

22.2  
К 658

**К. М. КОПІЙКА**  
**Д. Д. ПОЛІЩУК**

$$E = mc^2$$

$$F = ma$$

**Збірник задач**  
**з**  
**механіки**

НАУКОВА БІБЛІОТЕКА ІМЕНІ І. І. МЕЧНИКОВА



МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Одеський національний університет ім. І. І. Мечникова

*К. М. Копійка, Д. Д. Поліщук*

# Збірник задач з механіки

Рекомендовано  
Міністерством освіти і науки України  
як навчальний посібник для студентів  
вищих навчальних закладів  
(Лист № 2/36 від 11.01.2001 р.)

Одеса  
«Астропринт»  
2001



22.2  
ББК 22.2я73.

К658

УДК 531/534(076.1)

Запропонований посібник є збірником задач з механіки, складених відповідно до програми курсу «Загальна фізика», для фізичних спеціальностей університетів. Він містить понад 200 задач з усіх розділів механіки, розміщених у логічній послідовності, у порядку їх ускладнення. До збірника включені найбільш характерні і типові задачі, які автори склали на основі існуючої науково-методичної літератури з даного розділу фізики.

Приведені на початку кожного розділу короткі теоретичні відомості, а також методичні вказівки і приклади розв'язування типових задач роблять збірник корисним і зручним для використання студентами та викладачами.

Посібник розрахований на студентів фізичних спеціальностей університетів. Може бути також використаний студентами інших вузів, які бажають поглибити свої знання з механіки.

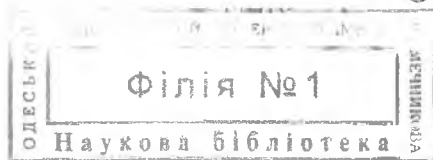
Рецензенти: **І. М. Вікулін**, д-р фіз.-мат. наук, проф.,

**С. В. Козицький**, д-р фіз.-мат. наук, проф.

К 1603000000 084  
549—2001 Без оголош.

ISBN 966—549—594—1

© К. М. Копійка,  
Д. Д. Поліщук, 2001



## ВСТУП

Навчитися розв'язувати задачі є дуже важливим і ефективним засобом засвоєння лекційного матеріалу. Разом із тим ця форма роботи над вивченням фізики викликає найбільші труднощі. Для розв'язування задач, як правило, недостатньо формального знання фізичних величин, законів, рівнянь. Можна добре знати теорію і не вміти розв'язувати прості задачі. Для цього знання теорії є необхідною умовою, але недостатньою. Вміння розв'язувати задачі треба вчитися наполегливо і повсякчасно. Особливо це важливо для студентів першого курсу, які ще не вміють оцінювати, що саме із засвоєного матеріалу більш важливе для оволодіння фізичними знаннями, а що згодиться пізніше, коли вони засвоять основні уявлення і закономірності фізики. Саме вміння розв'язувати задачі дає можливість зрозуміти взаємозв'язок явищ та вплив на них різних факторів.

Розв'язування задач передусім передбачає необхідність знань деяких загальних методів. Але не завжди існують такі загальні методи. Крім того, неможливо уявити загальні методи як деяку сукупність алгоритмічних механічних операцій, які повністю вичерпували б процес розв'язування задач усіх видів. Такі методи вказують лише на шлях до розв'язування задач. Головним, що сприяє успіху при розв'язуванні задач, є здатність аналітичного мислення, вміння думати, міркувати. Цих навичок студент набирає тоді, коли він систематично і самостійно працює над розв'язуванням задач.

Розвиткові творчих здібностей, вмінню аналізувати фізичну суть задачі сприяє ініціатива, сила волі студента. Процес розв'язування задачі — це науковий процес. Він відтворює такі ж самі ситуації, які виникають у роботі вченого при науковому дослідженні. Якщо студент засвоїв методику і навчився розв'язувати задачі, він зможе успішно розв'язувати і наукові проблеми. Він зможе максимально використовувати знання з фізики в своїй практичній діяльності.

Даний посібник підготовлений авторами для студентів фізичних та інших природничих факультетів, в учбових планах яких на розв'язування задач передбачається час, а також для самостійного опрацювання і засвоєння матеріалу. Він містить необхідний мінімум задач, вміння розв'язувати які

свідчить про засвоєння відповідних розділів фізики та про ефективність роботи студентів і їх підготовки як фізиків.

Навчальний посібник складається з окремих розділів, які, в основному, відповідають розділам лекційного матеріалу. Розділи, в свою чергу, включають декілька тем. На початку кожного розділу або теми розглядається короткий перелік понять, формул, законів, які необхідні для розв'язування задач. Потім приводяться методичні поради, приклади розв'язування задач, а також типові задачі для аудиторних та домашніх занять.

Виходячи із завдання і доцільності навчитися розв'язування задач, можна сформулювати основні поради і методичні вказівки, користуючись якими студенти зможуть оволодіти методикою розв'язування задач.

### Практичні поради до розв'язування задач

1. Як уже відмічалось раніше, розв'язування задач є вид творчості, такий самий, як робота вченого над науковою проблемою. Тому розв'язування задач не слід відкладати на останній вечір перед заняттями, оскільки задачі у більшості своїй потребують попереднього обмірковування і осмислення. Над задачами треба починати думати заздалегідь, створюючи умови для вирішення шляхів їх розв'язку.

2. Велику увагу потрібно приділяти активній участі в семінарських заняттях. Це допоможе виробити навички, оволодіння якими забезпечить у подальшому успіх в осмисленні роботи не лише над розв'язанням задач, а й в наукових дослідженнях.

3. Приступаючи до розв'язування задач з даної теми, спочатку слід розглянути теоретичний матеріал: суть фізичних явищ, законів та математичних засобів їх описування. Уважно розібрати приклади, що ілюструють ці закони.

4. Після розгляду теоретичного матеріалу, розв'язування задачі слід починати з аналізу її умови. З'ясувати, що є об'єктом дослідження, які процеси відбуваються з ним, якими фізичними законами слід користуватися. Потім переходити до плану розв'язування задачі.

5. Спростити задачу, розбиваючи її на логічну послідовність етапів. Розв'язавши кожний етап, наближатись до відповіді.

6. Складання плану можна розпочати з кінця задачі: з'ясувати, як отримати кінцеву відповідь. При цьому виявиться, що необхідно розв'язати друге питання, відповідь на яке залежить від третього. Вибрати найбільш зручний метод чи евристичний засіб розв'язування задачі студенти можуть, маючи лише певний досвід.

7. Для розв'язування більшості задач можна запропонувати таку алгоритмічну схему:

а) засвоїти умову задачі, та записати її скорочено. Якщо є необхідність, слід зробити малюнок, схему, графік. На малюнку позначити необхідні вектори. Вибрати систему координат;

б) записати рівняння, які відображають зв'язок між фізичними величинами, що характеризують дане явище. З'ясувати початкові та граничні умови. У разі необхідності спроектувати рівняння на координатні осі;

в) розв'язати рівняння або систему рівнянь. Кожну задачу бажано спочатку математично розв'язати в загальному вигляді (в літерних позначеннях, не в числах). Невідома величина повинна бути визначена через задані величини;

г) перевірити та проаналізувати відповіді. Отримавши розв'язок у загальному вигляді, потрібно перевірити, перш за все, чи має воно правильну розмірність та що з нього випливає в граничних випадках;

д) впевнитися в правильності загального рішення, підставити в нього числові дані. Для цього необхідно вибрати систему одиниць, в якій будуть проводитися розрахунки. Найчастіше перевага віддається Міжнародній системі одиниць СІ.

Самостійна домашня робота передбачає в першу чергу закріплення навичок, які отримали студенти в аудиторії. Об'єм домашнього завдання повинен відповідати бюджету часу, який відводиться на самостійну роботу.

Протягом семестру рекомендується провести 3—4 письмові контрольні роботи з окремих розділів. Матеріал вважається засвоєним за умови виконання всіх контрольних робіт на позитивну оцінку.

## КІНЕМАТИКА ТОЧКИ І ТВЕРДОГО ТІЛА

*Кінематика* — розділ механіки, в якому рух тіл розглядається незалежно від причин, які викликають цей рух. Головна задача кінематики — описати рухи тіл у просторі та часі, визначити їх траєкторії, місце положення, швидкості, прискорення.

При розв'язуванні задач цього розділу можна виділити два типи задач — прямий та зворотний:

— у прямих типах задачах по заданому кінематичному рівнянню руху знаходять такі величини, як швидкість, прискорення, їх модулі та напрямки. Такі задачі розв'язуються однозначно шляхом диференціювання рівнянь;

— у зворотних — навпаки: по відомому прискоренню знаходять швидкість, рівняння руху, шлях, який пройшло тіло, та інші величини. Такі задачі розв'язуються шляхом інтегрування, і для їх однозначного розв'язку необхідно задавати додаткові дані.

## Основні формули

Положення матеріальної точки визначається *радіус-вектором*:

$$\vec{r} = \vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z,$$

де  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$ ,  $\vec{k}$  — одиничні вектори (орти), а  $x$ ,  $y$ ,  $z$  — координати точки.

Кінематичний закон руху точки представляють у векторному вигляді  $\vec{r} = \vec{r}(t)$ , або у вигляді трьох скалярних рівнянь  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ,  $z = z(t)$ .

*Переміщенням* у кінематиці називають вектор  $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ . Лінія, вздовж якої рухається точка, називається *траєкторією*. Довжина траєкторії є *шлях*  $\Delta S$ . Шлях — скалярна величина. *Середньою шляховою швидкістю* є скаляр  $v_{cp} = \Delta S / \Delta t$ .

*Середньою швидкістю переміщення* називають вектор  $\vec{v}_{cp} = \Delta\vec{r} / \Delta t$ . *Миттєвою швидкістю* називають границю, до якої прямує середня швидкість переміщення, коли  $\Delta t \rightarrow 0$ :

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{i} \frac{dx}{dt} + \vec{j} \frac{dy}{dt} + \vec{k} \frac{dz}{dt} = \vec{i}v_x + \vec{j}v_y + \vec{k}v_z,$$

тут  $(v_x, v_y, v_z)$  — проєкції швидкості  $\vec{v}$  на осі координат. *Абсолютне*

*значення швидкості*  $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$ .

*Миттєве прискорення* характеризує швидкість зміни швидкості тіла, тобто:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{i}a_x + \vec{j}a_y + \vec{k}a_z,$$

де  $a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$ ,  $a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}$ ,  $a_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2}$  — проєкції прискорення на осі координат. *Абсолютне значення прискорення*

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

## § 1. Рівномірний рух

Кінематичне рівняння руху  $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t$ . У скалярній формі (в проєкції на осі  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ) рівняння записується так:  $x = x_0 + v_x t$ ,  $y = y_0 + v_y t$ ,  $z = z_0 + v_z t$ .

*Методичні вказівки.* Якщо рух складний, тобто тіло приймає участь одночасно в декількох рухах, то почати розв'язування задачі необхідно з розгляду окремих рухів. Переміщення в таких випадках дорівнює векторній сумі переміщень окремих рухів. Швидкість також дорівнює векторній сумі окремих швидкостей. Якщо в умові задачі є рух декількох тіл, то систему відліку слід вибирати так, щоб розв'язок був найпростішим. При цьому слід пам'ятати принцип відносності. Якщо одне тіло рухається відносно другого зі швидкістю  $\vec{v}$ , то друге тіло відносно першого рухається зі швидкістю  $-\vec{v}$ .

## Приклади розв'язування задач.

1. Першу половину часу тіло рухається зі швидкістю  $v_1 = 20$  м/с під кутом  $\alpha_1 = 60^\circ$  до певного напрямку, а другу половину часу — зі швидкістю  $v_2 = 40$  м/с під кутом  $\alpha_2 = 120^\circ$  до того ж напрямку. Знайти модуль середньої швидкості переміщення.

$$\text{Дано: } v_1 = 20 \text{ м/с, } v_2 = 40 \text{ м/с, } \alpha_1 = 60^\circ, \alpha_2 = 120^\circ \\ v_{cp} = ?$$

## КІНЕМАТИКА ТОЧКИ І ТВЕРДОГО ТІЛА

*Кінематика* — розділ механіки, в якому рух тіл розглядається незалежно від причин, які викликають цей рух. Головна задача кінематики — описати рухи тіл у просторі та часі, визначити їх траєкторії, місце положення, швидкості, прискорення.

При розв'язуванні задач цього розділу можна виділити два типи задач — прямий та зворотний:

— у прямих типах задачах по заданому кінематичному рівнянню руху знаходять такі величини, як швидкість, прискорення, їх модулі та напрямки. Такі задачі розв'язуються однозначно шляхом диференціювання рівнянь;

— у зворотних — навпаки: по відомому прискоренню знаходять швидкість, рівняння руху, шлях, який пройшло тіло, та інші величини. Такі задачі розв'язуються шляхом інтегрування, і для їх однозначного розв'язку необхідно задавати додаткові дані.

## Основні формули

Положення матеріальної точки визначається *радіус-вектором*:

$$\vec{r} = \vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z,$$

де  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$ ,  $\vec{k}$  — одиничні вектори (орти), а  $x$ ,  $y$ ,  $z$  — координати точки.

Кінематичний закон руху точки представляють у векторному вигляді  $\vec{r} = \vec{r}(t)$ , або у вигляді трьох скалярних рівнянь  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ,  $z = z(t)$ .

*Переміщенням* у кінематиці називають вектор  $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ . Лінія, вздовж якої рухається точка, називається *траєкторією*. Довжина траєкторії є *шлях*  $\Delta S$ . Шлях — скалярна величина. *Середньою шляховою швидкістю* є скаляр  $v_{cp} = \Delta S / \Delta t$ .

*Середньою швидкістю переміщення* називають вектор  $\vec{v}_{cp} = \Delta\vec{r} / \Delta t$ . *Миттєвою швидкістю* називають границю, до якої прямує середня швидкість переміщення, коли  $\Delta t \rightarrow 0$ :

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{i} \frac{dx}{dt} + \vec{j} \frac{dy}{dt} + \vec{k} \frac{dz}{dt} = \vec{i}v_x + \vec{j}v_y + \vec{k}v_z,$$

тут  $(v_x, v_y, v_z)$  — проекції швидкості  $\vec{v}$  на осі координат. *Абсолютне значення швидкості*  $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$ .

*Миттєве прискорення* характеризує швидкість зміни швидкості тіла, тобто:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{i}a_x + \vec{j}a_y + \vec{k}a_z,$$

де  $a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$ ,  $a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}$ ,  $a_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2}$  — проекції прискорення на осі координат. *Абсолютне значення прискорення*  $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$ .

## § 1. Рівномірний рух

Кінематичне рівняння руху  $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t$ . У скалярній формі (в проекціях на осі  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ) рівняння записується так:  $x = x_0 + v_x t$ ,  $y = y_0 + v_y t$ ,  $z = z_0 + v_z t$ .

**Методичні вказівки.** Якщо рух складний, тобто тіло приймає участь одночасно в декількох рухах, то почати розв'язування задачі необхідно з розгляду окремих рухів. Переміщення в таких випадках дорівнює векторній сумі переміщень окремих рухів. Швидкість також дорівнює векторній сумі окремих швидкостей. Якщо в умові задачі є рух декількох тіл, то систему відліку слід вибирати так, щоб розв'язок був найпростішим. При цьому слід пам'ятати принцип відносності. Якщо одне тіло рухається відносно другого зі швидкістю  $\vec{v}$ , то друге тіло відносно першого рухається зі швидкістю  $-\vec{v}$ .

## Приклади розв'язування задач.

1. Першу половину часу тіло рухається зі швидкістю  $v_1 = 20$  м/с під кутом  $\alpha_1 = 60^\circ$  до певного напрямку, а другу половину часу — зі швидкістю  $v_2 = 40$  м/с під кутом  $\alpha_2 = 120^\circ$  до того ж напрямку. Знайти модуль середньої швидкості переміщення.

Дано:  $v_1 = 20$  м/с,  $v_2 = 40$  м/с,  $\alpha_1 = 60^\circ$ ,  $\alpha_2 = 120^\circ$   
 $v_{cp} = ?$

**Розв'язання.** Тіло приймає участь у двох переміщеннях  $\Delta\vec{r} = \Delta\vec{r}_1 + \Delta\vec{r}_2$ . За визначенням  $\vec{v}_{\text{ср}} = \Delta\vec{r}/\Delta t$ . У даному випадку

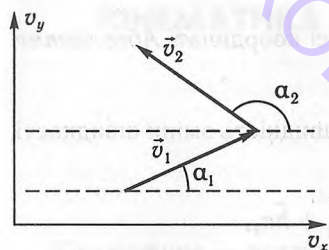


Рис. 1

$$\vec{v}_{\text{ср}} = \frac{\Delta\vec{r}_1 + \Delta\vec{r}_2}{2\Delta t/2} = \frac{1}{2}(\vec{v}_1 + \vec{v}_2).$$

Спроектуємо останнє векторне рівняння на координатні осі. Як видно із рис. 1:

$$v_{\text{ср}x} = \frac{1}{2}(v_1 \cos \alpha_1 + v_2 \cos \alpha_2) = -5 \text{ м/с},$$

$$v_{\text{ср}y} = \frac{1}{2}(v_1 \sin \alpha_1 + v_2 \sin \alpha_2) = 15,3 \text{ м/с}.$$

Модуль середньої швидкості переміщення дорівнює

$$v_{\text{ср}} = \sqrt{v_{\text{ср}x}^2 + v_{\text{ср}y}^2} = 26,46 \text{ м/с}.$$

2. З якою швидкістю і за яким курсом повинен летіти літак, щоб за час  $\Delta t = 2 \text{ год}$  пролетіти на північ шлях  $\Delta S = 300 \text{ км}$ , якщо під час польоту дме північно-західний вітер під кутом  $\alpha = 30^\circ$  до меридіану зі швидкістю  $u = 27 \text{ км/год}$ ?

Дано:  $\Delta S = 300 \text{ км}$ ,  $\Delta t = 2 \text{ год}$ ,  $u = 27 \text{ км/год}$ ,  $\alpha = 30^\circ$   
 $v = ?$   $\beta = ?$

**Розв'язання.** Нехай  $\vec{v}$  — відносна швидкість руху, яку треба знайти, а  $\vec{w}$  — швидкість вздовж меридіана, яка дорівнює  $w = \Delta S/\Delta t = 150 \text{ км/год}$ . Тоді, як видно з рис. 2,

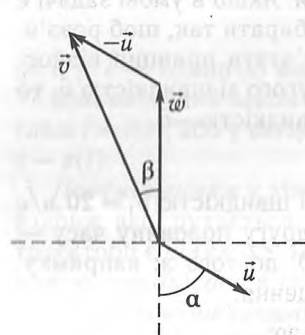


Рис. 2

$$\vec{v} = \vec{w} + (-\vec{u}) = \vec{w} - \vec{u}.$$

$$v = \sqrt{w^2 + u^2 - 2uw \cos(180^\circ - \alpha)} =$$

$$= \sqrt{w^2 + u^2 + \sqrt{3}wu} = 174 \text{ км/год}.$$

Використовуючи теорему синусів, знаходимо:

$$\frac{\sin \beta}{u} = \frac{\sin(180^\circ - \alpha)}{v},$$

звідки

$$\sin \beta = \frac{u}{v} \approx 0,078, \quad \beta = 4^\circ 28'.$$

3. Два тіла рухаються з постійними швидкостями  $v_1$  і  $v_2$  вздовж двох взаємно перпендикулярних прямих до точки їх перетину. У момент  $t = 0$  кожне з тіл знаходилося на відстані  $l$  від точки перетину. Знайти найменшу відстань між тілами.

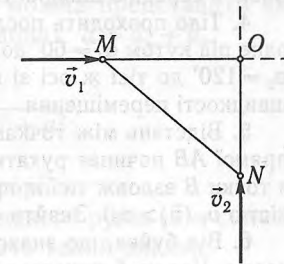


Рис. 3

Дано:  $v_1, v_2, l$   
 $\Delta S_{\text{мін}} = ?$

**Розв'язання.** Для визначення найменшої відстані скористуємося методом дослідження функції на екстремум. Для цього виразимо відстань  $MN$  між тілами як функцію часу. З рис. 3 видно, що

$$MN = \Delta S = \sqrt{(MO)^2 + (NO)^2} = \sqrt{(l - v_1 t)^2 + (l - v_2 t)^2}.$$

Для того щоб знайти мінімум цієї функції, слід диференціювати її за часом і похідну прирівняти до нуля:

$$\frac{dS}{dt} = \frac{-2(l - v_1 t)v_1 - 2(l - v_2 t)v_2}{2\sqrt{(l - v_1 t)^2 + (l - v_2 t)^2}} = 0.$$

Вираз дорівнює нулю, коли чисельник дорівнює нулю:

$$v_1(l - v_1 t) + v_2(l - v_2 t) = 0.$$

Звідси знаходимо час, що відповідає найменшій відстані:

$$t_{\text{мін}} = \frac{l(v_1 + v_2)}{v_1^2 + v_2^2}.$$

Найменшу відстань знайдемо, підставивши це значення у вираз для  $\Delta S$ :

$$\Delta S_{\text{мін}} = \frac{l(v_2 - v_1)}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}.$$

#### Задачі для аудиторних та домашніх занять

1. Тіло, що рухалось прямолінійно, пройшло половину шляху зі швидкістю  $v_0$ . Другу частину шляху воно рухалось половину часу зі швидкістю  $v_1$ , а останню ділянку зі швидкістю  $v_2$ . Знайти середню швидкість за весь час руху.

2. Тіло послідовно пройшло  $n$  однакових ділянок шляху  $\Delta S$ . На кожній ділянці швидкість відповідно дорівнювала  $v_1, v_2, v_3, \dots, v_n$ . Знайти середню швидкість на всьому шляху.

3. Тіло послідовно проходить  $n$  ділянок шляху з відповідними швидкостями  $v_1, v_2, v_3, \dots, v_n$ . Кожну ділянку тіло проходить за один і той же час. Знайти середню швидкість тіла.

4. Тіло проходить послідовно два однакових по величині переміщення: одне під кутом  $\alpha_1 = 60^\circ$  до осі  $Ox$  зі швидкістю  $v_1 = 20$  м/с, друге під кутом  $\alpha_2 = 120^\circ$  до тієї ж осі зі швидкістю  $v_2 = 40$  м/с. Знайти модуль середньої швидкості переміщення.

5. Відстань між точками  $A$  і  $B$  дорівнює  $l$ . У момент  $t = 0$  із  $A$  вздовж прямої  $AB$  починає рухатися тіло 1 зі швидкістю  $v_1$ , а через деякий час  $\tau$  з точки  $B$  вздовж тієї ж прямої назустріч починає рухатися тіло 2 зі швидкістю  $v_2$  ( $v_1 > v_2$ ). Знайти момент та місце зустрічі.

6. Від буйка, що знаходиться на середині широкої річки, відплили два човни. Човен  $A$  рухається вздовж річки, човен  $B$  — перпендикулярно до берега. Відпливши на однакові відстані, човни повернули назад. Знайти відношення часу рухів човнів  $t_A/t_B$ , якщо швидкість кожного човна відносно води в  $\eta = 1,2$  рази більше від швидкості течії.

7. Судно виходить з точки  $A$  і рухається зі швидкістю  $v_1$ , яка складає кут  $\alpha$  з лінією  $AB$ . Під яким кутом до лінії  $AB$  повинно рухатися інше судно з точки  $B$ , маючи швидкість  $v_2$ , щоб вони зустрілися в точці  $C$ .

8. Судно рухається на схід по екватору зі швидкістю  $v_0 = 30$  км/год. З південного сходу під кутом  $\varphi = 60^\circ$  до екватора дме вітер зі швидкістю  $v = 15$  км/год. Знайти швидкість вітру відносно судна та кут  $\varphi$  між екватором і напрямком вітру в системі відліку, яка зв'язана з судном.

9. Дві частинки рухаються з постійними швидкостями  $\vec{v}_1$  і  $\vec{v}_2$ . Їх радіуси-вектори в початковий момент часу відповідно дорівнюють  $\vec{r}_1$  і  $\vec{r}_2$ . При якому співвідношенні між цими чотирма векторами частинки зіткнуться?

10. У момент часу, коли біля пристані проплив пліт, у населений пункт, що знаходиться на відстані  $S_1 = 15$  км нижче по течії ріки, відправляється моторний човен, який проходить цю відстань за  $0,75$  год. Після цього він повертає назад і зустрічає пліт на відстані  $S_2 = 9$  км від населеного пункту. Знайти швидкість течії  $u$  і швидкість човна  $v$  відносно води.

11. З пунктів  $A$  і  $B$ , відстань між якими дорівнює  $l$ , одночасно почали рухатися два автомобілі зі швидкостями  $\vec{v}_1$  і  $\vec{v}_2$  під кутами  $\alpha = 45^\circ$  по одну сторону до лінії  $AB$ . Знайти найменшу відстань між ними.

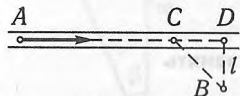


Рис. 4

12. З пункту  $A$ , що знаходиться на шосе (рис. 4), необхідно за найкоротший проміжок часу потрапити на автомобілі в пункт  $B$ , розташований у полі на відстані  $l$  від шосе. Відомо, що швидкість автомобіля по полю в  $\eta$  разів менше швидкості по шосе. На якій відстані від точки  $D$  слід звернути з шосе?

10

## § 2. Нерівномірний рух

При криволінійному русі прискорення  $\vec{a}$  можна представити як суму нормальної  $\vec{a}_n$  і тангенціальної  $\vec{a}_\tau$  складових:  $\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau$ .

Модулі цих прискорень дорівнюють

$$a_n = \frac{v^2}{R}, \quad a_\tau = \frac{dv}{dt}, \quad a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2},$$

де  $R$  — радіус кривизни в даній точці траєкторії.

Для рівноприскореного або рівноуповільненого рухів ( $\vec{a} = \text{const}$ ) кінематичні рівняння у векторній формі мають такий вигляд:

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t, \quad \vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0t + \vec{a}t^2/2;$$

в скалярній формі (в проекціях на осі  $x, y, z$ )

$$\begin{aligned} v_x &= v_{0x} + a_x t, & x &= x_0 + v_{0x}t + a_x t^2/2; \\ v_y &= v_{0y} + a_y t, & y &= y_0 + v_{0y}t + a_y t^2/2; \\ v_z &= v_{0z} + a_z t, & z &= z_0 + v_{0z}t + a_z t^2/2. \end{aligned}$$

**Методичні вказівки.** При розв'язуванні задач на рівнозмінний рух перш за все необхідно записати кінематичні рівняння відповідно до умови задачі, вибрати систему координат і спроектувати ці рівняння на координатні осі. Для задач, де розглядається кінематичний рух тіл у полі тяжіння, слід пам'ятати, що систему координат зручніше вибирати таким чином, щоб частина проекцій швидкості або прискорення дорівнювала б нулю. Це спрощує розв'язування задачі, а також дозволяє легко зробити висновки відносно складових частин руху.

### Приклади розв'язування задач.

1. З точки, що має координати  $x_0, y_0$ , кидають тіло під кутом  $\alpha$  до горизонту з початковою швидкістю  $v_0$ . Знайти: положення і швидкість тіла через час  $t$ ; рівняння траєкторії; нормальне і тангенціальне прискорення; радіус кривизни траєкторії в залежності від часу; максимальну дальність руху; час руху до моменту падіння; найбільшу висоту підняття.

Дано:  $x_0, y_0, \alpha, v_0$

$$\begin{aligned} x &= f(t) \quad ? \quad y = f(t) \quad ? \quad v = f(t) \quad ? \quad y = f(x) \quad ? \\ a_n, a_\tau &= ? \quad R = f(t) \quad ? \quad l_{\max}, h_{\max} \quad ? \end{aligned}$$

**Розв'язання.** Осі координат виберемо таким чином, щоб вектор прискорення вільного падіння  $g$  був направлений вниз і паралельний



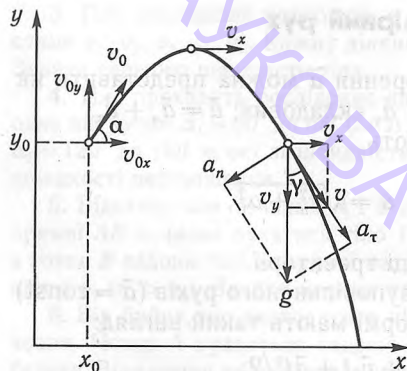


Рис. 5

до осі ординат. Тоді координати положення тіла в будь-який момент часу будуть мати вигляд:

$$x = x_0 + v_0 \cos \alpha t,$$

$$y = y_0 + v_0 \sin \alpha t - \frac{gt^2}{2}.$$

Складові швидкості дорівнюють:

$$v_x = v_0 \cos \alpha,$$

$$v_y = v_0 \sin \alpha - gt.$$

Із останніх формул видно, що рух складається з двох незалежних рухів: рівномірного вздовж

осі абсцис і рівнозмірного вздовж осі ординат. Результуюча швидкість дорівнює:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_0^2 - 2v_0gt \sin \alpha + g^2t^2}.$$

Рівняння траєкторії можна знайти з рівнянь для координат, якщо виключити з них час  $t$ :

$$y = y_0 + (x - x_0) \operatorname{tg} \alpha - \frac{g(x - x_0)^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha}.$$

Отримано рівняння типу  $y = y_0 + ax - bx^2$ , яке вказує на те, що рух буде зображено параболою, гілки якої спрямовані вниз.

Для визначення  $a_n$  і  $a_\tau$  врахуємо те, що вони є складовими вектора  $g$ :

$$\vec{g} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau.$$

Крім того,  $a_\tau$  співпадає з напрямком повної швидкості. Якщо вектор швидкості, в свою чергу, розкласти на  $v_x$  і  $v_y$ , то, як видно з рис. 5, будуть справедливі такі співвідношення:

$$a_n = g \sin \gamma = g \frac{v_x}{v}, \quad a_\tau = g \cos \gamma = g \frac{v_y}{v},$$

де  $\gamma$  — кут між вектором прискорення вільного падіння  $g$  і напрямком швидкості  $v$ . Якщо в останні рівняння підставити значення  $v_x$ ,  $v_y$  і  $v$ , то отримаємо

$$a_n = \frac{gv_0 \cos \alpha}{\sqrt{v_0^2 - 2v_0gt \sin \alpha + g^2t^2}}, \quad a_\tau = -\frac{g(v_0 \sin \alpha - gt)}{\sqrt{v_0^2 - 2v_0gt \sin \alpha + g^2t^2}}.$$

Такий же точно результат можна отримати для  $a_\tau$ , якщо скористатися тим, що  $a_\tau = \frac{dv}{dt}$ , тобто взяти похідну від швидкості.

Враховуючи, що  $a_n = \frac{v^2}{R}$ , легко отримати, залежність радіуса кривизни від часу

$$R = \frac{v^2}{a_n} = \frac{v^3}{gv_x} = \frac{(v_0^2 - 2v_0gt \sin \alpha + g^2t^2)^{3/2}}{gv_0 \cos \alpha}.$$

Максимальну дальність руху знаходимо з рівняння траєкторії при умові  $y = 0$ :

$$\frac{g(x_{\max} - x_0)}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} - \operatorname{tg} \alpha (x_{\max} - x_0) - y_0 = 0.$$

Якщо в початковий момент часу координати тіла  $x_0 = 0$  і  $y_0 = 0$ , то рівняння значно спрощується і  $x_{\max}$  дорівнює

$$x_{\max} = v_0^2 \sin 2\alpha / g.$$

Із останньої формули видно, що максимальна дальність буде мати місце, коли кут  $\alpha = 45^\circ$ . Час польоту знаходимо із рівняння проекції  $y = f(t)$  при умові  $y = 0$ . Тоді

$$y_0 + v_0 \sin \alpha t - gt^2/2 = 0,$$

звідки

$$t_{\text{повне}} = \frac{v_0 \sin \alpha}{g} + \frac{\sqrt{v_0^2 \sin^2 \alpha + 2gy_0}}{g}.$$

Якщо для зручності скористатися  $y_0 = 0$ , то  $t_{\text{повне}} = 2v_0 \sin \alpha / g$ .

Найбільшій висоті тіло досягає в момент, коли  $v_y = 0$ . Отже, час, необхідний для цього, можна знайти з виразу  $v_0 \sin \alpha - gt = 0$ . Звідси  $t = v_0 \sin \alpha / g$ . Підставляючи це значення в формулу для  $y$ , отримаємо

$$y_{\max} = h_{\max} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g} + y_0.$$

Найбільша висота буде при  $\alpha = 90^\circ$ , коли тіло кидають з початковою швидкістю  $v_0$  вертикально вгору.

#### Задачі для аудиторних та домашніх занять

13. По похилій площині пустили знизу вгору металеву кульку. На відстані 30 см від початку шляху кулька побувала двічі: через 1 с і через 2 с після початку руху. Знайти початкову швидкість та прискорення кульки.

14. Два тіла кинуті вгору з однієї точки з початковою швидкістю  $v_0 = 24,5 \text{ м/с}$  з проміжком часу  $t = 0,5 \text{ с}$ . Через скільки секунд від моменту кидання другого тіла і на якій висоті тіла зіткнуться?

15. Тіло, що почало вільно падати на Землю з висоти  $h$  пройшло останні  $30 \text{ м}$  за  $t = 0,5 \text{ с}$ . Знайти висоту падіння  $h$ .

16. Тіло, яке почало вільно падати, за останню секунду падіння пройшло третину свого шляху. Знайти час та висоту падіння.

