

Министерство образования Украины

Одесский государственный университет им. И.И.Мечникова

Институт математики, экономики и механики

ВЕСОВЫЕ ОЦЕНКИ
ДЛЯ МАКСИМАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ХАРДИ-ЛИТТЛВУДА
(курс лекций)

Составитель: *А.А.Кореновский*
доцент кафедры
математического анализа

Одесса - 1998

Данный специальный курс предназначен для студентов-математиков, специализирующихся в области теории функций действительного переменного. Его можно воспринимать как первое знакомство с одним из направлений теории функций – весовыми неравенствами для операторов. Рассматривается один из классических операторов – максимальный оператор Харди-Литтлвуда. Сначала изучается его поведение в обычных пространствах L^p (раздел 2). В третьем разделе изложены сравнительно новые результаты, описывающие свойства максимального оператора в пространствах с весом. Начало этой тематики было положено в работе Макенхаупта 1972г. В дальнейшем весовые оценки для различных операторов изучались в работах многих авторов.

СОДЕРЖАНИЕ

Раздел 1. Функции распределения и перестановки. Неравенства Харди	4
Раздел 2. Максимальная функция Харди-Литтлвуда	10
Раздел 3. Неравенства с весовыми нормами для максимальной функции	27
Раздел 4. Весовые оценки сингулярных интегралов – краткий обзор	47

1 Функции распределения и перестановки. Неравенства Харди.

Перестановки имеют многочисленные приложения в различных вопросах теории функций. Впервые они использовались в работах Штейнера и Шварца во второй половине 19 столетия. Систематическое исследование свойств перестановок функций и последовательностей начато в работах Харди и Литтлвуда. Эти исследования продолжают и поныне различными авторами.

Мы будем рассматривать пространство \mathcal{R}^n , на котором задана неотрицательная мера μ . Всюду в дальнейшем будем считать, что мера μ является борелевской,¹ конечной на компактных множествах и обладает свойством счетной аддитивности. Если μ – лебегова мера в \mathcal{R}^n , то для измеримого множества $E \subset \mathcal{R}^n$ будем обозначать $\mu(E) = |E|$.

Пусть f – измеримая функция на множестве $E \subset \mathcal{R}^n$. Функция распределения для f определяется равенством

$$\lambda_\mu(y) = \mu(\{x \in E : |f(x)| > y\}), \quad 0 \leq y < +\infty.$$

В случае $\mu(E) = +\infty$ дополнительно предполагаем, что $\lambda_\mu(y) < +\infty$ для всех $y > 0$.

Невозрастающей перестановкой функции f называется невозрастающая на $(0, \mu(E))$ функция $f_\mu^*(t)$ такая, что

$$|\{t \in (0, \mu(E)) : f_\mu^*(t) > y\}| = \mu(\{x \in E : |f(x)| > y\}) = \lambda_\mu(y)$$

для любого $y \geq 0$.

Если μ – лебегова мера (в этом случае индекс μ у функции распределения и перестановки будем опускать), то перестановка f^* – это невозрастающая функция, равноизмеримая с $|f|$.

Будем предполагать, что перестановка f_μ^* непрерывна слева на $(0, \mu(E))$; при этом условии она определяется однозначно. Через функцию распределения перестановка выражается следующим равенством

$$f_\mu^*(t) = \inf\{y > 0 : \lambda_\mu(y) < t\}, \quad 0 < t < \mu(E).$$

Это равенство показывает, что в определенном смысле перестановка – это функция, обратная к функции распределения.

Эквивалентное определение перестановки можно записать равенством

$$f_\mu^*(t) = \sup_{e \subset E, \mu(e)=t} \inf_{x \in e} |f(x)|, \quad 0 < t < \mu(E).$$

Любая величина, зависящая только от размеров (относительно меры μ) функции f , может быть выражена через ее перестановку или же функцию распределения. Так, например, согласно определению интеграла Лебега, для $0 < p < +\infty$

$$\int_E |f(x)|^p d\mu = - \int_0^{+\infty} y^p d\lambda_\mu(y) = \int_0^{\mu(E)} (f_\mu^*(t))^p dt.^2$$

¹ Мера μ называется борелевской если она определена на классе всех борелевских подмножеств из \mathcal{R}^n . Борелевскими множествами называются элементы σ -алгебры, порожденной классом всех открытых (или замкнутых) множеств.

² Доказательство первого равенства (для ограниченной f):

$$\int_E |f|^p d\mu = \lim_{d \rightarrow 0} \sum_k y_k \mu(e_k) = \lim_{d \rightarrow 0} \sum_k y_k \mu(\{y_k < |f|^p \leq y_{k+1}\}) =$$

Легко также видеть, что для $f \in L_\mu^\infty$ (L_μ^∞ – класс существенно ограниченных по мере μ функций)

$$\begin{aligned} \|f\|_{\mu, \infty} &= \inf\{y : \lambda_\mu(y) = 0\} = \\ &= \sup\{y : \lambda_\mu(y) > 0\} = \lim_{t \rightarrow +0} f_\mu^*(t). \end{aligned}$$

Норма в L_μ^p функции f может быть выражена через функцию распределения следующим равенством

$$\left\{ \int_E |f(x)|^p d\mu \right\}^{1/p} = \left\{ p \int_0^{+\infty} y^{p-1} \lambda_\mu(y) dy \right\}^{1/p}.$$

Для доказательства достаточно применить теорему Фубини:

$$\begin{aligned} \int_E |f(x)|^p d\mu &= - \int_0^{+\infty} y^p d\lambda_\mu(y) = \int_0^{+\infty} p \int_0^y t^{p-1} dt d\lambda_\mu(y) = \\ &= - \int \int_{\{t < y\}} pt^{p-1} dt d\lambda_\mu(y) = - \int_0^{+\infty} pt^{p-1} dt \int_t^{+\infty} d\lambda_\mu(y) = \\ &= p \int_0^{+\infty} t^{p-1} \lambda_\mu(t) dt, \text{ так как } \lambda_\mu(+\infty) = 0. \end{aligned}$$

Пусть $f \in L_\mu^p(E)$ при некотором $0 < p < +\infty$. Тогда, в силу неравенства

$$\begin{aligned} \int_E |f(x)|^p d\mu &\geq \int_{\{x \in E: |f(x)| > y\}} |f(x)|^p d\mu \geq \\ &\geq y^p \int_{\{x \in E: |f(x)| > y\}} d\mu = y^p \lambda_\mu(y), \end{aligned}$$

получаем

$$\lambda_\mu(y) \leq \frac{c}{y^p}, \quad y > 0, \tag{1.1}$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{d \rightarrow 0} \sum_k z_k^p \mu(\{z_k < |f| \leq z_{k+1}\}) = \lim_{d \rightarrow 0} \sum_k z_k^p (\lambda_\mu(z_k) - \lambda_\mu(z_{k+1})) = \\ &= - \lim_{d \rightarrow 0} \sum_k z_k^p (\lambda_\mu(z_{k+1}) - \lambda_\mu(z_k)) = - \int y^p d\lambda_\mu(y). \end{aligned}$$

Общий случай исчерпывается с помощью срезов и предельного перехода.

