |
| Вода          | H <sub>2</sub> O                             | 0,998                              | 1,00  |   | 72,75  |
| Гліцерин      | C <sub>3</sub> H <sub>8</sub> O <sub>3</sub> | 1,260                              | 1495,0  | 0,283   | 63,40  |
| Спирт (мет.)  | C <sub>2</sub> H <sub>5</sub> O              | 0,790                              | 0,578   | 0,203   | 23,00  |
| Спирт (етил.) | C <sub>2</sub> H <sub>6</sub> O              | 0,790                              | 1,200   | 0,161   | 22,75  |
| Ефір          | C <sub>4</sub> H <sub>10</sub> O             | 0,714                              | 0,242   |   | 19,96  |

Примітка: значення  $\rho$ ,  $\eta$ ,  $\kappa$ ,  $\sigma$  — при тиску  $p = 760$  мм рт. ст. і  $t = 20$  °С.

### 8. Основні теплові фізичні величини для рідин

| Рідина        | Теплоємність $c$ , Дж/гК | Температура плавлення $T_{пл}$ , °С | Температура кипіння $T_{кип}$ , °С | Критична температура $T_{кр}$ , °С | Критичний тиск $p_{кр} \cdot 10^{-5}$ , Па | Питома теплота плавлення $q_{пл}$ , Дж/г | Питома теплота випаровування $q_{вип}$ , Дж/г |
|---------------|--------------------------|-------------------------------------|------------------------------------|------------------------------------|--|--|---|
| Ацетон        | 2,18                     | -95,0                               | 56,5                               | 235,0                              | 47,0                                       | 82,0                                     | 521,2   |
| Бензол        | 1,72                     | 5,5                                 | 80,1                               | 290,5                              | 50,1                                       | 126,0                                    | 394,4   |
| Вода          | 4,14                     | 0,0                                 | 100,0                              | 374,0                              | 218,0                                      | 334,0                                    | 2259,0  |
| Гліцерин      | 2,43                     | -20,0                               | 290,0                              |                                    |  | 176,0                                    |   |
| Спирт (мет.)  | 2,39                     | -93,9                               | 61,1                               | 240,0                              | 78,7                                       | 68,7                                     | 1102,0  |
| Спирт (етил.) | 2,51                     | -117,0                              | 78,5                               | 243,5                              | 63,1                                       | 108,0                                    | 835,0   |
| Ефір          | 2,34                     | -116,0                              | 34,5                               | 193,8                              | 35,5                                       | 98,4                                     | 355,0   |

Примітка: теплоємність  $c$  при 20 °С.

### 9. Основні фізичні величини для твердих тіл

| Елемент  | Молярна маса | Густина, $\rho$ , г/см <sup>3</sup> | Коефіцієнт теплопровідності, $\kappa$ , Вт/м·К | Теплоємність, $C$ , Дж/моль·К | Температура плавлення, $T_{пл}$ , °С | Теплота плавлення, $q_{пл}$ , КДж/моль |
|----------|--------------|-------------------------------------|--|-------------------------------|--------------------------------------|--|
| Алюміній | 26,98        | 2,70                                | 207,0  | 24,3                          | 660                                  | 10,70                                  |
| Вольфрам | 183,85       | 18,60                               | 130,0  | 24,8                          | 3380                                 | 35,20                                  |
| Залізо   | 55,85        | 7,87                                | 75,0   | 25,0                          | 1535                                 | 14,50                                  |
| Золото   | 196,97       | 19,30                               | 310,0  | 25,2                          | 1063                                 | 12,80                                  |
| Мідь     | 63,54        | 8,93                                | 400,0  | 24,5                          | 1083                                 | 11,30                                  |
| Олово    | 118,69       | 7,30                                | 65,0   | 25,8                          | 232                                  | 7,10                                   |
| Свинець  | 207,02       | 11,30                               | 34,9   | 26,4                          | 327                                  | 4,77                                   |

### 10. Пружні сталі величини твердих тіл

| Назва матеріалу | Модуль пружності $E$ , кГ/мм <sup>2</sup> | Модуль зсуву $G$ , кГ/мм <sup>2</sup> | Коефіцієнт Пуассона $\mu$ | Модуль всебічного стиску, $M$ кГ/мм <sup>2</sup> | Напруженість руйнування, $P_m$ , кГ/см <sup>2</sup> |
|-----------------|---|---------------------------------------|---------------------------|--|---|
| Сталь           | 20000                                     | 8000                                  | 0,29                      | 16500  | 7000  |
| Мідь            | 12000                                     | 4500                                  | 0,34                      | 13500  | 2400  |
| Свинець         | 1700                                      | 560                                   | 0,44                      | -  | 200   |
| Скло            | 5000                                      | -                                     | 0,25                      | 3000   | 300   |