17. З яким проміжком часу відірвалися від карнизу висотної будівлі дві дощові краплини, якщо через  $2 \text{ с}$  після початку падіння другої краплини відстань між ними була  $25 \text{ м}$ ?

18. Накресліть графік залежності шляху та прискорення тіла від часу, якщо його швидкість як функція часу представлена на рис. 6.

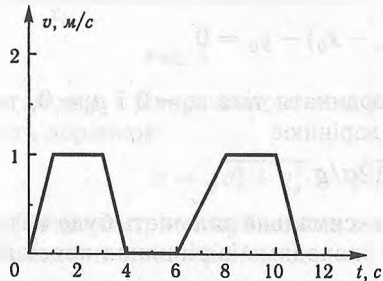


Рис. 6

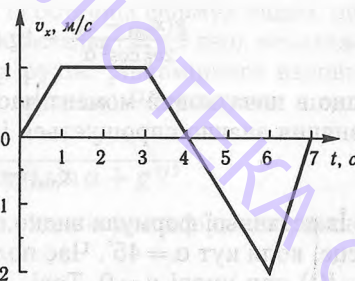


Рис. 7

19. Точка рухається вздовж осі абсцис зі швидкістю, проекція якої  $v_x$  як функція часу зображена на рис. 7. Накресліть графіки залежності від часу прискорення, координати та шляху.

20. З точок  $A$  і  $B$ , розташованих по вертикалі на відстані  $l = 100 \text{ м}$  одна від другої, кидають одночасно два тіла з однаковою швидкістю  $10 \text{ м/с}$ ; із  $A$  вертикально вниз, із  $B$  — вертикально вгору. Через скільки часу і в якому місці вони зустрінуться?

21. Аеростат піднімається з Землі вертикально вгору з прискоренням  $a = 2 \text{ м/с}^2$ . Через  $\tau = 5 \text{ с}$  від початку руху з нього випав предмет. Через скільки часу предмет упаде на Землю і з якою швидкістю?

22. Тіло, що знаходиться в точці  $B$  на висоті  $H = 45 \text{ м}$  від Землі, починає вільно падати. Одночасно із точки  $A$ , розташованої на відстані  $h = 21 \text{ м}$  нижче точки  $B$ , кидають друге тіло вертикально вгору. Знайти початкову швидкість  $v_0$  другого тіла, якщо відомо, що обидва тіла упадуть на Землю одночасно.

23. Горизонтально з вершини гори, що має уклін  $\alpha$ , кидають камінь. З якою швидкістю треба кинути камінь, щоб він упав на відстані  $L$  від вершини?

24. Літак, що летить на висоті  $h$  горизонтально зі швидкістю  $v$ , повинен скинути в ціль вимпел. Під яким кутом до вертикалі пілот повинен бачити ціль в момент кидання вимпела? На якій відстані по горизонталі від цілі?

25. Під кутом  $\alpha = 60^\circ$  до горизонту кидають тіло з початковою швидкістю  $v = 20 \text{ м/с}$ . Через скільки часу воно буде рухатись під кутом  $\beta = 45^\circ$  до горизонту?

26. Камінь кидають з швидкістю  $v_0 = 20 \text{ м/с}$  під кутом  $\alpha = 60^\circ$  до горизонту. Знайти радіус кривизни  $R$  в верхній точці, а також в момент падіння на Землю.

27. Тіло кидають з висоти  $h = 2,1 \text{ м}$  над поверхнею Землі під кутом  $\alpha = 45^\circ$  до горизонту. Через деякий час тіло впало на Землю на відстані  $S = 42 \text{ м}$  від місця кидання по горизонталі. З якою швидкістю потрібно кинути тіло, скільки часу воно летіло і на якій найбільшій висоті воно знаходилося під час польоту?

28. Із пушки випустили послідовно два снаряди зі швидкістю  $v_0 = 250 \text{ м/с}$ , перший під кутом  $\alpha_1 = 60^\circ$ , другий під кутом  $\alpha_2 = 45^\circ$  (азимут один і той же). Знайти інтервал часу між пострілами, при якому снаряди зіткнуться.

29. Із літака, що летить горизонтально і має швидкість  $v_0$ , в горизонтальному напрямку вперед вистрілили снарядом зі швидкістю  $v'$ . Знайти: а) рівняння траєкторії снаряда відносно літака; б) рівняння траєкторії снаряда відносно Землі; в) рівняння траєкторії літака відносно снаряда.

30. Стальна кулька з початковою швидкістю  $v_0 = 0$  падає на пружну похилу площину. Пролетівши відстань  $h$ , кулька відбивається від площини. На якій відстані від місця падіння кулька буде відбиватися вдруге?

31. Точка рухається по площині так, що її тангенціальне прискорення  $a_t = a$ , а нормальне  $a_n = bt^4$ , де  $a$  і  $b$  — сталі величини. В момент  $t = 0$  точка знаходилась в стані спокою. Знайти залежність радіуса кривизни  $R$  траєкторії точки і її повного прискорення  $a_0$  від пройденого шляху  $S$ .

32. Точка рухається по колу зі швидкістю  $v = at$ , де  $a = 0,5 \text{ м/с}^2$ . Знайти її повне прискорення  $a_0$  в момент, коли вона пройде відстань, що дорівнює  $n = 0,1$  довжини кола після початку руху.

33. Точка сповільнено рухається по колу радіусом  $R$  так, що в кожний момент часу її тангенціальне та нормальне прискорення по модулю однакові. В початковий момент швидкість точки  $v_0$ . Знайти: а) швидкість точки в залежності від часу і від пройденого шляху  $S$ ; б) повне прискорення точки як функцію швидкості і пройденого шляху.

### § 3. Обертальний рух

Положення матеріальної точки або твердого тіла при обертальному русі можна визначити кутом повороту  $\varphi$ .

Елементарне кутове переміщення  $d\varphi$  — величина векторна. Вектор  $d\varphi$  співпадає з віссю обертання. Його напрямок визначається правилом свердлика.

Кутовою швидкістю називають вектор, модуль якого дорівнює першій похідній від кута повороту за часом і спрямований так само, як і вектор  $d\varphi$ :  $\vec{\omega} = d\varphi/dt$ .

Кутове прискорення — векторна величина, характеризує швидкість зміни кутової швидкості, тобто

$$\vec{\beta} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d^2\vec{\varphi}}{dt^2}.$$

Кінематичне рівняння рівномірного обертального руху має вигляд

$$\varphi = \varphi_0 + \omega t.$$

Кінематичні рівняння рівнозмінного обертального руху

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_0 + \vec{\beta}t, \quad \varphi = \varphi_0 + \omega t + \frac{\beta t^2}{2}.$$

Зв'язок між кінематичними величинами поступального і обертального рухів встановлюється такими формулами:

$$v = \omega R, \quad \vec{v} = [\vec{\omega} \times \vec{R}];$$

$$a_\tau = \beta R, \quad \vec{a}_\tau = [\vec{\beta} \times \vec{R}]; \quad a_n = \omega^2 R, \quad \vec{a}_n = [\vec{\omega} \times \vec{v}].$$

**Методичні вказівки.** Всі формули, які характеризують кінематику рівномірного та рівнозмінного поступального руху, можна застосувати для обертального руху, якщо замінити лінійні величини на обертальні. Внаслідок цього, в багатьох випадках, методи розв'язування задач на обертальний рух співпадають з тими, які використовуються при поступальному русі.

**Приклади розв'язування задач.**

1. Тверде тіло обертається навколо нерухомої осі по закону  $\varphi = at - bt^3$ , де  $a = 60 \text{ рад/с}$ ,  $b = 20 \text{ рад/с}^3$ . Знайти кутове прискорення в момент зупинки тіла, середнє значення кутової швидкості і кутового прискорення за проміжок часу від  $t = 0$  до зупинки.

Дано:  $\varphi = at - bt^3$ ;  $a = 60 \text{ рад/с}$ ,  $b = 20 \text{ рад/с}^3$   
 $\beta_k - ?$   $\omega_{\text{ср}} - ?$   $\beta_{\text{ср}} - ?$

**Розв'язання.** В задачі відоме кінематичне рівняння обертального руху. Кутову швидкість можна знайти, взявши похідну від  $\varphi$ :

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = a - 3bt^2.$$

Кутове прискорення буде другою похідною:

$$\beta = \frac{d\omega}{dt} = -6bt.$$

Як бачимо, кутове прискорення залежить від часу і до того ж воно від'ємне, тобто рух сповільнений. В момент зупинки  $\omega = 0$ , тому  $t_k = \sqrt{a/3b}$ . Після підстановки числових значень знаходимо проміжок часу до зупинки  $t_k = 1 \text{ с}$ .

Кутове прискорення в момент зупинки легко знайти, підставивши у вираз для  $\beta = -6bt$  час  $t_k = \sqrt{a/3b}$ . Тоді  $\beta = -2\sqrt{3ab} = -12 \text{ рад/с}^2$ .

Середнє значення кутової швидкості дорівнює  $\omega_{\text{ср}} = (\varphi_k - \varphi_0)/t_k$ . Тут  $\varphi_0 = 0$ , а  $\varphi_k$  можна знайти, якщо у вираз  $\varphi = at - bt^3$  підставити значення  $t_k$ . Тоді  $\omega_{\text{ср}} = 2a/3 = 4 \text{ рад/с}$ .

Аналогічно знаходимо середнє значення кутового прискорення

$$\beta_{\text{ср}} = (\omega_k - \omega_0)/t_k = \sqrt{3ab} = 6 \text{ рад/с}^2.$$

2. Снаряд вилітає з швидкістю  $v = 320 \text{ м/с}$ , зробивши всередині ствола  $n = 2,0$  оберти. Довжина ствола  $l = 2 \text{ м}$ . Вважаючи, що рух снаряда в стволі рівноприскорений, знайти його кутову швидкість в момент вильоту.

Дано:  $v = 320 \text{ м/с}$ ;  $l = 2 \text{ м}$ ;  $n = 2,0$  оберти  
 $\omega - ?$

**Розв'язання.** Снаряд в стволі приймає участь в поступальному та обертальному рухах. Кутову швидкість обертального руху можна знайти із  $\omega = \beta t$ , а кутове прискорення  $\beta$  із формули  $\varphi = \beta t^2/2$ , де  $\varphi = 2\pi n$ . Тоді кутова швидкість в момент вильоту дорівнює  $\omega = 4\pi n/t$ .

Час, на протязі якого снаряд рухається всередині ствола, можна знайти із аналогічних рівнянь поступального руху. Дійсно,  $v = at$ , а  $l = at^2/2$ , отже  $t = 2l/v$ . Підставляючи у формулу для кутової швидкості знайдений час, отримуємо:  $\omega = 2\pi n v/l = 2 \cdot 10^3 \text{ рад/с}$ .

3. Конус з кутом при вершині  $\alpha = 60^\circ$  та радіусом основи  $r = 50 \text{ см}$  котиться рівномірно без ковзання по горизонтальній площині. Вершина конуса закріплена в точці  $O$ , яка знаходиться на одному рівні з точкою  $C$  — центром основи конуса. Швидкість точки  $C$  дорівнює  $v = 10 \text{ см/с}$ . Знайти модулі кутової швидкості і кутового прискорення конуса та кут між вектором кутової швидкості і вертикаллю.

Дано:  $\alpha = 60^\circ$ ;  $r = 50 \text{ см}$ ;  $v = 10 \text{ см/с}$   
 $\omega - ?$   $\beta - ?$   $\text{tg} \gamma - ?$

**Розв'язання.** В цій задачі конус приймає участь у двох обертальних рухах: навколо горизонтальної осі  $OC$  з кутовою швидкістю  $\vec{\omega}$ ,

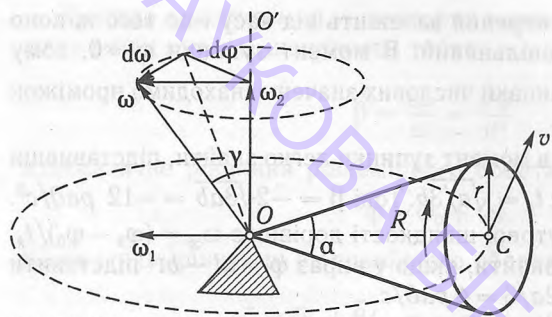


Рис. 8

та навколо вертикальної осі  $OO'$  з кутовою швидкістю  $\vec{\omega}_2$ . Направлення векторів  $\vec{\omega}_1$  та  $\vec{\omega}_2$  визначаються правилом свердлика. Результуючий вектор кутової швидкості дорівнює  $\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2$ . Його модуль  $\omega = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}$ , а  $\text{tg } \gamma = \omega_1/\omega_2$ . Величини  $\omega_2$  та  $\omega_1$  можна знайти із формули зв'язку між кутовою та лінійною швидкостями  $\omega_1 = v/R$ , а  $\omega_2 = v/r$ . Таким чином,  $\omega = \sqrt{(v/R)^2 + (v/r)^2}$ . Враховуючи, що  $R = \frac{r}{\text{tg } \alpha/2}$ , знаходимо  $\omega = v/r\sqrt{1 + \text{tg}^2 \alpha/2} = 2,8 \text{ рад/с}$ , а кут  $\gamma$  між вектором  $\omega$  та віссю  $OO'$  дорівнює  $\gamma = \text{arctg}(\omega_1/\omega_2) = 55^\circ$ .

Кутове прискорення дорівнює швидкості зміни вектора  $\vec{\omega}$ , який по модулю залишається сталим, а його напрямок весь час змінюється (кінець вектора  $\vec{\omega}$  описує коло радіусом  $\omega_1$ ). Кутове переміщення  $d\omega = \omega_1 d\phi$ . Розділивши ліву і праву частини останнього співвідношення на  $dt$ , отримаємо  $\frac{d\omega}{dt} = \omega_1 \frac{d\phi}{dt}$ . Тут  $\frac{d\omega}{dt} = \beta$ , а  $\frac{d\phi}{dt} = \omega_2$ , тому

$$\beta = \omega_1 \omega_2 = \frac{v^2}{r^2} \text{tg } \frac{\alpha}{2} = 2,3 \text{ рад/с}^2.$$

#### Задачі для аудиторних та домашніх занять

34. Відро, що опускається в криницю з прискоренням  $1 \text{ м/с}^2$ , розмотує канат, намотаний на вал ворота. З яким кутовим прискоренням обертається вал ворота? Як залежить від часу кут повороту вала, радіус якого дорівнює  $25 \text{ см}$ ?

35. Тверде тіло починає обертатись навколо нерухомої осі з кутовим прискоренням  $\beta = at$ , де  $a = 2 \cdot 10^{-2} \text{ рад/с}^3$ . Через який час після початку обертання вектор повного прискорення довільної точки буде складати кут  $\alpha = 60^\circ$  з її вектором швидкості?

36. Тверде тіло обертається навколо нерухомої осі так, що його кутова швидкість залежить від кута повороту  $\phi$  по закону  $\omega = \omega_0 - a\phi$ , де  $\omega_0$  і  $a$  —

сталі додатні величини. В момент часу  $t = 0$  кут  $\phi = 0$ . Знайти залежність від часу: а) кута повороту; б) кутової швидкості.

37. Два твердих тіла обертаються навколо двох нерухомих взаємних перпендикулярів із сталими кутовими швидкостями  $\omega_1 = 3 \text{ рад/с}$  і  $\omega_2 = 4 \text{ рад/с}$ . Знайти кутову швидкість і кутове прискорення одного тіла відносно другого.

38. Тверде тіло обертається зі сталою кутовою швидкістю  $\omega_0 = 0,5 \text{ рад/с}$  навколо горизонтальної осі  $AB$ . В момент  $t = 0$  вісь  $AB$  почали повертати навколо вертикалі з сталим кутовим прискоренням  $\beta_0 = 0,1 \text{ рад/с}^2$ . Знайти кутову швидкість і кутове прискорення тіла через  $t = 3,5 \text{ с}$ .

39. Кулька радіусом  $3 \text{ см}$  рівномірно котиться по двох паралельних лінійках, відстань між якими  $4 \text{ см}$ , і за  $2 \text{ с}$  проходить відстань  $120 \text{ см}$ . З якою швидкістю рухається верхня і нижня точки кульки.

40. Циліндр радіуса  $r$  котиться без ковзання по горизонтальній площині. Знайти радіус кривизни траєкторії точки  $A$ , що знаходиться в момент  $t = 0$  в самому верху циліндра.

## § 4. Релятивістська кінематика

В основі спеціальної теорії відносності (СТВ) лежать два постулати Альберта Ейнштейна.

*Перший постулат* є узагальнений принцип відносності Галілея, який виконується не лише для механічних, а й для будь-яких фізичних процесів: всі інерціальні системи відліку еквівалентні.

*Другий постулат* говорить про те, що швидкість світла у вакуумі постійна і не залежить від вибору інерціальної системи відліку.

При переході від однієї інерціальної системи відліку до іншої в СТВ користуються перетвореннями Лоренца. Якщо  $K'$ -система рухається із швидкістю  $v$  в додатному напрямку осі  $Ox$   $K$ -системи і при цьому осі  $Ox'$  і  $Ox$  співпадають, а осі  $Oy'$ ,  $Oz'$  і  $Oy$ ,  $Oz$  паралельні, співвідношення між координатами таке:

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \frac{t - xv/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

При переході від  $K'$  системи до  $K$ :

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad y = y', \quad z = z', \quad t = \frac{t' + xv'/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Із перетворень Лоренца випливають релятивістські скорочення довжин і сповільнення ходу годинника рухомих систем:

$$l = l_0 \sqrt{1 - v^2/c^2}, \quad \Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

де  $l_0$  і  $\Delta t_0$  довжина і проміжок часу в системі, відносно яких тіло і годинник знаходяться в стані спокою.

Із перетворень Лоренца випливають також формули, що виражають додавання швидкостей:

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + u'_x v/c^2}, \quad u_y = \frac{u'_y \sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + u'_x v/c^2}, \quad u_z = \frac{u'_z \sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + u'_x v/c^2}.$$

Інваріантом в СТВ служить чотиривимірний інтервал

$$\Delta S^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 - c^2 \Delta t^2.$$

**Методичні вказівки.** Приступаючи до розв'язування задач цієї теми, слід ретельно вивчити теоретичний матеріал. Мати ясне і чітке розуміння основних постулатів теорії відносності і зв'язаних з ними уявлень про скорочення розмірів тіл, зміни проміжків часу, відносності одночасності подій у різних інерціальних системах відліку.

#### Приклади розв'язування задач.

1. В дослідній установці, де вивчались характеристики  $\pi$ -мезонів, відстань між місцем їх народження і місцем їх розпаду складала  $l = 75$  м. Мезони яких найменших швидкостей можна досліджувати на цій установці, якщо власний час життя  $\pi$ -мезона дорівнює  $2,5 \cdot 10^{-8}$  с? Яку відстань проходять  $\pi$ -мезони в системі координат, зв'язаній з ними?

$$\text{Дано: } l = 75 \text{ м; } \Delta t_0 = 2,5 \cdot 10^{-8} \text{ с}$$

$$v = ? \quad l_0 = ?$$

**Розв'язання.** Очевидно, що на даній установці можна вивчати лише  $\pi$ -мезони, які за час свого життя в системі координат, зв'язаній з установкою, можуть пройти відстань  $l = 75$  м. Час життя  $\pi$ -мезонів в цій системі, пов'язаний з власним життям співвідношенням

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Враховуючи це співвідношення, можна знайти необхідну швидкість, яка дорівнює  $v = \frac{l}{\Delta t} = \frac{l}{\Delta t_0} \sqrt{1 - v^2/c^2} = \sqrt{100/101} c$ . Відстань, яку проходять  $\pi$ -мезони «з їх точки зору», дорівнює

$$l = l_0 \sqrt{1 - v^2/c^2} = 7,5 \text{ м.}$$

2. На кінцях стержня довжиною  $l$ , розташованого вздовж осі абсцис, знаходяться два лазери, які одночасно дають два спалахи в

напрямку осі ординат. Вздовж осі  $Ox$  зі швидкістю  $v$  рухається другий стержень довжиною  $L > l$ , який перетинає промені лазерів. При якій швидкості рухомого стержня на фотопластині, розташованій за ним і паралельно йому, будуть зафіксовані дві плями? Який буде мати вигляд цей процес з точки зору спостерігача, зв'язаного з рухомих стержнем?

$$\text{Дано: } \frac{l, L}{v = ?}$$

**Розв'язання.** Довжина рухомого стержня залежить від його швидкості. Із збільшенням швидкості довжина зменшується в  $\sqrt{1 - v^2/c^2}$  раз. При деякій швидкості може трапитись таке, що  $l > L\sqrt{1 - v^2/c^2}$ . В цьому випадку на фотопластинці буде зафіксовано дві плями від лазерів. Звідси швидкість  $v > c/L\sqrt{L^2 - l^2}$ .

З точки зору спостерігача, що рухається разом зі стержнем, відстань між лазерами дорівнює  $l\sqrt{1 - v^2/c^2}$ .

Спалахи лазерів, які одночасно проходять в системі координат, зв'язаній з нерухомих стержнем, будуть неодноразомно проходити для спостерігача, що знаходиться в системі координат, зв'язаній з рухомих стержнем. Із перетворень Лоренца витікає, що спалах правого лазера проходить раніше спалаху лівого на час

$$\Delta t' = \frac{v(x_1 - x_2)/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{vl/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

За цей час лазери пройдуть відстань  $\Delta x = \Delta t'v$ . Спалах лівого пройде порівняно зі спалахом правого лазера, з урахуванням лоренцового скорочення довжини, на відстані

$$\Delta x + l\sqrt{1 - v^2/c^2} = \frac{lv^2}{c^2\sqrt{1 - v^2/c^2}} + l\sqrt{1 - v^2/c^2} = \frac{l}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Тому  $\frac{l}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$  може виявитись більше, ніж  $L$ .

3. За проміжок часу  $\Delta t = 1$  с, відрахованого по годиннику системи  $K$ , тіло, рухаючись прямолінійно і рівномірно, перемістилось з початку координатної системи  $K$  в точку з координатами  $x = y = z = 1,5 \cdot 10^8$  м. Знайти проміжок власного часу, за який відбулось це переміщення.

Дано:  $\Delta t = 1 \text{ с}$ ,  $x_0 = y_0 = z_0 = 0$ ;  $x = y = z = 1,5 \cdot 10^8 \text{ м}$   
 $\Delta t_0 = ?$

**Розв'язання.** Скористуємося інваріантністю чотиривимірного інтервалу. Для системи, в якій тіло рухається, маємо  $x_0 = y_0 = z_0 = 0$ ,  $x = y = z = 1,5 \cdot 10^8 \text{ м}$ ,  $\Delta t = 1 \text{ с}$ .

В системі, відносно якої тіло знаходиться в стані спокою,  $x'_0 = y'_0 = z'_0 = 0$ ,  $x' = y' = z' = 0$ ,  $\Delta t_0 = ?$

Інтервали в обох системах однакові, тому

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 - c^2 \Delta t^2 = (x' - x'_0)^2 + (y' - y'_0)^2 + (z' - z'_0)^2 - c^2 \Delta t_0^2.$$

Після підстановки числових значень отримуємо:

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2 \Delta t^2 = -c^2 \Delta t_0^2,$$

звідки

$$\Delta t_0 = \sqrt{\Delta t^2 - \frac{x^2 + y^2 + z^2}{c^2}} = 0,5 \text{ с}.$$

4. В  $K'$ -системі вздовж осі  $Oy'$  рухається лампочка зі швидкістю  $u'$ .  $K'$ -система, в свою чергу, переміщується відносно  $K$ -системи зі швидкістю  $v$  в додатному напрямку осі  $Ox$ . Осі  $Ox$  і  $Ox'$  обох систем співпадають, осі  $Oy$  і  $Oy'$  паралельні. Знайти шлях, який лампочка пройде в  $K$ -системі в запаленому стані, якщо власний час горіння дорівнює  $\Delta t_0$ .

Дано:  $u'$ ,  $v$ ,  $\Delta t_0$   
 $S = ?$

**Розв'язання.** В рухомій  $K'$ -системі проекції швидкості дорівнюють  $u'_x = 0$ ,  $u'_y = u'$ . За формулами додавання швидкостей складові їх в системі  $K$  дорівнюють:

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + u'_x v/c^2} = v, \quad u_y = \frac{u'_y \sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + u'_x v/c^2} = u' \sqrt{1 - v^2/c^2}.$$

Тоді

$$u = \sqrt{u_x^2 + u_y^2} = \sqrt{v^2 + u'^2(1 - v^2/c^2)}.$$

Час горіння лампочки в  $K$ -системі дорівнює:

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2} \sqrt{1 - u'^2/c^2}}.$$

Шлях, який проходить лампочка в  $K$ -системі за час  $\Delta t$  дорівнює:

$$S = u \Delta t = \Delta t_0 \sqrt{\frac{v^2 + u'^2(1 - v^2/c^2)}{(1 - v^2/c^2)(1 - u'^2/c^2)}}.$$

### Задачі для аудиторних та домашніх занять

41. З якою швидкістю рухався в  $K$ -системі годинник, якщо за час  $\Delta t = 5 \text{ с}$  (в  $K$ -системі) він відстав від годинника цієї системи на  $\Delta t = 0,1 \text{ с}$ ?

42. Власний час життя даної нестабільної частинки дорівнює  $\Delta t_0 = 10 \text{ нс}$ . Знайти шлях, який пролетить ця частинка до розпаду в лабораторній системі відліку, де час її життя становив  $\Delta t = 20 \text{ нс}$ .

43. В  $K$ -системі відліку  $\mu$ -мезони, які рухаються зі швидкістю  $v = 0,990c$ , пролітають від місця свого народження до точки розпаду відстань  $l = 3 \text{ км}$ . Знайти: а) власний час життя цих мезонів; б) відстань, яку пролітають мезони в  $K$ -системі з «їх точки зору».

44. В рівносторонньому трикутнику кожна сторона дорівнює  $a$ . Знайти периметр цього трикутника в системі відліку, яка рухається відносно нього зі сталою швидкістю  $v$ , направленою вздовж однієї з його а) бісектрис; б) сторін.

45. Знайти власну довжину стержня в лабораторній системі відліку, якщо його швидкість  $v = c/2$ , довжина  $l = 1 \text{ м}$  і кут між ним і напрямком руху  $\varphi = 45^\circ$ .

46. Нерухомий прямий конус має кут напіврозтини  $\varphi = 45^\circ$  і площу бокової поверхні  $S_0 = 4 \text{ м}^2$ . Знайти в системі відліку, яка рухається із швидкістю  $v = 4/5 c$  вздовж осі конуса: а) кут його напіврозтини; б) площу бокової поверхні.

47. Дві нестабільні частинки рухаються в  $K$ -системі відліку по одній і тій же прямій, в одному напрямку зі швидкістю  $v = 0,990c$ . Відстань між ними в цій системі відліку  $l = 120 \text{ м}$ . В деякий момент частинки одночасно розпалися в системі координат, зв'язаній з ними. Який проміжок часу між моментами розпаду обох частинок спостерігали в  $K$ -системі? Яка з частинок розпалась раніше?

48. На просторово-часовій діаграмі (рис. 9) показані три події  $A$ ,  $B$  і  $C$ , які відбулись на осі абсцис в деякій інерціальній системі. Знайти: а) проміжок часу між подіями  $A$  і  $B$  в тій системі відліку, де вони відбулись в одній і тій же точці; б) відстань між точками, де відбулись події  $A$  і  $C$ , в тій системі відліку, де вони одночасні?

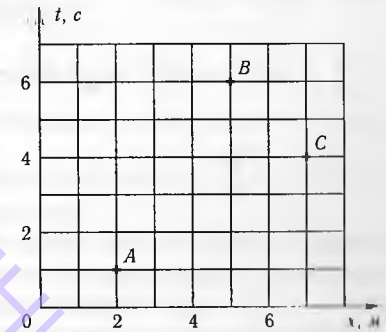


Рис. 9

## ДИНАМІКА МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ І СИСТЕМИ МАТЕРІАЛЬНИХ ТОЧОК

49. В площині  $xy$   $K$ -системи відліку рухається частинка, проекції швидкості якої дорівнюють  $v_x$  і  $v_y$ . Знайти швидкість  $v'$  цієї частинки в  $K'$ -системі, яка переміщується зі швидкістю  $v$  відносно  $K$ -системи в додатному напрямку осі абсцис.

50. Частинка рухається в  $K$ -системі зі швидкістю  $v$  під кутом  $\varphi$  до осі  $Ox$ . Знайти відповідний кут в  $K'$ -системі, яка переміщується зі швидкістю  $V$  відносно  $K$ -системи в додатному напрямку осі  $Ox$ , якщо осі  $Ox$  і  $Ox'$  обох систем співпадають.

51. Стержень  $AB$  орієнтований паралельно осі  $Ox'$   $K'$ -системи відліку і рухається в цій системі зі швидкістю  $v'$  вздовж її осі  $Oy'$ .  $K'$ -система, в свою чергу, рухається зі швидкістю  $V$  відносно  $K$ -системи в напрямку осі абсцис. Знайти кут  $\varphi$  між стержнем і віссю  $Ox$  в  $K$ -системі.

В динаміці рух тіл вивчається в зв'язку з тими причинами, які його зумовлюють. Динаміка відповідає на питання: чому тіло рухається так, а не інакше. В основі динаміки лежать закони Ньютона. Системи, в яких виконуються закони Ньютона, називають *інерціальними системами*. Систему, яка рухається відносно інерціальної з прискоренням, називають *неінерціальною*. В цьому розділі розглядається методика розв'язування задач як в інерціальних, так і в неінерціальних системах. Так само, як і в кінематиці, можна виділити пряму та зворотну задачі. В прямій задачі за відомими силами і початковими умовами знаходять прискорення, швидкість, координату, шлях. В зворотній, навпаки, — за кінематичними характеристиками та масами знаходять силу. Задачі динаміки можна класифікувати за видами руху: наприклад, задачі на динаміку поступального і обертального руху. В залежності від умов розглядають задачі на рух тіл по горизонтальній площині, по похилій площині, рух зв'язаних тіл, в тому числі із застосуванням блоків.

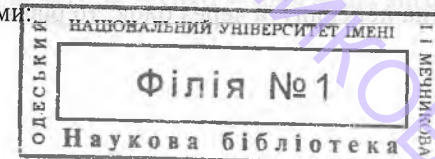
### Основні формули

Динамічне рівняння руху матеріальної точки  $\vec{a} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n \vec{F}_i$ , де  $\sum_{i=1}^n \vec{F}_i$  — сума сил, що діють на матеріальну точку, а  $m$  — її маса.

В диференціальній формі рівняння має вигляд:  $\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i$ , де  $\vec{p} = m\vec{v}$  — кількість руху, або імпульс тіла.

*Третій закон Ньютона:* всі тіла діють одне на одне з силами, рівними за величиною і протилежними за напрямком. Сили, прикладені до різних тіл, мають однакову природу:  $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$ .

Координати *центра мас* системи матеріальних точок визначаються такими формулами:



$$x_0 = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i}, \quad y_0 = \frac{\sum m_i y_i}{\sum m_i}, \quad z_0 = \frac{\sum m_i z_i}{\sum m_i},$$

де  $m_i, x_i, y_i, z_i$  — маса і координати точок, що складають систему.

Найбільше значення сили сухого тертя визначається так:  $F_{\text{тр}} = \mu N$ , де  $\mu$  — коефіцієнт тертя, а  $N$  — сила нормального тиску.

Сила пружності визначається законом Гука:  $F_{\text{пр}} = -k\Delta x$ , де  $k$  — коефіцієнт пружності, а  $\Delta x$  — абсолютна деформація.

Сила тяжіння  $F_{\text{г}} = mg$ , де  $g$  — прискорення вільного падіння.

Сила гравітації  $F_{\text{г}} = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}$ , де  $\gamma$  — гравітаційна стала,  $r$  — відстань між точковими тілами.

## § 1. Динаміка прямолінійного руху

Основні рівняння нерелятивістської (класичної) динаміки в проекціях на осі координат мають вигляд:

$$m a_x = \sum F_{ix}, \quad m \frac{dv_x}{dt} = \sum F_{ix}, \quad m \frac{d^2x}{dt^2} = \sum F_{ix};$$

$$m a_y = \sum F_{iy}, \quad m \frac{dv_y}{dt} = \sum F_{iy}, \quad m \frac{d^2y}{dt^2} = \sum F_{iy};$$

$$m a_z = \sum F_{iz}, \quad m \frac{dv_z}{dt} = \sum F_{iz}, \quad m \frac{d^2z}{dt^2} = \sum F_{iz}.$$

**Методичні вказівки.** При використанні законів Ньютона особливу увагу слід звернути на аналіз сил, що діють на тіло. Цей аналіз повинен передбачати: походження сил, їх природу, характер, від яких величин і як залежать ці сили. Основне рівняння слід записати спочатку у векторній формі, а потім, вибираючи в залежності від умови задачі осі координат, спроектувати на них це рівняння. Отриману систему рівнянь, в разі необхідності, доповнюють іншими, наприклад кінематичними, рівняннями і визначають невідому величину. При розгляді руху тіл, зв'язаних між собою, другий закон Ньютона доцільно застосувати до кожного тіла окремо, перед цим слід встановити зв'язок між кінематичними параметрами. Таким чином можна отримати систему рівнянь, де кількість невідомих дорівнювала б кількості самих рівнянь. Якщо тіла зв'язані ниткою, масою якої можна знехтувати, то силу натягу  $T$  вважають однаковою по всій довжині нитки. Якщо нитка перекинута через блок, то рівняння  $T_1 = T_2$  вико-

нується в тому випадку, коли можна нехтувати не лише масою нитки, а й масою блока, та силами тертя, які виникають при обертанні блока.