Доказательство второго равенства (для ограниченной f):

$$\begin{aligned} \int_E |f|^p d\mu &= \lim_{d \rightarrow 0} \sum_k y_k \mu(\{y_k < |f|^p \leq y_{k+1}\}) = \\ &= \lim_{d \rightarrow 0} \sum_k y_k (\mu(\{|f|^p > y_k\}) - \mu(\{|f|^p > y_{k+1}\})) = \\ &= \lim_{d \rightarrow 0} \sum_k y_k (|\{(f_\mu^*)^p > y_k\}| - |\{(f_\mu^*)^p > y_{k+1}\}|) = \\ &= \lim_{d \rightarrow 0} \sum_k y_k |\{y_k < (f_\mu^*)^p \leq y_{k+1}\}| = \int (f_\mu^*)^p(t) dt. \end{aligned}$$

Общий случай исчерпывается с помощью срезов и предельного перехода.

где $c = \int_E |f(x)|^p d\mu$. Неравенство (1.1) при $p = 1$ называется *неравенством Чебышева*. При $y \rightarrow +\infty$ его можно уточнить. Именно, учитывая, что для $f \in L_\mu^p$

$$\int_{\{x \in E: |f(x)| > y\}} |f(x)|^p d\mu \rightarrow 0, \quad y \rightarrow +\infty,^3$$

получаем

$$\lambda_\mu(y) = \bar{o}\left(\frac{1}{y^p}\right), \quad y \rightarrow +\infty. \quad (1.2)$$

Рассмотрим как неравенства, аналогичные (1.2), можно получить, используя перестановку. В силу очевидных соотношений

$$\begin{aligned} \infty &> \int_E |f(x)|^p d\mu = \int_0^{+\infty} (f_\mu^*(t))^p dt \geq \\ &\geq \int_0^1 (f_\mu^*(t))^p dt \geq \sum_{k=0}^{\infty} (f_\mu^*(2^{-k}))^p \cdot 2^{-k-1}, \end{aligned}$$

учитывая сходимость ряда в правой части и монотонность f_μ^* , получаем

$$f_\mu^*(t) = \bar{o}\left(t^{-1/p}\right), \quad t \rightarrow +0,$$

а это эквивалентно (1.2). С другой стороны, из неравенства

$$\infty > \int_0^{+\infty} (f_\mu^*(t))^p dt \geq \int_1^{+\infty} (f_\mu^*(t))^p dt \geq \sum_{k=0}^{\infty} (f_\mu^*(2^{k+1}))^p \cdot 2^k$$

следует

$$f_\mu^*(t) = \bar{o}\left(t^{-1/p}\right), \quad t \rightarrow +\infty. \quad (1.3)$$

В терминах функции распределения это равенство принимает следующий вид

$$\lambda_\mu(y) = \bar{o}(y^{-p}), \quad y \rightarrow +0.^4 \quad (1.4)$$

³Для доказательства этого предельного соотношения достаточно заметить, что

$$\int_{\{x \in E: |f(x)| > y\}} |f(x)|^p d\mu = \int_0^{\lambda_\mu(y)} (f_\mu^*(t))^p dt$$

и учесть, что $\lambda_\mu(y) \rightarrow 0$ при $y \rightarrow +\infty$. Тогда наше соотношение вытекает из свойства абсолютной непрерывности интеграла

$$\int_0^{\mu(E)} (f_\mu^*(t))^p dt = \int_E |f(x)|^p d\mu.$$

⁴Докажем, что (1.3) влечет (1.4).

Предположим, что $\lambda(y) \neq \bar{o}(y^{-p})$, $y \rightarrow 0$. Тогда найдется такое $c > 0$, что для некоторой последовательности чисел $y_k \rightarrow 0$ справедливо $\lambda(y_k) \geq cy_k^{-p}$. Но из (1.3) следует, что

$$y_k = f_\mu^*(\lambda(y_k)) \leq f_\mu^*(cy_k^{-p}) = \bar{o}((cy_k^{-p})^{-1/p}) = \bar{o}(y_k),$$

что невозможно.

Упражнение. Докажите, что (1.4) влечет (1.3).

Заметим, что оба последних равенства имеют смысл лишь в случае, когда $\mu(E) = \infty$.

Пусть $f \in L_\mu(E)$. Тогда для любого $t > 0$ определена функция

$$f_\mu^{**}(t) = \frac{1}{t} \int_0^t f_\mu^*(u) du, \quad 0 < t \leq \mu(E).$$

Функция f_μ^{**} часто применяется для оценок различных операторов. Ясно, что $f_\mu^{**}(t) \geq f_\mu^*(t)$ для любого $t > 0$, причем, если при некотором t_0 имеет место равенство, то оно же имеет место и для всех $t < t_0$.⁵

Функция f_μ^{**} , в отличие от f_μ^* , обладает свойством *полуаддитивности*, т.е.

$$(f + g)_\mu^{**}(t) \leq f_\mu^{**}(t) + g_\mu^{**}(t), \quad t > 0.$$

В самом деле, это мгновенно вытекает из следующих неравенств

$$\int_0^t (f + g)_\mu^*(u) du = \sup_{e: \mu(e)=t} \int_e |f(x) + g(x)| d\mu \leq$$

⁵ Покажем, что f_μ^{**} – невозрастающая, непрерывная функция и если найдутся такие числа $t_1 > t_2 > 0$, что $f_\mu^{**}(t_1) = f_\mu^{**}(t_2)$, то $f_\mu^*(t) = f_\mu^{**}(t) = f_\mu^*(t_1)$ для всех $t < t_1$.