### ВІДПОВІДІ

1.  $n = 3,34 \cdot 10^{22}$ . 2.  $n = 2,7 \cdot 10^{19}$ . 3.  $n = 1 \cdot 10^5 \text{ см}^{-3}$ ,  $\langle l \rangle = 0,2 \text{ мм}$ . 4.  $N = 8 \cdot 10^{16}$ .  
 5.  $p = 1,74 \cdot 10^4 \text{ мм рт. ст.}$  6.  $n = 6,6 \cdot 10^{18} \text{ л/см}^3$ . 7.  $4 \cdot 10^{19}$ . 8.  $0,23 \text{ мм рт. ст.}$   
 9.  $M_1 = 16 \text{ г}$ ,  $M_2 = 8 \text{ г}$ . 10.  $M = 4 \cdot 10^{-3} \text{ кг}$ ,  $p = 1,33 \cdot 10^5 \text{ Па}$ . 11.  $p = (1 + \alpha) \frac{MRT}{\mu V} = 19 \text{ атм}$ , де  $\mu$  — маса моля азота  $N_2$ . 12.  $\frac{1}{\mu} = \frac{M_1}{M} \frac{1}{\mu_1} + \frac{M_2}{M} \frac{1}{\mu_2} + \frac{M_3}{M} \frac{1}{\mu_3} + \dots$  13.  $30,2 \text{ г/моль}$ . 14.  $\rho = \frac{p_0(M_1 + M_2)}{RT(M_1/\mu_1 + M_2/\mu_2)} = 1,54 \text{ г/л}$ .  
 15.  $0,48 \text{ г/л}$ . 16.  $1,45 \text{ м}^3/\text{кг}$ . 17.  $T_2 = \frac{p_2 T_1}{p_1} \frac{\mu_1}{\mu_1 + \mu_2} = 1200 \text{ К}$ . 18.  $2 \text{ атм}$ . 19.  $n = 79$ .  
 20.  $n = 637$ . 21.  $554 \text{ л}$ . 22.  $T = T_0 \frac{\eta'(\eta^2 - 1)}{\eta(\eta^2 - 1)} = 420 \text{ К}$ . 23.  $T_1 = 410 \text{ К}$ ;  $T_2 = 205 \text{ К}$ .  
 24.  $\frac{V_1'}{V_2'} = \frac{4}{5}$ . 25.  $\frac{p}{p_1} = \frac{T_3(T_1 + T_2)}{2T_1 T_2} = \frac{16}{15}$ . 26.  $p = \frac{(p_0/T_0)(V_0 + V_1 + V_2)}{(V_0/T_0 + V_1/T_1 + V_2/T_2)}$ .  
 27.  $p = \frac{(T_1 + \Delta T)p_1 V_1 T_2 + (T_2 - \Delta T)p_2 V_2 T_1}{T_1 T_2 (V_1 - V_2)}$ . 28.  $M = \rho V \Delta P/P$ , де  $P$  — нормальний атмосферний тиск. 29.  $\Delta M = 95 \text{ г}$ . 30.  $n = \frac{\ln k}{\ln \frac{V}{V + V_0}}$ . 31.  $p_1 = p_1 \left(1 - \frac{\Delta V}{V}\right)^{n-1}$ .  
 32.  $p = p_0 e^{\frac{c}{V}}$ . 33.  $t = \frac{V}{c} \ln \eta = 1 \text{ хв}$ . 34. а)  $T_{\max} = \frac{2}{3} \frac{p_0}{R} \sqrt{\frac{p_0}{3\alpha}}$ ; б)  $T_{\max} = \frac{p_0}{e\beta R}$ .  
 35.  $M = \frac{8\pi^2 M_0 \mu V_1^2 \cdot V_2^2}{RTS^2 \tau^2 (V_1^2 + V_2^2)}$ . 36. в) змінити абсцису в  $\sqrt{\frac{T_2}{T_1}}$  разів, а ординату в

- $\sqrt{\frac{T_1}{T_2}}$  разів. 37. нулю. 38.  $4,39 \cdot 10^{-3}$ . 39.  $6,63 \cdot 10^{-3}$ . 40.  $\frac{\Delta N}{N} = 2,8\%$ . 41.  $T = 83$  К.  
 42.  $v_{lm} = 450$  м/с,  $\bar{v} = 510$  м/с,  $v_{кс} = 550$  м/с. 43.  $\bar{v} = 579$  м/с,  $v_{кс} = 628$  м/с,  $v_{lm} =$   
 $= 513$  м/с. 44. а)  $\frac{\Delta N}{N} = 0,57$ ; б)  $\frac{\Delta N}{N} = 0,5$ . 45.  $N = 1,9 \cdot 10^{22}$ . 47. а)  $\Delta N = 2,4 \cdot 10^{22}$ ;  
 б)  $\Delta N = 7 \cdot 10^{22}$ . 48.  $T = 426$  К. 49.  $n = 1,75 \cdot 10^{16}$  1/см<sup>3</sup>. 50.  $T = \frac{mv^2}{3R}$ .  
 51. а)  $m(\Delta v)^2 / k(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2 = 380$  К; б)  $mv^2 / 2k = 340$  К. 52.  $v = \frac{3kT \ln(m_2/m_1)}{m_2 - m_1} =$   
 $= 1,61$  км/с. 53.  $v = \sqrt{1,5 \ln 2} \cdot v_{lm} = 1,02 v_{lm}$ . 54.  $dN = 2\pi N (\pi kT)^{-3/2} \sqrt{\epsilon} e^{-\frac{\epsilon}{kT}} d\epsilon$ .  
 55.  $\epsilon = \frac{kT}{2}$ . 56.  $dN = \frac{2pV}{\sqrt{\pi}} (kT)^{-5/2} \sqrt{\epsilon} e^{-\frac{\epsilon}{kT}} d\epsilon$ . 57.  $\frac{\Delta N}{N} = 484 \cdot 10^{-2}$ . 58.  $v = \frac{\pi \bar{v}}{4}$ .  
 59.  $p_{lm} = \sqrt{2mkT}$ . 60.  $\bar{p}^2 = 3mkT$ . 61.  $\bar{v} = 0$ ,  $(\bar{v}) = \sqrt{\frac{2kT}{\pi m}}$ . 62.  $\bar{v}_x^2 = \frac{kT}{m}$ .  
 63.  $\frac{1}{v} = \sqrt{\frac{2m}{\pi kT}}$ . 64. а)  $v_{lm} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}$ ; б)  $\epsilon_{lm} = kT$ . 65.  $dz = n \left( \frac{2kT}{\pi m} \right)^{3/2} \sin \varphi \cos \varphi d\varphi$ .  
 66.  $dz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dn \left( \frac{d\Omega}{4\pi} \right) v \cos \varphi = n\pi \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} v^3 dv$ . 67.  $t = \frac{4V}{S\bar{v}} \frac{p_2 - p_1}{p_0}$ . При  
 $\bar{v} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi \mu}} = 460$  м/с,  $\tau = 1,17$  с.,  $\tau' = 17$  год. 68. 1950 м.  
 69.  $h_0 = \int_0^{\infty} h \rho dh / \int_0^{\infty} \rho dh = \frac{RT}{\mu g}$ . 70. 20 Н. 71.  $p = 758$  мм рт. ст.  
 72.  $p = \frac{N_0 m \omega^2 e^{-\frac{m\omega^2 R^2}{2kT}}}{2\pi l (e^{-\frac{m\omega^2 R^2}{2kT}} - 1)}$ . 73. а)  $dN = n_0 e^{-\frac{ar^2}{kT}} \cdot 4\pi r^2 dr$ ; б)  $r_{lm} = \sqrt{\frac{kT}{a}}$ ;  
 в)  $\frac{dN}{N} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{a}{kT} \right)^{3/2} r^2 e^{-\frac{ar^2}{kT}} dr$ ; г)  $\frac{n'_0}{n_0} = \eta^{3/2}$ . 75.  $4,6 \cdot 10^{-2}$  мм рт. ст.  
 76.  $9,3 \cdot 10^{-8}$  сек. 77. у 18 разів. 78. 6,4 см. 79. можна. 80. 1,55 мг/м<sup>3</sup>.  
 81.  $d = 2,5 \cdot 10^{-10}$  м. 82.  $3,7 \cdot 10^9$  1/с. 83.  $1,57 \cdot 10^{21}$  1/с. 84. а) не залежить; б)  $\lambda \sim \frac{1}{p}$ .