При розв'язуванні задач, де об'єктом є система матеріальних точок, слід звернути увагу, по-перше, на сили, що діють на цю систему. Чітко визначити, які із них є внутрішніми, а які зовнішніми. При цьому необхідно пам'ятати, що сума внутрішніх сил дорівнює нулю, а зовнішні, якщо їх сума не дорівнює нулю, викликають прискорення центру мас, яке, в свою чергу, визначається теоремою про рух центру мас.

### Приклади розв'язування задач.

1. До бруска масою  $m$ , що лежить на столі, прикладені сили:  $F_1$  — горизонтально,  $F_2$  — в тому ж напрямку, але під кутом  $\alpha$  до горизонту. Коефіцієнт тертя бруска по столу  $\mu$ . Знайти прискорення бруска.

Дано:  $m; F_1; F_2; \alpha, \mu$   
 $a - ?$

**Розв'язання.** По відношенню до бруска сили  $F_1, F_2$  є зовнішніми. Зовнішніми є також сили:  $F_{\text{г}} = mg$  — сила тяжіння з боку Землі (рис. 10) та  $F_{\text{тр}}$  — сила тертя і сила реакції опори  $N$  від поверхні стола.

Під дією цих сил брусок отримує прискорення, яке, згідно з другим законом Ньютона, можна визначити із такого векторного рівняння:

$$m\vec{a} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_{\text{г}} + \vec{F}_{\text{тр}} + \vec{N}.$$

Координатні осі вибираємо так, щоб вісь абсцис була направлена вздовж поверхні стола і співпадала з напрямком прискорення, а вісь ординат спрямована перпендикулярно до поверхні стола і вгору. Спроектувавши рівняння руху на відповідні осі координат, отримуємо два скалярних рівняння:  $ma = F_1 + F_2 \cos \alpha - F_{\text{тр}}, 0 = F_2 \sin \alpha - mg + N$ . Врахуємо, що  $F_{\text{тр}} = \mu N$ , і згідно з третім законом Ньютона  $|N| = |N|$ . Величину  $N$  можна знайти з другого скалярного рівняння, тоді сила тертя бруска по столу дорівнює  $F_{\text{тр}} = \mu N = \mu(mg - F_2 \sin \alpha)$ .

Прискорення знаходимо з першого скалярного рівняння, підставляючи відповідне значення сили тертя:

$$a = \frac{1}{m} (F_1 + F_2 \cos \alpha - \mu mg + \mu F_2 \sin \alpha).$$

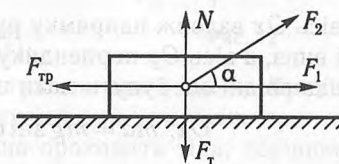


Рис. 10



2. Тіло починає ковзати з вершини похилого клину, основа якого дорівнює  $l = 2$  м. Коефіцієнт тертя між тілом та поверхнею клину  $\mu = 0,14$ . При якому значенні кута  $\alpha$  час ковзання буде найменшим? Чому він дорівнює?

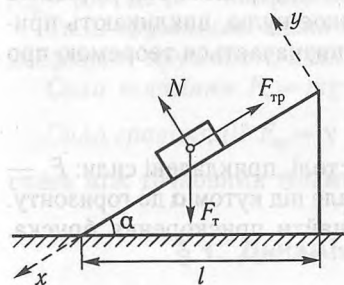


Рис. 11

Дано:  $l = 2$  м;  $\mu = 0,14$   
 $\alpha - ?$   $t_{\min} - ?$

**Розв'язання.** На тіло, що починає рухатись з вершини похилої площини (рис. 11), діють такі сили:  $F_T$  — сила тяжіння, направлена вертикально вниз;  $F_{\text{тр}}$  — сила тертя, направлена в сторону, протилежну швидкості;  $N$  — сила реакції опори, перпендикулярна до похилої площини. Рівняння руху тіла має такий вигляд:  $m\vec{a} = \vec{F}_T + \vec{F}_{\text{тр}} + \vec{N}$ .

Осі координат зручно вибрати так: вісь  $Ox$  вздовж напрямку руху тіла, тобто вздовж похилої площини і вниз, а вісь  $Oy$  перпендикулярно до неї. Проекції рівняння руху на відповідні осі будуть мати вигляд:

$$Ox: ma = mg \sin \alpha - F_{\text{тр}}, \quad Oy: 0 = N - mg \cos \alpha.$$

Із останніх рівнянь знаходимо прискорення  $a$ , враховуючи, що

$$F_{\text{тр}} = \mu N = \mu mg \cos \alpha,$$

отже

$$a = g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha).$$

Час, за який тіло проходить відстань  $S$  від вершини клина до його основи дорівнює

$$t = \sqrt{\frac{2S}{a}},$$

де  $S = l / \cos \alpha$ . Підставляючи сюди значення  $a$ , отримуємо

$$t = \sqrt{\frac{2l}{g \cos \alpha (\sin \alpha - \mu \cos \alpha)}}.$$

Час  $t$  буде мати найменше значення, коли знаменник підкореневого виразу буде максимальним. Прирівняємо похідну від знаменника підкореневого виразу до нуля і знайдемо кут, при якому час ковзання буде мінімальним:  $\text{tg } 2\alpha = -1/\mu$ ,  $\alpha = 49^\circ$ ,  $t_{\min} = 1$  с.

3. Знайти прискорення  $a_1$  і  $a_2$  тіл, що мають відповідно маси  $m_1$  і  $m_2$ , а також натяг нитки в системі, зображеній на рис. 12. Маса блоків і нитки знехтувати. Сили тертя не враховувати.

Дано:  $m_1, m_2$   
 $a_1 - ?$   $a_2 - ?$   $T - ?$

**Розв'язання.** Система складається з двох тіл. До кожного з них прикладені сили тяжіння  $F_{T_1}$  і  $F_{T_2}$ , а також  $T_1$  і  $T_2$  — сили натягу нитки. При цьому

$$F_{T_1} = m_1 g, \quad F_{T_2} = m_2 g, \quad \text{а } T_2 = 2T_1.$$

Оскільки тіла рухаються лише у вертикальному напрямку, то зручно вісь  $Ox$  вибрати також у вертикальному напрямку і вниз. Тоді рівняння руху в проекціях на цю вісь будуть мати вигляд:

$$m_1 a_1 = m_1 g - T_1, \quad -m_2 a_2 = m_2 g - 2T_1.$$

Отримана система двох рівнянь з трьома невідомими. Третім рівнянням може бути рівняння кінематичного зв'язку між прискореннями. Дійсно, відношення шляхів, що проходять тіла, дорівнює  $\frac{S_1}{S_2} = \frac{2}{1}$  і вказує на те, що  $\frac{a_1}{a_2} = \frac{2}{1}$ . Тобто  $a_1 = 2a_2$ . Тепер із системи рівнянь знаходимо:

$$a_1 = \frac{2m_1 - m_2}{2m_1 + m_2/2} g, \quad a_2 = -a_1/2, \quad T = \frac{3m_1 m_2}{4m_1 + m_2} g.$$

4. Пліт масою  $M$  і довжиною  $l$  нерухомо стоїть на воді. З протилежних кінців плоту одночасно починають рухатись назустріч один одному два чоловіки масами  $m_1$  і  $m_2$ . Знайти зміщення плоту в момент, коли чоловік масою  $m_1$  пройде весь пліт, а чоловік масою  $m_2$  буде на середині плоту. Опором води знехтувати.

Дано:  $M, m_1, m_2, l$   
 $\Delta x - ?$

**Розв'язання.** Пліт та два чоловіки утворюють систему тіл, які взаємодіють між собою. Сили, з якими вони взаємодіють, є внутрішніми. Сума зовнішніх сил в даному випадку дорівнює нулю. Прискорення центру мас системи, згідно з теоремою про рух центру мас,

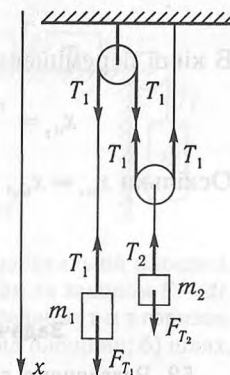


Рис. 12

також дорівнює нулю. А оскільки в момент  $t=0$  пліт був нерухомий, то це означає, що координата центру мас не змінюється.

До початку переміщень координата центру мас дорівнює

$$x_{ц1} = \frac{m_1 \cdot 0 + Ml/2 + m_2 l}{m_1 + m_2 + M}.$$

В кінці переміщень координата центру мас дорівнює

$$x_{ц2} = \frac{m_1(l - \Delta x) + m_2(l/2 - \Delta x) + M(l/2 - \Delta x)}{m_1 + m_2 + M}.$$

Оскільки  $x_{ц1} = x_{ц2}$ , то звідси знаходимо переміщення плути  $\Delta x$ :

$$\Delta x = \frac{(m_1 - m_2/2)l}{m_1 + m_2 + M}.$$

### Задачі для аудиторних та домашніх занять

52. Розглянемо два бруски, які притулені один до одного, мають маси  $m_1$  і  $m_2$  і рухаються під дією сили  $F$  по горизонтальній площині без тертя. Сила  $F$  прикладена до бруска  $A$  і через нього передається брускові  $B$ . За третім законом Ньютона брусок  $B$  повинен з такою ж силою діяти на брусок  $A$ . Отже результуюча сила, що діє на брусок  $A$ , дорівнює сумі  $F + (-F) = 0$ , і, таким чином, ніякого прискорення немає. Знайти помилку в міркуваннях.

53. Дві кульки з однаковим радіусом, що лежать на горизонтальній площині, з'єднані невагомою ниткою, що не розтягується. У одній із кульок маса більша. Чи однакова буде сила натягу ниток, якщо з однією і тією ж силою тягнути спочатку за праву кульку, а потім за ліву?

54. На горизонтальній площині лежить дошка з масою  $M$ , зверху на якій знаходиться тягар з масою  $m$ . Горизонтальна сила  $F$  прикладена: а) до тягара; б) до дошки. Коефіцієнт тертя між площиною і дошкою  $\mu_1$ , між дошкою і тягарем  $\mu_2$ . Знайти прискорення обох тіл в першому та в другому випадках, а також необхідні умови для того, щоб у випадку а) висмикнути тягар з дошки; у випадку б) висмикнути дошку з під тягара.

55. На два бруски масами  $m_1$  і  $m_2$ , зв'язані ниткою, яка не розтягується, діють сили  $F_1$  і  $F_2$  під кутами  $\alpha$  і  $\beta$  до горизонту, як показано на рис. 13. Знайти прискорення системи, якщо коефіцієнт тертя між брусками і горизонтальною площиною дорівнює  $\mu$ .

56. На горизонтальній площині знаходиться тіло масою  $M$ . Друге тіло масою  $m$  підвішене на нитці, яка перекинута через блок і прив'язана до тіла

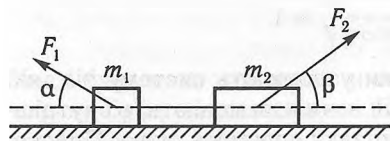


Рис. 13

масою  $M$ , як показано на рис. 14. Знайти прискорення і натяг нитки. Тертям, а також масами блока і нитки знехтувати.

57. На гладенькій горизонтальній площині знаходяться три маси  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $m_3$ , зв'язані між собою нитками, а також з масою  $M$ , як показано на рис. 15. Знайти прискорення системи, а також силу натягу всіх ниток.

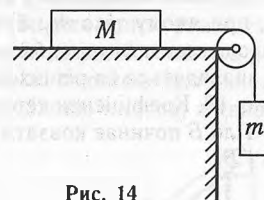


Рис. 14

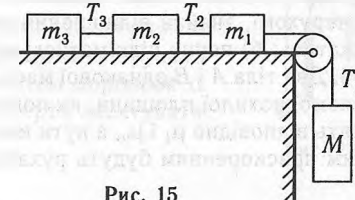


Рис. 15

58. На невелике тіло масою  $m$ , що лежить на горизонтальній площині, в момент  $t=0$  почала діяти сила, яка змінюється з часом за законом  $F = at$ , де  $a$  — стала величина. Напрямок цієї сили весь час складає кут  $\alpha$  з горизонтом. Знайти: а) швидкість тіла в момент відриву його від площини; б) шлях, пройдений до моменту відриву.

59. Потяг, що складається з  $n$  однакових вагонів (маса кожного  $m$ ), рушає з місця, маючи прискорення  $a$ . Вагони між собою зчеплені пружинами, коефіцієнт пружності яких  $k$ . Коефіцієнт тертя між колесами та рейками  $\mu$ . Знайти силу тяги локомотива та видовження кожної пружини.

60. На похилій площині з кутом нахилу  $\alpha$  рухається вниз тіло. Коефіцієнт тертя дорівнює  $\mu$ . Знайти прискорення, з яким рухається тіло.

61. Невелике тіло пустили знизу догори по похилій площині, що складає кут  $\alpha$  з горизонтом. Знайти коефіцієнт тертя, якщо час піднімання тіла по похилій площині в  $\eta = 2$  рази більший, ніж час спускання з неї.

62. На похилу площину, що складає кут  $\alpha$  з горизонтом, помістили два бруски з масами  $m_1$  і  $m_2$ , які притулені один до одного (рис. 16). Коефіцієнти тертя між ними та похилою площиною відповідно дорівнюють  $\mu_1$  і  $\mu_2$ , причому  $\mu_1 > \mu_2$ . Знайти: а) силу взаємодії між брусками в процесі руху; б) мінімальне значення кута  $\alpha$ , при якому почнеється ковзання.

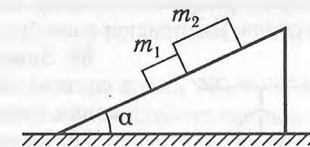


Рис. 16

63. Брусок масою  $m$  витягують за нитку з постійною швидкістю по похилій площині, що має кут  $\alpha$  з горизонтом, догори. Коефіцієнт тертя дорівнює  $\mu$ . Знайти кут  $\beta$ , який повинна мати нитка з похилою площиною, щоб сила її натягу була мінімальною.

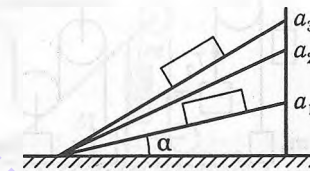


Рис. 17

64. Декілька похилих площин мають загальну основу (рис. 17): а) який кут нахилу

відповідає найменшому часу ковзання? (Розглянути випадки, коли тертя немає зовсім і коли коефіцієнт тертя дорівнює  $\mu = 0,25$ ); б) який коефіцієнт тертя, якщо час ковзання при кутах  $\alpha_1 = 60^\circ$  і  $\alpha_2 = 45^\circ$  однаковий?

65. В установці, що зображена на рис. 18, відомі кут  $\alpha$  і коефіцієнт тертя  $\mu$  між тілом  $m_1$  і похилою площиною. Масами блока і нитки можна знехтувати, тертя в блоці немає. Вважаючи, що в початковий момент часу обидва тіла нерухомі, знайти відношення мас  $m_2/m_1$ , при якому тіло  $m_2$ : а) почне опускатись; б) почне підніматись; в) буде знаходитись в стані спокою.

66. Два тіла А і В однакової маси зв'язані і знаходяться на різних схилах нерухомої похилої площини, як показано на рис. 19. Коефіцієнти тертя становлять відповідно  $\mu_1$  і  $\mu_2$ , а кути нахилу  $\alpha$  і  $\beta$ . Тіло В починає ковзати вниз. З яким прискоренням будуть рухатись тіла А і В?

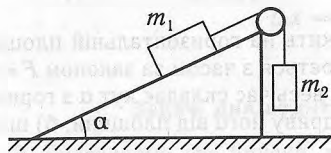


Рис. 18

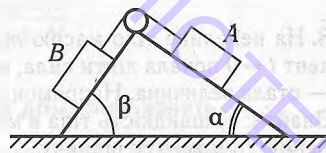


Рис. 19

67. На похилій площині з кутом  $\alpha$  знаходиться дошка масою  $m_2$ , а на ній брусок масою  $m_1$ . Коефіцієнт тертя між бруском і дошкою  $\mu_1$ . Знайти, при яких значеннях коефіцієнта тертя  $\mu_2$  між дошкою і похилою площиною дошка не буде рухатись, якщо відомо, що брусок ковзає по дошці.

68. Машина Атвуда, яка служить для перевірки законів рівноприскореного руху, являє собою нерухомий блок, через який перекинута нитка і на якій підвішені два тягарці масами  $m_1$  і  $m_2$ . До тягарця  $m_2$  за допомогою пружинки прикріплений тягар  $m_3$ . Систему утримували за тягар  $m_1$ , а потім відпустили. Які прискорення будуть у тягарів  $m_1$  і  $m_3$  в початковий момент часу.

69. Знайти прискорення маси  $m_1$  і натяг ниток  $T_1$  і  $T_2$  в системі, зображеній на рис. 20. Масами блоків, ниток та силами тертя знехтувати.

70. Тягарці, маси яких  $m_1 = 2 \text{ кг}$ ,  $m_2 = 3 \text{ кг}$ , висять на нитці, перекинутій через невагомий блок (рис. 21). До рухомого блоку прикріплений тягарець масою  $m_3 = 4 \text{ кг}$ . В момент  $t = 0$  всі тягарці закріплені і знаходяться на одній висоті, потім їх одночасно звільнюють. Знайти прискорення кожного тягарця, натяг нитки та відстань між тягарцями через  $t = 1 \text{ с}$  після початку руху; на скільки опуститься рухомий блок за цей час?

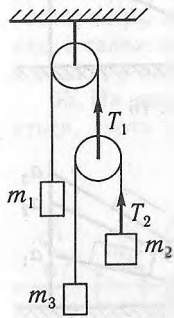


Рис. 20

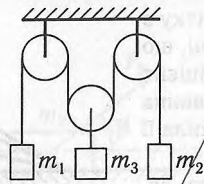


Рис. 21

71. В системі, що зображена на рис. 22, кулька має масу в  $\eta = 1,8$  раза більшу від маси стержня. Довжина останнього  $l = 100 \text{ см}$ . Масаю блоків та ниток можна знехтувати. Кульку встановили на одному рівні з нижнім кінцем стержня і відпустили. Через який час вона порівняється з верхнім кінцем стержня?

72. Знайти прискорення тіла 2 в системі, що зображена на рис. 23, якщо його маса в  $\eta$  раз більше від маси бруска 1 і кут між похилою площиною і горизонтом дорівнює  $\alpha$ . Масаю блоків і ниток, а також силами тертя знехтувати.

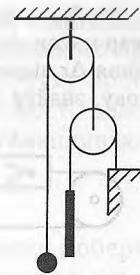


Рис. 22

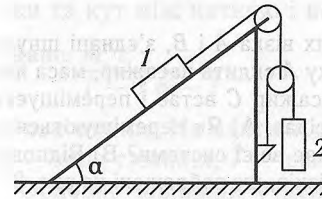


Рис. 23

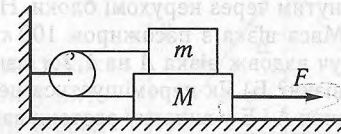


Рис. 24

73. На гладкій горизонтальній поверхні лежить брусок масою  $M = 2 \text{ кг}$ , на якому знаходиться інший брусок масою  $m = 1,5 \text{ кг}$ . Бруски з'єднані через блок ниткою, як зображено на рис. 24. Коефіцієнт тертя між брусками  $\mu = 0,4$ . Нижній брусок під дією сталої сили переміщується на відстань  $S = 5 \text{ м}$  за  $1 \text{ с}$ . Знайти силу, що діє на нижній брусок, а також силу натягу ниток. Масаю блока та нитки знехтувати.

74. По похилій площині, що складає кут  $\alpha = 30^\circ$  з горизонтом, сковає брусок масою  $m_1 = 0,4 \text{ кг}$ . Коефіцієнт тертя між бруском та площиною  $\mu = 0,1$ . Брусок, як показано на рис. 25, за допомогою легких блоків зв'язаний з тягарем  $m_2 = 0,3 \text{ кг}$ . Знайти напрямок та величину прискорення тягара  $m_2$ , а також силу натягу ниток.

75. В системі, що зображена на рис. 26, відомі маси клина  $M$  і тіла  $m$ . Тертя існує лише між клином і тілом  $m$ . Відповідний коефіцієнт тертя дорівнює  $\mu$ . Масаю блоків та ниток можна знехтувати. Знайти прискорення тіла  $m$  відносно горизонтальної поверхні, по якій ковзає клин.

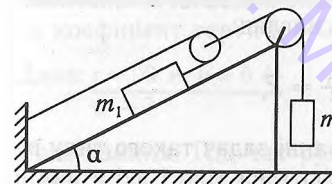


Рис. 25

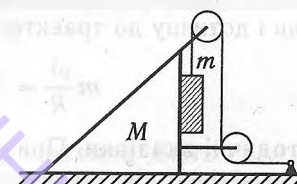


Рис. 26

76. Через блок перекинтий шнур, на одному кінці якого знаходиться тягар масою  $M$ , а на другому — чоловік. Чоловік масою  $m$  здійснює переміщення  $\Delta r$  відносно шнура вгору і зупиняється. Нехтуючи масами шнура та блоку, знайти переміщення центру мас системи.



Рис. 27

77. На рис. 27, а показані два однакових візка А і В, з'єднані шнуром, перекинутим через нерухомі блоки. На візку А сидить пасажир, маса якого 50 кг. Маса візка з пасажиром 100 кг. Пасажир С встає і переміщується праворуч вздовж візка А на 1,2 м і знову сідає. А) Як переміщуються при цьому візку? Б) Як переміщується центр мас всієї системи? В) Відповіді на питання А і Б у випадку розташування візків, що зображені на рис. 27, б. Г) куди спрямована результуюча сила, що діє на осі нерухомих блоків у випадках А і Б?

## § 2. Динаміка криволінійного руху

Результуючу силу  $\vec{F}$ , яка діє на тіло, що рухається по криволінійній траєкторії, можна розкласти на дві складові:  $\vec{F}_n$  — нормальну силу, її називають доцентровою, направлена вона вздовж радіуса кривизни і до центру;  $\vec{F}_\tau$  — тангенціальну силу, напрямком якої співпадає з напрямком швидкості або протилежний їй, тобто вздовж дотичної до траєкторії:

$$\vec{F} = \vec{F}_n + \vec{F}_\tau.$$

Нормальна складова зумовлює зміну швидкості за напрямком і появу  $\vec{a}_n$  — нормального прискорення, а тангенціальна — за величиною і появу  $\vec{a}_\tau$  — тангенціального прискорення.

Основні рівняння динаміки криволінійного руху в проєкціях на нормаль і дотичну до траєкторії мають вигляд:

$$m \frac{v^2}{R} = F_n, \quad m \frac{dv_\tau}{dt} = F_\tau.$$

**Методичні вказівки.** При розв'язуванні задач такого типу перш за все необхідно з'ясувати, які сили діють на тіло і які з них призводять до криволінійного руху. Записати загальне рівняння руху.

Осі координат зручно вибрати так, щоб вісь  $Ox$  була направлена вздовж радіуса кривизни і співпадала з напрямком нормального прискорення, а вісь  $Oy$  перпендикулярно до неї. Рівняння руху проєктують на ці осі. Отриману систему рівнянь, в разі необхідності, доповнюють іншими рівняннями динаміки чи кінематики, які впливають з умов задачі, і знаходять невідомі величини.

### Приклади розв'язування задач.

1. Математичний маятник масою  $m$  і з довжиною нитки  $l$  обертається в горизонтальній площині з періодом  $\tau$ . Знайти силу натягу нитки та кут між ниткою і вертикаллю.

Дано:  $m; l; \tau$   
 $\frac{T}{?} - \alpha - ?$

**Розв'язання.** На маятник діють дві сили:  $mg$  — сила тяжіння;  $T$  — сила натягу нитки. Основне рівняння у векторній формі має вигляд:

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{T}.$$

Осі координат зручно вибрати таким чином: вісь  $Ox$  спрямувати до центру вздовж радіуса кола, яке описує тіло, а вісь  $Oy$  — перпендикулярно до неї. В проєкціях на ці осі рівняння руху мають вигляд:

$$ma_n = T \sin \alpha, \quad 0 = -mg + T \cos \alpha.$$

Прискорення  $a_n = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R$  є доцентровим. Враховуючи, що  $R = l \sin \alpha$ , а також що  $\omega = 2\pi/\tau$  з цих рівнянь знаходимо:

$$T = \frac{4\pi^2 ml}{\tau^2}; \quad \cos \alpha = \frac{g\tau^2}{4\pi^2 l}.$$

2. З якою максимальною швидкістю може рухатись мотоцикліст по горизонтальній площині, описуючи при цьому дугу радіусом  $r = 90$  м, якщо коефіцієнт тертя  $\mu = 0,4$ ?

Дано:  $r = 90$  м;  $\mu = 0,4$   
 $\frac{?}{v} - ?$

**Розв'язання.** Під час руху на мотоцикліста діють сили:  $mg$  — тяжіння,  $F_{\text{тр}}$  — тертя,  $N$  — реакції опори. Рівняння руху записуємо так:  $m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{F}_{\text{тр}} + N$ .

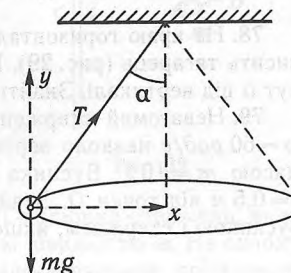


Рис. 28

Вісь  $Ox$  направимо вздовж радіуса кривизни до центру, а  $Oy$  — перпендикулярно до горизонтальної площини і догори. Проектуючи рівняння руху на осі координат, отримуємо два скалярних рівняння:

$$ma_n = F_{\text{тр}}, \quad 0 = -mg + N.$$

Враховуючи, що  $F_{\text{тр}} = \mu N$ , а  $a_n = \frac{v^2}{R}$ , знаходимо

$$v = \sqrt{rg\mu} = 19 \text{ м/с}.$$

### Задачі для аудиторних та домашніх занять

78. На краю горизонтального диска діаметром  $D$  на нитці довжиною  $l$  висить тягарець (рис. 29). Під час обертання диска нитка відхиляється на кут  $\alpha$  від вертикалі. Знайти кутову швидкість обертання диска.

79. Невагомий стержень (рис. 30) обертається з кутовою швидкістю  $\omega = 60 \text{ рад/с}$  навколо вертикальної осі  $OO'$ . На стержень надіта бусинка масою  $m = 10 \text{ г}$ . Бусинка обертається разом із стержнем на відстані  $l = 0,5 \text{ м}$  від точки  $O$ . Знайти мінімальне значення коефіцієнта тертя між бусинкою і стержнем, якщо  $\alpha = 30^\circ$ .

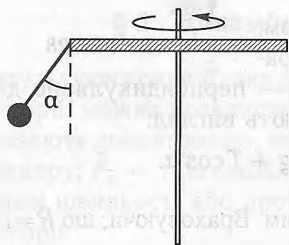


Рис. 29

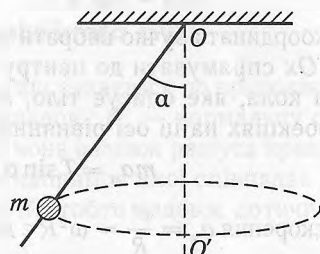


Рис. 30

80. Автомобіль масою  $5 \text{ т}$  їде по випуклому мосту зі швидкістю  $21,6 \text{ км/год}$ . З якою силою він тисне на середину моста, якщо радіус кривизни  $R = 50 \text{ м}$ ?

81. Літак здійснює «мертву петлю» з радіусом  $R = 800 \text{ м}$  і рухається по ній зі швидкістю  $v = 720 \text{ км/год}$ . З якою силою тіло пілота масою  $70 \text{ кг}$  буде тиснути на сидіння літака у верхній і нижній точках петлі?

82. Знайти мінімальну швидкість, з якою повинен їхати мотоцикліст по внутрішній поверхні вертикальної стінки циліндричної форми діаметром  $d = 18 \text{ м}$ , якщо центр мас знаходиться на відстані  $h = 1 \text{ м}$  від поверхні стінки, а коефіцієнт тертя  $\mu = 0,4$ .

83. Кулька з масою  $m$  рухається з постійною кутовою швидкістю  $\omega$  по внутрішній поверхні перевернутого конуса (рис. 31), описуючи горизонтальне коло. Кут при вершині конуса  $2\alpha$ . Знайти радіус кола. Тертям знехтувати.

84. На внутрішній поверхні перевернутого конуса з кутом  $2\alpha$  при вершині на висоті  $h$  знаходиться тіло. Коефіцієнт тертя між тілом і поверхнею конуса  $\mu$ . Знайти мінімальну кутову швидкість обертання конуса навколо вертикальної осі, при якій тіло буде нерухоме по відношенню до поверхні конуса.

85. Сфера радіусом  $R$  (рис. 32) обертається навколо вертикальної осі з кутовою швидкістю  $\omega$ . На внутрішній поверхні в рівновазі знаходиться невелике тіло. Вважаючи кут  $\alpha$  відомим, знайти коефіцієнт тертя між тілом та поверхнею сфери.

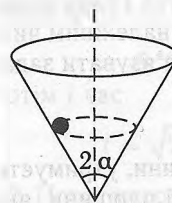


Рис. 31

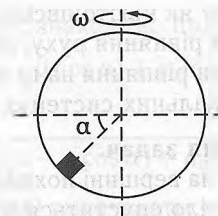


Рис. 32

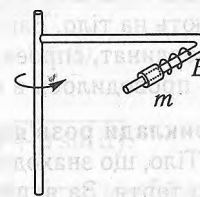


Рис. 33

86. Прилад, що зображений на рис. 33, має Г-подібний стержень, який обертається в горизонтальній площині з кутовою швидкістю  $\omega$ . На одному з колін знаходиться муфточка масою  $m$ , з'єднана невагомю пружинкою з точкою  $B$ . Коефіцієнт пружності  $k$ . Знайти відносну деформацію пружинки. Як залежить результат від напрямку обертання?

87. Ланцюжок довжиною  $l$  помістили на гладеньку сферичну поверхню радіусом  $R$  так, що один його кінець закріплений на вершині сфери. З яким прискоренням почне рухатись кожен елемент ланцюжка, якщо звільнити його верхній кінець, при цьому слід вважати, що  $l < \frac{1}{2} \pi R$ .

### § 3. Неінерціальні системи відліку

В неінерціальних системах відліку основне рівняння динаміки має вигляд:

$$m\vec{a} = \sum \vec{F} + \vec{F}_{\text{ін}} + \vec{F}_{\text{вц}} + \vec{F}_{\text{кор}},$$

де  $\sum \vec{F}$  — сума всіх діючих, ньютонівських, сил на дане тіло з боку інших тіл,  $\vec{F}_{\text{ін}} = -m\vec{a}_0$  — поступальна сила інерції,  $\vec{a}_0$  — прискорення системи;  $F_{\text{вц}} = m\omega^2 r$  — відцентрова сила інерції направлена вздовж радіуса від центру обертання;  $\vec{F}_{\text{кор}} = 2m[\vec{v} \times \vec{\omega}]$  — коріолісова сила інерції,  $\vec{v}$  — швидкість тіла відносно системи, що обертається з кутовою швидкістю  $\vec{\omega}$ .

Якщо система обертається нерівномірно, то з'являється ще одна сила інерції  $\vec{F}_i = m[\vec{r} \times \beta]$ , де  $\beta$  — кутове прискорення.

**Методичні вказівки.** Передусім необхідно встановити, відносно яких тіл система, в якій розглядається рух тіла, буде неінерціальною. В неінерціальній системі рівняння руху мають такий же вигляд, як і в інерціальних, з врахуванням того, що, крім сил взаємодії з іншими тілами, діють також сили інерції. Тому, виконавши необхідний малюнок, слід показати на ньому як ньютонівські сили, так і сили інерції, що діють на тіло. Записати рівняння руху, вибрати належним чином осі координат, спроектувати рівняння на ці осі і розв'язувати задачу, як це проводилось в інерціальних системах.

### Приклади розв'язування задач.

1. Тіло, що знаходиться на вершині похилої площини, утримується силою тертя. За який час тіло спуститься з похилої площини, якщо вона стане рухатись в горизонтальному напрямку з прискоренням  $a_0$ ? Довжина площини  $l$ , кут нахилу  $\alpha$ , коефіцієнт тертя між тілом і площиною  $\mu$ .