Действительно, из очевидного равенства

$$\frac{1}{t_2} \int_0^{t_2} f_\mu^* \geq f_\mu^*(t_2) \geq \frac{1}{t_1 - t_2} \int_{t_2}^{t_1} f_\mu^* \quad (1.5)$$

следует

$$\begin{aligned} \frac{1}{t_1} \int_0^{t_1} f_\mu^* &= \frac{t_2}{t_1} \frac{1}{t_2} \int_0^{t_2} f_\mu^* + \left(1 - \frac{t_2}{t_1}\right) \frac{1}{t_1 - t_2} \int_{t_2}^{t_1} f_\mu^* \leq \\ &\leq \frac{t_2}{t_1} \frac{1}{t_2} \int_0^{t_2} f_\mu^* + \left(1 - \frac{t_2}{t_1}\right) \frac{1}{t_2} \int_0^{t_2} f_\mu^* = \frac{1}{t_2} \int_0^{t_2} f_\mu^*, \end{aligned}$$

т.е. монотонность f_μ^{**} .

Непрерывность f_μ^{**} следует из непрерывности интеграла с переменным верхним пределом.

Пусть $f_\mu^{**}(t_1) = f_\mu^{**}(t_2)$. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{1}{t_1} \int_0^{t_1} f_\mu^* &= \frac{t_2}{t_1} \frac{1}{t_2} \int_0^{t_2} f_\mu^* + \left(1 - \frac{t_2}{t_1}\right) \frac{1}{t_1 - t_2} \int_{t_2}^{t_1} f_\mu^* = \\ &= \frac{t_2}{t_1} \frac{1}{t_1} \int_0^{t_1} f_\mu^* + \left(1 - \frac{t_2}{t_1}\right) \frac{1}{t_1 - t_2} \int_{t_2}^{t_1} f_\mu^*, \end{aligned}$$

откуда, перенося первое слагаемое справа в левую часть, получим

$$\frac{1}{t_1} \int_0^{t_1} f_\mu^* = \frac{1}{t_2} \int_0^{t_2} f_\mu^* = \frac{1}{t_1 - t_2} \int_{t_2}^{t_1} f_\mu^* = f_\mu^*(t_2)$$

(последнее равенство справедливо в силу (1.5)). Но если $f_\mu^*(t_1) < f_\mu^*(t_2)$, то и $\frac{1}{t_1 - t_2} \int_{t_2}^{t_1} f_\mu^* < f_\mu^*(t_2)$, что противоречит последнему равенству. Это означает, что $f_\mu^*(t_1) = f_\mu^*(t_2) = f_\mu^{**}(t_2)$, а отсюда уже следует, что $f_\mu^*(t) = f_\mu^*(t_1)$ при всех $t < t_1$.

Покажем, что условие $f_\mu^*(t) \rightarrow 0, t \rightarrow \infty$, влечет $f_\mu^{**}(t) \rightarrow 0, t \rightarrow \infty$. Для этого зададим $\varepsilon > 0$ и найдем t_0 такое, что $f_\mu^*(t) < \varepsilon$ при $t > t_0$. В равенстве

$$f_\mu^{**}(t) = \frac{1}{t} \int_0^t f_\mu^* = \frac{1}{t} \int_0^{t_0} f_\mu^* + \frac{1}{t} \int_{t_0}^t f_\mu^*$$

выберем $t_1 > t_0$ настолько большим, чтобы первое слагаемое справа при $t > t_1$ было меньшим, чем ε . Второе слагаемое, очевидно, меньше ε . Получили $f_\mu^{**}(t) < 2\varepsilon$ при $t > t_1$.

$$\leq \sup_{e:\mu(e)=t} \int_e |f(x)| d\mu + \sup_{e:\mu(e)=t} \int_e |g(x)| d\mu = \int_0^t f_\mu^*(u) du + \int_0^t g_\mu^*(u) du.$$

На примере функций

$$f(x) = \chi_{(0,1/2]}(x), \quad g(x) = \chi_{(1/2,1)}(x), \quad 0 < x < 1,$$

видим, что для перестановок свойство полуаддитивности, вообще говоря, не имеет места. Действительно, $(f+g)(x) \equiv 1$, т.е. $(f+g)^*(t) \equiv 1$, а $f^*(t) = g^*(t) = f(t)$, т.е. при $1/2 < t < 1$ соответствующее неравенство неверно.

Если $f \in L_\mu^\infty$, то, очевидно,

$$\lim_{t \rightarrow +0} f_\mu^{**}(t) = \|f\|_{\mu, \infty}.$$

Пусть $f \in L_\mu(E)$. Тогда ясно, что существует такое T , для которого

$$\int_0^T f_\mu^*(t) dt \geq \frac{1}{2} \int_E |f(x)| d\mu.$$

Поэтому для $t > T$

$$f_\mu^{**}(t) = \frac{1}{t} \int_0^t f_\mu^*(u) du \geq \frac{1}{2t} \int_E |f(x)| d\mu \equiv \frac{c}{t}, \quad t \rightarrow +\infty.$$

Отсюда следует, что f_μ^{**} неинтегрируема на $(1, +\infty)$, если только лишь f не μ -эквивалентна нулю.

Далее, для $f \in L_\mu$ функция f_μ^{**} не обязана быть интегрируемой на $(0, \delta)$. В этом легко убедиться на примере функции

$$f(x) = \frac{1}{x \ln^2 x}, \quad 0 < x < \frac{1}{e},$$

для которой $f^*(t) = f(t)$ интегрируема на $(0, e^{-1})$, а

$$f_\mu^{**}(t) = \frac{1}{t} \int_0^t \frac{du}{u \ln^2 u} = \frac{1}{t \ln \frac{1}{t}}$$

неинтегрируема в окрестности нуля.

Из рассмотренного примера видно, что $f_\mu^{**}(t)$ может быть больше по порядку, чем $f_\mu^*(t)$ при $t \rightarrow 0+$. Однако, при $p > 1$ интегрируемость $(f_\mu^*)^p$ равносильна интегрируемости $(f_\mu^{**})^p$. В самом деле, очевидно,

$$\int_0^{+\infty} (f_\mu^*(t))^p dt \leq \int_0^{+\infty} (f_\mu^{**}(t))^p dt.$$

Обратное неравенство (с постоянной, большей, чем 1) является следствием более общего неравенства Харди.