85. а) не залежить; б)  $\lambda \sim T$ . 86. а)  $z \sim \sqrt{p}$ ; б)  $z \sim p$ ; в)  $z \sim \sqrt{T}$ ; д)  $z \sim \frac{1}{\sqrt{T}}$ .  
 87. а)  $\alpha \approx 0,37$ ; б)  $\alpha \approx 0,23$ . 88. а)  $W = e^{-a}$ ; б)  $t = \frac{1}{\alpha}$ . 89.  $\lambda = 0,89 \cdot 10^{-5}$  см.  
 90.  $\bar{v} = 3,8 \cdot 10^4$  см/с;  $\lambda = 0,92 \cdot 10^{-5}$  см;  $z = 5,6 \cdot 10^{28}$  с<sup>-1</sup>;  $\sigma = 0,283 \cdot 10^{-14}$  см<sup>2</sup>;  
 $r = \sqrt{\frac{\sigma}{\pi}} = 3 \cdot 10^{-8}$  см. 91. 135 нм. 92. 5,2 разів. 93. а)  $D$  збільшиться в  $n$  раз,  
 $\eta = const$ ; б)  $D$  збільшиться в  $n^{3/2}$  разів,  $\eta$  — в  $\sqrt{n}$  раз. 94. 1)  $D \sim \sqrt{T^3}$ ;  
 2)  $D \sim \sqrt{T}$ . 95. 1)  $D \sim \frac{1}{p}$ ; 2)  $D \sim \sqrt{p}$ . 96. 1)  $\eta \sim \sqrt{T}$ ; 2)  $\eta \sim \sqrt{T}$ . 97. 1) не зале-  
 жить; 2)  $\eta \sim \sqrt{p}$ . 98. 1)  $\kappa \sim \sqrt{T}$ ; 2)  $\kappa \sim \sqrt{T}$ . 99. 1) не залежить; 2)  $\kappa \sim \sqrt{p}$ .  
 100. збільшився в  $\frac{\alpha^3}{\beta} = 2$  рази. 101.  $\kappa = 13,2 \cdot 10^{-3} \frac{Bm}{m \cdot K}$ . 102.  $19 \cdot 10^{-6}$  Па·с.  
 103.  $\eta = 1,7$ . 104.  $\varphi = \frac{\pi \eta \omega}{RGh}$ . 105.  $\eta = \left( \frac{1}{R_1^2} - \frac{1}{R_2^2} \right) N_1 / 4\pi \omega$ . 106.  $N_1 = 2\pi \eta \omega R^3 / \Delta R$ ;  
 $p = \sqrt{2kT} / \pi d^2 n \Delta R = 0,7$  Па. 107.  $T(r) = T_1 + (T_2 - T_1) \frac{\ln \frac{r}{R_1}}{\ln \frac{R_2}{R_1}}$ ;  $\frac{dT}{dr} = \frac{T_2 - T_1}{\ln \frac{R_2}{R_1}} \frac{1}{r}$ ;  
 $q = \frac{2\pi \lambda (T_2 - T_1)}{\ln \frac{R_2}{R_1}}$ . 108.  $T = \frac{\left( \frac{\kappa_1 T_1}{l_1} + \frac{\kappa_2 T_2}{l_2} \right)}{\frac{\kappa_1}{l_1} + \frac{\kappa_2}{l_2}}$ . 109.  $\kappa = \frac{l_1 + l_2}{\frac{l_1}{\kappa_1} + \frac{l_2}{\kappa_2}}$ . 110.  $T(x) = T_1 \left( \frac{T_2}{T_1} \right)^{\frac{x}{l}}$ ;  
 $q = \frac{\alpha}{l} \ln \frac{T_2}{T_1}$ . 111.  $T = T_1 \left\{ \left( 1 + \frac{x}{l} \right) \left[ \left( \frac{T_2}{T_1} \right)^{\frac{1}{l}} - 1 \right] \right\}^{\frac{l}{l-1}}$ , де  $x$  — віддаль від пластини  
 температурою  $T_1$ . 112.  $T = T_1 + \frac{T_2 - T_1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{r} \right)$ . 113.  $\omega = T_0 + (R^2 - r^2) \omega / 6\mu$ .  
 114.  $t = \frac{4V}{\sqrt{8kT}} S$ . 115.  $\Delta M = \frac{2}{3\pi d^2} \sqrt{\frac{RT\mu}{\pi}} \frac{S \Delta t}{l N_A}$ . 116.  $\tau = \frac{l V_0}{DS} = 41$ .