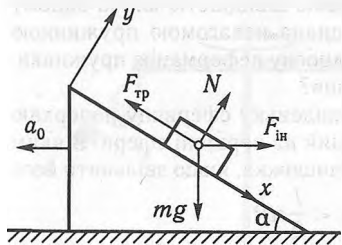


Рис. 34

Дано:  $a_0; l; \alpha; \mu$   
 $t - ?$

**Розв'язання.** Якщо рух тіла розглядати відносно похилої площини і систему координат зв'язати з площиною, то в даному випадку система буде неінерціальною, тому що похила площина рухається з прискоренням  $a_0$ , наприклад, вліво. Вибираючи таким чином

систему координат, встановимо сили, що діють на тіло з боку інших тіл:  $mg$  — сила тяжіння;  $N$  — сила реакції опори;  $F_{тр}$  — сила тертя. Коли похила площина не рухається, сума цих сил дорівнює нулю і тіло знаходиться в стані спокою відносно площини. Коли ж похила площина починає рухатись з прискоренням  $a_0$ , на тіло починає діяти сила інерції  $F_{in} = -ma_0$ , яка направлена вправо. Рівновага сил порушується, і тіло починає сковзати з похилої площини. Якщо буде відоме його прискорення відносно площини, то час спускання легко знайти

з формули  $t = \sqrt{2l/a}$ . Таким чином, вводячи силу інерції в неінерціальній системі відліку, ми фактично розв'язування задачі звели до розв'язування звичайних задач на рух тіл по похилій площині в інер-

ціальній системі. Для знаходження прискорення тіла запишемо рівняння руху у вигляді:

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{F}_{тр} + \vec{N} + \vec{F}_i.$$

В проекціях на осі координат рівняння мають вигляд:

$$\begin{aligned} ma &= mg \sin \alpha - F_{тр} + ma_0 \cos \alpha, \\ 0 &= -mg \cos \alpha + N + ma_0 \sin \alpha. \end{aligned}$$

Враховуючи, що  $F_{тр} = \mu N$ , знаходимо прискорення:

$$a = g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha) + a_0(\cos \alpha + \mu \sin \alpha),$$

а потім і час

$$t = \sqrt{2l/g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha) + a_0(\cos \alpha + \mu \sin \alpha)}.$$

2. Потяг масою  $m = 2000$  тон рухається зі швидкістю  $v = 54$  км/год на широті  $\varphi = 60^\circ$  вздовж паралелі із заходу на схід. Нехтуючи силами тертя, знайти горизонтальну складову тиску потягу на рейки.

Дано:  $m = 2000$  т;  $v = 54$  км/год;  $\varphi = 60^\circ$   
 $F_{гор} - ?$

**Розв'язання.** Земля, що обертається з кутовою швидкістю  $\omega$ , є неінерціальною системою. Це означає, що на всі тіла діють сили інерції. На потяг в даному випадку діють сили:  $F_r$  — сила тяжіння,  $N$  — сила реакції опори з боку рейок,  $F_{вц}$  — відцентрова сила інерції,  $F_{кор}$  — сила інерції Коріоліса. В даному випадку осі координат зручно вибрати так: вісь  $Ox$  горизонтально до земної поверхні, а вісь  $Oy$  вертикально. Тоді силу  $N$  зручно представити у вигляді горизонтальної і вертикальної складових  $N = N_r + N_v$ . Сили інерції, згідно з визначенням, спрямовані під кутом  $\varphi$  до осі  $Oy$ . Оскільки потяг ні вздовж осі  $Ox$ , ні вздовж осі  $Oy$  прискорення не має, то загальне рівняння руху  $m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{вц} + \vec{F}_{кор}$  в проекції на вісь  $Ox$  має вигляд:

$$0 = N_r - F_{вц} \sin \varphi - F_{кор} \sin \varphi,$$

звідси

$$N_r = F_{вц} \sin \varphi + F_{кор} \sin \varphi.$$

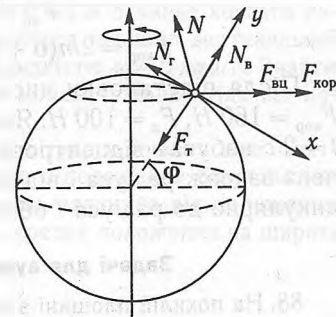


Рис. 35

Враховавши, що  $F_{\text{вц}} = m\omega^2 r$ , а  $r = R \cos \varphi$ , де  $R$  — радіус Землі,  $F_{\text{кор}} = 2m\omega v$ , знаходимо  $N_{r(+)} = m\omega(\omega R \cos \varphi + 2v) \sin \varphi$ . Якщо потяг буде рухатись із сходу на захід, сила Коріоліса змінить свій напрямок на протилежний, тоді:  $N_{r(-)} = m\omega(\omega R \cos \varphi - 2v) \sin \varphi$ . Після підстановки знаходимо:  $F_{r(+)} = 33 \text{ кН}$ ,  $F_{r(-)} = 25 \text{ кН}$ .

3. Платформа обертається по закону  $\varphi = bt^2$  де  $b = 2 \text{ рад/с}^2$ . З її центра вздовж радіуса рухається тіло масою  $m = 5 \text{ кг}$  по закону  $r = \alpha t + kt^2$ , де  $\alpha = 1,5 \text{ м/с}$ ,  $k = 0,5 \text{ м/с}^2$ . Знайти всі сили інерції, що діють на тіло в момент  $t = 2 \text{ с}$ , а також їх напрямки.

**Розв'язання.** В неінерціальній системі, яка обертається нерівномірно, на тіло, що рухається вздовж радіуса, діють такі сили інерції:  $F_{\text{вц}} = m\omega^2 r$  (відцентрова),  $F_{\text{кор}} = 2m\omega v$  (сила Коріоліса),  $F_{\text{н}} = mr\ddot{\varphi}$  (сила, зумовлена нерівномірністю обертання). При цьому враховано, що кут між векторами  $\vec{\omega}$  і  $\vec{v}$ , а також між  $\beta$  і  $\vec{r}$  дорівнює  $\pi/2$ .

З умови задачі знаходимо кутову швидкість обертання платформи  $\omega = \frac{d\varphi}{dt} = 2bt$ , кутове прискорення  $\beta = \frac{d\omega}{dt} = 2b$ , відносну швидкість тіла  $v = \frac{dr}{dt} = \alpha + 2kt$ . Тоді:

$$F_{\text{вц}} = m(2\beta t)^2(\alpha t + kt^2), \\ F_{\text{кор}} = 2m(\alpha + 2kt)2bt, F_{\text{н}} = m(\alpha t + kt^2)2b.$$

Після підстановки числових значень отримуємо:  $F_{\text{вц}} = 1600 \text{ Н}$ ,  $F_{\text{кор}} = 160 \text{ Н}$ ,  $F_{\text{н}} = 100 \text{ Н}$ . Як бачимо, найбільшого значення в момент  $t = 2 \text{ с}$  набуває відцентрова сила інерції. Відцентрова сила направлена вздовж радіуса і від центра. Сили  $F_{\text{кор}}$  і  $F_{\text{н}}$  направлені перпендикулярно до радіуса і обидві в одну сторону.

#### Задачі для аудиторних та домашніх занять

88. На похилій площині з кутом нахилу  $\alpha$  лежить тіло. Знайти найменший коефіцієнт тертя між тілом і похилою площиною у випадку відсутності ковзання тіла, якщо площина рухається вправо рівномірно, рівноприскорено, рівносповільнено.

89. Горизонтально розташований стержень має довжину  $L = 1,2 \text{ м}$  і може обертатись навколо вертикальної осі, що проходить через один з його кінців. На другому кінці стержня розташована мішень. На відстані  $l = 1 \text{ м}$  від мішені знаходиться пружинний пістолет, який при пострілі надає кульці швидкість  $u = 60 \text{ м/с}$  вздовж стержня. При нерухомому стержні кулька попадає в середину мішені. Знайти зміщення місця попадання кульки, якщо стержень почне обертатись з кутовою швидкістю  $\omega = 3 \text{ рад/с}$ . Задачу розв'язати з точки зору спостерігача, що знаходиться на Землі, і спостерігача, пов'язаного зі стержнем.

90. Знайти залежність прискорення вільного падіння від широти місцевості.

91. На широті  $\varphi = 55^\circ$  з висоти  $h = 500 \text{ м}$  починає падати тіло. Знайти зміщення тіла в місці падіння на Землю від вертикалі. Порівняти знайдене відхилення з відхиленням, яке мало б тіло, якщо б воно падало на екваторі. Залежністю прискорення вільного падіння від висоти знехтувати.

92. Горизонтальний диск обертається з кутовою швидкістю  $\omega = 6 \text{ рад/с}$  навколо вертикальної осі. Вздовж діаметра рухається тіло масою  $m = 0,5 \text{ кг}$  зі сталою швидкістю відносно диска  $v = 50 \text{ см/с}$ . Знайти силу, з якою диск діє на тіло в момент, коли воно знаходиться на відстані  $r = 30 \text{ см}$  від осі обертання.

93. Гвинтівку навели на вертикальну риску мішені, яка знаходиться в північному напрямку, і зробили постріл. Знехтувавши опором повітря, знайти, на скільки сантиметрів і в яку сторону полетіла куля, відхилившись від риски. Постріл був зроблений в горизонтальній площині на широті  $\varphi = 60^\circ$ , швидкість кулі  $v = 900 \text{ м/с}$ , відстань до мішені  $S = 1 \text{ км}$ .

94. На  $60^\circ$  північної широти потяг масою  $m = 100 \text{ тон}$  рухається з півдня на північ з швидкістю  $v = 72 \text{ км/год}$  по залізничній колії, яка прокладена вздовж меридіану. Знайти величину і напрямки тої сили, з якою потяг діє на рейки в напрямку, перпендикулярному до руху потягу.

95. З вершини гладенької сфери радіусом  $R = 1 \text{ м}$  починає ковзати невелике тіло масою  $m = 0,3 \text{ кг}$ . Сфера обертається навколо вертикальної осі, що проходить через центр з кутовою швидкістю  $\omega = 6 \text{ рад/с}$ . Знайти відцентрову силу інерції і силу Коріоліса в момент відриву тіла від поверхні сфери.

96. Довжина маятника Фуко  $l = 98 \text{ м}$ , амплітуда коливань кулі маятника  $x_0 = 5 \text{ м}$ . Маятник відпускають з крайнього положення без початкового поштовху. Знайти бокове відхилення кулі маятника від положення рівноваги в момент проходження його через середнє положення на широті  $\varphi = 60^\circ$ .

## § 4. Релятивістська динаміка

В релятивістській динаміці маса і імпульс тіла дорівнюють:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad p = mv = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

де  $m_0$  — маса спокою тіла.

Основне рівняння релятивістської динаміки має вигляд:

$$\frac{dp}{dt} = F, \quad \text{або} \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right) = F.$$

Інертність тіл вздовж швидкості і перпендикулярно до неї різна. Нормальну і тангенціальну складові сили в релятивістській динаміці записують так:

$$F_n = \frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \frac{v^2}{R}, \quad F_\tau = \frac{m_0}{\sqrt{(1-v^2/c^2)^3}} \frac{dv}{dt}.$$

**Методичні вказівки.** Слід пам'ятати, що, коли на тіло діє сила і швидкість його змінюється з часом, маса — є функція часу і виносити її за знак похідної неможна. Основне рівняння динаміки дозволяє знайти силу, що діє на тіло, якщо відома залежність від часу релятивістського імпульсу  $p(t)$ , а також знайти рівняння руху  $r(t)$ , якщо відома сила і початкові умови — швидкість  $v_0$  і положення  $r_0$  тіла в початковий момент часу. Оскільки інертність тіл різна в напрямковій руху і перпендикулярно до нього, то вектор повного прискорення не співпадає з вектором сили. З вектором сили співпадає за напрямком вектор зміни імпульсу тіла.

#### Приклади розв'язування задач.

1. Виходячи з основного рівняння релятивістської динаміки, знайти: а) в яких випадках прискорення тіла співпадає з напрямком діючої на нього сили; б) коефіцієнти пропорційності між силою і прискоренням у випадках, коли напрямок сили перпендикулярний до напрямку швидкості та коли напрямок сили збігається з напрямком швидкості.

**Розв'язання.** Із основного рівняння  $\frac{d}{dt}(mv) = F$ , де  $m(v)$  — релятивістська маса, знаходимо:

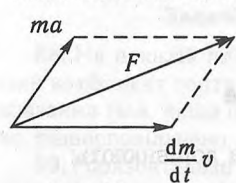


Рис. 36

$$\vec{F} = \left(\frac{dm}{dt}\right)\vec{v} + m\frac{d\vec{v}}{dt}.$$

Якщо зобразити відповідні вектори цього рівняння на малюнку, то видно, що вектор  $\vec{F}$  не співпадає з вектором  $\vec{a}$  (рис. 36).

Вектор прискорення буде співпадати з вектором сили в двох випадках:

а) сила  $F$  перпендикулярна швидкості, тобто змінюється її напрямком. В цьому випадку вектор  $v$  по модулю не змінюється ( $v = \text{const}$ ) і з рівняння руху знаходимо  $\frac{dm}{dt} = 0$ , а формула для прискорення записується так:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m_0} \sqrt{1-v^2/c^2};$$

б) сила  $F$  направлена вздовж напрямку швидкості. Рівняння руху, записане в скалярному вигляді, тому що швидкість змінюється лише за величиною, має вигляд:

$$F = \left(\frac{dm}{dt}\right)v + m\frac{dv}{dt} = \left(\frac{m_0 v^2/c^2}{\sqrt{(1-v^2/c^2)^3}} + \frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right) \frac{dv}{dt}.$$

Звідки прискорення у векторному вигляді дорівнює:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m_0} \sqrt{(1-v^2/c^2)^3}.$$

Тобто прискорення релятивістських тіл співпадає з напрямком діючої сили в двох граничних випадках: коли тіло рівномірно обертається по колу і коли прискорено рухається вздовж прямої.

Але, як видно з отриманих рівнянь, коефіцієнти пропорційності, що мають зміст поперечної та повздовжньої мас, різні. При однакових значеннях сили  $F$  і швидкості  $v$  поперечна сила призводить до більшого прискорення, ніж повздовжня:

$$m_\perp = \frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \quad m_\parallel = \frac{m_0}{\sqrt{(1-v^2/c^2)^3}}.$$

2. Тіло з масою спокою  $m_0$  рухається вздовж осі  $Ox$  за законом  $x = \sqrt{a^2 + c^2 t^2}$ , де  $a$  — деяка стала величина,  $c$  — швидкість світла,  $t$  — час. Знайти силу, що діє на тіло в цій системі відліку.

Дано:  $m_0; a, c, t$   
 $F = ?$

**Розв'язання.** В цій задачі необхідно за відомим кінематичним рівнянням руху знайти силу. Розв'язання такої задачі зводиться до операції диференціювання. Дійсно,  $v = \frac{dx}{dt} = \frac{c^2 t}{\sqrt{a^2 + c^2 t^2}}$ . Релятивістський імпульс дорівнює  $p = mv = \frac{m_0 v}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$ . Підставляючи сюди значення  $v$ , знаходимо  $p_x = \frac{m_0 c^2 t}{a}$ . Тоді силу визначаємо як  $F = \frac{dp}{dt} = \frac{m_0 c^2}{a}$ .

#### Задачі для аудиторних та домашніх занять

97. В скільки разів релятивістська маса частинки, швидкість якої відрізняється від швидкості світла на 0,01%, більша від маси спокою?



## ЗАКОНИ ЗБЕРЕЖЕННЯ В МЕХАНІЦІ

98. Знайти швидкість, при якій релятивістський імпульс більший від нерелятивістського в  $\eta = 2$  рази.

99. Частинка з масою спокою  $m_0$  в момент  $t = 0$  починає рухатись під дією сталої сили  $F$  вздовж прямої лінії. Знайти залежність від часу швидкості частинки та пройденого нею шляху.

100. Релятивістська частинка з масою спокою  $m_0$  і зарядом  $q$  рухається в постійному однорідному магнітному полі, індукція якого  $B$ , по колу радіусом  $R$  в площині, перпендикулярній вектору  $B$ . Знайти кругову частоту обертання частинки по колу.

101. Релятивістський протон з імпульсом  $p_0$  влітає в потужний конденсатор з однорідним поперечним електричним полем, напруженість якого  $E$ , причому  $p_0 \perp E$ . Знайти залежність від часу кута  $\varphi$ , на який протон відхиляється від початкового напрямку, а також поперечну та повздовжню складові швидкості протона.

Закони збереження в механіці дозволяють знайти характеристики руху тіла чи системи тіл без розв'язування динамічних рівнянь, які дають можливість розглянути зміну фізичних процесів в просторі і з часом. За допомогою законів збереження отримують в зручній формі інформацію про рух тіл, яку містять в собі рівняння динаміки. Закони збереження в механіці можна отримати шляхом інтегрування динамічних рівнянь, тому їх називають першими інтегралами руху. Вони відповідають на питання про те, що в послідовності фізичних ситуацій, які описуються рівняннями динаміки, залишається незмінним. Але закони збереження — це не просто результат математичних дій, вони, перш за все, є фундаментальними законами природи і відображають основні властивості простору і часу. Так, закон збереження імпульсу відображає однорідність простору, закон збереження енергії — однорідність часу, закон збереження моменту імпульсу — ізотропність простору.

Тому значення законів збереження виходить далеко за межі механіки, вони є фундаментальними законами фізики.

## § 1. Закон збереження імпульсу

*Імпульсом тіла, або кількістю руху тіла називають величину:*

$$\vec{p} = m\vec{v}.$$

Закон збереження імпульсу для матеріальної точки визначається так: *якщо на точку не діють сили або їх сума дорівнює нулю, то імпульс є величина стала:*

$$\sum_i \vec{F}_i = 0, \quad m\vec{v} = \text{const.}$$

Для замкнутої системи тіл імпульс є величина стала, коли:

$$\sum_i \vec{F}_i^{\text{зовн.}} = 0, \quad \sum_i m_i \vec{v}_i = \text{const.}$$

З використанням поняття центру мас для системи тіл закон збереження імпульсу записується так:

$$\sum_i \vec{F}_i^{\text{зовн.}} = 0, \quad M\vec{v}_c = \text{const},$$

де  $M$  — маса всієї системи,  $\vec{v}_c$  — швидкість центру мас.

Якщо в процесі руху маса тіла змінюється, рівняння динаміки можна отримати із закону збереження імпульсу і воно має вигляд:

$$m \frac{dv}{dt} = F - \mu u, \quad \text{де } m \text{ — змінна маса, } \mu = \frac{dm}{dt} \text{ — швидкість зміни маси,}$$

$u$  — відносна швидкість частинок, які приєднуються, або відокремлюються від даного тіла,  $\mu u$  — реактивна сила.

**Методичні вказівки.** Цінність закону збереження імпульсу при розв'язуванні задач полягає в тому, що він, пов'язуючи початкове і кінцеве значення імпульсу замкнутої системи, дозволяє не розглядати внутрішні сили взаємодії, характер яких дуже складний або взагалі невідомий.

Для розв'язування таких задач рекомендується такий порядок:

а) перш за все в'яснити чи являється система тіл, що нас цікавить, замкнутою або ж чи вона є замкнутою по відношенню до якогось певного напрямку. Слід пам'ятати, якщо в системі виникають процеси, що призводять до досить швидкої зміни імпульсу (вибух, удар) за досить короткий час і в цей же час на тіла діють якісь інші зовнішні сили, наприклад сила тяжіння, то зміною імпульсу, що викликана дією цих сил за досить короткий проміжок часу, можна знехтувати;

б) рекомендується зробити малюнок, на якому зобразити вектори імпульсу;

в) вибрати систему координат і знайти проекції векторів імпульсу на відповідні осі. Осі зручно вибирати так, щоб можна було зробити як найменше розкладань векторів і щоб по відношенню хоча б до однієї з осей система була замкнутою;

г) записати рівняння збереження імпульсу у векторній формі, а потім в проекціях на координатні осі;

д) якщо кількість невідомих фізичних величин більша, ніж кількість рівнянь, то їх слід доповнити формулами кінематики або динаміки і розв'язати систему рівнянь відносно невідомих величин.

Задачі, в яких маса тіл в процесі руху змінюється, можна розв'язувати, скориставшись рівняннями динаміки (формула Мещерського) або законом збереження імпульсу. Математично ці задачі зводяться найчастіше до операції інтегрування з урахуванням початкових умов.

Слід пам'ятати, що імпульс залежить від вибору системи відліку. При переході від однієї системи відліку до іншої імпульс змінюється. В більшості випадків слід користуватись так званою «лабораторною» системою відліку, яка впливає з умов задачі і найчастіше пов'язана із Землею. В неінерціальній системі на тіла діють сили інерції, які є зовнішніми, і тому користуватись законом збереження імпульсу в напрямку дії сили інерції неможливо.

Якщо в умові задачі дана відносна швидкість зближення чи віддалення тіл, то доцільно розглядати явища в такій інерціальній системі відліку, в якій одне з тіл нерухоме. Тоді швидкість іншого тіла буде відносною.

### Приклади розв'язування задач.

1. Снаряд вилітає з дула гармати з швидкістю  $v$  під кутом  $\alpha$  до горизонту. В найвищій точці траєкторії він розривається на два осколки з однаковими масами, один з яких падає вертикально, а другий починає рухатись під кутом  $\beta$  до горизонту в початковому напрямку. Знайти швидкості осколків. Опором повітря в момент розриву знехтувати.

Дано:  $v$ ;  $\alpha$ ;  $m_1 = m_2 = m/2$ ;  $\beta$   
 $v_2$  — ?

**Розв'язання.** На снаряд, що вилітає з дула гармати діє лише сила тяжіння, сила опору повітря дорівнює нулю, тому якщо вибрати осі координат вздовж горизонтального і вертикального напрямків, як це показано на рис. 37, то закон збереження імпульсу буде виконуватись лише для горизонтального напрямку. Для вертикального напрямку система незамкнута, і законом збереження імпульсу можна скористатись лише в момент розриву, коли сила тяжіння за досить короткий проміжок часу не встигає змінити імпульсу. Отже для осі  $Ox$ :

$$mv \cos \alpha = \frac{m}{2} v_2 \cos \beta,$$

звідки

$$v_2 = \frac{2v \cos \alpha}{\cos \beta}$$

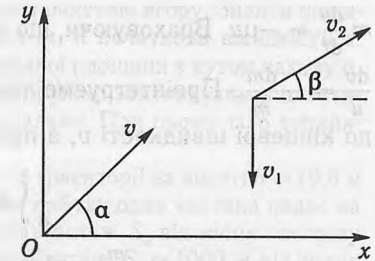


Рис. 37

В найвищій точці вертикальна складова швидкості снаряду дорівнює нулю, тому й проекція імпульсу його на вісь  $Oy$  також дорівнює нулю:

$$0 = -\frac{m}{2} v_1 + \frac{m}{2} v_2 \sin \beta,$$

звідки  $v_1 = v_2 \sin \beta$ , або  $v_1 = 2v \cos \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta$ .

Далі після розриву на осколки діє сила тяжіння, і її імпульс змінюється.

2. Маса метеорологічної ракети в момент запуску  $m_0 = 0,25$  кг, маса заряду в ній  $m_3 = 0,16$  кг. Швидкість виходу продуктів згорання відносно ракети  $u = 30$  м/с. Кожну секунду ракету залишає маса  $\mu = 52,3$  г/с. Нехтуючи опором повітря та зміною сили тяжіння з висотою, знайти швидкість ракети в момент повного згорання заряду.

Дано:  $m_0 = 0,25$  кг,  $m_3 = 0,16$  кг,  $u = 30$  м/с,  $\mu = 52,3$  г/с  
 $v = ?$

**Розв'язання.** Розглянемо два випадки:

а) на ракету не діють зовнішні сили. В даному випадку зручно скористатись рівнянням динаміки тіла, що має змінну масу. На ракету в цьому випадку діє лише реактивна сила. Рівняння руху має вигляд:

$m \frac{dv}{dt} = -\mu u$ . Враховуючи, що  $\mu = \frac{dm}{dt}$ , отримуємо  $m dv = -u dm$ , або

$\frac{dv}{u} = -\frac{dm}{m}$ . Проінтегруємо ліву частину останнього рівняння від нуля до кінцевої швидкості  $v$ , а праву — від  $m_0$  до  $m_k = m_0 - m_3$ :

$$\frac{1}{u} \int_0^v dv = -\int_{m_0}^{m_k} \frac{dm}{m},$$

отримуємо  $v = u \ln \frac{m_0}{m_k}$ ; підставляючи числові значення знаходимо:

$$v = 30 \cdot \ln \frac{0,25}{0,09} = 30,6 \text{ м/с};$$

б) на ракету діє сила тяжіння. Рівняння руху в цьому випадку має вигляд:

$$m \frac{dv}{dt} = -\mu u - mg.$$

Його можна переписати так:

$$m \frac{d}{dt} (v + gt) = -\frac{dm}{dt} u \quad \text{або} \quad d(v + gt) = -\frac{dm}{m} u.$$

Інтегруючи останнє рівняння з врахуванням початкових умов отримуємо:

$$v + gt = u \ln \frac{m_0}{m_k}.$$

Враховуючи, що  $t = \frac{m_3}{\mu}$ , після підстановки числових значень знаходимо  $v = 0,6$  м/с.

#### Задачі для аудиторних та домашніх занять

102. В кульку масою  $m_1$ , що рухається з швидкістю  $v_1$ , ударяється інша кулька масою  $m_2$ , яка доганяє першу в тому ж самому напрямку з швидкістю  $v_2$ . Враховуючи удар абсолютно непружним, знайти швидкість кульок після удару.

103. Частинка масою  $1$  г, що рухається з швидкістю  $\vec{v}_1 = 3\vec{i} - 2\vec{j}$ , абсолютно непружно зіткнулась з іншою частинкою, маса якої  $2$  г і швидкість  $\vec{v}_2 = 4\vec{j} - 6\vec{k}$ . Знайти вектор швидкості частинки, що утворилась після зіткнення, і її модуль, якщо проекції швидкостей  $\vec{v}_1$  і  $\vec{v}_2$  подані в системі СІ.

104. З гармати, що сковазе з похилої площини і проходить шлях  $l$ , стріляють в горизонтальному напрямку. Яка повинна бути швидкість снаряду, для того щоб гармата зупинилась, якщо відомі маса снаряду  $m$ , маса гармати  $M$  і кут  $\alpha$ . Враховувати, що  $m \ll M$ .

105. По похилій площині з кутом  $\alpha$  з'їжджає лижник масою  $M$ . Проїхавши відстань  $l$  від вершини, він стріляє сигнальною ракетою вгору. Знайти швидкість лижника після пострілу. Маса ракети  $m$ , її початкова швидкість  $v$ .

106. Тіло масою  $M$  сковазе без тертя з похилої площини з кутом нахилу  $\alpha$ . Після того як воно пройшло шлях  $l$ , з ним непружно зіштовхується пластилінова кулька масою  $m$ , що летить горизонтально. При цьому тіло зупиняється. Знайти швидкість кульки.

107. Снаряд розривається в найвищій точці траєкторії на висоті  $h = 19,6$  м на дві однакові частини. Через секунду після вибуху одна частина падає на Землю під тим місцем, де був вибух. На якій відстані  $S_2$  від місця пострілу впаде друга частина, якщо перша впала на відстані  $S_1 = 1000$  м від місця пострілу. Опором повітря знехтувати.

108. Два однакових візка масою  $M$  без тертя рухаються паралельними курсами назустріч один одному. Коли вони порівнялись, з кожного з них на інший перестрибують два чоловіки масою  $m$  кожний в напрямку перпендикулярному до руху візків. Внаслідок цього один візок зупинився, а другий продовжував рухатись в попередньому напрямку так, що його швидкість стала  $v$ . Знайти швидкості візків  $v_1$  і  $v_2$ , які були спочатку.

109. Три човни однакової маси  $m$  ідуть в кільватер (один за одним) з однаковою швидкістю  $v$ . Із середнього одночасно в передній та задній кидають зі швидкістю  $u$  відносно човна вантаж масою  $m_1$ . Які будуть швидкості човнів після цього?

110. На краю візка масою  $M$ , що знаходиться в стані спокою, стоять два чоловіки, кожен з яких має масу  $m$ . Нехтуючи тертям, знайти швидкість візка, після того як обидва чоловіки вистрибнуть з однаковою швидкістю  $v$  відносно візка: а) одночасно; б) один за одним. В якому випадку швидкість візка буде більшою і в скільки разів?

111. залізнична платформа в момент  $t = 0$  починає рухатись під дією постійної сили тяги  $F$ . Знайти залежність швидкості платформи від часу, якщо платформа навантажена піском, який висипається через отвір зі сталою швидкістю  $\mu$  (кг/с). В момент  $t = 0$  маса платформи з піском  $m_0$ .

112. На залізничну платформу, що має масу  $m_0$  і починає рухатись під дією постійної сили  $F$ , з нерухомого бункера починає висипатись пісок зі сталою швидкістю  $\mu$  (кг/с) та навантажувати платформу. Знайти залежність швидкості платформи від часу.

113. Ракета підтримується в повітрі на одній і тій же висоті, викидаючи вниз струмінь газів зі швидкістю  $u$ . Знайти: а) скільки часу зможе ракета залишатись на цій висоті, якщо початкова маса палива складає  $\eta$ -у частину її власної маси; б) яку масу  $\mu$  газів кожен секунду повинна викидати ракета, щоб залишатись на цій висоті, якщо початкова маса ракети з паливом дорівнює  $m_0$ .

114. Космічний корабель масою  $m_0$  рухається у відсутності зовнішніх сил зі сталою швидкістю  $v_0$ . Для зміни напрямку руху ввімкнули реактивний двигун, який викидає струмінь газів зі сталою швидкістю  $u$  перпендикулярно до напрямку руху корабля. В кінці роботи двигуна маса корабля стала дорівнювати  $m$ . На який кут  $\alpha$  повернеться корабель за час роботи двигуна?

## § 2. Закон збереження енергії

*Елементарна робота* визначається скалярним добутком сили на елементарне переміщення:

$$dA = \vec{F} d\vec{r}; \quad dA = F dr \cos(\vec{F}, d\vec{r}).$$

Робота змінної сили на даному шляху:

$$A = \int_1^2 F dr = \int_1^2 F_s ds.$$

*Потужність* — робота, що виконується тілом за одиницю часу:

$$N = \frac{F dr}{dt} = Fv.$$

Робота сил поля дорівнює зменшенню *потенціальної енергії* тіла в даному полі:

$$A = -(U_2 - U_1).$$

Зв'язок між силою поля і потенціальною енергією тіла в полі виражається формулою:  $F = -\text{grad } U$ .

$$\text{Кінетична енергія рухомого тіла } T = \frac{mv^2}{2}.$$

Зміна кінетичної енергії дорівнює роботі сил, що діють на тіло:

$$T_2 - T_1 = A.$$

Суму кінетичної і потенціальної енергій називають *повною механічною енергією*:

$$E = T + U.$$

Приріст повної механічної енергії системи дорівнює:

$$E_2 - E_1 = A_{\text{зовн.}} + A_{\text{неконсерв. внутр.}}$$

Закон збереження механічної енергії формулюється так: *якщо система замкнута, а всередині неї діють лише консервативні сили, то повна механічна енергія зберігається*:

$$E = T + U = \text{const.}$$

*Релятивістська кінетична енергія* тіла записується так:

$$T_0 = m_0 c^2 \left( \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1 \right),$$

де  $m_0$  — маса спокою тіла.

Закон взаємозв'язку маси та загальної енергії тіла визначається формулою Ейнштейна:

$$E = mc^2 \text{ або } E = m_0 c^2 + T,$$

де  $m_0 c^2$  — енергія спокою, або власна енергія.

Зв'язок між енергією та імпульсом:

$$E^2 - p^2 c^2 = m_0^2 c^4 = \text{inv.}$$

**Методичні вказівки.** При розв'язуванні задач на закон збереження та зміни механічної енергії перш за все слід установити початковий і кінцевий стани системи, які сили є зовнішніми, які — внутрішніми, які з них консервативні, які неконсервативні, а також форми перетворення енергії. Якщо тіла мають потенціальну енергію, то необхідно вибрати нульовий рівень відліку цієї енергії. Його можна взяти будь-яким, але найзручніше вибирати по їх найменшому значенню.

Розв'язування задач про зіткнення тіл або їх розпад зводяться до розв'язування задач про пружний або непружний удар. В цих випадках користуються двома законами: законом збереження імпульсу і законом збереження або зміни механічної енергії. Слід пам'ятати, що рівняння закону збереження енергії скалярне, а рівняння закону збереження імпульсу — векторне. І тому найчастіше рівняння закону збереження імпульсу записують в проєкціях на координатні осі, які вибирають з міркувань зручності.

В деяких випадках, коли при розв'язуванні задач невідомих величин більше, ніж самих рівнянь, систему слід доповнити динамічними або кінематичними рівняннями.

### Приклади розв'язування задач.

1. По похилій площині довжиною  $l$  і кутом при основі  $\alpha$  зверху вниз починає рухатись тіло масою  $m$ . Після похилої площини воно ще проходить деяку відстань по горизонталі і зупиняється. Коефіцієнт тертя на всьому шляху  $\mu$ . Чому дорівнює кінетична енергія біля основи похилої площини і пройдений шлях по горизонталі?

Дано:  $l, \alpha, m, \mu$   
 $T - ? S - ?$

**Розв'язання.** В початковому положенні тіло має потенціальну енергію  $U$ . Після того як воно з'їжджає з похилої площини, його потенціальна енергія переходить в кінетичну і в теплову, яка, в свою чергу, визначається роботою сил тертя, тому можна записати:

$$U = \frac{mv^2}{2} + A_{\text{тр}_1}.$$

Рухаючись потім по горизонтальній площині до зупинки, тіло кінетичну енергію повністю витрачає на роботу сил тертя  $A_{\text{тр}_2}$ . Якщо за нульовий рівень потенціальної енергії взяти горизонтальну ділянку, то в кінцевому стані тіло взагалі не має механічної енергії. Потенціальна енергія в початковому стані повністю переходить в теплову, яка визначається роботою сил тертя. Отже, закон зміни енергії записуємо так:

$$\Delta U = A_{\text{тр}_1} + A_{\text{тр}_2},$$

де  $\Delta U = U - 0 = mgh$ ,  $h = l \sin \alpha$ ,  $A_{\text{тр}_1} = F_{\text{тр}_1} l$ ,  $A_{\text{тр}_2} = F_{\text{тр}_2} S$ ,  $F_{\text{тр}_1} = \mu N = \mu mg \cos \alpha$ ,  $F_{\text{тр}_2} = \mu mg$ . Тоді  $A_{\text{тр}_1} = \mu mgl \cos \alpha$ ,  $A_{\text{тр}_2} = \mu mgS$ .