Теорема 1 (неравенство Харди) Пусть неотрицательная функция $f \in L^p([0, +\infty))$ при некотором $p > 1$. Тогда для $r > 1$ справедливо неравенство

$$\int_0^{+\infty} t^{p-r} \left(\frac{1}{t} \int_0^t f(u) du \right)^p dt \leq \left(\frac{p}{r-1} \right)^p \int_0^{+\infty} t^{p-r} f^p(t) dt. \quad (1.6)$$

Доказательство. Предположим, что правая часть в (1.6) конечна. Для $0 < \xi < T < +\infty$ имеем

$$\begin{aligned} \int_{\xi}^T t^{-r} \left(\int_0^t f(u) du \right)^p dt &= -\frac{1}{r-1} \int_{\xi}^T \left(\int_0^t f(u) du \right)^p \frac{d}{dt} (t^{-r+1}) dt = \\ &= \frac{1}{r-1} \xi^{-r+1} \left(\int_0^{\xi} f(u) du \right)^p - \frac{1}{r-1} T^{-r+1} \left(\int_0^T f(u) du \right)^p + \\ &\quad + \frac{p}{r-1} \int_{\xi}^T t^{-r+1+\frac{r}{p}-\frac{r}{p}} \left(\int_0^t f(u) du \right)^{p-1} f(t) dt. \end{aligned}$$

Интегрирование по частям законно, так как функция $\left(\int_0^t f(u) du \right)^p$ абсолютно непрерывна. Применяя неравенство Гельдера, находим

$$\begin{aligned} \int_{\xi}^T t^{-r} \left(\int_0^t f(u) du \right)^p dt &\leq \frac{1}{r-1} \xi^{-r+1} \left(\int_0^{\xi} f(u) du \right)^p + \\ &+ \frac{p}{r-1} \left\{ \int_{\xi}^T t^{p-r} f^p(t) dt \right\}^{1/p} \cdot \left\{ \int_{\xi}^T t^{r(\frac{1}{p}-1)p'} \left(\int_0^t f(u) du \right)^{(p-1)p'} dt \right\}^{1/p'} = \\ &= \frac{1}{r-1} \xi^{-r+1} \left(\int_0^{\xi} f(u) du \right)^p + \\ &+ \frac{p}{r-1} \left\{ \int_{\xi}^T t^{p-r} f^p(t) dt \right\}^{1/p} \cdot \left\{ \int_{\xi}^T t^{-r} \left(\int_0^t f(u) du \right)^p dt \right\}^{1/p'}, \end{aligned}$$

где $p' = p/(p-1)$ – сопряженный показатель. Отсюда, разделив на последний множитель справа, получаем

$$\begin{aligned} &\left\{ \int_{\xi}^T t^{-r} \left(\int_0^t f(u) du \right)^p dt \right\}^{1/p} \leq \\ &\leq \frac{1}{r-1} \xi^{-r+1} \left(\int_0^{\xi} f(u) du \right)^p \cdot \left\{ \int_{\xi}^T t^{-r} \left(\int_0^t f(u) du \right)^p dt \right\}^{-1/p'} + \\ &\quad + \frac{p}{r-1} \left\{ \int_{\xi}^T t^{p-r} f^p(t) dt \right\}^{1/p}. \end{aligned} \tag{1.7}$$

Покажем, что первое слагаемое справа в (1.7) стремится к нулю при $\xi \rightarrow 0$. Имеем

$$\begin{aligned} \xi^{-r+1} \left(\int_0^{\xi} f(u) du \right)^p &\leq \xi^{-r+1} \left\{ \int_0^{\xi} f^p(u) du \right\} \cdot \left\{ \int_0^{\xi} du \right\}^{p/p'} = \\ &= \xi^{-r+1+\frac{p}{p'}} \int_0^{\xi} f^p(u) du = \xi^{p-r} \int_0^{\xi} f^p(u) du. \end{aligned}$$

Если $p \geq r$, то правая часть стремится к нулю.⁶ Если же $p \leq r$, то

$$\xi^{p-r} \int_0^\xi f^p(u) du \leq \int_0^\xi u^{p-r} f^p(u) du \rightarrow 0, \quad \xi \rightarrow 0,$$

в силу сходимости интеграла справа в (1.6). Таким образом, при $\xi \rightarrow 0$ левая часть в (1.7) ограничена и имеет место неравенство

$$\left\{ \int_0^T t^{-r} \left(\int_0^t f(u) du \right)^p dt \right\}^{1/p} \leq \frac{p}{r-1} \left\{ \int_0^T t^{p-r} f^p(t) dt \right\}^{1/p}.$$

Устремляя $T \rightarrow +\infty$, получаем отсюда (1.6).

Теорема доказана.

Упражнение. Аналогичным образом доказать еще одно неравенство Харди:

$$\int_0^{+\infty} t^{p-r} \left(\frac{1}{t} \int_t^{+\infty} f(u) du \right)^p dt \leq \left(\frac{p}{1-r} \right)^p \int_0^{+\infty} t^{p-r} f^p(t) dt, \quad \text{где } r < 1. \quad (1.8)$$

Полагая $r = p > 1$ в неравенстве Харди (1.6), получаем

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{t} \int_0^t f(u) du \right)^p dt \leq \left(\frac{p}{p-1} \right)^p \int_0^{+\infty} f^p(t) dt, \quad f \geq 0.$$

Это неравенство можно переписать в виде

$$\int_0^{+\infty} (f_\mu^{**}(t))^p dt \leq \left(\frac{p}{p-1} \right)^p \int_0^{+\infty} (f_\mu^*(t))^p dt, \quad f \in L_\mu^p, \quad p > 1.$$

Таким образом, для $p > 1$ интегрируемость в степени p функции f_μ^{**} эквивалентна принадлежности f классу L_μ^p . Выше уже отмечалось, что при $p = 1$ это утверждение теряет силу.

Упражнение. Покажите, что при $p = 1$ неравенства Харди (1.6) и (1.8) обращаются в равенства.