$V_0 = \frac{V_1 V_2}{V_1 + V_2}$  — приведенный об'єм. 117.  $\Delta Q = A = \frac{M}{\mu} RT \ln n = 2,44 \text{ кДж}$ .  
 118.  $Q = \frac{V}{\gamma - 1} (p_1 - p_0) = 2,27 \cdot 10^4 \text{ Дж}$ . 119. 1400 кал. 120.  $\Delta U = -\frac{p_0 V \Delta T}{T_0 (\gamma - 1)} =$   
 $= 6,25 \text{ кДж}$ ,  $Q' = -\Delta U$ . 121.  $Q = \frac{A\gamma}{\gamma - 1} = 7 \text{ Дж}$ . 122.  $A = R\Delta T = 0,6 \text{ кДж}$ ,  
 $\Delta U = Q - R\Delta T = 1 \text{ кДж}$ ,  $\gamma = \frac{Q}{Q - R\Delta T} = 1,6$ . 123.  $A = p_0 S \left( h_1 - h_0 \ln \frac{h_0 + h_1}{h_0} \right) =$   
 $= 2,37 \text{ Дж}$ . 124. а)  $T = T_0 n^{-\frac{1}{\gamma}} = 560 \text{ К}$ ; б)  $A' = RT_0 (1 - n^{-\frac{1}{\gamma}}) / \gamma - 1 = 5,6 \text{ кДж}$ .  
 125.  $Q = \frac{AC_p}{R} = 25 \text{ Дж}$ . 126.  $\frac{A}{Q} = 1 - \frac{1}{\gamma}$ . 127.  $\Delta U = \frac{3}{2} p (V_2 - V_1) = 7,6 \cdot 10^4 \text{ Дж}$ .  
 128.  $T_x = \frac{(p_0 S + Mg)(3p_0 S - 2Mg)V}{(3p_0 S + Mg)SvR}$ . 129.  $\frac{AT_0}{p_0 V_0} = 58 \text{ К}$ . 130.  $\Delta U = \frac{i}{2} p_0 V_0 (nk - 1)$ ;  
 $A = p_0 V_0 n(k - 1)$ ;  $Q = \frac{p_0 V_0}{2} [i(nk - 1) + 2n(k - 1)]$ . 131.  $\gamma = 1 + \frac{n - 1}{\frac{Q}{RT_0} - \ln n} = 1,4$ .  
 132. при адиабатичному стисненні робота більша в  $\frac{n^{\gamma-1} - 1}{(\gamma - 1) \ln n} = 1,4$  разів.  
 133.  $Q = \nu RT_0 \left( 1 - \frac{1}{n} \right) = 2,5 \text{ кДж}$ . 134. а) 2,5 л · атм.; -5,5 л · атм.; -9 л · атм.;  
 б) 2,5 л · атм.; -0,5 л · атм.; -3 л · атм. 135. а) 2,5 л · атм.; -3 л · атм.,  
 -5,5 л · атм.; б) 2,5 л · атм.; -2,11 л · атм.; -4,61 л · атм. 136. а)  $T = 520 \text{ К}$ ;  
 б)  $Q = 2800 \text{ Дж}$ ; в)  $\Delta U = 4900 \text{ Дж}$ ; г)  $A = 2100 \text{ Дж}$ . 137.  $\gamma = 1,52$ .  
 138.  $C_p = 1042 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{град}}$ ;  $C_v = 669 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{град}}$ . 139.  $C_v = \frac{R}{2(M_1 + M_2)} \left( \frac{i_1 M_1}{\mu_1} + \frac{i_2 M_2}{\mu_2} \right) =$   
 $= 2,58 \cdot 10^3 \text{ Дж/кг} \cdot \text{К}$ ;  $C_p = \frac{R}{2(M_1 + M_2)} \left[ \frac{(i_1 + 2)M_1}{\mu_1} + \frac{(i_2 + 2)M_2}{\mu_2} \right] = 3,76 \text{ Дж/кг} \cdot \text{К}$ .  
 140.  $\gamma = 1,47$ . 141.  $c_v = 0,42 \frac{\text{Дж}}{\text{г} \cdot \text{град}}$ ;  $c_p = 0,65 \frac{\text{Дж}}{\text{г} \cdot \text{град}}$ . 142. нагрівається при  
 $n > 1$ , охолоджується при  $n < 1$ . 143.  $C = \frac{R(n - \gamma)}{(n - 1)(\gamma - 1)} = -4,2 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{град}}$ ; де