Кінетична енергія біля основи похилої площини дорівнює

$$\frac{mv^2}{2} = mgl \sin \alpha - \mu mgl \cos \alpha.$$

Пройдений по горизонталі шлях  $S$  визначається з рівняння  $\frac{mv^2}{2} = A_{\text{тр}_2}$ . Звідки

$$S = \frac{l(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)}{\mu}.$$

2. Потенціальна енергія тіла в деякому полі має вигляд

$$U = \frac{a}{r^2} - \frac{b}{r},$$

де  $a$  і  $b$  — сталі величини, а  $r$  — відстань від центра поля.

Знайти значення  $r_0$ , яке відповідає рівноважному положенню тіла. З'ясувати чи буде воно стійким, а також знайти максимальне значення сили притягування.

**Розв'язання.** Із залежності  $U$  від  $r$  видно, що, коли  $r \rightarrow \infty$ ,  $U \rightarrow 0$ , а при  $r \rightarrow 0$ ,  $U \rightarrow \infty$ .

Для знаходження екстремального значення  $U$  візьмемо першу похідну від  $U$  і прирівняємо її до нуля:

$$\frac{dU}{dr} = -\frac{2a}{r^3} + \frac{b}{r^2} = \frac{1}{r^3}(-2a + br) = 0,$$

звідки  $-2a + br_0 = 0$  або  $r_0 = \frac{2a}{b}$ . При такому значенні  $r$  потенціальна

енергія досягає найменшого значення. Після підстановки його у вираз для потенціальної енергії отримуємо:

$$U_{\text{min}} = -\frac{b^2}{4a}.$$

Тому що енергія мінімальна, то положення тіла буде стійким.

Для розрахунку максимального значення сили слід знайти значення  $r$ , при якому  $\frac{dF}{dr} = 0$ . Але для цього слід знати  $F$  як функцію від  $r$ . Знайдемо її, скориставшись залежністю  $F = -\text{grad } U$ . Оскільки

$$F = -\frac{dU}{dr},$$

а в даному випадку  $\frac{dU}{dr}$  ми вже знайшли, то  $F = \frac{2a}{r^3} - \frac{b}{r^2}$ .

Візьмемо похідну по  $r$  і прирівняємо її до нуля. Тоді отримаємо:

$$\frac{dF}{dr} = -\frac{6a}{r^4} + \frac{2b}{r^3} = \frac{2}{r^4}(-3a + br) = 0.$$

Звідки  $(-3a + br_0) = 0$  або  $r_0 = \frac{3a}{b}$ . При такому  $r_0$  сила дорівнює  $F = -\frac{b^3}{27a^2}$ . Знак мінус показує, що на тіло діє сила притягування.

3. Кулька масою  $m$ , рухаючись зі швидкістю  $v$ , налітає на іншу кульку масою  $m/2$ , що знаходиться в стані спокою. Після пружного удару перша кулька продовжує рухатись під кутом  $\alpha = 30^\circ$  до напрямку початкового руху. Знайти швидкості кульок після удару.

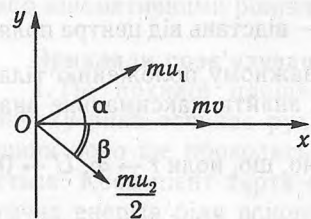


Рис. 38

Дано:  $v, m, m/2, \alpha = 30^\circ$   
 $u_1 - ? u_2 - ?$

Розв'язання. Тому що удар абсолютно пружний і система замкнута, то слід скористатись законом збереження механічної енергії і законом збереження імпульсу:

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{mu_1^2}{2} + \frac{m}{2} \frac{u_2^2}{2}, \quad m\vec{v} = m\vec{u}_1 + \frac{m}{2}\vec{u}_2.$$

Друге рівняння — векторне і його слід спроектувати на координатні осі, які зручно вибрати так: вісь  $Ox$  направимо вздовж імпульсу  $mv$ , а вісь  $Oy$  перпендикулярно до неї. Тоді, як видно з рис. 38, рівняння проєкцій мають вигляд:

$$mv = mu_1 \cos \alpha + \frac{m}{2} u_2 \cos \beta, \quad 0 = mu_1 \sin \alpha - \frac{m}{2} u_2 \sin \beta.$$

Разом з рівнянням закону збереження енергії маємо три рівняння з трьома невідомими. Розв'язуючи їх з врахуванням, що  $\alpha = 30^\circ$ , отримуємо квадратне рівняння відносно  $u_1$ :

$$3u_1^2 - 2\sqrt{3}vu_1 + v^2 = 0.$$

З цього рівняння знаходимо  $u_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}v$ , а потім і  $u_2 = \frac{2\sqrt{3}}{3}v$ .

4. На елементарну частинку, що має масу спокою  $m_{01}$  і не рухається, налітає зі швидкістю близькою до швидкості світла друга частинка, кінетична енергія якої  $T_2$ , а маса спокою  $m_{02}$ . Після зіткнення частинки злипаються і рухаються як одне ціле. Знайти масу утвореної частинки. При яких умовах ця маса дорівнювала б сумі мас спокою окремих частинок?

Дано:  $m_{01}, m_{02}, T_2, p_1 = 0$   
 $M_0 - ?$

Розв'язання. Запишемо закони збереження енергії і імпульсу для релятивістського випадку:

$$E = E_1 + E_2 = m_{01}c^2 + m_{02}c^2 + T, \quad \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p},$$

де  $p_1 = 0, \vec{p}_2 = \vec{p}$ .

Використовуючи зв'язок між енергією та імпульсом, знайдемо масу утвореної частинки:  $E^2 - p^2c^2 = M_0^2c^4$ , звідси

$$M_0 = \sqrt{\frac{E^2}{c^4} - \frac{p^2}{c^2}}.$$

Імпульс нової частинки знайдемо з формули зв'язку імпульсу і кінетичної енергії для другої частинки  $p = p_2 = \frac{1}{c} \sqrt{T_2(T_2 + 2m_{02}c^2)}$ . Тоді, підставляючи значення  $E$  і  $p$  у формулу для  $M_0$ , знаходимо

$$M_0 = \sqrt{(m_{01} + m_{02})^2 + \frac{2T_2m_{01}}{c^2}}.$$

$M_0 = m_{01} + m_{02}$ , якщо виконується умова:

$$\frac{T_2m_{01}}{c^2} \ll (m_{01} + m_{02})^2.$$

#### Задачі для аудиторних та домашніх занять

115. Тіло масою  $m$  повільно витягли на вершину гори, діючи на нього в кожен момент часу силою, що направлена по дотичній до траєкторії (рис. 39). Знайти роботу цієї сили, якщо висота гори  $h$ , довжина її основи  $l$ , коефіцієнт тертя  $\mu$ .

116. Однорідний ланцюг довжиною  $2\text{ м}$  лежить на столі. Коли  $0,18\text{ м}$  цього ланцюга звисає зі стола, він починає ковзати вниз. Маса ланцюга  $5\text{ кг}$ . Коефіцієнт тертя між ним і столом  $0,1$ . Яку роботу виконують сили тертя при повному сковзанні ланцюга зі стола?

117. Санки, що рухаються по горизонтальній засніженій дорозі зі швидкістю  $v$ , виїжджають на асфальт. Враховуючи, що довжина полозок саней  $l$ , а коефіцієнт тертя на асфальті  $\mu$ , знайти шлях  $S$ , що пройшли санки по асфальту, якщо відомо, що  $S > l$ .

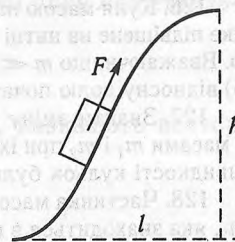


Рис. 39

118. Гиря, яку поклали зверху на пружину, стискує її на  $x_0 = 1$  мм. На скільки стисне гиря цю ж саму пружину, якщо її підняти на висоту  $h = 0,2$  м над пружиною і кинути вниз з початковою швидкістю  $v = 1$  м/с?

119. Знайти відношення потенціальних енергій деформації двох пружин з коефіцієнтами пружності  $k_1$  і  $k_2$  в двох випадках: а) пружини з'єднані послідовно і розтягуються тягарем  $P$ ; б) пружини висять паралельно, при цьому тягар  $P$  підвішують в такій точці, що обидві пружини розтягуються на одну і ту ж величину.

120. З похилої площини з виключеним двигуном рівномірно, маючи швидкість  $15$  м/с, з'їжджає автомобіль масою  $1,5 \cdot 10^3$  кг. Знайти потужність автомобіля на тій же похилій площині з кутом  $\alpha = 15^\circ$ , коли він буде з тією ж швидкістю підніматись вгору.

121. Тіло масою  $m$  кинули з початковою швидкістю  $v_0$  під кутом  $\alpha$  до горизонту. Нехтуючи опором повітря, знайти потужність і роботу сили тяжіння через  $t$  секунд після початку руху. Залежність показати графічно.

122. Знайти потенціал та напруженість гравітаційного поля, створеного однорідною кулею масою  $M$  і радіусом  $R$  в залежності від відстані  $r$  до її центра.

123. Показати, що кінетична енергія, яку необхідно надати тілу, щоб воно залишило межі земного тяжіння, в два рази більша за кінетичну енергію, яку необхідно надати тілу, щоб вивести його на кругову орбіту штучного супутника Землі.

124. Тіло ковзає вниз з висоти  $h$  по похилому жолобу, що переходить в «мертву петлю» радіусом  $R$ . На якій висоті  $h'$  тіло випаде з петлі?

125. Тіло масою  $m_1$  ковзає по похилому жолобу, що переходить в «мертву петлю» радіусом  $r$ . В найнижчій точці петлі воно пружно ударяється з тілом масою  $m_2$ , що знаходиться в стані спокою. З якої висоти  $H$  почне рухатись перше тіло, якщо після удару друге тіло відривається від петлі на висоті  $h_0$ , а перше, піднявшись по жолобу, знову ковзає по ньому і відривається в тій же точці, що і друге тіло? Яке відношення мас цих тіл? Тертям знехтувати.

126. Куля масою  $m$ , яка летить горизонтально, застрягла в тілі масою  $M$ , яке підвішене на нитці довжиною  $l$ . Внаслідок цього нитка відхилилась на кут  $\varphi$ . Вважаючи, що  $m \ll M$ , знайти: а) швидкість кулі перед попаданням в тіло; б) відносну долю початкової кінетичної енергії кулі, яка перейшла в тепло.

127. Знайти зміну кінетичної енергії замкнутої системи з двох кульок з масами  $m_1$  і  $m_2$  при їх абсолютно непружному зіткненні, якщо до зіткнення швидкості кульок були  $v_1$  і  $v_2$ .

128. Частинка масою  $m_1$  абсолютно пружно зіткнулась з частинкою маси  $m_2$ , яка знаходиться в стані спокою. Яку частину кінетичної енергії втратила перша частинка, якщо: а) вона відскочила під прямим кутом до свого початкового напрямку руху; б) зіткнення лобове?

129. Частинка  $1$  абсолютно пружно зіштовхується з частинкою  $2$ , що покоїться. Знайти відношення їх мас, якщо: а) зіткнення лобове і частинки розлетілись в протилежних напрямках з однаковими швидкостями; б) час-

тинки розлетілись симетрично по відношенню до початкового напрямку руху частинки  $1$  і кут між їх напрямками  $\alpha = 60^\circ$ .

130. Куля, що рухається пружно, зіштовхується з другою кулею такої ж маси, яка знаходиться в стані спокою. При зіткненні кут між прямою, що проходить через центри, і напрямком початкового руху кулі, що рухалась,  $\alpha = 45^\circ$ . Вважаючи кулі гладкими, знайти долю кінетичної енергії кулі, що рухалась, яка перейшла в потенціальну в момент найбільшої деформації.

131. Снаряд, який має швидкість  $v = 500$  м/с, розривається на три однакових осколки так, що кінетична енергія системи збільшується в  $\eta = 1,5$  рази. Яку максимальну швидкість може мати один із осколків?

132. Частинка масою  $m$  зіштовхується з іншою частинкою масою  $M$ , що знаходиться в стані спокою. Внаслідок цього частинка  $m$  відхиляється на кут  $90^\circ$ , а частинка  $M$  відскочила під кутом  $\varphi = 30^\circ$  до початкового напрямку частинки  $m$ . На скільки відсотків і як змінилась кінетична енергія системи після зіткнення, якщо  $M/m = 5$ ?

133. Три однакові пружні кульки висять на трьох паралельних нитках однакової довжини, доторкаючись одна до одної. Одну з кульок відхиляють у напрямку, перпендикулярному до прямої, що з'єднує центри двох інших, а потім відпускають, і вона, маючи швидкість  $v$ , співударяється з ними. Які швидкості кульок після удару?

134. Яку роботу потрібно виконати, щоб збільшити швидкість частинки з масою спокою  $m_0$  від  $0,6c$  до  $0,8c$ . Порівняйте отриманий результат зі значенням в нерелятивістському випадку.

135. Частинка масою  $m_0$ , що рухається зі швидкістю  $v = 0,8c$ , непружно співударяється з такою ж частинкою, що знаходиться в стані спокою. Знайти масу, швидкість і кінетичну енергію частинки, яка утворилась внаслідок удару.

### § 3. Закон збереження моменту імпульсу

*Моментом імпульсу, або моментом кількості руху матеріальної точки називається*

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}.$$

*Моментом сили, що діє на матеріальну точку, називають вектор*

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}.$$

*Рівняння моментів для матеріальної точки*

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}.$$

Закон збереження моменту імпульсу для матеріальної точки формулюється так: *якщо момент сили, що діє на матеріальну точку,*

дорівнює нулю, то її момент імпульсу є величина стала. Для системи матеріальних точок момент імпульсу не змінюється при будь-яких процесах, що відбуваються в системі, якщо сумарний момент зовнішніх сил дорівнює нулю:  $M = 0$ ,  $\vec{L} = \text{const}$ .

**Методичні вказівки.** Законом збереження моменту імпульсу в обертальному русі, як і законом збереження імпульсу в поступальному русі, найзручніше користуватись в тому випадку, коли характер сил, що діють всередині системи, досить складний або взагалі ці сили невідомі. Цей закон дає можливість виключити будь-які сили, що діють всередині системи, в тому числі і сили тертя.

Перш за все слід впевнитись, що момент зовнішніх сил або сума моментів зовнішніх сил дорівнює нулю. В деяких задачах момент сили може дорівнювати нулю не для всіх напрямків, тобто система по відношенню до моменту сили буде частково ізольована, тоді закон можна застосовувати відносно того напрямку, де момент сили дорівнює нулю. Слід пам'ятати, що в центральному силовому полі (при відсутності інших зовнішніх сил) момент імпульсу системи відносно центра є величина стала.

Якщо використання закону збереження моменту імпульсу недостатньо для розв'язування задачі, слід скористатись іншими законами збереження, якщо вони виконуються в даному випадку, або іншими фізичними величинами та формулами, що характеризують обертальний рух, наприклад кінематичними рівняннями.

#### Приклади розв'язування задач.

1. Частинка масою  $m$  рухається по колу радіусом  $R$  в площині  $(x, y)$  так, що центр кола співпадає з початком координат. Модуль нормального прискорення залежить від часу по закону  $a_n = bt^4$ , де  $b$  — стала величина. Знайти момент імпульсу частинки і момент сили в залежності від часу.

$$\text{Дано: } m, R, a_n = bt^4 \\ L = ? \quad M = ?$$

**Розв'язання.** Із означення момент імпульсу точки  $\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v}$ . По модулю  $L = rmv \sin \alpha$ . В даній задачі кут між напрямком швидкості та радіусом  $\alpha = \pi/2$  і тому  $L = Rmv$ . Швидкість  $v$  знаходимо із формули зв'язку нормального прискорення та лінійної швидкості  $a_n = \frac{v^2}{R}$ , звідки  $v = \sqrt{a_n R}$ . Після підстановки виразу  $a_n = bt^4$  для швидкості отримаємо  $v = t^2 \sqrt{bR}$ , а момент імпульсу  $L = Rmt^2 \sqrt{bR}$ . Напрямок

$L$  визначається із векторного добутку. В даному випадку  $L$  спрямований вздовж осі  $Oz$ .

Момент сили визначається за формулою  $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ . Модуль моменту сили  $M = rF \sin \alpha$ . В даному випадку на тіло діє сила, яку можна розкласти на дві складові: нормальну і тангенціальну. Момент сили, зумовлений нормальною складовою, дорівнює нулю, тому що  $\alpha = 0$ . А момент тангенціальної складової сили можна визначити так:

$$M = RF_\tau, \text{ де } F_\tau = ma_\tau = m \frac{dv}{dt}. \text{ Оскільки } v = t^2 \sqrt{bR}, \text{ то } \frac{dv}{dt} = 2t \sqrt{bR}.$$

Тоді  $F_\tau = 2tm\sqrt{bR}$ , а момент сили  $M = 2mRt\sqrt{bR}$ . Направлений цей момент також вздовж осі  $Oz$ .

2. Через вертикально розташовану трубу протягнута нитка, на кінці якої підвішена кулька, яка може обертатись по колу навколо осі, що збігається з віссю труби. В початковий момент кулька рухається зі швидкістю  $v_1$  по колу радіусом  $r_1$ . Нитку починають втягувати в трубу, внаслідок чого кулька починає рухатись по спіралі. Визначити швидкість кульки в момент, коли відстань від осі дорівнює  $r_2$ .

$$\text{Дано: } v_1, r_1, r_2 \\ v_2 = ?$$

**Розв'язання.** Під час руху кульки по спіралі сила, що діє на неї, змінюється, і тому розв'язувати цю задачу за допомогою рівнянь руху досить складно. Значно простіше її можна розв'язати, використавши закон збереження моменту імпульсу. Тому що сила, що діє на кульку, спрямована вздовж радіуса, то її момент дорівнює нулю, отже момент імпульсу зберігається. Тому  $r_1 m v_1 = r_2 m v_2$ . Звідки  $v_2 = \frac{r_1 v_1}{r_2}$ .

#### Задачі для аудиторних та домашніх занять

136. Знайти момент імпульсу штучного супутника Землі масою  $m = 1,0$  тони, який рухається по коловій орбіті радіусом  $r = 1,1R_z$  відносно центра орбіти.

137. Сила  $F = 1$  Н прикладена вздовж ребра до куба, сторона якого  $a = 0,2$  м. Знайти момент цієї сили відносно його вершин.

138. Момент імпульсу частинки відносно деякої точки  $O$  змінюється з часом за законом  $L = \vec{a} + bt^2$ , де  $\vec{a}$  і  $b$  — постійні і взаємоперпендикулярні вектори. Знайти відносно точки  $O$  момент сили  $M$ , що діє на частинку в той момент часу, коли кут між векторами  $L$  і  $M$  становить  $45^\circ$ .

139. Тіло масою  $m$  кинути під кутом  $\alpha$  до горизонту з початковою швидкістю  $v_0$ . Знайти модуль вектора моменту імпульсу тіла відносно початкової точки руху в залежності від часу. Розрахуйте момент імпульсу у вершині траєкторії, якщо  $m = 130$  г,  $\alpha = 45^\circ$ ,  $v_0 = 25$  м/с. Опором повітря знехтувати.



## ДИНАМІКА ТВЕРДОГО ТІЛА

## § 1. Рівняння руху твердого тіла

Моментом інерції матеріальної точки відносно осі обертання називають величину  $I = mr^2$ , де  $m$  — маса точки, а  $r$  — відстань від осі обертання. Момент інерції твердого тіла відносно осі обертання є сума моментів інерції матеріальних точок, які складають тверде тіло:

$$I = \int_{(r)} r^2 \rho dV.$$

Для деяких тіл масою  $m_0$  момент інерції відносно осі симетрії можна розрахувати по таким формулам:

порожній циліндр —  $I = m_0 R^2$ ;

суцільний циліндр —  $I = \frac{1}{2} m_0 R^2$ ;

куля —  $I = \frac{2}{5} m_0 R^2$ .

Момент інерції  $I$  тіла відносно будь-якої осі і момент інерції  $I_0$  тіла відносно осі, що проходить через центр мас і паралельно даній, зв'язані співвідношенням Штейнера:

$$I = I_0 + m_0 a^2,$$

де  $m_0$  — маса тіла, а  $a$  — відстань між осями.

Основне рівняння динаміки обертального руху твердого тіла записують так:

$$I \ddot{\beta} = \sum_i \vec{M}_i,$$

де  $\ddot{\beta}$  — кутове прискорення, а  $\sum_i \vec{M}_i$  — результуючий момент всіх зовнішніх сил.

**Методичні вказівки.** Передусім необхідно встановити кількість тіл, що рухаються, розглянути, які з них приймають участь в поступальному русі, а які в обертальному. В деяких випадках, наприклад

140. Кулька масою  $m$ , що прив'язана на нитці довжиною  $l$  до стелі в точці  $O$ , рухається по горизонтальному колу зі сталою кутовою швидкістю  $\omega$ . Відносно яких точок момент імпульсу залишається сталою величиною? Знайти модуль приросту вектора моменту імпульсу кульки відносно точки  $O$  за половину оберту.

141. На масивний нерухомий блок радіусом  $R$  намотана нитка, до вільного кінця якої прикріплений тягар масою  $m$ . В момент  $t = 0$  під дією сили тяжіння на тягар нитка почала розмотуватись. Знайти момент імпульсу тягара в залежності від часу.

142. На гладкій горизонтальній поверхні по спіралі рухається невелике тіло масою  $m$ , прив'язане до нитки, другий кінець якої втягують в отвір з постійною швидкістю. Знайти силу натягу нитки в залежності від відстані  $r$  тіла від отвору, якщо при  $r = r_0$  кутова швидкість тіла дорівнювала  $\omega_0$ .

143. Дві однакові кулі, що зв'язані ниткою, можуть ковзати вздовж гладенького горизонтально розташованого металевого стержня. Кулі знаходяться на однаковій відстані  $r_0$  від середини стержня. Стержень з кулями змушують обертатись відносно вертикальної осі, що проходить через його середину з кутовою швидкістю  $\omega_0$ . Як зміниться кутова швидкість, якщо перепалити нитку?

144. Тіло рухається в центральному полі сил з центром в точці  $O$  вздовж криволінійної траєкторії, як показано на рис. 40. Знайти швидкість  $v_2$ , якщо відомі  $v_1$ ,  $r_1$ ,  $r_2$  і кут  $\alpha$ .

145. Запишіть співвідношення між швидкостями  $v_1$  і  $v_2$  супутника, що рухається по еліптичній орбіті в точках максимального і мінімального віддалення його від планети.

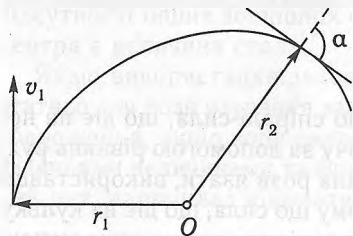


Рис. 40

146. Знайти повну механічну енергію планети масою  $m$ , що рухається навколо Сонця масою  $M$  по еліпсу з великою піввіссю  $a$ .

при скочуванні з похилої площини, одне і теж тіло одночасно приймає участь як в поступальному, так і в обертальному русі.

При необхідності можна зробити малюнок, на якому показати діючі сили і моменти сил, визначити їх напрямки, а також до яких дій вони призводять. Потім записати рівняння рухів: для тіл, що рухаються поступально, — другий закон Ньютона, для тіл, що обертаються, — рівняння обертального руху. Якщо тіло одночасно приймає участь в поступальному і обертальному русі, то для нього слід записати два рівняння: поступального руху для центра мас і обертального руху відносно осі, що проходить через центр мас, або одне рівняння обертального руху відносно осі миттєвого обертання. Крім рівнянь динаміки, необхідно також записати рівняння зв'язку між кінематичними характеристиками поступального та обертального рухів. В більшості випадків сукупність записаних рівнянь — є замкнута система рівнянь руху, з якої і визначають невідомі величини.

Слід пам'ятати, що вектори, які характеризують обертальний рух, направлені в більшості випадків вздовж осі обертання. Це дозволяє спростити запис рівнянь обертального руху, спроектувавши їх на цю вісь.

#### Приклади розв'язування задач.

1. На ступеневий циліндричний блок намотані в протилежних напрямках дві нитки, навантажені масами  $m_1$  і  $m_2$ . Знайти кутове прискорення блоку, а також сили натягу ниток, якщо відомі момент інерції  $I$  блоку і радіуси сходинок блоку  $R$  і  $r$ .

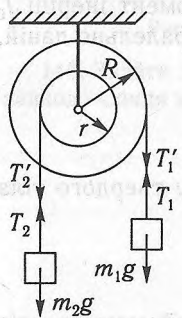


Рис. 41

Дано:  $m_1, m_2, R, r, I$   
 $\beta = ? T_1 = ? T_2 = ?$

**Розв'язання.** В механічному русі приймають участь три тіла: тягарці  $m_1$  і  $m_2$ , які рухаються поступально, і блок — обертаючись. На тягарці, як видно із рис. 41, діють сили тяжіння і сили натягу ниток. Нехай тягарець  $m_1$  опускається, тоді тягарець  $m_2$  буде підніматись. Рівняння поступального руху для обох тіл мають вигляд:

$$m_1 a_1 = m_1 g - T_1, \quad m_2 a_2 = T_2 - m_2 g.$$

Обертальний рух блоку зумовлений дією моментів сил  $T_1'$  і  $T_2'$  відповідно рівних  $T_1' R$  і  $T_2' r$ . Моменти цих сил направлені вздовж осі обертання і в протилежні сторони. Вважаємо, що обертання відбувається за годинниковою стрілкою, тоді за до-

датний напрямок доцільно взяти напрямком моменту сили  $T_1' R$ . Рівняння обертального руху для блоку має вигляд  $I\beta = T_1' R - T_2' r$ , а тому що  $T_1' = T_1$ , а  $T_2' = T_2$ , то рівняння можна переписати таким чином:

$$I\beta = T_1 R - T_2 r.$$

Система трьох динамічних рівнянь має п'ять невідомих величин:  $a_1, a_2, T_1, T_2, \beta$ . Доповнимо систему рівняннями кінематичного зв'язку між поступальним і обертальним рухами:  $a_1 = \beta R, a_2 = \beta r$ .

Після цього отримуємо замкнуту систему, з якої легко знайти невідомі величини:

$$\beta = \frac{m_1 R - m_2 r}{I + m_1 R^2 + m_2 r^2} \cdot g, \quad T_1' = m_1(g - \beta R), \quad T_2' = m_2(g + \beta r).$$

З відповіді видно, що припущення про обертання блоку за годинниковою стрілкою виконується, коли  $m_1 R > m_2 r$ , в протилежному випадку обертання буде відбуватись проти годинникової стрілки.

2. З похилої площини, що утворює кут  $\alpha$  з горизонтом, скочується без ковзання циліндр. Знайти прискорення центра мас циліндра та силу тертя. При якому куті почнеться ковзання?

Дано:  $\alpha$   
 $a = ?$

**Розв'язання.** Циліндр при скочуванні з похилої площини (рис. 42) одночасно приймає участь у двох рухах: обертальному навколо осі, що проходить через центр мас, і поступальному. На циліндр діють сили:  $mg$  — сила тяжіння,  $N$  — сила реакції опори,  $F_{\text{тр}}$  — сила тертя. Моменти перших двох сил відносно осі, що проходить через центр мас, дорівнюють нулю. А момент сили тертя призводить до обертання при скочуванні циліндра з похилої площини. Запишемо два динамічні рівняння поступального руху центра мас і обертального руху циліндра:

$$ma = mg \sin \alpha - F_{\text{тр}}, \quad I\beta = RF_{\text{тр}}.$$

Ці два рівняння справедливі завжди, незалежно від того, рухається циліндр з ковзанням чи без ковзання. Якщо циліндр рухається без ковзання, то між кутовим прискоренням і лінійним буде залежність  $a = \beta R$ .

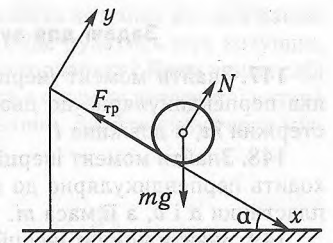


Рис. 42

Тоді із системи трьох рівнянь отримуємо:

$$a = \frac{g \sin \alpha}{1 + \frac{I}{mR^2}}.$$

Таким чином, прискорення залежить від кута  $\alpha$  і відношення  $I/(mR^2)$ . Для суцільного циліндра  $I = \frac{1}{2}mR^2$  і тоді  $a = \frac{2}{3}g \sin \alpha$ . Для порожнього всередині циліндра  $I = mR^2$  і  $a = \frac{1}{2}g \sin \alpha$ .

Із системи рівнянь можна знайти силу тертя:

$$F_{\text{тр}} = \frac{mg \sin \alpha}{1 + \frac{I}{mR^2}}.$$

Сила тертя пропорційна  $\sin \alpha$  і залежить від відношення  $mR^2/I$ . Якщо вважати, що сила тертя при скочуванні, як і сила тертя спокою, має максимальне значення, тоді скочування без ковзання буде, коли  $F_{\text{тр}} < \mu mg \cos \alpha$  або  $\text{tg} \alpha < \mu(1 + mR^2/I)$ . Якщо ж  $\text{tg} \alpha > \mu(1 + mR^2/I)$  — скочування буде з ковзанням. У випадку суцільного циліндра умовою ковзання є  $\text{tg} \alpha > 3\mu$ .

#### Задачі для аудиторних та домашніх занять

147. Знайти момент інерції тонкого однорідного стержня відносно осі, яка перпендикулярна до нього і проходить через його кінець, якщо маса стержня  $m$ , а довжина  $l$ .

148. Знайти момент інерції прямокутної пластинки відносно осі, що проходить перпендикулярно до площини через одну з вершин, якщо сторони пластинки  $a$  і  $b$ , а її маса  $m$ .

149. Знайти момент інерції суцільного конуса відносно осі симетрії, якщо маса його  $m$ , а радіус основи  $R$ .

150. Виходячи з формули для моменту інерції однорідної кулі, знайти момент інерції тонкої сферичної кулі масою  $m$  і радіусом  $R$  відносно осі, що проходить через її центр.

151. На однорідний суцільний циліндр масою  $M$  і радіусом  $R$  намотана легка нитка, до кінця якої прикріплено тіло масою  $m$ . В момент  $t = 0$  система почала рухатись. Нехтуючи тертям, знайти залежність від часу кутової швидкості і кута повороту циліндра.

152. Дві тонкі нитки одним кінцем намотані на вісь радіуса  $r$  диска Максвелла, а другим кінцем прикріплені до горизонтальної штанги. Коли диск розкручується, штангу піднімають так, що він залишається на одній і тій же висоті. Маса диска з віссю  $m$ , момент інерції  $I$ . Знайти натяг нитки та прискорення штанги.

153. Однорідний циліндр масою  $m = 8 \text{ кг}$  і радіусом  $R = 1,3 \text{ см}$  (рис. 43) в момент  $t = 0$  починає спускатись вниз під дією сили тяжіння. Нехтуючи масою нитки, знайти натяг кожної нитки та кутове прискорення циліндра.

154. З яким прискоренням буде спускатись котушка масою  $M$  і моментом інерції  $I$  відносно осі симетрії, яка підвішена на двох нитках? На котушку намотані ще дві нитки, до яких, як показано на рис. 44, прикріплений вантаж масою  $m$ . Визначити натяг ниток, якщо відомий  $r$  — радіус котушки.

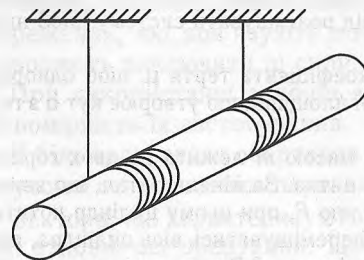


Рис. 43

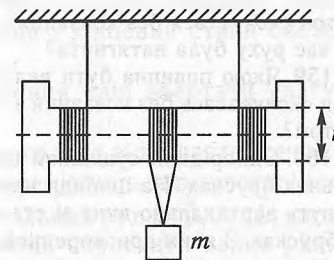


Рис. 44

155. Знайти прискорення, з яким будуть спускатись два однакових диски приладу, що зображений на рис. 45, якщо відомі їх моменти інерції  $I$  і маси  $m$ , а також радіуси  $r$  валиків, на які намотані нитки.

156. На горизонтальній площині (рис. 46) лежить котушка ниток з масою  $m$  і моментом інерції  $I$ . З яким прискоренням буде рухатись вісь котушки, якщо тягнути за нитку з силою  $F$  під кутом  $\alpha$  до горизонту? Яким чином слід тягнути за нитку для того, щоб котушка рухалась в сторону натягнутої нитки? Котушка рухається по поверхні стола без ковзання. Знайти силу тертя між котушкою і столом. Відомі також  $R$  і  $r$ .