⁶ Действительно, из сходимости интеграла $\int_0^{+\infty} t^{p-r} f^p(t) dt$ следует

$$t^{p-r} f^p(t) = \bar{o} \left(\frac{1}{t} \right), \quad t \rightarrow 0,$$

т.е.

$$f^p(t) = \bar{o}(t^{-1-p+r}), \quad t \rightarrow 0,$$

или

$$f(t) = \bar{o}(t^{-1+\frac{r}{p}-\frac{1}{p}}) = \bar{o}(t^{-1+\frac{1}{p}(r-1)}), \quad t \rightarrow 0.$$

Так как $r > 1$, то f суммируема и

$$\begin{aligned} \left(\int_0^\xi f(u) du \right)^p &= \bar{o} \left\{ \left(\int_0^\xi u^{-1+\frac{1}{p}(r-1)} du \right)^p \right\} = \\ &= \bar{o} \left(\left(\xi^{\frac{1}{p}(r-1)} \right)^p \right) = \bar{o}(\xi^{r-1}), \quad \xi \rightarrow 0. \end{aligned}$$

2 Максимальная функция Харди-Литтлвуда.

Пусть Q – куб⁷ из \mathcal{R}^n , $l(Q)$ – длина его стороны. Через cQ обозначаем куб с тем же центром, что и в кубе Q , длина стороны у которого равна $c \cdot l(Q)$. Говорят, что мера μ удовлетворяет *условию удвоения*, если

$$\mu(2Q) \leq c\mu(Q), \quad Q \subset \mathcal{R}^n, \quad (2.1)$$

где постоянная c не зависит от куба Q .

Напомним, что *абсолютно непрерывной* называется такая мера μ , что из равенства нулю лебеговой меры множества E следует, что $\mu(E) = 0$. В дальнейшем мы будем пользоваться тем известным фактом, что *для каждой абсолютно непрерывной меры μ существует локально суммируемая функция w , такая, что $\mu(E) = \int_E w(x)dx$* . Функция w называется *распределением* меры μ . В этой главе используем только абсолютно непрерывные меры.

Будем говорить, что функция f *локально суммируема* по мере μ на \mathcal{R}^n , если f суммируема по мере μ на каждом компакте из \mathcal{R}^n (или, что то же самое, на каждом конечном кубе). Через L_μ^{loc} обозначается класс всех локально суммируемых по мере μ функций.

Рассмотрим сначала максимальную функцию Харди-Литтлвуда *по мере Лебега* в \mathcal{R}^n .

Для $f \in L^{loc}$ она определяется равенством

$$Mf(x) = \sup_{Q \ni x} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)|dy, \quad x \in \mathcal{R}^n,$$

где верхняя грань берется по всем кубам Q , содержащим точку x .

Если функция f не эквивалентна нулю, то максимальная функция Mf несуммируема на всем \mathcal{R}^n . В самом деле, выберем куб Q_0 с центром в начале координат, для которого $\int_{Q_0} |f(x)|dx = c > 0$. Тогда для $x \notin Q_0$, обозначая через Q куб с центром в начале координат и длина стороны у которого $l(Q) = 2|x|$ (ясно, что $Q \ni x$), будем иметь

$$Mf(x) \geq \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)|dy \geq \frac{1}{|Q|} \int_{Q_0} |f(y)|dy = \frac{c}{2^n} \frac{1}{|x|^n},$$

а отсюда уже следует, что Mf несуммируема на всем \mathcal{R}^n .

Рассмотрим теперь функцию f , суммируемую на компактном множестве из \mathcal{R}^n . В этом случае максимальная функция, как и f^{**} , не обязана быть суммируемой на этом компакте. Достаточно рассмотреть тот же самый пример функции $f(x) = \frac{1}{x \ln^2(1/x)}$, $0 < x \leq \frac{1}{e}$. Однако, для $f \in L$ справедливо так называемое *неравенство слабого типа (1-1)*. Мы докажем это неравенство для более общей максимальной функции Харди-Литтлвуда, взятой по мере μ :

$$M_\mu f(x) = \sup_{Q \ni x} \frac{1}{\mu(Q)} \int_Q |f(y)|d\mu, \quad x \in \mathcal{R}^n,$$

где мера μ удовлетворяет условию удвоения (2.1).⁸

Рассмотрим сначала *локальный* вариант неравенства слабого типа (1-1), т.е. случай, когда f задана на конечном кубе $Q_0 \subset \mathcal{R}^n$. В этом случае в определении максимальной функции верхняя грань берется по всем кубам Q , содержащимся в Q_0 .

Теорема 2 (неравенство слабого типа (1-1)) Пусть функция $f \in L_\mu(Q_0)$, где мера μ на кубе $Q_0 \subset \mathcal{R}^n$ удовлетворяет условию удвоения (2.1). Тогда $M_\mu f$ конечна почти всюду на

⁷Здесь и всюду в дальнейшем рассматриваются кубы, стороны которых параллельны координатным осям.

⁸Именно в таком варианте эта теорема нам понадобится в дальнейшем.

Q_0 и для любого $\lambda > \frac{1}{\mu(Q_0)} \int_{Q_0} |f(x)| d\mu$ справедливо неравенство

$$\mu(\{x \in \mathcal{R}^n : M_\mu f(x) > \lambda\}) \leq c_\mu \frac{1}{\lambda} \int_{Q_0} |f(x)| d\mu, \quad (2.2)$$

где постоянная c_μ зависит лишь от меры μ (а именно, она зависит от постоянной c из условия (2.1)).

Доказательство этой теоремы базируется на одном из многочисленных вариантов следующей фундаментальной леммы о покрытии.

Лемма Витали (о покрытии). Пусть мера μ удовлетворяет условию удвоения (2.1). Далее, пусть μ -измеримое множество $E \subset \mathcal{R}^n$ покрыто объединением семейства кубов $\{Q_\alpha\}_\alpha$ ограниченного диаметра. Тогда из этого семейства можно выбрать конечный или счетный набор $\{Q_k\}_k$ попарно непересекающихся кубов так, что

$$\mu(E) \leq c \sum_k \mu(Q_k), \quad (2.3)$$

где постоянная c зависит лишь от постоянной в условии удвоения (2.1).