$n = \frac{\ln \alpha}{\ln \beta}$ . 144. а)  $Q = \frac{R(n - \gamma)\Delta T}{(n - 1)(\gamma - 1)} = 0,11 \text{ кДж}$ ; б)  $A = -\frac{R\Delta T}{(n - 1)} = 0,43 \text{ кДж}$ .  
 145. а)  $\Delta U = \frac{\alpha V_0^2 (\eta^2 - 1)}{\gamma - 1}$ ; б)  $A = \frac{1}{2} \alpha V_0^2 (\eta^2 - 1)$ ; в)  $C = \frac{1}{2} R \left( \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \right)$ . 146. а)  $A =$   
 $= (1 - \alpha) R\Delta T$ ; б)  $C = \frac{R}{\gamma - 1} + \frac{R}{1 - \alpha}$ ;  $C < 0$  при  $\alpha > \frac{\gamma}{\gamma - 1}$ . 147. а)  $A = \frac{\Delta U(\gamma - 1)}{\alpha}$ ;  
 б)  $Q = \Delta U [1 + (\gamma - 1)/\alpha]$ ; в)  $C = R/(\gamma - 1) + \frac{R}{\alpha}$ . 148. а)  $C = C_v + \frac{R}{\alpha V}$ ;  
 б)  $C = C_v + \frac{R}{1 + \alpha V}$ . 149. а)  $A = \alpha \ln \eta - \frac{RT_0(\eta - 1)}{\gamma - 1}$ ; б)  $pV^\gamma \cdot e^{\frac{\alpha(\gamma - 1)}{pV}} = \text{const}$ .  
 150. а)  $Ve^{\frac{\alpha T}{R}} = \text{const}$ ; б)  $Te^{\beta V} = \text{const}$ ; в)  $V - \alpha T = \text{const}$ . 151. а)  $C = C_p + \frac{RT_0}{\alpha V}$ ;  
 б)  $Q = \alpha C_p (V_2 - V_1) + RT_0 \ln \frac{V_2}{V_1}$ . 152. а)  $C = \frac{\gamma R}{\gamma - 1} + \frac{\alpha R}{p_0 V}$ ; б)  $\Delta U =$   
 $= p_0 (V_2 - V_1) / (\gamma - 1)$ ;  $A = p_0 (V_2 - V_1) + \alpha \ln \frac{V_2}{V_1}$ ;  $Q = \frac{\gamma p_0 (V_2 - V_1)}{(\gamma - 1)} + \alpha \ln \frac{V_2}{V_1}$ .  
 153.  $\Delta U = \frac{R^2 T_0}{(\gamma - 1) p_0} \left( \alpha + 3\beta R \frac{T_0}{p_0} \right)$ ;  $A = \frac{R^2 T_0}{p_0} \left( \alpha + 3\beta R \frac{T_0}{p_0} \right)$ . 154.  $T = 2\pi \sqrt{\frac{Ml}{2Sp_0 \gamma}} =$   
 $= 0,065 \text{ с}$ . 155. У другому. 156.  $A' = \frac{A}{n - 1} = 20 \text{ кДж}$ . 157.  $Q_2 = \frac{1 - \eta}{\eta} A = 15 \text{ кДж}$ .  
 158.  $A = \frac{Q(T_1 - T_2)}{T_2} = 418 \text{ Дж}$ . 159.  $\eta = \frac{Q_{12}}{A} = \frac{T_1}{T_1 - T_2} = 3,73$ . 160.  $\eta = \frac{1 - \eta}{\eta} = 9$ .  
 161.  $A_{12} = R(T_1 - T_2)$ ;  $Q_{12} = C_p(T_2 - T_1)$ ;  $A_{23} = 0$ ;  $Q_{23} = C_v(T_1 - T_2) < 0$ ;  
 $A_{31} = Q_{31} = RT_1 \ln \frac{T_1}{T_2} < 0$ ;  $\eta = \frac{R(T_2 - T_1) + RT_1 \ln \frac{T_1}{T_2}}{C_p(T_2 - T_1)}$ . 162.  $Q_{31} = RT_1 \ln \frac{T_1}{T_2}$ ;  
 $Q_{23} = C_v(T_1 - T_2)$ ;  $Q_{12} = C_p(T_1 - T_2)$ ;  $\eta = 1 - \frac{C_p(T_1 - T_2)}{RT_1 \ln \frac{T_1}{T_2} + C_v(T_1 - T_2)}$ .  
 163.  $\eta = 1 - \gamma T_3 \left[ (T_1/T_3)^{\frac{1}{\gamma}} - 1 \right] / (T_1 - T_3)$ . 164.  $\eta = 1 - \frac{2T_3}{T_1 + T_2}$ . 165.  $\eta = 1 - n^{1 - \gamma} = 60\%$ .



166.  $\eta = 1 - n^{-(\gamma-1)/\gamma}$ . 167.  $\eta = 1 - \frac{n+\gamma}{1+\gamma n}$ . 168.  $\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1 + (i+2)(T_1 - T_2) / 2 \ln \frac{p_1}{p_2}} = 22,5\%$ .

169. В обох випадках  $\eta = 1 - \frac{\ln n}{n-1}$ . 170. В обох випадках  $\eta = 1 - (n-1)/n \ln n$ .

171.  $\eta = 1 - (n-1)/n \ln n$ . 172. а)  $\eta = 1 - \frac{\gamma(n-1)}{(n^\gamma - 1)}$ ; б)  $\eta = 1 - \frac{(n^\gamma - 1)}{\gamma(n-1)n^{\gamma-1}}$ .

173. а)  $\eta = 1 - \frac{\gamma(n-1)}{n-1 + (\gamma-1)n \ln n}$ ; б)  $\eta = 1 - \frac{n-1 + (\gamma-1) \ln n}{\gamma(n-1)}$ . 174.  $\eta = \frac{(\tau-1) \ln v}{\tau \ln v + (\tau-1)/(\gamma-1)}$ . 175.  $A_{\max} = Mc \left[ T_{10} - T_2 - T_2 \ln \frac{T_{10}}{T_2} \right] = 34 \text{ МДж}$ , де  $c$  — питома теплоємність заліза. 178.  $\eta_a = \frac{T_1 - T_2}{2T_1}$ ,  $\eta_b = \frac{T_1 - T_2}{T_1 + T_2}$ . 179.  $\Delta S = C_v \ln \frac{T_2}{T_1} = C_v \ln \frac{p_2}{p_1}$  при  $V = \text{const}$ ;  $\Delta S = R \ln \frac{V_2}{V_1} = R \ln \frac{p_1}{p_2}$  при  $T = \text{const}$ ;  $\Delta S = C_p \ln \frac{T_2}{T_1} = C_p \ln \frac{V_2}{V_1}$  при  $p = \text{const}$ . 180.  $\Delta S = 4,56 \text{ кал/град}$ .