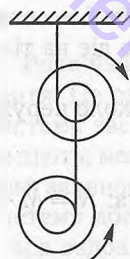


Рис. 45

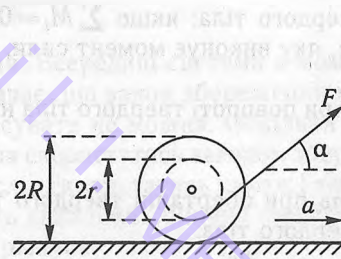


Рис. 46

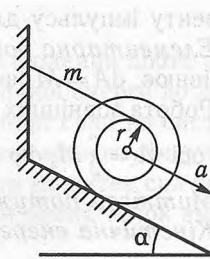


Рис. 47

157. На гладенькій похилій площині, яка складає кут  $\alpha$  з горизонтом (рис. 47), знаходиться котушка з нитками. Маса котушки  $m = 200 \text{ г}$ , її момент інерції відносно власної осі  $I = 0,45 \text{ г} \cdot \text{м}^2$ , радіус намотаного шару ниток  $r = 3 \text{ см}$ . Знайти прискорення осі котушки.

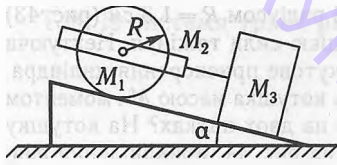


Рис. 48

158. Каток складається із суцільного циліндра радіусом  $R$  і масою  $M_1$  та рами масою  $M_2$ . До рами катка, як показано на рис. 48, ниткою прив'язана маса  $M_3$ . Вся система починає рухатись з похилої площини, що утворює кут  $\alpha$  з горизонтом. Знайти прискорення системи, якщо відомий коефіцієнт тертя  $\mu$  між тілом  $M_3$  і поверхнею

(каток скочується без ковзання). Як слід розташувати систему, щоб нитка під час руху була натягнута?

159. Якою повинна бути величина коефіцієнта тертя  $\mu$ , щоб однорідна куля скочувалась без ковзання з похилої площини, що утворює кут  $\alpha$  з горизонтом?

160. Однорідний суцільний циліндр масою  $m$  лежить на двох горизонтальних брусках. На циліндр намотана нитка. За кінець нитки, що звисає, тягнуть вертикально вниз зі сталою силою  $F$ , при цьому циліндр котиться по брусках. З яким прискоренням буде переміщуватись вісь циліндра, якщо коефіцієнт тертя між ним і брусками дорівнює  $\mu$ ? Знайти максимальне значення сили  $F$ , при якому циліндр буде котитись по брусках без ковзання.

## § 2. Момент імпульсу та енергія твердого тіла

Моментом імпульсу твердого тіла називають величину

$$\vec{L} = I \cdot \vec{\omega},$$

де  $I$  — момент інерції, а  $\vec{\omega}$  — кутова швидкість.

Із рівняння моментів  $\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum \vec{M}_i$  отримують закон збереження моменту імпульсу для твердого тіла: якщо  $\sum \vec{M}_i = 0$ , то  $\vec{L} = \text{const}$ .

Елементарна робота, яку виконує момент сили, що діє на тіло, дорівнює:  $dA = M d\varphi$ .

Робота зовнішніх сил при повороті твердого тіла навколо нерухомої осі  $A = \int M_z d\varphi$ .

Миттєва потужність при обертанні твердого тіла:  $N = \vec{M} \cdot \vec{\omega}$ .

Кінетична енергія твердого тіла:

$$\text{при обертальному русі } T = \frac{I\omega^2}{2};$$

$$\text{при плоскому русі } T = \frac{I\omega^2}{2} + \frac{mv_c^2}{2}, \text{ де } v_c \text{ — швидкість центру мас.}$$

Кутова швидкість прецесії гіроскопа визначається з рівняння

$$\vec{\Omega} \times \vec{L} = \vec{M}.$$

**Методичні вказівки.** В задачах цього параграфу, як і в попередньому, розглядається обертальний рух твердого тіла навколо осі або плоский рух, де вісь обертання рухається паралельно сама собі. Але при розв'язуванні цих задач доцільно використовувати не «силовий метод» (основні рівняння динаміки, тобто закони Ньютона), а закони збереження, тому що в більшості задач сили взаємодії і їх моменти сил мають досить складний характер або ж взагалі невідомі. Закони збереження, які пов'язують початковий і кінцевий стани системи, дозволяють виключити ці сили.

При використанні законів збереження слід звертати увагу на правомірність їх застосування.

В більшості задач обертання твердого тіла відбувається навколо нерухомої осі або ця вісь паралельно переміщується в просторі і тому всі вектори, що характеризують обертальний рух  $\vec{\omega}$ ,  $\beta$ ,  $\vec{M}$ ,  $\vec{L}$ , направлені вздовж осі обертання. Це дозволяє спростити запис рівнянь і робити його в скалярному вигляді.

### Приклади розв'язування задач.

1. На горизонтальний диск, що обертається навколо вертикальної осі симетрії з кутовою швидкістю  $\omega_1$ , падає другий диск, що обертається навколо тієї ж самої осі з кутовою швидкістю  $\omega_2$ . Моменти інерції дисків відносно осі відповідно дорівнюють  $I_1$  і  $I_2$ . Обидва диски при ударі зчіплюються один з одним. На скільки зміниться кінетична енергія системи після падіння диску? Чим пояснюється зміна енергії?

$$\text{Дано: } \omega_1, \omega_2, I_1, I_2 \\ \Delta T = ?$$

**Розв'язання.** Всередині системи в момент зчеплення діють сили тертя. Це означає, що закон збереження механічної енергії до даної системи застосувати не можна. Оскільки зовнішні сили на систему не діють, можна скористатись законом збереження моменту імпульсу. Цим законом слід скористатись також і тому, що характер сил тертя системи досить складний. Лінійна швидкість окремих точок змінюється вздовж радіуса.

Використовуючи закон збереження моменту імпульсу до і після зчеплення за умови, що кутові швидкості мають однаковий напрямок, можна записати:  $I_1\omega_1 + I_2\omega_2 = (I_1 + I_2)\omega$ . Звідси знаходимо кінцеву кутову швидкість

$$\omega = \frac{I_1\omega_1 + I_2\omega_2}{I_1 + I_2}$$

Зміну кінетичної енергії можна визначити як різницю її значень в початковому і кінцевому станах системи

$$\Delta T = \frac{I_1 \omega_1^2}{2} + \frac{I_2 \omega_2^2}{2} - \frac{(I_1 + I_2) \omega^2}{2}.$$

Після підстановки значення  $\omega$ , яке було отримане раніше, знаходимо

$$\Delta T = \frac{I_1 I_2 (\omega_1 - \omega_2)^2}{2(I_1 + I_2)}.$$

Зміна кінетичної енергії зумовлена роботою сил тертя.

2. З одного рівня похилої площини одночасно починають скочуватись однакової маси і однакових радіусів циліндр і куля. Знайти відношення швидкостей цих тіл на даному рівні.

Дано:  $m_1 = m_2 = m, R_1 = R_2 = R$   
 $\frac{v_1}{v_2} = ?$

**Розв'язання.** Цю задачу на плоский рух можна розв'язувати як за допомогою динамічних рівнянь, так і за допомогою законів збереження, але значно простіший другий метод. Дійсно, тому що від швидкості залежить кінетична енергія, знайдемо відношення кінетичних енергій на одному рівні. Робота проти сил тертя не виконується, тому по закону збереження енергії, при однаковій зміні потенціальної енергії, повинні бути однакові кінетичні енергії для обох тіл, тобто  $T_{\text{циліндра}} = T_{\text{кулі}}$ . Ці енергії відповідно рівні

$$T_{\text{циліндра}} = \frac{mv_1^2}{2} + \frac{I_1 \omega_1^2}{2}; \quad T_{\text{кулі}} = \frac{mv_2^2}{2} + \frac{I_2 \omega_2^2}{2},$$

де  $I_1 = 1/2 m R^2, I_2 = 2/5 m R^2, \omega_1 = v_1/R, \omega_2 = v_2/R$ . Підставляючи ці значення в перше рівняння, знаходимо

$$1,5 \cdot \frac{mv_1^2}{2} = 1,4 \cdot \frac{mv_2^2}{2}, \quad \text{звідки} \quad \frac{v_1}{v_2} = \sqrt{\frac{14}{15}}.$$

#### Задачі для аудиторних та домашніх занять

161. Знайти момент імпульсу Землі відносно полярної осі, вважаючи її кулею радіусом  $R = 6000 \text{ км}$  та густиною  $\rho = 5,5 \text{ г/см}^3$ .

162. На краю горизонтального диска радіусом  $R$ , що має момент інерції  $I$ , стоїть людина масою  $m$ . Диск здійснює  $n$  об/хв. Як зміниться швидкість обертання диска, якщо людина перейде з краю диска до його середини? Як зміниться при цьому енергія системи? Розмірами людини порівняно з радіусом диска можна знехтувати.

163. На однорідному горизонтальному диску масою  $M$  і радіусом  $R$ , що знаходиться в стані спокою, стоїть людина масою  $m$ . Диск може обертатись навколо вертикальної осі, що проходить через його середину. В деякий момент людина почала рухатись. З якою кутовою швидкістю  $\omega$  почне обертатись диск, коли людина буде рухатись по колу радіусом  $r$  концентричного диска з швидкістю  $v$  відносно диска?

164. Дослідник стоїть на лаві Жуковського (рис. 49) і тримає в руках вертикально вісь велосипедного колеса, що вільно обертається навколо неї в горизонтальній площині з кутовою швидкістю  $\omega_1$ . Момент інерції колеса відносно цієї осі  $I_1$ . Момент інерції стільця і дослідника відносно осі, яка співпадає з віссю колеса  $I_2$ . На яку величину  $\Delta T$  зміниться кінетична енергія всієї системи, якщо дослідник поверне вісь колеса на  $180^\circ$ , на  $90^\circ$ ?



Рис. 49

165. Монетка масою  $m$  і радіусом  $R$ , обертаючись в горизонтальній площині навколо своєї вертикальної осі з кутовою швидкістю  $\omega$ , вертикально падає на горизонтальний диск і приліпає до нього. Внаслідок цього диск починає обертатись навколо своєї осі. Момент сил тертя, який виникає в осі диска, дорівнює  $M_0$ . Через який час диск внаслідок дії моменту сили тертя перестане обертатись? Скільки обертів він зробить до повної зупинки? Момент інерції диска відносно його осі  $I_0$ , відстань між осями диска і монетки  $d$ .

166. Суцільний однорідний короткий циліндр радіусом  $r$ , який обертається навколо своєї геометричної осі з швидкістю  $n$  об/хв, кладуть вертикально на горизонтальну поверхню. Скільки обертів зробить циліндр до повної зупинки? Коефіцієнт тертя ковзання між основою циліндра і поверхнею, на яку його кладуть, не залежить від швидкості обертання і дорівнює  $\mu$ .

167. Два махових колеса, радіуси яких дорівнюють  $R_1$  і  $R_2$  і моменти інерції  $I_1$  і  $I_2$ , з'єднані пасом. Утримуючи другий маховик і пас нерухомими, розкручують перший маховик до кутової швидкості  $\omega_0$ . Потім пас і другий маховик відпускають і система починає обертатись. Нехтуючи силами тертя, за виклю-

## КОЛИВАННЯ І ХВИЛІ

ченням сил тертя ковзання між пасом і маховиками, знайти кутові швидкості обертання маховиків  $\omega_1$  і  $\omega_2$ . Знайти також втрату  $\Delta T$  кінетичної енергії на тертя ковзання.

168. Циліндр масою  $m_1$  і радіусом  $R$  обертається з кутовою швидкістю  $\omega_0$  відносно осі симетрії без тертя. Другий циліндр масою  $m_2$  і радіусом  $r_2$  нерухомий. Циліндри приводять до дотикання бічними поверхнями без ковзання. Знайти зміну кінетичної енергії системи.

169. На гладенькій горизонтальній поверхні лежить однорідний диск радіусом  $r_0$ . На нього обережно опустили другий такий же диск, перед цим надавши йому кутову швидкість  $\omega_0$ . Через який час обидва диски будуть обертатись з однією і тією ж кутовою швидкістю, якщо коефіцієнт тертя між дисками дорівнює  $\mu$ ?

170. Дзига масою  $m = 0,5 \text{ кг}$ , вісь якої нахилена під кутом  $\varphi = 30^\circ$  до вертикалі, здійснює прецесію під дією сили тяжіння. Момент інерції дзиги відносно осі симетрії  $I = 2 \text{ г} \cdot \text{м}^2$ , кутова швидкість  $\omega = 350 \text{ рад/с}$ , відстань від точки опори до центру мас дзиги  $l = 10 \text{ см}$ . Знайти: а) кутову швидкість прецесії дзиги; б) модуль і напрямок горизонтальної складової сили реакції, що діє на дзигу в точці опори.

171. Дзига, маса якої  $m = 1,0 \text{ кг}$  і момент інерції  $I = 4 \text{ г} \cdot \text{м}^2$ , обертається з кутовою швидкістю  $\omega = 310 \text{ рад/с}$ . Точка опори її знаходиться на підставці, яка переміщується в горизонтальному напрямку з прискоренням  $a = 1,0 \text{ м/с}^2$ . Відстань між точкою опори і центром мас дзиги  $l = 10 \text{ см}$ . Знайти модуль і напрямок кутової швидкості прецесії.

172. Однорідна куля масою  $m = 5,0 \text{ кг}$  і радіусом  $R = 60 \text{ см}$  обертається з кутовою швидкістю  $\omega = 1250 \text{ рад/с}$  навколо горизонтальної осі, що проходить через її центр, і закріплена в підшипниках підставки. Відстань між підшипниками  $l = 15 \text{ см}$ . Підставку повертають навколо вертикальної осі з кутовою швидкістю  $\omega' = 5 \text{ рад/с}$ . Знайти модуль і напрямок гіроскопічних сил.

173. Корабель рухається зі швидкістю  $v = 36 \text{ км/год}$  по колу радіусом  $R = 200 \text{ м}$ . Знайти момент гіроскопічних сил, що діють на підшипники з боку вала, який має момент інерції відносно обертання  $I = 3,8 \cdot 10^3 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$  і кутову швидкість  $n = 300 \text{ об/хв}$ . Вісь обертання розташована вздовж корабля.

## § 1. Гармонічні коливання

*Рівняння вільних гармонічних коливань та його розв'язок:*

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0, \quad x = A \cos(\omega_0 t + \alpha),$$

де  $x$  — зміщення від положення рівноваги,  $\omega_0$  — власна кругова частота,  $A$  — амплітуда,  $\alpha$  — початкова фаза.

*Рівняння затухаючих коливань та його розв'язок:*

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0, \quad x = Ae^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha),$$

де  $\beta = h/2m$  — коефіцієнт затухання,  $h$  — коефіцієнт сили тертя,  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$  — частота затухаючих коливань.

*Логарифмічним декрементом називають величину*

$$\lambda = \ln \frac{A_t}{A_{t+\tau}} = \beta T,$$

де  $T = 2\pi/\omega$  — період затухаючих коливань.

*Добротністю* коливальної системи називають величину  $\theta = \pi/\lambda$ .

*Рівняння вимушених коливань і його розв'язок* мають вигляд:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = f_0 \cos \omega t, \quad x = A \cos(\omega t + \varphi),$$

$$\text{де } A = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}, \quad \text{tg } \varphi = \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

*Резонанс виникає за умови:*

$$\omega = \omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}.$$

Кінетична енергія гармонічних коливань

$$T = \frac{mv^2}{2} = \frac{mA^2\omega^2 \sin^2(\omega t + \alpha)}{2}.$$

Якщо сила в процесі гармонічних коливань змінюється пропорційно зміщенню, то потенціальна енергія

$$U = \frac{mA^2\omega^2 \cos^2(\omega t + \alpha)}{2}.$$

Повна механічна енергія гармонічних коливань дорівнює

$$E = T + U = \frac{m\omega^2 A^2}{2}.$$

**Методичні вказівки.** Для успішного розв'язування задач на гармонічні коливання, передусім, слід добре знати властивості тригонометричних функцій і основні формули їх перетворень. Слід пам'ятати співвідношення між зміщенням, швидкістю та прискоренням тіла, що здійснює гармонічні коливання.

При додаванні гармонічних коливань однакового напрямку можна користуватись аналітичним методом, якщо число коливань не більше двох, або методом векторних діаграм. Метод векторних діаграм дозволяє будь-який гармонічний процес привести в однозначну відповідність з обертанням вектора по величині рівного амплітуді з кутовою швидкістю, яка дорівнює циклічній частоті. Кут, що утворює цей вектор з віссю  $Ox$ , в початковий момент часу  $t = 0$  дорівнює початковій фазі коливань. При додаванні коливань однакової частоти ці вектори додаються за правилом складання векторів.

Пристаючи до розв'язування задач динаміки коливального руху, перш за все необхідно визначити, які сили викликають коливальний рух. Потім записати динамічне рівняння руху. Слід пам'ятати, що в рівнянні перед силою чи моментом сили стоїть знак «мінус», який вказує на те, що вони направлені проти зміщення, яке завжди відраховується від положення рівноваги. Розв'язуючи диференціальне рівняння, знаходять необхідні величини. Якщо динамічне рівняння не можливо записати, то слід користуватись законами збереження.

При розв'язуванні задач на затухаючі та вимушені коливання в основному необхідно знати відповідні формули і розуміти механізми цих коливань.

**Приклади розв'язування задач.**

1. Знайти кругову частоту і амплітуду гармонічних коливань тіла, якщо на відстанях  $x_1$  і  $x_2$  від положення рівноваги тіло рухалось з швидкостями  $v_1$  і  $v_2$ .

$$\text{Дано: } x_1, x_2, v_1, v_2 \\ \omega_0 = ? A = ?$$

**Розв'язання.** Рівняння зміщення та швидкості тіла в моменти часу  $t_1$  і  $t_2$  запишемо так:

$$x_1 = A \cos(\omega_0 t_1 + \alpha), \quad x_2 = A \cos(\omega_0 t_2 + \alpha), \\ v_1 = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t_1 + \alpha), \quad v_2 = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t_2 + \alpha).$$

Піднесемо до квадрату і складемо ліві і праві частини рівнянь окремо для моменту часу  $t_1$  і окремо для  $t_2$ . Отримаємо такі рівняння:

$$\omega_0^2 x_1^2 + v_1^2 = A^2 \omega_0^2, \quad \omega_0^2 x_2^2 + v_2^2 = A^2 \omega_0^2.$$

Із них знаходимо кругову частоту  $\omega = \sqrt{\frac{v_1^2 - v_2^2}{x_1^2 - x_2^2}}$  і амплітуду коливань  $A = \sqrt{\frac{v_1^2 x_1^2 - v_2^2 x_2^2}{v_1^2 - v_2^2}}$ .

2. Точка рухається на площині за законом  $x = a \sin \omega t$ ,  $y = b \cos \omega t$ , де  $a$ ,  $b$ ,  $\omega$  — додатні величини. Знайти рівняння траєкторії і напрямку руху, а також швидкість і прискорення точки в будь-який момент часу.

$$\text{Дано: } x = a \sin \omega t, \quad y = b \cos \omega t \\ x = f(y) = ? v = ? a = ?$$

**Розв'язання.** Точка приймає участь в складному русі. Проекції її на осі  $Ox$  та  $Oy$  змінюються за гармонічними законами. Таким чином, це задача на складання двох гармонічних взаємно перпендикулярних коливань. Для знаходження траєкторії виключимо з рівнянь проекції час  $t$ . Для цього розділимо рівняння відповідно на  $a$  і  $b$ , потім піднесемо їх до квадрату і складемо. Внаслідок цих операцій отримаємо рівняння траєкторії

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Це є канонічне рівняння еліпса з напівосями  $a$  і  $b$ . Враховуючи, що  $\omega = 2\pi/T$ , знайдемо координати в моменти часу  $t = 0$  ( $x = 0$ ,  $y = b$ )

і в момент  $t = T/4$  ( $x = a, y = 0$ ). Із значень координат видно, що точка рухається за годинниковою стрілкою.

Швидкість точки  $v$  при її русі по еліпсу дорівнює векторній сумі швидкостей  $v_x$  і  $v_y$ , і оскільки ці коливання взаємно перпендикулярні  $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ . Аналогічно знаходимо і прискорення  $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$ . Взявши похідні від  $x$  та  $y$  і підставивши їх у відповідні формули, знаходимо швидкість та прискорення точки:

$$v = \omega \sqrt{a^2 \cos^2 \omega t + b^2 \sin^2 \omega t},$$

$$a = \omega^2 \sqrt{a^2 \sin^2 \omega t + b^2 \cos^2 \omega t}.$$

В кінці слід зробити зауваження: знаходити прискорення, як похідну  $a = \frac{dv}{dt}$ , в даному випадку неможливо, тому що ця величина є тангенціальним прискоренням. Знайдене в задачі прискорення є повним.

3. Знайти періоди коливань тіла, що має масу  $m$  і яке підвішене на двох пружинках з коефіцієнтами пружності  $k_1$  і  $k_2$  у випадках, коли пружинки з'єднані: а) послідовно; б) паралельно.

Дано:  $m, k_1, k_2$   
 $T_1 - ? T_2 - ?$

**Розв'язання.** Перш за все, визначаємо, що це динамічна задача. Для знаходження періодів коливань слід записати динамічні рівняння руху.

1. У випадку а) під дією сили тяжіння перша пружинка розтягується на довжину  $x_1 = F/k_1$ , а друга —  $x_2 = F/k_2$ . Для системи пружинок можна записати  $F = -kx = -k(x_1 + x_2) = -k(F/k_1 + F/k_2)$ . Звідси знаходимо ефективний коефіцієнт пружності системи  $k = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}$ .

Динамічне рівняння руху в цьому випадку має вигляд:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx.$$

Розв'язком цього рівняння є зміщення  $x = A \cos(\omega_0 t + \alpha)$ , де  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ . Період коливань  $T_1 = 2\pi/\omega_0 = 2\pi\sqrt{m/k}$ .

Після підстановки значення ефективного коефіцієнта пружності знаходимо період коливань  $T = 2\pi\sqrt{\frac{k_1 + k_2}{k_1 k_2} m}$ .

2. У випадку б) обидві пружинки розтягнуті на одну й ту ж величину. На тіло з боку пружинок діють дві різні сили  $F_1 = -k_1 x$  і  $F_2 = -k_2 x$ . Рівняння руху в цьому випадку має вигляд:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -F_1 - F_2, \text{ або } m \frac{d^2 x}{dt^2} = -(k_1 + k_2)x.$$

Ефективний коефіцієнт пружності  $k = k_1 + k_2$ . Період коливань дорівнює

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_1 + k_2}}.$$

Як видно, при паралельному з'єднанні період коливань тягаря зменшується. Цю властивість використовують в пружинних амортизаторах.

4. Знайти частоту коливань ареометра, якому надали невеликий поштовх у вертикальному напрямку, а також кількість коливань, на протязі яких амплітуда зменшиться в  $e$  раз, якщо маса ареометра  $m$ , діаметр трубки  $d$ , густина рідини, в яку помістили ареометр,  $\rho$ , коефіцієнт тертя  $\alpha$ .

Дано:  $m, d, \rho, \alpha$   
 $\omega - ? n - ?$

**Розв'язання.** На ареометр в стані рівноваги діють дві сили: сила тяжіння і виштовхувальна сила Архімеда. Після того як приладу надали поштовх, сила Архімеда уже не зрівноважується силою тяжіння. Вона змінюється в залежності від  $x$  — зміщення приладу від положення рівноваги. Саме ця сила, що дорівнює  $F_A = \frac{\pi d^2}{4} \rho g x$ , намагається повернути ареометр в положення рівноваги. Динамічне рівняння руху без врахування сил тертя має вигляд:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{\pi d^2}{4} \rho g x.$$

Розв'язком його є функція  $x = A \cos(\omega_0 t + \alpha)$ , де  $\omega_0$  — власна частота, що дорівнює  $\omega_0 = \frac{d}{2} \sqrt{\frac{\pi \rho g}{m}}$ .

З врахуванням сил тертя коливання стають затухаючими і рівняння руху має вигляд:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{\pi d^2}{4} \rho g x - \alpha \frac{dx}{dt}.$$



Розв'язком цього рівняння є функція  $x = x_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha)$ , де  $\beta = \alpha/2m$  — коефіцієнт затухання, а  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$  — частота затухаючих коливань. Після підстановки відповідних значень  $\omega_0$  і  $\beta$  знаходимо

$$\omega = \sqrt{\frac{\pi d^2 \rho g}{4 m} - \frac{\alpha^2}{4 m^2}}$$

Час  $\tau$ , на протязі якого амплітуда зменшується в  $e$  раз, можна визначити із співвідношення  $\frac{Ae^{-\beta t}}{Ae^{-\beta(t+\tau)}} = e$ , звідки  $\beta\tau = 1$ , а  $\tau = 1/\beta$ .

Кількість коливань за цей час тоді визначається таким чином  $n = \tau/T$ , де  $T = 2\pi/\omega$  — період одного коливання. Тоді

$$n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\pi d^2 \rho g m}{\alpha^2} - 1}$$

### Задачі для аудиторних та домашніх занять

174. Тіло приймає участь одночасно в двох коливаннях одного напрямку, які відбуваються за законами  $x_1 = a \cos \omega t$ ,  $x_2 = a \cos 2\omega t$ . Знайти найбільшу швидкість тіла.

175. Частинка знаходиться в одномірному потенціальному полі, де її потенціальна енергія залежить від координати  $x$  таким чином  $u(x) = u_0(1 - \cos ax)$ ,  $u_0$  і  $a$  — сталі величини. Знайти період малих коливань частинки навколо положення рівноваги.

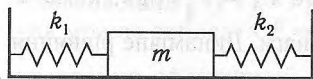


Рис. 50

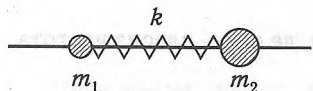


Рис. 51

176. Знайти період повздовжніх коливань тіла маси  $m$  в системі двох пружин, якщо коефіцієнти пружності (рис. 50) дорівнюють  $k_1$  і  $k_2$ , а їх масою і силою тертя можна знехтувати.

177. Дві кульки з масами  $m_1$  і  $m_2$  ковзають без тертя по тонкому горизонтальному стержню (рис. 51). Кульки зв'язані невагомою пружинкою, коефіцієнт пружності якої дорівнює  $k$ . Кульки зміщують в протилежні сторони, а потім відпускають. Визначити: а) як поводить себе центр мас системи; б) частоту коливань; в) максимальне значення відносної швидкості кульок, якщо початкове відносне зміщення їх дорівнює  $a$ .

178. Кулька радіусом  $r$  рухається по дну сферичної чашки радіусом  $R$ . Вважаючи, що ці коливання сінусоїдальні, визначити їх період.

179. Частинка, яку вивели з положення рівноваги на відстань  $l = 1$  см, здійснює затухаючі коливання. Який шлях пройде частинка до повної зупинки, якщо її логарифмічний декремент затухання  $\lambda = 0,02$ ?

180. До невагомої пружинки підвісили тягарець, внаслідок чого вона розтягнулась на  $\Delta x = 9,8$  см. З яким періодом буде коливатись тягарець, якщо йому надати невеликий поштовх у вертикальному напрямку? Логарифмічний декремент затухання  $\lambda = 3,1$ .

181. Знайти добротність математичного маятника довжиною  $l = 50$  см, якщо за проміжок часу  $\tau = 5,2$  хвилини його повна механічна енергія зменшилась в  $\eta = 4 \cdot 10^4$  разів.

182. Диск радіусом  $R$ , що висить на пружній нитці між двома нерухомими площинами, здійснює обертальні коливання навколо своєї осі  $OO'$  (рис. 52). Момент інерції диска відносно цієї осі  $I$ , зазор між диском і кожною з площин  $h$ , причому  $h \ll R$ . Знайти коефіцієнт в'язкості газу, що оточує диск, якщо період коливань диска  $T$  і логарифмічний декремент затухання  $\lambda$ .

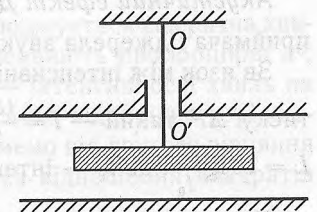


Рис. 52

183. Амплітуда зміщення вимушених коливань при дуже малій частоті  $A_0 = 2$  мм, а при резонансі  $A_p = 32$  мм. Коефіцієнт затухання набагато менше одиниці. Знайти добротність системи і логарифмічний декремент затухання.

184. Амплітуда зміщення вимушених коливань при частотах вимушеної сили  $\omega_1 = 400$  рад/с і  $\omega_2 = 600$  рад/с однакова. Знайти частоту, при якій амплітуда зміщення максимальна.

185. При частотах вимушеної гармонічної сили  $\omega_1$  і  $\omega_2$  амплітуда швидкості частинки дорівнює половині максимального значення. Знайти: а) частоту, що відповідає резонансу швидкості; б) коефіцієнт затухання  $\beta$  і частоту затухаючих коливань частинки.

186. Під дією зовнішньої вертикальної сили  $F = F_0 \cos \omega t$  тіло, що підвісили до пружинки, здійснює вимушені коливання за законом  $x = A \cos(\omega t - \varphi)$ . Знайти роботу сили  $F$  за період.

## § 2. Хвилі в пружних середовищах. Акустика

Рівняння плоскої і сферичної хвилі мають вигляд:

$$\xi = a \cos(\omega t - kx), \quad \xi = \frac{a}{r} \cos(\omega t - kr)$$

Для однорідного поглинаючого середовища в виразі амплітуд входять члени відповідно рівні  $e^{-\gamma x}$ ,  $e^{-\gamma r}$ , де  $\gamma$  — коефіцієнт затухання. Стояча хвиля описується рівнянням  $\xi = 2a \cos kx \sin \omega t$ .

Фазові швидкості поздовжніх  $v_{\parallel}$  у пружному середовищі і поперечних  $v_{\perp}$  хвиль в струні відповідно дорівнюють:

$$v_{\parallel} = \sqrt{E/\rho}, \quad v_{\perp} = \sqrt{T/\rho_1},$$

де  $E$  — модуль Юнга,  $\rho$  — густина середовища,  $T$  — сила натягу струни,  $\rho_1$  — лінійна густина струни.

Густина потоку енергії хвилі  $\vec{j} = \frac{1}{2} \rho a^2 \omega^2 \vec{v}$ , де  $\vec{v}$  — фазова швидкість хвилі.

Акустичний ефект Доплера  $v = v_0 \frac{v + v_{\text{пр}}}{v - v_{\text{дж}}}$ , де  $v$  і  $v_0$  — частоти приймача і джерела звука, а  $v_{\text{пр}}$  і  $v_{\text{дж}}$  — відповідні їм швидкості.

Зв'язок між інтенсивністю  $I$  звукової хвилі і амплітудою коливань тиску  $\Delta P$  такий —  $I = \frac{(\Delta P)^2}{2\rho v}$ . Рівень гучності звука в децибелах  $L = 10 \lg \frac{I}{I_0}$ , де  $I_0$  — інтенсивність на порозі чутності.

**Методичні вказівки.** При розв'язуванні задач можна виділити декілька типів. Перш за все, задачі на застосування рівняння хвиль та визначення їх характеристик. Для успішного їх розв'язання необхідно добре знати фізичний зміст рівняння хвилі і тих параметрів, що входять в нього. Слід пам'ятати, що для плоскої хвилі за умови відсутності поглинання енергії середовищем амплітуди зміщення, швидкості і прискорення всіх частинок однакові. В сферичній хвилі для ізотропних середовищ амплітуда обернено пропорційна відстані до джерела. Швидкість розповсюдження хвилі  $v = \omega/k$  в різних середовищах різна. При переході з одного середовища в друге змінюється її довжина, а частота залишається сталою.

В задачах, де розглядається складання двох чи багатьох хвиль, перш за все необхідно ознайомитись з поняттям когерентності та явищем інтерференції. Особливу увагу слід звернути на утворення і характеристики стоячих хвиль, на те, як розповсюджується енергія вздовж стоячої хвилі.

У випадку, коли джерело і приймач рухаються одне відносно іншого, змінюється частота коливань (ефект Доплера), слід звернути увагу на знаки при швидкостях.

В акустиці слід відрізнити дві фізичні величини: рівень інтенсивності звука і рівень гучності. Рівень інтенсивності звука є об'єктивна фізична характеристика, яка не залежить від звукового відчуття. Рівень гучності — це суб'єктивна характеристика звука. Вона залежить не тільки від інтенсивності, але і від частоти, з якою вухо людини

сприймає цей звук. Для розрахунку рівня гучності при різних частотах використовують графіки рівної гучності, які є в підручниках.

#### Приклади розв'язування задач.

1. На відстані  $r_0 = 20$  м від точкового джерела звука рівень гучності  $L_0 = 30$  децибел. Нехтуючи затуханням звукової хвилі, знайти: а) рівень гучності на відстані  $r_1 = 10$  м від джерела; б) відстань від джерела, на якій звук ще чути.

$$\text{Дано: } r_0 = 20 \text{ м, } r_1 = 10 \text{ м, } L_0 = 30 \text{ дБ} \\ L_1 = ? \quad r = ?$$

**Розв'язання.** В даному випадку розповсюджується сферична хвиля, амплітуда якої  $a \sim 1/r$ . Тому що інтенсивність пропорційна  $a^2$ , можна записати, що  $I_0/I = r^2/r_0^2$ , де  $I_0$  і  $I$  — інтенсивності хвиль на відстанях  $r_0$  і  $r$ . Рівні гучності на цих відстанях відповідно дорівнюють  $L_0 = 10 \lg(I_0/I_0^*)$  і  $L = 10 \lg(I/I_0^*)$ . Віднімемо від другого рівняння перше і, замінюючи відношення  $I/I_0^*$  через відношення квадратів відстаней, знаходимо

$$L = L_0 + 20 \lg(r_0/r) = 36 \text{ дБ.}$$

На порозі сприймання звука  $L = 0$ , тому  $L_0 = -20 \lg r_0/r_x$ , звідси  $r_x = r_0 \cdot 10^{L_0/20}$ . Після підстановки числових значень отримуємо  $r_x > 632$  м.