Доказательство. Выберем куб Q_1 так, что длина его стороны $l(Q_1) \geq \frac{1}{2} \sup_\alpha \{l(Q_\alpha)\}$. Пусть выбраны кубы Q_1, \dots, Q_k . Если среди оставшихся кубов Q_α нет таких, что не пересекаются с $\cup_{i=1}^k Q_i$, то процесс выбора кубов считаем законченным. В противном случае среди всех кубов, которые не пересекаются с $\cup_{i=1}^k Q_i$, выберем куб Q_{k+1} такой, что

$$l(Q_{k+1}) \geq \frac{1}{2} \sup\{l(Q_\alpha) : Q_\alpha \cap (\cup_{i=1}^k Q_i) = \emptyset\}.$$

Такой процесс приводит нас к конечному или счетному набору кубов $\{Q_k\}_k$. Ясно, что эти кубы попарно не пересекаются в силу их выбора.

Докажем (2.3). Если $\sum_k \mu(Q_k) = \infty$, то доказывать нечего. Пусть $\sum_k \mu(Q_k) < \infty$. Обозначим $\tilde{Q}_k = 5Q_k$ и покажем, что

$$\bigcup_k \tilde{Q}_k \supset E. \quad (2.4)$$

Отсюда, очевидно, следует (2.3). Действительно, в силу (2.4) и условия удвоения, имеем

$$\mu(E) \leq \sum_k \mu(\tilde{Q}_k) = \sum_k \mu(5Q_k) \leq c \sum_k \mu(Q_k).$$

Для доказательства (2.4) достаточно показать, что каждый куб $Q_\alpha \subset \cup_k \tilde{Q}_k$. При этом нетривиальным является случай, когда Q_α не содержится среди кубов Q_k , $k = 1, 2, \dots$. Будем считать это выполненным. Выберем минимальное k такое, что $l(Q_{k+1}) < \frac{1}{2} l(Q_\alpha)$. Тогда куб Q_α обязательно пересекается с одним из кубов Q_1, \dots, Q_k , ибо, в противном случае, он сам был бы выбран в качестве Q_{k+1} , поскольку длина его стороны в два раза превышает $l(Q_{k+1})$. Итак, найдется k_0 , $1 \leq k_0 \leq k$, такое, что $Q_\alpha \cap Q_{k_0} \neq \emptyset$, и $l(Q_\alpha) \leq 2l(Q_{k_0})$. Из геометрических соображений ясно, что $Q_\alpha \subset 5Q_{k_0} = \tilde{Q}_{k_0}$, и тем самым завершается доказательство (2.4).

Лемма доказана.

Доказательство теоремы 2. Для $\lambda > \frac{1}{\mu(Q_0)} \int_{Q_0} |f(x)| d\mu$ обозначим

$$E_\lambda = \{x \in \mathcal{R}^n : M_\mu f(x) > \lambda\}.$$
⁹

Из определения $M_\mu f$ следует, что для любого $x \in E_\lambda$ существует куб $Q(x)$, содержащий x , такой, что

$$\frac{1}{\mu(Q(x))} \int_{Q(x)} |f(y)| d\mu > \lambda.$$

Отсюда вытекает, что

$$\mu(Q(x)) \leq \frac{1}{\lambda} \int_{Q(x)} |f(y)| d\mu. \quad (2.5)$$

Если x пробегает все множество E_λ , то объединение всех таких кубов $Q(x)$ осуществляет покрытие множества E_λ . Кроме того, все кубы $Q(x)$ имеют ограниченный диаметр, поскольку они содержатся в Q_0 . На основании леммы Витали о покрытии, из всех таких кубов можно выбрать конечный или счетный набор попарно непересекающихся кубов Q_k , $k = 1, 2, \dots$, таких, что

$$\mu(E_\lambda) \leq c \sum_k \mu(Q_k).$$

Отсюда и из (2.5) следует

$$\begin{aligned} \mu(E_\lambda) &\leq c \frac{1}{\lambda} \sum_k \int_{Q_k} |f(y)| d\mu = \\ &= c \frac{1}{\lambda} \int_{\cup_k Q_k} |f(y)| d\mu \leq c \frac{1}{\lambda} \int_{\mathcal{R}^n} |f(y)| d\mu. \end{aligned}$$
¹⁰

Это неравенство, кроме (2.2) означает также, что функция $M_\mu f$ конечна почти всюду на Q_0 .

Теорема доказана.

Теперь из локального варианта получим *глобальный* вариант максимальной теоремы Харди-Литтлвуда.

Теорема 3 (неравенство слабого типа (1-1)) Пусть $f \in L_\mu(\mathcal{R}^n)$, где мера μ абсолютно непрерывна и удовлетворяет условию удвоения (2.1). Тогда для любого

$$\lambda > c_\mu \frac{1}{\mu(\mathcal{R}^n)} \int_{\mathcal{R}^n} |f(y)| d\mu \quad (= 0, \text{ если } \mu(\mathcal{R}^n) = \infty)$$

справедливо неравенство

$$\mu(\{x : M_\mu f(x) > \lambda\}) \leq c'_\mu \frac{1}{\lambda} \int_{\mathcal{R}^n} |f(y)| d\mu,$$

где постоянные c_μ и c'_μ зависят лишь от меры μ .

⁹ Упрямление. Докажите, что множество E_λ – открыто относительно Q_0 .

¹⁰ Множество E_λ измеримо, поскольку оно открытое.

Доказательство. Пусть Q_0 – произвольный куб из \mathcal{R}^n . Обозначим $Q_k = kQ_0$, $f_k = f|_{Q_k}$ – сужение f на Q_k , $M_\mu^k f = M_\mu f_k$ (т.е. в определении максимальной функции верхняя грань берется по всем кубам $Q \subset Q_k$).

Если $\lambda > \frac{c}{\mu(\mathcal{R}^n)} \int_{\mathcal{R}^n} |f(y)| d\mu$, то для всех $k \geq k_0$ $\lambda > \frac{c}{\mu(Q_k)} \int_{Q_k} |f(y)| d\mu$.

Пусть $k \geq k_0$. Обозначим

$$E_k = \{x \in Q_k : M_\mu^k f(x) > \lambda\}.$$

Тогда

$$E_k \subset E_{k+1}, \quad \bigcup_{k \geq k_0} E_k = E \equiv \{x \in \mathcal{R}^n : M_\mu f(x) > \lambda\}.$$
¹¹

Отсюда и из локального варианта неравенства слабого типа (1-1) следует

$$\begin{aligned} \mu(E) &= \mu\left(\bigcup_{k \geq k_0} E_k\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu E_k \leq \\ &\leq \lim_{k \rightarrow \infty} c_\mu \frac{1}{\lambda} \int_{Q_k} |f(y)| d\mu = c_\mu \frac{1}{\lambda} \int_{\mathcal{R}^n} |f(y)| d\mu. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Замечание. Теоремы 2 и 3 в литературе часто называют *максимальными теоремами Харди-Литтлвуда*.