181. а)  $\Delta S = \frac{R \ln n}{\gamma-1} = 19 \frac{\text{Дж}}{\text{град} \cdot \text{моль}}$ ; б)  $\Delta S = \frac{\gamma R \ln n}{\gamma-1} = 25 \frac{\text{Дж}}{\text{град} \cdot \text{моль}}$ . 182.  $\Delta S = \nu R \ln n = 20 \text{ Дж/град}$ . 183.  $\Delta S = -\frac{M}{\mu} \frac{\gamma R}{\gamma-1} \ln n = -10 \frac{\text{Дж}}{\text{град}}$ . 184.  $\Delta S = (\gamma \ln \alpha - \ln \beta) \frac{\nu R}{\gamma-1} = -11 \frac{\text{Дж}}{\text{град}}$ . 185.  $\Delta S = \frac{\nu(\gamma+1)R}{\gamma-1} \ln \alpha = 46 \frac{\text{Дж}}{\text{град}}$ . 186.  $n = \exp(\Delta S/\nu R) = 2,0$ . 187.  $S_2 - S_1 = \nu R [\ln \alpha - \ln \beta / (\gamma-1)] = 0,5 \frac{\text{Дж}}{\text{град}}$ .

188. а)  $-0,7 \text{ кал/град}$ ; б)  $+0,7 \text{ кал/град}$ . 189.  $\Delta S = \nu_1 R \ln(1+n) + \nu_2 R \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right) = 5,1 \frac{\text{Дж}}{\text{град}}$ . 190.  $\Delta S = 0,16 \text{ кал/град}$ . 191.  $\Delta S = 63 \text{ кал/град}$ .

192.  $\Delta S = 0,78 \text{ кал/град}$ . 193.  $+0,53 \text{ кал/град}$ . 194.  $S = \nu \frac{R}{\gamma-1} - \frac{\Delta F}{T_0(\eta^{\gamma-1} - 1)} = 0,2 \frac{\text{кДж}}{\text{град}}$ . 195.  $\Delta F = \left( \frac{3}{2} R - S \right) \Delta T = 75 \frac{\text{Дж}}{\text{моль}}$ . 196. а)  $P = \left( \frac{1}{2} \right)^N$ ;

б)  $N = \lg \left( \frac{t}{\tau} \right) / \lg 2$ , де  $\tau \sim 10^{-5} \text{ с}$  — час подолання атомами гелію відстані порядку розмірів посудини. 197.  $w = \frac{N!}{[(N/2)!]^2} = 252$ ,  $P = \frac{w}{2^N} = 24,6\%$ .

198.  $P_n = \frac{N!}{n!(N-n)! 2^N}$ ; відповідно  $\frac{1}{32}, \frac{5}{32}, \frac{10}{32}, \frac{10}{32}, \frac{5}{32}, \frac{1}{32}$ . 199.  $d = \sqrt[3]{6/\pi n_0 \eta^2} = 0,4 \text{ мкм}$ , де  $n_0$  — число Лошмідта;  $\bar{n} = \frac{1}{\eta^2} = 1,0 \cdot 10^6$ . 201.  $21^\circ \text{C}$ ,  $0^\circ \text{C}$ .

202.  $a = 1,33 \text{ л}^2 \text{ атм/моль}^2$ ;  $b = 0,04 \text{ л/моль}$ . 203.  $p_{\text{до}} = 280 \text{ атм}$ ,  $p_{\text{реал}} = 80 \text{ атм}$ . 204.  $T = a(V-b)(1+\alpha)/RV(aV+b) = 133 \text{ К}$ ,  $p = \frac{RT}{V-b} - \frac{a}{V^2} = 9,9 \text{ атм}$ .

205.  $k = 0,91\%$ ,  $k_1 = 6,3\%$ . 206.  $a = V^2(T_1 p_2 - T_2 p_1)/(T_2 - T_1) = 185 \text{ атм} \cdot \text{л}^2/\text{моль}^2$ ;  $b = V - R(T_2 - T_1)/(p_2 - p_1) = 0,042 \text{ л/моль}$ . 207.  $\chi = V^2(V-b)^2/[RTV^3 - 2a(V-b)^2]$ . 208.  $\rho_\kappa = 0,2 \text{ г/см}^3$ . 209.  $a = \frac{27 R^2 T_\kappa^2}{64 p_\kappa} = 3,6 \frac{\text{атм} \cdot \text{л}^2}{\text{моль}^2}$ ;  $b = \frac{1 R T_\kappa}{8 p_\kappa} = 0,043 \frac{\text{л}}{\text{моль}}$ . 210.  $T_\kappa = \frac{8 a}{27 b R} = 300 \text{ К}$ ;  $\rho_\kappa = \frac{1 \mu}{3 b} = 0,34 \frac{\text{г}}{\text{см}^3}$ . 211.  $d = 3,5 \cdot 10^{-10} \text{ м}$ .

212.  $d = \sqrt[3]{\frac{3 R T_\kappa}{16 \pi N_A p_\kappa}} = 2,9 \cdot 10^{-10} \text{ м}$ . 213.  $V' = \frac{3 R T_\kappa}{8 \mu p_\kappa} = 4,7 \frac{\text{см}^3}{\text{г}}$ . 214.  $M = 5,2 \cdot 10^{-3} \text{ кг}$ . 215.  $V_2 = \frac{8 p_\kappa V_1 \mu}{3 R T_\kappa \rho} \approx 2 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3$ . 216.  $T = 291 \text{ К}$ .