#### Задачі для аудиторних та домашніх занять

187. За який час звукові коливання пройдуть відстань  $l$  між точками А і В, якщо температура повітря між ними змінюється лінійно від  $T_1$  до  $T_2$ . Швидкість звуку в повітрі  $v = \alpha\sqrt{T}$ , де  $\alpha$  — стала величина.

188. Рівняння плоскої звукової хвилі має вигляд  $\xi = 60 \cos(1800t - 5,3x)$ , де  $\xi$  виражають в мікрометрах,  $t$  — в секундах,  $x$  — в метрах. Знайти: а) відношення амплітуди зміщення частинок середовища до довжини хвилі; б) амплітуду коливань швидкості частинок середовища і її відношення до швидкості розповсюдження хвилі; в) амплітуду коливань відносної деформації середовища і її зв'язок з амплітудою коливань швидкості частинок середовища.

189. В однорідному середовищі розповсюджується плоска хвиля, рівняння якої має вигляд:  $\xi = ae^{-\gamma x} \cos(\omega t - kx)$ , де  $a$ ,  $\gamma$ ,  $\omega$  і  $k$  — сталі величини. Знайти різницю фаз коливань в точках, де амплітуди зміщення частинок середовища відрізняються одна від другої на  $\eta = 1\%$ , якщо  $\gamma = 0,42$  1/м, а довжина хвилі  $\lambda = 50$  см.

190. З точкового джерела розповсюджуються звукові коливання з частотою  $\nu = 1,45$  кГц. На відстані  $r_0 = 5$  м від джерела амплітуда зміщення частинок середовища  $a_0 = 50$  мкм, а в точці А, що знаходиться на відстані  $r = 10$  м від джерела, амплітуда зміщення в  $\eta = 3$  рази менша  $a_0$ . Знайти: а) коефіцієнт

затухання хвилі; б) амплітуду коливань швидкості частинок середовища в точці А.

191. В середовищі розповсюджується незатухаюча плоска гармонічна хвиля. Знайти середню об'ємну густину повної енергії коливань  $\bar{\omega}$ , якщо в будь-якій точці середовища об'ємна густина енергії дорівнює  $\omega_0$  через одну шосту періоду коливань після проходження максимуму зміщення.

192. На струні довжиною 120 см утворилась стояча хвиля. Точки струни, для яких амплітуда зміщення дорівнює 3,5 мм, знаходяться одна від одної на відстані 15 см. Знайти максимальну амплітуду зміщення. Якому обертоному відповідають ці коливання?

193. Визначити, як і в скільки разів зміниться частота основного тону натягнутої струни, якщо її довжину зменшити на 35%, а натяг збільшити на 70%.

194. Для визначення швидкості звука в повітрі методом акустичного резонансу використовують трубу з поршнем і звуковою мембраною, яка закриває один із її кінців. Знайти швидкість звука, якщо відстань між сусідніми положеннями поршня, при якому спостерігається резонанс на частоті  $\nu = 2000$  Гц, складає  $l = 8,5$  см.

195. Нерухомий спостерігач приймає звукові коливання від двох камертонів, один з яких наближається, а другий віддаляється з такою ж швидкістю. При цьому спостерігач чує биття з частотою  $\nu = 2$  Гц. Знайти швидкість кожного камертону, якщо їх частота коливань  $\nu_0 = 680$  Гц і швидкість звука в повітрі  $v = 340$  м/с.

196. Джерело звукових коливань з частотою  $\nu = 1700$  Гц і приймач знаходяться в одній точці. В момент  $t = 0$  джерело починає віддалятися від приймача зі сталим прискоренням  $a = 10$  м/с<sup>2</sup>. Вважаючи швидкість звука  $v = 340$  м/с, знайти частоту коливань, які сприймає нерухомий приймач через  $t = 10$  секунд після початку руху джерела.

197. Нерухоме джерело видає монохроматичний звук. До нього наближається стінка зі швидкістю  $u = 33$  м/с. Швидкість розповсюдження звука в середовищі  $v = 330$  м/с. Як і на скільки відсотків зміниться довжина звукової хвилі при відбиванні від стінки?

198. На відстані 100 м від джерела звука, що знаходиться в повітрі, амплітуда звукового тиску хвилі дорівнює  $0,2$  Н/м<sup>2</sup>. Частота коливань джерела 500 Гц. Нехтуючи поглинанням середовища, знайти потужність джерела, рівень гучності, відстань, на якій звук не чути.

199. Інтенсивність звука, що розповсюджується в сухому повітрі при температурі  $t = 0^\circ$  С, дорівнює  $10^{-2}$  Вт/м<sup>2</sup>. Частота звука 1400 Гц. Знайти рівень інтенсивності і рівень гучності, амплітуду звукового тиску, амплітуду швидкості молекул повітря.

200. На відстані  $r = 100$  м від точкового джерела звука частоти 200 Гц рівень гучності  $L = 50$  дБ. Поріг чуття на цій частоті відповідає інтенсивності звука  $I_0 = 0,1$  кВт/м<sup>2</sup>. Коефіцієнт затухання звукової хвилі  $\gamma = 50$  м<sup>-1</sup>. Знайти звукову потужність джерела.

## РОЗДІЛ VI

### МЕХАНІКА РІДИН І ГАЗІВ

Основне рівняння гідродинаміки ідеальної рідини (рівняння Ейлера) має вигляд:

$$\rho \frac{dv}{dt} = f - \text{grad } P,$$

де  $\rho$  — густина рідини,  $f$  — об'ємна густина масових сил (для сили тяжіння  $f = \rho g$ ),  $P$  — тиск.

Рівняння нерозривності для стаціонарного потоку в трубці течії ідеальної рідини

$$S_1 v_1 = S_2 v_2,$$

де  $S_1$  і  $S_2$  — площі поперечних перерізів трубки течії.

У стаціонарному потоці ідеальної рідини вздовж трубки течії рівняння збереження повної енергії (рівняння Бернуллі) записують так:

$$\frac{\rho v^2}{2} + \rho gh + P = \text{const.}$$

У реальних рідинах сила тертя між окремими шарами визначається формулою Ньютона:

$$F = \eta \frac{dv}{dz} S,$$

де  $\eta$  — коефіцієнт в'язкості рідини.

Характер течії визначається безрозмірним параметром (числом Рейнольдса):

$$Re = \frac{\rho v d}{\eta},$$

де  $d$  — характерний розмір.

Потік реальної рідини через поперечний переріз трубки (формула Пуазейля) має вигляд:

$$Q = \frac{\pi r^4 \Delta P}{8\eta l},$$

де  $r$  — радіус,  $l$  — довжина трубки,  $\Delta P$  — різниця тисків.

Сила опору рухові кульки радіусом  $r$  при малих значеннях швидкості в реальній рідині описується формулою Стокса:

$$F = 6\pi r \eta v,$$

а при великих значеннях швидкості:

$$F = \beta r^2 v^2.$$

**Методичні вказівки.** Для описування руху рідин чи газів їх, як і тверді тіла, розбивають на окремі малі елементи, що можуть рухатись як одне ціле, і тоді до них застосовують загальні закони механіки. Явища, що пов'язані з в'язкістю, досить ускладнюють описування руху рідин чи газів. Тому спочатку слід ознайомитись із задачами для ідеальних рідин, таких, де тертям можна знехтувати, а потім перейти до розв'язування задач для реальних рідин. В курсі загальної фізики при вивченні розділу гідродинаміки в основному розглядають стаціонарні задачі, тобто такі, де поведінка течії з часом не змінюється.

При розв'язуванні задач, де необхідно користуватись рівнянням Бернуллі чи формулою Торічеллі, слід звернути особливу увагу на вибір поперечних перерізів. При вдалому виборі перерізів розв'язування задачі значно спрощується. Якщо в задачі розглядаються шари рідин з певною межею розподілу, то рівняння слід записувати для кожної рідини окремо. В деяких задачах, особливо на обертальний рух, можна при необхідності користуватись рівняннями кінематики точки для елементарних об'ємів рідини.

При розв'язуванні задач гідродинаміки реальних рідин в основному використовується рівняння Ньютона з певними граничними умовами. Інтегрування такого рівняння приводить частіше всього до необхідного кінцевого результату. В задачах, де необхідно знайти витрату реальної рідини або підрахувати роботу чи енергію, яка переноситься потоком рідини, слід користуватись залежністю швидкості окремих шарів від радіуса труби.

#### Приклади розв'язування задач.

1. Склянку з водою обертають навколо вертикальної осі з кутовою швидкістю  $\omega$ . Знайти: а) розподіл тиску в горизонтальному на-

прямку вздовж радіуса, якщо в центрі склянки поблизу поверхні тиск  $P_0$ ; б) форму вільної поверхні води.

Дано:  $\omega, P_0$   
 $P(r) = ?$

**Розв'язання.** При обертанні склянки з водою навколо вертикальної осі окремі елементи рухаються по круговим трубкам течії під дією доцентрової сили (рис. 53). Доцентрова сила в даному випадку виникає за рахунок існування градієнта тиску на бокові поверхні  $S$  елемента кругової трубки течії.

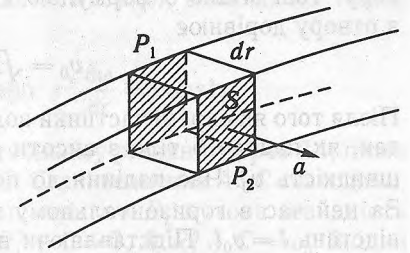


Рис. 53

Основне рівняння гідродинаміки, тобто рівняння Ейлера, в даному випадку має вигляд:

$$\rho \frac{dv}{dt} = -\text{grad } P.$$

Помножимо ліву і праву частини рівняння на об'єм нашого елемента  $dV = S dr$  і врахуємо, що прискорення  $dv/dt = \omega^2 r$ . Тоді рівняння має вигляд:  $\rho \omega^2 S r dr = -\frac{dP}{dr} S dr$ , з якого легко отримати  $\rho \omega^2 r dr = dP$ .

Проінтегруємо ліву частину рівняння по  $r$ , а праву по  $P$ , враховуючи, що в центрі, де  $r = 0$ , тиск дорівнює  $P_0$ ,

$$\rho \omega^2 \int_0^r r dr = \int_{P_0}^P dP.$$

Після інтегрування одержуємо:  $\rho \omega^2 r^2 / 2 = P - P_0$ . Як бачимо, вздовж радіуса в горизонтальній площині тиск зростає пропорційно квадрату відстані від осі обертання.

На вільній поверхні тиск повинен бути всюди однаковий, тому рівень рідини повинен зростати з відстанню від осі. Зростання тиску вздовж радіуса в горизонтальній площині повинно зрівноважуватись гідростатичним тиском:  $\rho \omega^2 r^2 / 2 = \rho gh$ , звідси  $h = \omega^2 r^2 / 2g$ . Тобто висота води зростає пропорційно квадрату відстані від осі обертання. Це означає, що вільна поверхня є не що інше, як параболоїд обертання.

2. На столі стоїть широка циліндрична посудина висотою  $h$ , наповнена до верху водою. Нехтуючи в'язкістю, знайти, на якій висоті від дна слід зробити невеликий отвір, щоб струминка з нього потрапляла

на поверхню стола на максимальній відстані від циліндра. Чому дорівнює ця відстань?

**Розв'язання.** Позначимо через  $y$  відстань від дна посудини до отвору. Тоді згідно з формулою Торічеллі швидкість витікання води з отвору дорівнює

$$v_0 = \sqrt{2g(h-y)}.$$

Після того як окремі частинки води залишають отвір, вони рухаються так, як падало б тіло з висоти  $y$ , маючи початкову горизонтальну швидкість  $v_0$ . Час падіння до поверхні стола дорівнює  $t = \sqrt{2y/g}$ . За цей час в горизонтальному напрямку частинки води пройдуть відстань  $l = v_0 t$ . Підставляючи в останнє рівняння значення швидкості і часу, знаходимо залежність відстані від висоти отвору

$$l = \sqrt{2g(h-y)} \cdot \sqrt{2y/g} = 2\sqrt{y(h-y)}.$$

Проаналізуємо отриману залежність на екстремум. Для цього продиференціюємо її і прирівняємо до нуля:

$$\frac{dl}{dy} = \frac{(h-2y)}{\sqrt{y(h-y)}} = 0.$$

Цей вираз дорівнює нулю, коли чисельник дорівнює нулю, тобто  $h-2y=0$ . Отже, максимальна відстань буде тоді, коли висота, на якій слід зробити отвір, дорівнює  $y=h/2$ , а сама відстань

$$l_{\max} = 2 \cdot \sqrt{\frac{h}{2} \left( h - \frac{h}{2} \right)} = h.$$

3. Реальна рідина з коефіцієнтом в'язкості  $\eta$  знаходиться між двома довгими коаксіальними циліндрами з радіусами  $R_1$  і  $R_2$ , причому  $R_1 < R_2$ . Внутрішній циліндр нерухомий, а зовнішній обертають зі сталою кутовою швидкістю  $\omega_0$ . Від цього рідина починає обертатись, маючи ламінарний характер руху. Маючи на увазі, що сила тертя, яка діє на одиницю площі циліндричної поверхні радіусом  $r$ , дорівнює  $\sigma = \eta r d\omega/dr$ , знайти залежність кутової швидкості обертання рідини від радіуса.

Дано:  $\eta, R_1, R_2, R_1 < R_2, \omega_0, \sigma = \eta r d\omega/dr$   
 $\omega(r) = ?$

**Розв'язання.** Уявимо, що посередині між циліндрами знаходиться циліндрична поверхня радіусом  $r$  і висотою  $l$ . Запишемо, чому дорівнює момент сил тертя, що діє на цю поверхню відносно осі обертання:

$M = rF_{\text{тр}}$ , де  $F_{\text{тр}} = \sigma S$ , а  $S = 2\pi r l$  — площа уявного циліндра. Тоді  $M = 2\pi r^3 l \eta \frac{d\omega}{dr}$ . При ламінарному русі момент сил не повинен залежати від радіуса, він повинен залишатись сталою величиною. Таким чином,

$$2\pi r^3 l \eta \frac{d\omega}{dr} = \text{const}_1, \text{ або } r^3 \frac{d\omega}{dr} = \text{const}_2.$$

Позначимо сталу величину в останньому рівнянні через  $2A$ ; після інтегрування отримаємо  $\omega = A/r^2 + C$ . Сталі величини  $A$  і  $C$  знаходимо, користуючись граничними умовами: при  $r = R_1$  кутова швидкість  $\omega = 0$ , а при  $r = R_2$ ,  $\omega = \omega_0$ . Тоді  $A/R_1^2 + C = 0$ ,  $A/R_2^2 + C = \omega_0$ . Звідки знаходимо  $A$  і  $C$ , а потім і необхідну залежність

$$\omega = \omega_0 \frac{R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \left( \frac{1}{R_1^2} - \frac{1}{r^2} \right).$$

#### Задачі для аудиторних та домашніх занять

201. Показати, що для стаціонарної течії ідеальної рідини рівняння Бернуллі можна отримати з рівняння Ейлера.

202. Дві манометричні трубки (рис. 54) встановлені вертикально на горизонтальній трубі змінного поперечного перерізу в місцях, де площі перерізу труби дорівнюють  $S_1$  і  $S_2$ . По трубі тече вода. Знайти об'єм води, який протікає через поперечний переріз труби за одиницю часу, якщо різниця рівнів води в манометричних трубках дорівнює  $\Delta h$ .

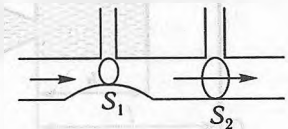


Рис. 54

203. Трубка Піто встановлена по осі газопроводу, площа поперечного перерізу якого дорівнює  $S$  (рис. 55). Знехтувавши в'язкістю, знайти об'єм газу, що проходить через поперечний переріз труби в одиницю часу, якщо різниця рівнів рідини в манометрі дорівнює  $\Delta h$ , а густини рідини і газу відповідно дорівнюють  $\rho_0$  і  $\rho$ .

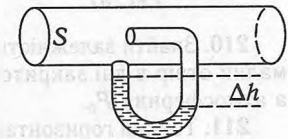


Рис. 55

204. Широка посудина з невеликим отвором у дні наповнена водою і спиртом. Нехтуючи в'язкістю, знайти швидкість витікання води, якщо товщина шару води  $h_1 = 30$  см, а спирту  $h_2 = 20$  см.

205. Зігнуту трубку опустили в потік води (рис. 56). Швидкість потоку відносно трубки  $v = 2,5$  м/с. Закритий верхній кінець трубки має

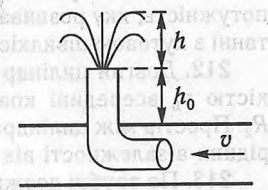


Рис. 56

невеликий отвір і знаходиться на висоті  $h_0 = 12$  см. На яку висоту  $h$  буде підніматись струмінь води, що витікає з отвору?

206. Сопло фонтану, що створює вертикальний струмінь висотою  $h = 8$  м, має форму зрізаного конуса, що звужується до верху. Діаметр нижнього перерізу 5 см, верхнього 1 см. Висота сопла 0,5 м. Визначити витрату води і на скільки тиск в нижньому перерізі більше атмосферного.

207. Циліндрична посудина висотою  $h$  та площею основи  $S$  наповнена водою. В дні посудини відкрили отвір площею  $s \ll S$ . Нехтуючи в'язкість води, знайти час, за який вода витече з посудини.

208. Горизонтально розташована трубка  $AB$  (рис. 57) довжиною  $l$  обертається зі сталою швидкістю  $\omega$  навколо нерухокої вертикальної осі  $OO'$ , що проходить через кінець  $A$ . В трубці знаходиться ідеальна рідина. Кінець трубки  $A$  відкритий, а в закритому кінці  $B$  є невеликий отвір. Знайти, з якою швидкістю відносно трубки буде витікати рідина в залежності від її «висоти»  $h$ .

209. Циліндрична посудина радіусом  $R$  з ідеальною рідиною обертається навколо геометричної осі (рис. 58), яка направлена вертикально, з кутовою швидкістю  $\omega$ . Знайти швидкість, з якою витікає вода з маленького отвору в боковій стінці посудини в залежності від висоти  $h$ .

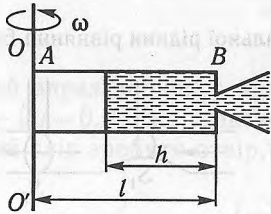


Рис. 57

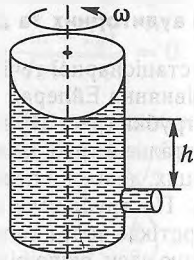


Рис. 58

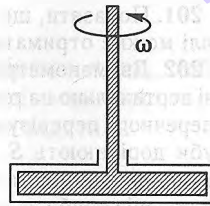


Рис. 59

210. Знайти залежність швидкості, з якою витікає рідина густиною  $\rho$  через малий отвір в дні закритої посудини, від її висоти, якщо тиск в посудині  $P$ , а атмосферний  $P_0$ .

211. Тонкий горизонтальний диск  $R = 10$  см розташований в циліндричній (рис. 59) порожнині з маслом, в'язкість якого  $\eta = 0,08$  л. Між диском та горизонтальною поверхнею циліндричної порожнини відстань  $h = 1$  мм. Знайти потужність, яку розвивають сили в'язкості, що діють на диск при його обертанні з кутовою швидкістю  $\omega = 60$  рад/с. Граничними ефектами знехтувати.

212. Довгий циліндр радіусом  $R_1$  переміщують вздовж його осі з швидкістю  $v_0$  всередині коаксіального з ним нерухомого циліндра радіусом  $R_2$ . Простір між циліндрами заповнений в'язкою рідиною. Знайти швидкість рідини в залежності від відстані  $r$  до осі циліндра. Течія ламінарна.

213. По трубці довжиною  $l$  і радіусом  $R$  тече стаціонарний потік рідини, густина якої  $\rho$  і в'язкість  $\eta$ . Швидкість течії рідини залежить від відстані  $r$

до осі трубки за законом  $v = (1 - r^2/R^2)$ . Знайти: а) об'єм рідини, що протікає через поперечний переріз труби в одиницю часу; б) кінетичну енергію рідини в об'ємі трубки; в) силу тертя, що виникає між трубкою та рідиною; г) різницю тиску на кінцях трубки.

214. В системі, що зображена на рис. 60, з широкої посудини  $A$  по трубці витікає в'язка рідина, густина якої  $\rho = 1$  г/см<sup>3</sup>. Знайти швидкість, з якою витікає рідина, якщо  $h_1 = 10$  см,  $h_2 = 20$  см,  $h_3 = 35$  см. Відстань  $l$  однакова.

215. Радіус поперечного перерізу трубопроводу поступово і монотонно зменшується за законом  $r = r_0 e^{-\alpha x}$ , де  $\alpha = 0,5$  м<sup>-1</sup>,  $x$  — відстань від початку трубопроводу. Знайти відношення чисел Рейнольдса в перерізах, які знаходяться на відстані  $\Delta x = 3,2$  м один від одного.

216. Для кульки радіусом  $r_1 = 1,2$  мм, що рухається в гліцерині, ламінарне обтікання спостерігається при швидкості  $v_1 = 23$  см/с. При якій мінімальній швидкості  $v_2$  кульки радіусом  $r_2 = 5,5$  см у воді обтікання стане турбулентним? Коефіцієнти в'язкості гліцерину та води відповідно дорівнюють  $\eta_1 = 13,9$  л і  $\eta_2 = 0,011$  л.

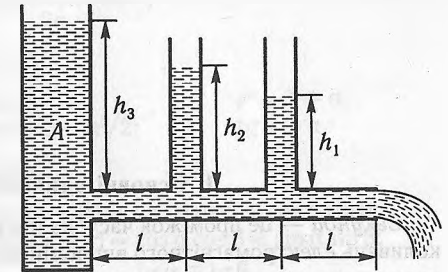


Рис. 60

### 1. Основні одиниці Сі в механіці

**Секунда** — це проміжок часу, на протязі якого відбувається 9 192 631 770 коливань електромагнітного випромінювання, що відповідають переходу між двома надтонкими рівнями основного стану атома цезію-133.

Еталон часу і частоти складається з атомно-променевої трубки з пучком атомів цезія-133 і радіотехнічного пристрою, який дає набір електричних сигналів фіксованої частоти.

**Метр** — довжина, що дорівнює 1 650 763,73 довжини хвиль в вакуумі жовтогарячої лінії криптона-86 (лінії, відповідного переходу між рівнями  $2p_{10}$  і  $5d_5$  даного атому).

Еталон метра являє собою набір інтерферометрів для точного вимірювання довжин.

**Кілограм** — це маса платиноіридієвого еталона, який зберігається в Міжнародному бюро мір і ваги (в Севрі, поблизу Парижа). Маса еталона близька масі 1 літра чистої води при  $4^\circ\text{C}$ .

### 2. Грецький алфавіт

Α, α	альфа	Η, η	ета	Ν, ν	ню	Τ, τ	тау
Β, β	бета	Θ, θ, ϑ	тета	Ξ, ξ	кси	Υ, υ	іпсілон
Γ, γ	гамма	Ι, ι	йота	Ο, ο	омікрон	Φ, φ	фі
Δ, δ	дельта	Κ, κ	каппа	Π, π	пі	Χ, χ	хі
Ε, ε	епсілон	Λ, λ	лямбда	Ρ, ρ	ро	Ψ, ψ	псі
Ζ, ζ	дзета	Μ, μ	мю	Σ, σ	сігма	Ω, ω	омега

### 3. Приставки до назв одиниць

Г — гіга ( $10^9$ )	да — дека ( $10^1$ )	мк — мікро ( $10^{-6}$ )
М — мега ( $10^6$ )	д — деці ( $10^{-1}$ )	н — нано ( $10^{-9}$ )
к — кіло ( $10^3$ )	с — санті ( $10^{-2}$ )	п — піко ( $10^{-12}$ )
г — гекто ( $10^2$ )	м — мілі ( $10^{-3}$ )	ф — фемто ( $10^{-15}$ )

Приклади: *нм* — нанометр ( $10^{-9}$  м); *кН* — кілоньютон ( $10^3$  Н).

### 4. Формули алгебри і тригонометрії

Корні квадратного рівняння  $ax^2 + bx + c = 0$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Наближенні формули (при  $\alpha \ll 1$ ):

$$\begin{aligned} (1 \pm \alpha)^n &= 1 \pm n\alpha; & \sin \alpha &= \alpha; & e^\alpha &= 1 + \alpha; \\ \cos \alpha &= 1; & \ln(1 + \alpha) &= \alpha - \alpha^2/2; & \operatorname{tg} \alpha &= \alpha. \end{aligned}$$

Основні тригонометричні формули:

$$\begin{aligned} \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha &= 1; & \sin(\alpha \pm \beta) &= \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta; \\ \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha &= 1; & \cos(\alpha \pm \beta) &= \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta; \\ \sin \alpha \cdot \operatorname{csc} \alpha &= 1; & \operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) &= \frac{\operatorname{tg} \alpha \mp \operatorname{tg} \beta}{1 \mp \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}; \\ \cos \alpha \cdot \operatorname{sec} \alpha &= 1; & \operatorname{ctg}(\alpha \pm \beta) &= \frac{\operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta \mp 1}{\operatorname{ctg} \beta \mp \operatorname{ctg} \alpha}; \\ \sin 2\alpha &= 2 \sin \alpha \cos \alpha; & \sin \alpha + \sin \beta &= 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}; \\ \cos 2\alpha &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha; & \sin \alpha - \sin \beta &= 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}; \\ \operatorname{tg} 2\alpha &= \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}; & \cos \alpha + \cos \beta &= 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}; \\ \operatorname{ctg} 2\alpha &= \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha - 1}{2 \operatorname{ctg} \alpha}; & \cos \alpha - \cos \beta &= -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}; \\ \sin \frac{\alpha}{2} &= \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}; & 2 \sin \alpha \sin \beta &= \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta); \\ \cos \frac{\alpha}{2} &= \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}; & 2 \cos \alpha \cos \beta &= \cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta); \\ \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} &= \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}; & 2 \sin \alpha \cos \beta &= \sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta); \end{aligned}$$

### 5. Деякі математичні дії з векторами

Скалярний добуток векторів:

$$\vec{a}\vec{b} = \vec{b}\vec{a} = ab \cos \alpha; \quad \vec{a}(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a}\vec{b} + \vec{a}\vec{c}.$$

Векторний добуток векторів:

$$[\vec{a} \times \vec{b}] = -[\vec{b} \times \vec{a}]; \quad \|[\vec{a} \times \vec{b}]\| = ab \sin \alpha.$$

Подвійний векторний добуток:

$$[\vec{a} \times [\vec{b} \times \vec{c}]] = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b}).$$

Добутки векторів в координатному зображенні:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

$$[\vec{a} \times \vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = (a_y b_z - a_z b_y) \vec{i} + (a_z b_x - a_x b_z) \vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \vec{k}.$$

Диференціювання векторів, що залежать від скалярної змінної величини  $t$ :

$$\frac{d}{dt}(\vec{a} + \vec{b}) = \frac{d\vec{a}}{dt} + \frac{d\vec{b}}{dt}; \quad \frac{d}{dt}(\alpha \cdot \vec{a}) = \frac{d\alpha}{dt} \cdot \vec{a} + \alpha \frac{d\vec{a}}{dt};$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \frac{d\vec{a}}{dt} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \frac{d\vec{b}}{dt}; \quad \frac{d}{dt}[\vec{a} \times \vec{b}] = \left[ \frac{d\vec{a}}{dt} \times \vec{b} \right] + \left[ \vec{a} \times \frac{d\vec{b}}{dt} \right].$$

Гradient скалярної величини  $\phi$

$$\nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \vec{k}.$$

### 6. Таблица похідних

Функція	Похідна	Функція	Похідна	Функція	Похідна
$x^n$	$nx^{n-1}$	$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\cos x$	$-\sin x$	$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{sh} x$
$\frac{1}{x^n}$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{th} x$	$\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	$\operatorname{cth} x$	$-\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$
$e^x$	$e^x$	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$
$e^{nx}$	$ne^{nx}$	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\ln u$	$\frac{u'}{u}$
$a^x$	$a^x \ln a$	$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$uv$	$uv' + vu'$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\frac{u}{v}$	$\frac{vu' - v'u}{v^2}$

### 7. Таблица інтегралів

Функція $f(x)$	Інтеграл $\int f(x) dx$	Функція $f(x)$	Інтеграл $\int f(x) dx$
$x^n (n \neq -1)$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + c$	$e^x$	$e^x + c$
$\frac{1}{x}$	$\ln x  + c$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{arctg} x$
$\sin x$	$-\cos x + c$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$
$\cos x$	$\sin x + c$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\ln(x + \sqrt{x^2-1})$
$\operatorname{tg} x$	$-\ln \cos x  + c$	$\frac{1}{a+bx}$	$\frac{1}{b} \ln(a+bx)$
$\operatorname{ctg} x$	$\ln \sin x  + c$	$\int u dv$	$uv - \int v du$

### 8. Густина речовин

Тверді речовини, г/см<sup>3</sup>

Алмаз .....	3,5	Нікель .....	8,9
Алюміній .....	2,7	Олово .....	7,4
Бор .....	2,4	Платина .....	21,5
Вольфрам .....	19,1	Пробка .....	0,20
Графіт .....	1,6	Свинець .....	11,3
Залізо (сталь) .....	7,8	Срібло .....	10,5
Золото .....	19,3	Титан .....	4,5
Лід .....	0,916	Уран .....	19,0
Мідь .....	8,9	Цинк .....	7,0
Натрій .....	0,97		

Рідини, г/см<sup>3</sup>

Бензол .....	0,88	Гас .....	0,80
Вода .....	1,00	Ртуть .....	13,6
Гліцерин .....	1,26	Спирт .....	0,79
Касторове масло .....	0,90	Ефір .....	0,72

Гази (при нормальних умовах), кг/м<sup>3</sup>

Азот .....	1,25	Кисень .....	1,43
Аміак .....	0,77	Метан .....	0,72
Водень .....	0,09	Повітря .....	1,293
Вуглекислий газ .....	1,98	Хлор .....	3,21



### 9. Прискорення сили тяжіння на рівні моря для різних широт

Широта, град	$g, \text{ м/с}^2$	Широта, град	$g, \text{ м/с}^2$
0 (екватор)	9,78030	50 (Київ)	9,81066
10	9,78186	60	9,81914
20	9,78634	70	9,82606
30	9,79321	80	9,83058
40	9,80166	90 (полюс)	9,83216
45 (Одеса)	9,80616		

### 10. Пружні величини твердих тіл (заокруглені значення)

Речовина	Модуль Юнга $E, \text{ ГПа}$	Модуль зсуву $G, \text{ ГПа}$
Алюміній	69	24
Вольфрам	380	140
Залізо (сталь)	200	76
Мідь	98	44
Срібло	74	27

### 11. Астрономічні величини

	Маса, $\text{кг}$	Середній радіус, $\text{м}$	Середня густина, $\times 10^3, \text{ кг/м}^3$	Період обертання навколо осі, доби
Сонце	$1,97 \cdot 10^{30}$	$6,95 \cdot 10^8$	1,41	25,4
Земля	$5,96 \cdot 10^{24}$	$6,37 \cdot 10^6$	5,52	1,0
Місяць	$7,30 \cdot 10^{22}$	$1,74 \cdot 10^6$	3,30	27,3

### 12. Одиниці механічних величин в системах СІ і СГС

Фізичні величини	Одиниці		Співвідношення од. СІ / од. СГС
	СІ	СГС	
Довжина	$\text{м}$	$\text{см}$	$10^2$
Час	$\text{с}$	$\text{с}$	1
Кут	$\text{рад}$	$\text{рад}$	1
Площа	$\text{м}^2$	$\text{см}^2$	$10^4$
Об'єм	$\text{м}^3$	$\text{см}^3$	$10^6$

Продовження табл.