Одним из важнейших приложений максимальной теоремы Харди-Литтлвуда можно назвать теорему Лебега о дифференцировании интегралов. Для доказательства теоремы Лебега нам понадобится ряд фактов из теории приближения функций.

Теорема 4 Пусть $f \in L_\mu(\mathcal{R}^n)$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется такая ограниченная функция g с компактным носителем, что

$$\int_{\mathcal{R}^n} |f(x) - g(x)| d\mu < \varepsilon. \quad (2.6)$$

Доказательство. Обозначим через Q_k куб с центром в начале координат, такой, что $l(Q_k) = 2k$. Поскольку

$$\int_{\mathcal{R}^n} |f(x)| d\mu = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{Q_k} |f(x)| d\mu = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{Q_{k+1} \setminus Q_k} |f(x)| d\mu,$$

где ряд справа сходится, то для заданного $\varepsilon > 0$ найдется такое K , что

$$\sum_{k=K}^{\infty} \int_{Q_{k+1} \setminus Q_k} |f(x)| d\mu = \int_{\mathcal{R}^n \setminus Q_K} |f(x)| d\mu < \frac{\varepsilon}{2}.$$

¹¹Докажем, что $E_k \subset E_{k+1}$. Имеем $x \in E_k \Rightarrow \exists Q \subset Q_k$, $Q \ni x : \frac{1}{\mu(Q)} \int_Q |f(y)| d\mu > \lambda \Rightarrow (Q \subset Q_{k+1}) \Rightarrow x \in E_{k+1}$.

Докажем, что $\cup_k E_k = E$.

Поскольку $x \in E \Rightarrow \exists Q : \frac{1}{\mu(Q)} \int_Q |f(y)| d\mu > \lambda \Rightarrow (\exists k_1 : Q \subset Q_{k_1}) \Rightarrow x \in E_{k_1}$, то $\cup_k E_k \supset E$. С другой стороны, из $x \in E_{k_1} \Rightarrow \exists Q \subset Q_{k_1} : \frac{1}{\mu(Q)} \int_Q |f(y)| d\mu > \lambda \Rightarrow M_\mu f(x) > \lambda \Rightarrow x \in E$ следует $\cup_k E_k \subset E$.

Положим $h(x) = f(x)\chi_{Q_K}(x)$. Тогда

$$\int_{\mathcal{R}^n} |f(x) - h(x)|d\mu = \int_{\mathcal{R}^n \setminus Q_K} |f(x)|d\mu < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (2.7)$$

Далее, имеем

$$\int_{Q_K} |h(x)|d\mu = \sum_{s=0}^{\infty} \int_{\{x \in Q_K: s \leq |h(x)| < s+1\}} |h(x)|d\mu,$$

где ряд справа сходится. Поэтому найдется такое S , что

$$\sum_{s=S}^{\infty} \int_{\{x \in Q_K: s \leq |h(x)| < s+1\}} |h(x)|d\mu < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Обозначим $E = \{x \in Q_K : |h(x)| \geq S\}$. Тогда получим

$$\int_E |h(x)|d\mu = \sum_{s=S}^{\infty} \int_{\{x \in Q_K: s \leq |h(x)| < s+1\}} |h(x)|d\mu < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Положим $g(x) = h(x)\chi_{Q_K \setminus E}(x)$. Ясно, что $|g(x)| \leq S$, $x \in \mathcal{R}^n$, и $g(x) = 0$, $x \notin Q_K$. Имеем

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{R}^n} |g(x) - h(x)|d\mu &= \int_{Q_K \setminus E} |g(x) - h(x)|d\mu + \int_E |h(x)|d\mu = \\ &= \int_E |h(x)|d\mu < \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Это неравенство вместе с (2.7) дает (2.6).

Теорема доказана.

Теорема 5 Пусть функция $f \in L_\mu(\mathcal{R}^n)$ ограничена и имеет компактный носитель. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется простая функция g с компактным носителем, такая, что

$$\int_{\mathcal{R}^n} |f(x) - g(x)|d\mu < \varepsilon.$$

Доказательство. Пусть $|f(x)| < M$, $x \in \mathcal{R}^n$ и $f(x) = 0$, $x \notin Q$, где куб $Q \subset \mathcal{R}^n$. Для натурального k введем множества

$$e_{ks} = \{x \in Q : -M + 2M \frac{s-1}{k} \leq f(x) < -M + 2M \frac{s}{k}\}, \quad s = 1, \dots, k.$$

Ясно, что $e_{ki} \cap e_{kj} = \emptyset$, $i \neq j$, $\cup_{s=1}^k e_{ks} = Q$. Положим

$$g_k(x) = \sum_{s=1}^k \left(-M + 2M \frac{s-1}{k} \right) \chi_{e_{ks}}(x), \quad x \in \mathcal{R}^n.$$

Функции g_k простые и, очевидно,

$$|f(x) - g_k(x)| \leq \frac{2M}{k}, \quad x \in \mathcal{R}^n, \quad k = 1, 2, \dots$$

Поэтому

$$\int_{\mathcal{R}^n} |f(x) - g_k(x)| d\mu = \int_{\mathcal{R}^n} |f(x) - g_k(x)| d\mu \leq \frac{2M}{k} \mu(Q). \quad (2.8)$$

Зададим $\varepsilon > 0$ и найдем такое K , что $\frac{2M}{K} \mu(Q) < \varepsilon$. Полагая $g(x) = g_K(x)$, из (2.8) получаем утверждение теоремы.

Теорема доказана.