218.  $\Delta U = \frac{a}{V_1} - \frac{a}{V_2} = 0,11 \text{ кДж}$ ;  $Q = RT \ln \frac{V_2 - b}{V_1 - b} = 3,8 \text{ кДж}$ . 219.  $Q = \nu^2 a (V_2 - V_1)/V_1 V_2 = 0,33 \text{ кДж}$ . 220.  $Q = \frac{C_v}{R} \left[ \left( p + \frac{a}{V_2^2} \right) (V_2 - b) - \left( p + \frac{a}{V_1^2} \right) (V_1 - b) \right] + a \left( \frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2} \right)$ . 221.  $\Delta T = \frac{a}{C_v} \left( \frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2} \right)$ . 222.  $a = 0,365 \text{ Нм}^4/\text{моль}^2$ . 223.  $\Delta T = -6,5 \text{ К}$ .  $\Delta U = 0$ ,  $A = 272 \text{ Дж}$ . 224.  $\Delta T = -\nu a V_2 (\gamma - 1) / R V_1 (V_1 + V_2) = -3,0 \text{ К}$ .

225.  $C_p - C_v = \frac{R}{1 - \frac{2a(V-b)}{RTV^3}}$ . 226.  $T(V-b)^{\frac{R}{C_v}} = \text{const}$ . 227.  $\Delta S = R \ln \frac{V_2 - b}{V_1 - b}$ .

228.  $\eta = 1 - \left( \frac{V_1 - b}{V_2 - b} \right) \frac{R}{C_V}$ . 229.  $\Delta F = RT \ln[(V_1 - b)/(V_2 - b)] + \frac{a}{V_1} - \frac{a}{V_2}$ . 232.  $T_i = 6,75 T_{\kappa}$ ,  $T_{inc} = 35,8 \text{ К}$ . 233.  $T_1 < \frac{2a}{bR} \left( 1 - \frac{b}{V_1} \right) = 180 \text{ К}$ . 234.  $D_p \approx 1,5 \cdot 10^{-9} \text{ м}^2/\text{с}$ ,  $D_z \approx 2 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$ . 236.  $\lambda = 46 \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ . 237.  $\rho = \rho_0(1 + \kappa p) = 1,054 \text{ г/см}^3$ . 238.  $h = 4\sigma/\rho g d = 21 \text{ см}$ . 239.  $\Delta E = 4\pi R^2 \left( \frac{R}{r} - 1 \right) \sigma = 3,5 \cdot 10^4 \text{ ерг}$ . 240. а)  $5 \cdot 10^{-3} \text{ Дж}$ ; б)  $2,3 \text{ Н/м}^2$ . 241.  $A' = 8\pi R^2 \sigma - pV \ln \frac{p}{p_0}$ , де  $p = p_0 + \frac{4\sigma}{R}$ . 242.  $A = 6 \cdot 10^{-2} \text{ Дж}$ . 243. а)  $F = \sigma \pi d^2 = 3 \text{ мкДж}$ ; б)  $F = \sigma 2\pi d^2 = 10 \text{ мкДж}$ . 244.  $\Delta F = 2\pi \sigma d^2 (2^{-1/3} - 1) = -1,5 \text{ мкДж}$ . 245.  $\sigma = \frac{1}{8} \frac{p_0 d (1 - \alpha^3/n)}{\alpha^2 - 1}$ . 246.  $p = 2,2 \text{ атм}$ . 247.  $h = \left[ p_0 (n^3 - 1) + 4\sigma (n^2 - 1)/d \right] / \rho g = 5 \text{ м}$ . 248.  $M = 23,1 \cdot 10^{-6} \text{ кг}$ . 249.  $h \approx 7,3 \cdot 10^{-2} \text{ м}$ . 250.  $f = 2\sigma^2 l / \rho g d^2 = 13 \text{ Н}$ . 251.  $h = \frac{l}{\left( 1 + \frac{p_0 d}{4\sigma} \right)} = 1,4 \text{ см}$ . 252.  $\sigma = 22 \cdot 10^{-3} \text{ Н/м}$ . 253.  $\Delta h = 4\sigma |\cos \phi| (d_2 - d_1) / d_1 d_2 \rho g = 11 \text{ мм}$ . 254.  $h = 4\sigma / \rho g (d_2 - d_1) = 6 \text{ см}$ . 255.  $\omega = (2/l) \sqrt{\rho/g h}$ . 256.  $\frac{d\sigma}{dT} = -\frac{q}{T}$ , де  $q$  — тепло, яке необхідно для утворення одиниці площі поверхневого шару при ізотермічному процесі. 257.  $U = \left( \sigma - T \frac{d\sigma}{dT} \right) F$ . 259.  $p_{осм} = \nu RT = 3,5 \text{ атм}$ ,  $\nu$  — число молей цукру в одиниці об'єму розчину ( $\nu = 50/342 \text{ моль/л}$ ). 260.  $\mu = \frac{MRT}{p_{осм} V} = 360$ . 261.  $T = \frac{p_{осм}}{(1+\alpha)\nu R} = 303 \text{ К}$ , де  $\nu = \frac{20 \text{ моль}}{58 \text{ л}}$ . 262.  $p = p_0 \left( 1 - \frac{\nu'}{\nu} \right) = 16,76 \text{ мм рт. ст.}$  263.  $\frac{p_0 - p}{p_0} = \frac{\nu'}{\nu}$ . 264. 13 осей: 6 — другого, 4 — третього і 3 — четвертого порядків. 265. 6-го порядку. 267. а) [100], [010], [001], б) [011], [101], [110], в) [111], г) [111]. 268. ГЦК, ГЦК, примітивна, примітивна, ОЦК. 269. а) збільшиться, б) не зміниться. 270.  $\eta = 0,74$ . 271. 0,3%. 272. 177 м. 273. на 0,32 см.