Фізичні величини	Одиниці		Співвідношення од. СІ / од. СГС
	СІ	СГС	
Швидкість	$\text{м/с}$	$\text{см/с}$	$10^2$
Прискорення	$\text{м/с}^2$	$\text{см/с}^2$	$10^2$
Кутова швидкість	$\text{рад/с}$	$\text{рад/с}$	1
Кутове прискорення	$\text{рад/с}^2$	$\text{рад/с}^2$	1
Частота коливань	$\text{Гц}$	$\text{Гц}$	1
Частота колова	$\text{с}^{-1}$	$\text{с}^{-1}$	1
Маса	$\text{кг}$	$\text{г}$	$10^3$
Густина	$\text{кг/м}^3$	$\text{г/см}^3$	$10^{-3}$
Сила	$\text{Н, кг} \cdot \text{м/с}^2$	$\text{дин, г} \cdot \text{см/с}^2$	$10^5$
Тиск	$\text{Па, Н/м}^2$	$\text{дин/см}^2$	10
Робота, енергія	$\text{Дж, кг} \cdot \text{м}^2/\text{с}^2$	$\text{ерг, г} \cdot \text{см}^2/\text{с}^2$	$10^7$
Потужність	$\text{Вт, Дж/с}$	$\text{ерг/с}$	$10^7$
Імпульс (кількість руху)	$\text{кг} \cdot \text{м/с}$	$\text{г} \cdot \text{см/с}$	$10^5$
Імпульс сили	$\text{Н} \cdot \text{с}$	$\text{дин} \cdot \text{с}$	$10^5$
Момент сили	$\text{Н} \cdot \text{м}$	$\text{дин} \cdot \text{см}$	$10^7$
Момент імпульсу	$\text{кг} \cdot \text{м}^2/\text{с}$	$\text{г} \cdot \text{см}^2/\text{с}$	$10^7$
Момент інерції	$\text{кг} \cdot \text{м}^2$	$\text{г} \cdot \text{см}^2$	$10^7$

ВІДПОВІДІ

1.  $v_{cp} = \frac{2v_0(v_1 + v_2)}{2v_0 + v_1 + v_2}$ . 2.  $v_{cp} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n 1/v_i}$ . 3.  $v_{cp} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n v_i$ . 4.  $v_{cp} = \frac{40\sqrt{3}}{3}$  м/с.  
 5.  $t = \frac{l + v_2\tau}{v_1 + v_2}$ ;  $r_0 = \frac{l + v_2\tau}{v_1 + v_2}$ .  $v_1$ . 6.  $\frac{t_A}{t_B} = \frac{\eta}{\sqrt{\eta^2 - 1}} = 1,8$ . 7. а)  $\beta = \arcsin\left(\frac{v_1}{v_2} \sin \alpha\right)$ .  
 8.  $v' = \sqrt{v_0^2 + v^2 + 2v_0v \cos \varphi} \approx 40$  км/год,  $\varphi' = 19^\circ$ . 9.  $\frac{(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} = \frac{(\vec{v}_2 - \vec{v}_1)}{|\vec{v}_2 - \vec{v}_1|}$ .  
 10.  $v = 16$  км/год,  $u = 4$  км/год. 11.  $S_{\min} = \frac{l(v_2 - v_1)}{\sqrt{2(v_1^2 + v_2^2)}}$ . 12.  $CD = \frac{l}{\sqrt{\eta^2 - 1}}$ .  
 13. 45 см/с; -30 см/с<sup>2</sup>. 14.  $t = 2,25$  с;  $h = 30,3$  м. 15.  $h \approx 195$  м. 16.  $\Delta t \approx 5,45$  с;  $h \approx 145$  м. 17.  $\Delta t \approx 1$  с. 20.  $\Delta t \approx 5$  с; 75 м нижче точки В. 21.  $\Delta t = 3,4$  с;  
 $v = 24$  м/с. 22.  $v_0 = 7$  м/с. 23.  $v_0 = \sqrt{Lg \cos^2 \alpha / (2 \sin \alpha)}$ . 24.  $\operatorname{tg} \alpha = v \sqrt{2/g h}$ ,  
 $S = v \sqrt{2h/g}$ . 25.  $t \approx 0,75$  с. 26.  $R_1 = (v_0^2 \cos^2 \alpha)/g = 10,2$  м,  $R_2 = v_0^2/(g \cos \alpha) =$   
 $= 82$  м. 27.  $v_0 = 19,8$  м/с;  $\tau = 3$  с;  $h = 12,1$  м. 28.  $\Delta t = 11$  с. 30.  $l = 8h \sin \alpha$ .  
 31.  $R = a^3/(2bS)$ ;  $a_0 = a \sqrt{1 + (4bS^2/a^3)^2}$ . 32.  $a_0 = a \sqrt{1 + (4\pi n)^2} = 0,8$  м/с<sup>2</sup>.  
 33.  $v = \frac{v_0}{1 + v_0 t/R} = v_0 e^{-S/R}$ ;  $a = \sqrt{2} \frac{v_0^2}{R e^{2S/R}} = \sqrt{2} \frac{v^2}{R}$ . 34.  $\beta = 4$  рад/с;  $\varphi = 2t^2$   
 рад. 35.  $t = \sqrt[3]{(4/a) \operatorname{tg} \alpha} = 7$  с. 36. а)  $\varphi = (1 - e^{-at}) \frac{\omega_0}{a}$ ; б)  $\omega = \omega_0 e^{-at}$ . 37.  $\omega =$   
 $= \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2} = 5$  рад/с;  $\beta = \omega_1 \cdot \omega_2 = 12$  рад/с<sup>2</sup>. 38.  $\omega = \omega_0 \sqrt{1 + (\beta_0 t / \omega_0)^2} =$   
 $= 0,6$  рад/с;  $\beta = \beta_0 \sqrt{1 + \omega_0^2 t^2} = 0,2$  рад/с<sup>2</sup>. 39. 140 см/с; -20 см/с. 40.  $R =$   
 $= 4r$ . 41.  $v = c \sqrt{(2 - \Delta t/t) \Delta t/t} = 0,6 \cdot 10^8$  м/с. 42.  $S = c \Delta t \sqrt{1 - (\Delta t_0/\Delta t)^2} =$   
 $= 5$  м. 43. а)  $\Delta t_0 = l/v \sqrt{1 - v^2/c^2} = 1,4$  мкс; б)  $l' = l \sqrt{1 - v^2/c^2} = 0,42$  км.  
 44. а)  $p = a(1 + \sqrt{4 - 3v^2/c^2})$ ; б)  $p = a(\sqrt{1 - v^2/c^2} + \sqrt{4 - v^2/c^2})$ . 45.  $l_0 =$   
 $= l \sqrt{\frac{1 - v^2/c^2 \sin^2 \varphi}{1 - v^2/c^2}} = 1,08$  м. 46. а)  $\operatorname{tg} \varphi' = \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$ ;  $\varphi' = 59^\circ$ ; б)  $S =$   
 $= S_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2} \cos^2 \varphi} = 3,3$  м<sup>2</sup>. 47.  $\Delta t = \frac{lv}{c^2 \sqrt{1 - v^2/c^2}} = 20$  мкс. 48. а) 13 нс;

б) 4,0 м. 49.  $v' = \frac{\sqrt{(v_x - v)^2 + v_y^2(1 - v^2/c^2)}}{1 - v_x v/c^2}$ . 50.  $\operatorname{tg} \varphi' = \frac{\sqrt{1 - V^2/c^2} \sin \varphi}{\cos \varphi - V/v}$ .  
 51.  $\operatorname{tg} \varphi = \frac{v'V}{c^2 \sqrt{1 - V^2/c^2}}$ . 54. а)  $a_1 = \frac{(\mu_2 - \mu_1)mg}{M} - \mu_1 g$ ;  $a_2 = \frac{F}{m} - \mu_2 g$ ; б)  $a_1 =$   
 $= \frac{F - (\mu_1 + \mu_2)mg}{M} - \mu_1 g$ ;  $a_2 = \mu_2 g$ . 55.  $a = \frac{F_1 \cos \alpha - F_2 \cos \beta}{m_1 + m_2} - \frac{\mu}{m_1 + m_2} \times$   
 $\times [(m_1 + m_2)g + F_1 \sin \alpha + F_2 \sin \beta]$ . 56.  $a = \frac{m}{M + m} g$ ;  $T = \frac{Mm}{M + m} g$ . 57.  $a =$   
 $= \frac{Mg}{M + m_1 + m_2 + m_3}$ ;  $T_1 = (m_1 + m_2 + m_3)a$ ;  $T_2 = (m_2 + m_3)a$ ;  $T_3 = m_3 a$ . 58. а)  $v =$   
 $= \frac{mg^2 \cos \alpha}{2a \sin^2 \alpha}$ ; б)  $S = \frac{m^2 g^3 \cos \alpha}{6a^2 \sin^3 \alpha}$ . 59.  $F = nm(a + \mu g)$ ;  $\Delta x_i = im(a + \mu g)/k$ .  
 60.  $a = g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)$ . 61.  $\mu = \frac{\eta^2 - 1}{\eta^2 + 1}$   $\operatorname{tg} \alpha = 0,16$ . 62.  $F = m_1 m_2 g \cos \alpha \times$   
 $\times \frac{(\mu_1 - \mu_2)}{m_1 + m_2}$ ;  $\operatorname{tg} \alpha_{\min} = \frac{\mu_1 m_1 + \mu_2 m_2}{m_1 + m_2}$ . 63.  $\operatorname{tg} \beta = \mu$ . 64. а)  $\operatorname{tg} 2\alpha_0 = -1/\mu$ ;  $\alpha_0 = 45^\circ$ ;  
 $\alpha_0 = 52^\circ$ ; б)  $\mu = 0,27$ . 65. а)  $\frac{m_2}{m_1} > \sin \alpha + \mu \cos \alpha$ ; б)  $\frac{m_2}{m_1} < \sin \alpha - \mu \cos \alpha$ ;  
 в)  $\sin \alpha - \mu \cos \alpha < \frac{m_2}{m_1} < \sin \alpha + \mu \cos \alpha$ . 66.  $a = \frac{g(\sin \beta - \sin \alpha)}{2} - \frac{g}{2} \times$   
 $\times (\mu_2 \cos \beta + \mu_1 \cos \alpha)$ . 67.  $\mu_2 \geq \frac{m_1 \mu_1 + m_2 \operatorname{tg} \alpha}{m_1 + m_2}$ . 68.  $a = \frac{m_1 g - m_2 g - m_3 g}{m_1 + m_2}$ ;  
 $a_3 = 0$ . 69.  $a_1 = \frac{m_1(m_2 + m_3) - 4m_2 m_3}{m_1(m_2 + m_3) + 4m_2 m_3} g$ ;  $T_1 = \frac{8m_1 m_2 m_3}{m_1(m_2 + m_3) + 4m_2 m_3} g$ ;  $T_2 = \frac{T_1}{2}$ .  
 70.  $a_1 = \frac{4m_1 m_2 - (m_1^2 + 3m_1 m_2)}{m_1(m_1 + 3m_2)} g = 0,09g$ ;  $a_2 = 3a_1$ ;  $a_3 = a_1$ ;  $T = \frac{4m_1 m_2 g}{m_1 + 3m_2} =$   
 $= 2,14$  Н;  $\Delta h = \frac{a_1 t^2}{2} = 0,445$  м;  $h = \frac{(a_1 + a_2)t^2}{2} = 1,78$  м. 71.  $t = \sqrt{\frac{2l(4 + \eta)}{3g(2 - \eta)}} =$   
 $= 1,4$  с. 72.  $a = \frac{2g(2\eta - \sin \alpha)}{4\eta + 1}$ . 73.  $F = (M + m)a + 2\mu mg = 1,5$  Н;  $T = m \times$   
 $\times (a - \mu g) = 7,35$  Н. 74.  $a_2 = 0,0168$  г (вертик. вгору);  $T_1 \approx 1,5$  Н;  $T_2 \approx 3$  Н.  
 75.  $a = g \frac{\sqrt{2}}{2 + \mu + M/m}$ . 76.  $\Delta r_c = \frac{m}{2M} \Delta r$ . 77. а) 20 см; б) 20 см; в) 20 см і 0 см;  
 г) вліво; дорівнює 0. 78.  $\omega = \sqrt{\frac{2g \operatorname{tg} \alpha}{D + 2l \sin \alpha}}$ . 79.  $\mu \geq \frac{\omega^2 l \sin \alpha + g \cos \alpha}{g \sin \alpha - \omega^2 l \sin \alpha \cos \alpha} \approx$   
 $\approx 0,5$ . 80.  $F = 4,5 \cdot 10^4$  Н. 81. 2814 Н, 4186 Н. 82.  $v = \frac{(0,5d - h)g}{\mu} = 14$  м/с.  
 83.  $r = \frac{g}{\omega^2 \operatorname{tg} \alpha}$ . 84.  $\omega^2 = \frac{g(\cos \alpha - \mu \sin \alpha)}{h \operatorname{tg} \alpha (\sin \alpha + \mu \cos \alpha)}$ . 85.  $\mu = \frac{\cos \alpha (g + \omega^2 R \sin \alpha)}{g \sin \alpha + \omega^2 R \cos \alpha}$ .

86.  $\frac{\Delta l}{l} = \frac{1}{k/m\omega - 1}$ ; не залежить. 87.  $a = \left[1 - \cos \frac{l}{R}\right] \frac{Rg}{l}$ . 88.  $\mu = \operatorname{tg} \alpha$ ;  
 $\mu_1 = \frac{g \sin \alpha - a \cos \alpha}{g \cos \alpha + a \sin \alpha}$ ;  $\mu_2 = \frac{g \sin \alpha + a \cos \alpha}{g \cos \alpha - a \sin \alpha}$ . 89.  $\Delta S = \frac{\omega l^2}{u}$ . 90.  $g = \gamma \frac{M}{R^2} -$   
 $-\omega^2 R \cos^2 \varphi$ . 91.  $\Delta x = \frac{2}{3} h \omega \sqrt{\frac{2h}{g} \cos \varphi} = 0,138 \text{ м}$ ;  $\frac{\Delta x_{\text{екв}}}{\Delta x} = 1,78$ . 92.  $F = m \times$   
 $\times \sqrt{g^2 + \omega^4 r^2 + (2v\omega)^2} = 8 \text{ Н}$ . 93.  $h = \frac{\omega S^2}{v} \sin \varphi = 7 \text{ см}$ , де  $\omega$  — кутова швид-  
кість Землі. 94.  $F = 2mv\omega \sin \varphi = 25 \text{ кН}$ . 95.  $F_{\text{вн}} = m\omega^2 R \sqrt{5/9} = 8 \text{ Н}$ ;  $F_k =$   
 $= \frac{2}{3} m\omega^2 R \sqrt{5 + \frac{8g}{3R\omega^2}} = 17 \text{ Н}$ . 96.  $y = \frac{\omega x_0}{\Omega} \sin \varphi \approx 1 \text{ мм}$ , де  $\Omega^2 = \frac{g}{l}$ . 97.  $\frac{m}{m_0} =$   
 $= \frac{1}{\sqrt{2(1-v/c)}} \approx 70$ . 98.  $v = \frac{c}{\eta} \sqrt{\eta^2 - 1} = \frac{1}{2} c \sqrt{3}$ . 99.  $v = \frac{Fct}{\sqrt{m_0^2 c^2 + F^2 t^2}}$ ;  
 $l = \sqrt{\left(\frac{m_0 c^2}{F}\right)^2 + c^2 t^2} - \frac{m_0 c^2}{F}$ . 100.  $\omega = qBc \sqrt{\frac{1}{m_0^2 c^2 + q^2 R^2 B^2}}$ . 101.  $\operatorname{tg} \varphi =$   
 $= \frac{eEt}{p_0}$ ;  $v_x = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{m_0 c}{p_0}\right)^2 + \left(\frac{eEt}{p_0}\right)^2}}$ ;  $v_y = \frac{eEt}{m_0 p_0} \sqrt{\left(1 + \left(\frac{m_0 c}{p_0}\right)^2 + \left(\frac{eEt}{p_0}\right)^2\right)^{-1}}$ .  
102.  $v = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$ . 103.  $\vec{v} = 1,0\vec{i} + 2,0\vec{j} - 4,0\vec{k}$ ;  $v = 4,6 \text{ м/с}$ . 104.  $v = \frac{M}{m} \times$   
 $\times \frac{\sqrt{2gl \sin \alpha}}{\cos \alpha}$ . 105.  $v_2 = \sqrt{2gl \sin \alpha} \left(\frac{M+m}{M} + \frac{mv}{M} \sqrt{\frac{\sin \alpha}{2gl}}\right)$ . 106.  $v = \frac{M}{m} \times$   
 $\times \cos \alpha \sqrt{2gl \sin \alpha}$ . 107.  $S_2 = 5000 \text{ м}$ . 108.  $v_1 = -\frac{mv}{M-m}$ ;  $v_2 = \frac{Mv}{M-m}$ .  
109.  $v_1 = \frac{m_1(v+u) + mv}{m+m_1}$ ;  $v_2 = v$ ;  $v_3 = \frac{m_1(v-u) + mv}{m+m_1}$ . 110.  $v_1 = -\frac{2mv}{M+2m}$ ;  
 $\frac{v_2}{v_1} > 1$ ;  $v_2 = -\frac{(2M+3m)mv}{(M+m)(M+2m)}$ . 111.  $v = \frac{F}{\mu} \ln \frac{m_0}{m_0 - \mu t}$ . 112.  $v = \frac{Ft}{m_0 + \mu t}$ .  
113. а)  $t = \frac{u}{g} \ln(1 + \eta)$ ; б)  $\mu = \frac{g}{u} m_0 e^{-\frac{gt}{u}}$ . 114.  $\alpha = \frac{u}{v_0} \ln \frac{m_0}{m}$ . 115.  $A = (h + \mu l) \times$   
 $\times mg$ . 116.  $A = 4,05 \text{ Дж}$ . 117.  $S = \frac{v^2 + \mu gl}{2\mu g}$ . 118.  $\Delta x = 8 \text{ см}$ . 119. а)  $\frac{u_1}{u_2} = \frac{k_2}{k_1}$ ;  
б)  $\frac{u_1}{u_2} = \frac{k_1}{k_2}$ . 120.  $N = 2mg \sin \alpha v$ ;  $N = 2 \cdot 10^4 \text{ Вм}$ . 121.  $N = mg(gt - v_0 \sin \alpha)$ ;  
 $A = mgt \left(\frac{gt}{2} - v_0 \sin \alpha\right)$ . 124.  $h' = \frac{(2h+R)}{3}$ . 125.  $m_2 = 3m_1$ ;  $H = 2(3h_0 - r)$ .  
126. а)  $v = \frac{2M}{m} \sqrt{gl \sin \frac{\varphi}{2}}$ ; б)  $\eta \approx 1 - m/M$ . 127.  $\Delta T = -\frac{\mu(v_1 - v_2)^2}{2}$ , де  $\mu =$   
 $= \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ . 128.  $\eta = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}$ ;  $\eta = \frac{4m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2}$ . 129. а)  $\frac{m_1}{m_2} = \frac{1}{3}$ ; б)  $\frac{m_1}{m_2} = 1 +$

$+ 2 \cos \varphi = 2,0$ . 130.  $\eta = \frac{1}{2} \cos^2 \alpha = 0,25$ . 131.  $v_{\text{max}} = v(1 + \sqrt{2(\eta - 1)}) = 1 \text{ км/с}$ .  
132.  $\frac{\Delta T}{T} = \frac{m}{M} + \left(1 + \frac{m}{M}\right) \operatorname{tg}^2 \varphi - 1 = -40\%$ . 133.  $-v/5$ ;  $2\sqrt{3/5}v$ . 134.  $A =$   
 $= 0,42m_0 c^2$ . 135.  $m'_0 = 2,31m_0$ ;  $u = 0,5 \text{ с}$ ;  $T = 0,36m_0 c^2$ . 136.  $L = m(1,1R\gamma M_3 R_3)^{1/2}$ ;  
 $L = 5,3 \cdot 10^{13} \text{ кг} \cdot \text{м}^2/\text{с}$ . 138.  $M = 2b\sqrt{a/b}$ . 139.  $L = \frac{1}{2} mgv_0 t^2 \cos \alpha$ ;  $L = \frac{mv_0^3}{2g} \times$   
 $\times \sin^2 \alpha \cos \alpha = 37 \text{ кг} \cdot \text{м}^2/\text{с}$ . 140.  $|\Delta L| = 2\sqrt{1 - \left(\frac{g}{\omega^2 l}\right)^2} \frac{mgl}{\omega}$ . 141.  $L = Rmgt$ .  
142.  $F = \frac{m\omega^2 r_0^4}{r^3}$ . 143.  $\frac{\omega_1}{\omega_0} = \frac{r_0^2}{r^2}$ . 144.  $v_2 = v_1 \frac{r_1}{r_2 \sin \alpha}$ . 145.  $\frac{v_1}{v_0} = \frac{r_2}{r_1}$ . 146.  $E =$   
 $= \gamma \frac{Mm}{2a}$ . 147.  $I = \frac{1}{3} ml^2$ . 148.  $I = \frac{1}{3} m(a^2 + b^2)$ . 149.  $I = \frac{3}{10} mR^2$ . 150.  $I = \frac{2}{3} \times$   
 $\times mR^2$ . 151.  $\omega = \frac{gt}{R(1+M/2m)}$ ;  $\varphi = \frac{gt^2}{2R(1+M/2m)}$ . 152.  $T = \frac{mg}{2}$ ;  $a_0 = \frac{gmr^2}{l}$ .  
153.  $T = \frac{1}{6} mg = 13 \text{ Н}$ ;  $\beta = \frac{2}{3} \frac{g}{R} = 5 \cdot 10^2 \text{ рад/с}^2$ . 154.  $a = \frac{(M+2m)g}{4m+M+1/r^2}$ ;  
 $T_1 = \left(2m + \frac{l}{r^2}\right) a - mg$ ;  $T_2 = m(g - 2a)$ . 155.  $a_1 = \frac{1 + 3I/(mr^2)}{I/(mr^2) + (1 + I/(mr^2))^2} g$ ;  
 $a_2 = \frac{1 + 2I/(mr^2)}{I/(mr^2) + (1 + I/(mr^2))^2} g$ . 156.  $a = \frac{F(R \cos \alpha - r)R}{I + mr^2}$ ;  $f = F \cos \alpha - ma$ .  
157.  $a = \frac{g \sin \alpha}{1 + I/(mr^2)} = 1,6 \text{ м/с}^2$ . 158.  $a = \frac{(M_1 + M_2 + M_3) \sin \alpha - \mu M_3 \cos \alpha}{3/2 M_1 + M_2 + M_3} g$ ;  
 $T = M_3 g \frac{1/2 M_1 \sin \alpha - \mu(3/2 M_1 + M_2) \cos \alpha}{3/2 M_1 + M_2 + M_3}$ . 159.  $\mu \geq \frac{\operatorname{tg} \alpha}{3}$ . 160.  $a_{\text{max}} = \frac{2\mu g}{2 - 3\mu}$ ;  
 $F_{\text{max}} = \frac{3\mu mg}{2 - 3\mu}$ . 161.  $L = 52 \cdot 10^{40} \text{ з} \cdot \text{см}^2/\text{с}$ . 162. Швидкість обертання збіль-  
шиться в  $(1 + mR^2/I)$  раз. Кінетична енергія збільшиться в стільки ж раз.  
163.  $\omega = \frac{mrv}{1/2 MR^2 + mr^2}$ . 164. 1.  $\Delta T = \frac{2I^2 \omega_1^2}{I_2}$ ; 2.  $\Delta T = \frac{I_1^2 \omega_1^2}{2I_2}$ . 165.  $t = \frac{mR^2 \omega}{2M_0}$ ;  
 $n = \frac{M_0}{2I} t^2$ , де  $I = I_0 + m\left(d^2 + \frac{R^2}{2}\right)$ . 166.  $N = \frac{3\pi r n^2}{4\mu g}$ . 167.  $\omega_1 = \frac{I_1 R_2^2}{I_1 R_2^2 + I_2 R_1^2} \omega_0$ ;  
 $\omega_2 = \frac{I_1 R_2 R_1}{I_1 R_2^2 + I_2 R_1^2} \omega_0$ ;  $\Delta T = \frac{I_1 I_2 R_1^2}{2(I_1 R_2^2 + I_2 R_1^2)} \omega_0^2$ . 168.  $\Delta T = \frac{m_1 m_2 r_1^2 r_2 \omega_0^2}{4(m_1 r_1 + m_2 r_2)}$ . 169.  $t =$   
 $= \frac{3}{8} \frac{r_0 \omega_0}{\mu g}$ . 170. а)  $\Omega = \frac{mg l}{I \omega} = 0,7 \text{ рад/с}$ ; б)  $F = m\Omega^2 l \sin \varphi = 10 \text{ мН}$ . 171.  $\Omega =$   
 $= \frac{ml}{I \omega} \sqrt{g^2 + a^2} = 0,8 \text{ рад/с}$ ;  $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{a}{g} = 6^\circ$ . 172.  $F' = \frac{2mR^2 \omega \omega'}{5l} = 0,3 \text{ кН}$ .  
173.  $M = 2\pi n l v / R = 6 \text{ кН} \cdot \text{м}$ . 174.  $v_{\text{max}} = 2,73 a \omega$ . 175.  $T = \pi \sqrt{\frac{m}{a^2 u_0}}$ . 176.  $T =$   
 $= 2\pi \sqrt{\frac{m}{k_1 + k_2}}$ . 177. а) центр мас нерухомиий, б)  $\omega = \sqrt{\frac{k}{\mu}}$ , де  $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$

зведена маса кульок; в)  $v_{\max} = a\omega = a\sqrt{\frac{k}{\mu}}$ . 178.  $T = 2\pi\sqrt{\frac{1,4(R-r)}{g}}$ .

179.  $S \approx \frac{l(1+e^{-\lambda/2})}{(1-e^{-\lambda/2})} = 2$  м. 180.  $T = \sqrt{\frac{(4\pi^2 + \lambda^2)\Delta x}{g}} = 0,7$  с. 181.  $\Theta = 0,5 \times$   
 $\times \sqrt{\frac{4g\tau^2}{l \ln^2 \eta} - 1} = 1,3 \cdot 10^2$ . 182.  $\eta = \frac{2\lambda h l}{\pi R^4 T}$ . 183.  $\Theta = 16$ ;  $\lambda = 0,2$ . 184.  $\omega_{\text{рез.}} =$   
 $= \sqrt{\frac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{2}} = 5,1 \cdot 10^2$  рад/с. 185. а)  $\omega_0 = \sqrt{\omega_1 \omega_2}$ ; б)  $\beta = \frac{|\omega_2 - \omega_1|}{2\sqrt{3}}$ ;  $\omega =$   
 $= \sqrt{\omega_1 \omega_2 - \frac{(\omega_2 - \omega_1)^2}{12}}$ . 186.  $A = \pi a F_0 \sin \varphi$ . 187.  $t = \frac{2l}{a(\sqrt{T_1} + \sqrt{T_2})}$ .

188. а)  $a/\lambda = 5,1 \cdot 10^{-5}$ ; б)  $v_m = 11$  см/с;  $3,2 \cdot 10^{-4}$ ; в)  $\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)_m = 3,2 \cdot 10^{-4}$ ;  
 $\left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right)_m = v \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)_m$ , де  $v = 0,34$  км/с — швидкість хвилі. 189.  $\Delta \varphi = -\frac{2\pi}{\gamma \lambda} \times$   
 $\times \ln(1 - \eta) \approx \frac{2\pi \eta}{\gamma \lambda} = 0,3$  рад. 190. а)  $\gamma = \frac{\ln \eta r_0 / r}{r - r_0} = 0,081$  м<sup>-1</sup>; б)  $v_m = \frac{2\pi \gamma a_0}{\eta} =$   
 $= 15$  см/с. 191.  $\bar{\omega} = 2/3 \omega_0$ . 192.  $a_m = 5$  мм, 3-му обертону. 193. Збіль-

шиться в  $\eta = \frac{\sqrt{1 - \Delta T/T}}{1 + \Delta l/l} = 2$  рази. 194.  $v = 2lv = 0,34$  км/с. 195.  $u = \frac{v}{v_0} \times$   
 $\times (\sqrt{1 + (v/v_0)^2} - 1) \approx \frac{v}{2v_0} = 0,5$  м/с. 196.  $v = \frac{v_0}{\sqrt{1 + 2at/v}} = 1,35$  κΓυ.

197. Зменшиться на  $2u/(v+u) = 2\%$ . 198.  $N = 6$  Вт;  $h \approx 80$  фон;  $R = 3,8 \times$   
 $\times 10^5$  м. 199.  $L^* = 100$  дб;  $L = 95$  фон;  $\Delta P = 1,6$  Н/м<sup>2</sup>;  $u_{\max} = 3,74 \cdot 10^{-3}$  м/с.

200.  $P = 4\pi r^2 e^{2\gamma} I_0 \cdot 10^4 = 1,4$  Вт, де  $L$  в белах. 202.  $Q = S_1 \cdot S_2 \sqrt{\frac{2g\Delta h}{S_2^2 - S_1^2}}$ .

203.  $Q = S \sqrt{\frac{2g\Delta h \rho_0}{\rho}}$ . 204.  $v = \sqrt{2g \left( h_1 + \frac{h_2 \rho_2}{\rho_1} \right)} \approx 3$  м/с, де  $\rho_1$  і  $\rho_2$  — гу-

стини води та спирту відповідно. 205.  $h = \frac{v^2}{2g} - h_0 = 20$  см. 206.  $Q = 9,8 \times$   
 $\times 10^{-4}$  м<sup>3</sup>/с;  $\Delta P = 83,3 \cdot 10^3$  Н/м<sup>2</sup>. 207.  $\tau = \sqrt{\frac{2h}{g} \frac{S}{s}}$ . 208.  $v = \omega h \sqrt{2l/h - 1}$ .

209.  $v = \sqrt{2(gh + \omega^2 R^2)}$ . 210.  $v = \sqrt{\frac{2(P - P_0)}{\rho} + 2gh}$ . 211.  $N = \frac{\pi \eta \omega^2 R^4}{h} =$   
 $= 9$  Вт. 212.  $v = v_0 \ln \frac{r}{R_2} : \ln \frac{R_1}{R_2}$ . 213. а)  $Q = \frac{\pi v_0 R^2}{2}$ ; б)  $T = \frac{\pi l v_0^2 R^2 \rho}{6}$ ;

в)  $F_{\text{тр}} = 4\pi \eta l v_0$ ; г)  $\Delta P = \frac{4\eta l v_0}{R^2}$ . 214.  $v = \sqrt{2g\Delta h} = 1$  м/с, где  $\Delta h = h_3 - h_2$ .

215.  $e^{\alpha \Delta x} = 5$ . 216.  $v_2 = v_1 \frac{r_1 \rho_1 \eta_2}{r_2 \rho_2 \eta_1} = 5$  мкм/с.

## ЗМІСТ

Вступ.....	3
Практичні поради до розв'язування задач.....	4
<b>Розділ I. Кінематика точки і твердого тіла.....</b>	<b>6</b>
§ 1. Рівномірний рух.....	7
§ 2. Нерівномірний рух.....	11
§ 3. Обертальний рух.....	15
§ 4. Релятивістська кінематика.....	19
<b>Розділ II. Динаміка матеріальної точки і системи матеріальних точок.....</b>	<b>25</b>
§ 1. Динаміка прямолінійного руху.....	26
§ 2. Динаміка криволінійного руху.....	34
§ 3. Неінерціальні системи відліку.....	37
§ 4. Релятивістська динаміка.....	41
<b>Розділ III. Закони збереження в механіці.....</b>	<b>45</b>
§ 1. Закон збереження імпульсу.....	45
§ 2. Закон збереження енергії.....	50
§ 3. Закон збереження моменту імпульсу.....	57
<b>Розділ IV. Динаміка твердого тіла.....</b>	<b>61</b>
§ 1. Рівняння руху твердого тіла.....	61
§ 2. Момент імпульсу та енергія твердого тіла.....	66
<b>Розділ V. Коливання і хвилі.....</b>	<b>71</b>
§ 1. Гармонічні коливання.....	71
§ 2. Хвилі в пружних середовищах. Акустика.....	77
<b>Розділ VI. Механіка рідин і газів.....</b>	<b>81</b>
Додатки.....	88
Відповіді.....	94

Копійка К. М., Поліщук Д. Д.  
К658 Збірник задач з механіки: Навчальний посібник. — Одеса:  
Астропринт, 2001. — 100 с.  
ISBN 966—549—594—1.

Запропонований посібник є збірником задач з механіки, складених відповідно до програми курсу «Загальна фізика», для фізичних спеціальностей університетів. Він містить понад 200 задач з усіх розділів механіки, розміщених у логічній послідовності, в порядку їх ускладнення. До збірника включені найбільш характерні і типові задачі, які автори склали на основі існуючої науково-методичної літератури по даному розділу фізики.

Наведені на початку кожного розділу короткі теоретичні відомості, а також методичні вказівки і приклади розв'язування типових задач роблять збірник корисним і зручним для використання студентами та викладачами.

Посібник розрахований на студентів фізичних спеціальностей університетів. Може бути також використаний студентами інших вузів, які бажають поглибити свої знання з механіки.

К 1603000000—084  
549—2001 Без оголош.

ББК 22.2я73  
УДК 531/534(076.1)

*Навчальне видання*

**КОПІЙКА** Кузьма Михайлович  
**ПОЛІЩУК** Дмитро Дмитрович

## **ЗБІРНИК ЗАДАЧ З МЕХАНІКИ**

Навчальний посібник

Зав. редакцією *Т. М. Забанова*  
Редактор *Ж. Б. Мельниченко*  
Технічні редактори *Р. М. Кучинська,*  
*Д. М. Островеров*

---

Здано до набору 31.01.2001. Підписано до друку 23.08.2001. Формат 60×84/16. Папір офсетний. Гарнітура Літературна. Друк офсетний. Ум. друк. арк. 5,81. Обл.-вид. арк. 6,13. Тираж 300 прим. Зам. № 61.

Видавництво і друкарня «Астропринт»  
(Свідоцтво ДК № 132 від 28.07.2000 р.)  
65026, м. Одеса, вул. Преображенська, 24.  
Тел.: (0482) 26-98-82, 26-96-82, 68-77-33.  
[www.astroprint.odessa.ua](http://www.astroprint.odessa.ua)