274.  $n = \frac{\sqrt{2p_m}}{\pi l \sqrt{\rho}} = 82,5 \text{ с}^{-1}$ . 275. а)  $\Delta V = \frac{l(1-2\mu)F}{E} = 8 \text{ мм}^3$ ; б)  $\Delta S = \frac{4l(1-\mu)F}{Ed} = 0,28 \text{ см}^2$ . 276.  $\kappa = l^3 \sqrt{Mg/2\pi d^2 E} = 2,5 \text{ см}$ . 277.  $T = 1/2 M \omega^2 l \left( 1 - \frac{r^2}{l^2} \right)$ ,  $\Delta l = \frac{1}{3} \frac{\rho \omega^2 l^3}{E}$ , де  $\rho$  — густина міді. 278.  $\Delta V = (1-2\mu)Fl/E = 1,6 \text{ мм}^3$ . 279. а)  $\Delta l = 1/2 \rho g l^2 / E$ ; б)  $\frac{\Delta V}{V} = (1-2\mu) \frac{\Delta l}{l}$ . 280.  $M = \frac{E}{3(1-2\mu)}$ ;  $G = \frac{E}{2(1+\mu)}$ . 281.  $\frac{\Delta V}{V} = \frac{3(1-2\mu)p}{E}$ , де  $p = p_x = p_y = p_z = \frac{F}{S}$ . 283.  $1/2 M E \epsilon^2 / \rho = 0,04 \text{ кДж}$ , де  $\rho$  — густина сталі. 284.  $\omega_n = \frac{p^2}{2M}$ , де  $M$  — модуль всебічного стиску. 285.  $\omega = 23,5 \text{ кДж/м}^3$ . 286.  $W = 1/4 \pi r^4 G \phi^2 / l$ . 287.  $\alpha_1/\alpha_2 = E_2/E_1$ . 288.  $c_{\text{Кл}} = 668 \text{ Дж/кг} \cdot \text{К}$ ;  $c_{\text{NaCl}} = 853 \text{ Дж/кг} \cdot \text{К}$ . 289.  $c_1 = 6,14 \text{ кал/моль} \cdot \text{град}$ ;  $c_2 = 6,15 \text{ кал/моль} \cdot \text{град}$ . 290.  $\bar{E} = \frac{h\nu}{e^{h\nu/kT} - 1}$ ;  $\bar{E}_1 = 1,6 \cdot 10^{-14} \text{ ерг}$ ;  $\bar{E}_2 = 6 \cdot 10^{-29} \text{ ерг}$ ;  $\bar{E}_{\text{кл}} = kT = 4,1 \cdot 10^{-14} \text{ ерг}$ . 291.  $E = 28 \text{ МеВ}$ ,  $p \approx 10^{-19} \text{ г} \cdot \text{см/с}$ . 292. Можна, оскільки при цих температурах теплоємність  $\sim T^3$ . 293. а)  $\Theta = 220 \text{ К}$ ; б)  $C \approx 10 \text{ Дж/моль} \cdot \text{К}$ ; в)  $\omega_{\text{макс}} = 4,1 \cdot 10^{13} \text{ с}^{-1}$ . 294.  $v \approx \frac{2\pi k \Theta}{h} \sqrt{6\pi^2 n_0} = 3,4 \text{ км/с}$ , де  $n_0$  — концентрація атомів. 295.  $q_{nn} = (S_p - S_m) T_{nn}$ ,  $q_c = (S_z - S_m) T_c$ ,  $q_{an} = (S_z - S_p) T_{an}$ . 296.  $\left( \frac{dT}{dp} \right) = 3,47 \cdot 10^{-7} \text{ К/Па}$ . 297.  $q_{nn} = 44 \text{ кал/г}$ . 298.  $\Delta T = \frac{pT}{q} (V_a - V_b) = -0,72 \text{ }^\circ\text{C}$ ,  $\frac{\Delta M}{M} = C_s \Delta T / q = 0,0054$ . 299.  $V_n = V_p + \frac{q}{T} \frac{dT}{dp} = 1700 \text{ см}^3/\text{г}$ . 300.  $\Delta T = \frac{f-1}{\mu q - fRT_1} RT_1^2 = -3,3 \text{ К}$ . 301.  $p_1 - p_2 = \frac{q_{12}}{TV_3} \cdot t = 0,00033 \text{ мм рт. ст.}$

## ЗМІСТ

|  |    |
|--|----|
| Вступ .....  | 3  |
| Розділ I. Молекулярно-кінетична теорія .....                                       | 4  |
| § 1. Рівняння молекулярно-кінетичної теорії газів.<br>Закони ідеальних газів ..... | 4  |
| § 2. Елементи статистичної фізики .....  | 13 |
| § 3. Явища переносу .....  | 24 |
| Розділ II. Термодинаміка .....   | 35 |
| § 1. Перший закон термодинаміки .....  | 35 |
| § 2. Другий закон термодинаміки .....  | 46 |
| Розділ III. Реальні гази, рідини, тверді тіла, фазові переходи .....               | 60 |
| § 1. Реальні гази. Ефект Джоуля-Томсона .....                                      | 61 |
| § 2. Рідини. Поверхневий натяг .....   | 67 |
| § 3. Тверді тіла. Фазові переходи .....  | 74 |
| Додатки .....  | 84 |
| Відповіді .....  | 89 |