Теорема 6 Пусть $f(x) = \chi_E(x)$, где множество $E \subset \mathcal{R}^n$ μ -измеримо и ограничено. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется непрерывная функция g с компактным носителем, такая, что $0 \leq g(x) \leq 1$, $x \in \mathcal{R}^n$, и

$$\mu(\{x \in \mathcal{R}^n : f(x) \neq g(x)\}) < \varepsilon. \quad (2.9)$$

Доказательство. Зададим $\varepsilon > 0$ и найдем такие ограниченные множества $F \subset E \subset G$ (F – замкнутое, G – открытое), что $\mu(G \setminus F) < \varepsilon$. Положим

$$g(x) = \frac{d(x, G^c)}{d(x, G^c) + d(x, F)}, \quad x \in \mathcal{R}^n.$$

Ясно, что $g(x) = 1$, $x \in F$ и $g(x) = 0$, $x \notin G$. Кроме того, $0 \leq g(x) \leq 1$, $x \in \mathcal{R}^n$, и функция g непрерывна на \mathcal{R}^n поскольку функция расстояния непрерывна и знаменатель дроби не обращается в нуль.

Имеем $\{x \in \mathcal{R}^n : f(x) \neq g(x)\} \subset G \setminus F$, так что (2.9) выполнено.

Теорема доказана.

Теорема 7 Пусть ограниченное множество $E = \cup_{k=1}^s E_k$, где μ -измеримые множества E_k попарно не пересекаются. Далее, пусть задана простая функция $f(x) = \sum_{k=1}^s a_k \chi_{E_k}(x)$, $x \in \mathcal{R}^n$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется непрерывная на \mathcal{R}^n функция g с компактным носителем, такая, что

$$\int_{\mathcal{R}^n} |f(x) - g(x)| d\mu < \varepsilon.$$

Доказательство. Зададим $\varepsilon > 0$ и для каждого $k = 1, \dots, s$, пользуясь теоремой 6, найдем такую непрерывную функцию g_k с компактным носителем, что $0 \leq g_k(x) \leq 1$, $x \in \mathcal{R}^n$, и

$$\mu(\{x \in \mathcal{R}^n : g_k(x) \neq \chi_{E_k}(x)\}) < \frac{\varepsilon}{2s} \left(\sum_{k=1}^s |a_k| \right)^{-1}.$$

Тогда функция $g(x) = \sum_{k=1}^s a_k g_k(x)$ непрерывна на \mathcal{R}^n , имеет компактный носитель и

$$\{x \in \mathcal{R}^n : g(x) \neq f(x)\} \subset \bigcup_{k=1}^s \{x \in \mathcal{R}^n : g_k(x) \neq \chi_{E_k}(x)\}.$$

Отсюда следует, что

$$\mu(\{x \in \mathcal{R}^n : g(x) \neq f(x)\}) < \frac{\varepsilon}{2} \left(\sum_{k=1}^s |a_k| \right)^{-1}.$$

Учитывая теперь, что для $x \in \mathcal{R}^n$

$$|f(x)| \leq \sum_{k=1}^s |a_k|, \quad |g(x)| \leq \sum_{k=1}^s |a_k|,$$

получаем

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{R}^n} |f(x) - g(x)| d\mu &= \int_{\{x \in \mathcal{R}^n: g(x) \neq f(x)\}} |f(x) - g(x)| d\mu \leq \\ &\leq \int_{\{x \in \mathcal{R}^n: g(x) \neq f(x)\}} (|f(x)| + |g(x)|) d\mu \leq \\ &\leq 2 \left(\sum_{k=1}^s |a_k| \right) \mu(\{x \in \mathcal{R}^n: g(x) \neq f(x)\}) < \varepsilon. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Теорема 8 Пусть функция $f \in L_\mu(\mathcal{R}^n)$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется такая непрерывная на \mathcal{R}^n функция g с компактным носителем, что

$$\int_{\mathcal{R}^n} |f(x) - g(x)| d\mu < \varepsilon.$$

Доказательство получаем, применяя последовательно теоремы 4, 5 и 7.

Упражнение. Доказать аналоги теорем 4 – 8 для функций из $L_\mu^p(\mathcal{R}^n)$, где $1 < p < \infty$.

Каждой точке $x \in \mathcal{R}^n$ поставим в соответствие семейство кубов $Q(x, \delta)$, содержащих x , с $l(Q(x, \delta)) = \delta$, где δ пробегает множество всех положительных чисел. Для $f \in L_\mu(\mathcal{R}^n)$ рассмотрим функцию

$$f_\delta(x) = \frac{1}{\mu(Q(x, \delta))} \int_{Q(x, \delta)} f(y) d\mu.$$

Теорема 9 Для функции $f \in L_\mu(\mathcal{R}^n)$ справедливо равенство

$$\lim_{\delta \rightarrow 0+} \int_{\mathcal{R}^n} |f_\delta(x) - f(x)| d\mu = 0.$$

Доказательство. Зададим $\varepsilon > 0$ и, пользуясь теоремой 8, найдем такую непрерывную функцию g с компактным носителем, что для $h(x) \equiv f(x) - g(x)$ справедливо неравенство

$$\int_{\mathcal{R}^n} |h(x)| d\mu < \frac{\varepsilon}{A},$$

где постоянная A будет определена ниже. Пусть носитель функции g сосредоточен на кубе Q . Можем считать, что $l(Q) \geq 2$. Через Q_1 обозначим куб с тем же центром, что и у куба Q , с $l(Q_1) = l(Q) + 2$. Пользуясь равномерной непрерывностью функции g на Q_1 , а значит и на всем \mathcal{R}^n , найдем такое положительное $\delta_0 < 1$, что $|g(y) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{2\mu(Q_1)}$, если только $|x - y| < \delta_0$.

Пусть $\delta < \frac{\delta_0}{\sqrt[n]{n}} \equiv \delta_1$. Имеем

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{R}^n} |f_\delta(x) - f(x)| d\mu &= \int_{\mathcal{R}^n} \left| \frac{1}{\mu(Q(x, \delta))} \int_{Q(x, \delta)} [f(y) - f(x)] d\mu_y \right| d\mu_x \leq \\ &\leq \int_{\mathcal{R}^n} \frac{1}{\mu(Q(x, \delta))} \int_{Q(x, \delta)} |g(y) - g(x)| d\mu_y d\mu_x + \\ &+ \int_{\mathcal{R}^n} \frac{1}{\mu(Q(x, \delta))} \int_{Q(x, \delta)} |h(y) - h(x)| d\mu_y d\mu_x \equiv I_1 + I_2. \end{aligned}$$

Если $x \notin Q_1$, $y \in Q(x, \delta)$, то $x, y \notin Q$ и поэтому $g(y) = g(x) = 0$. Если же $x \in Q_1$, $y \in Q(x, \delta)$, то $|x - y| \leq \sqrt{n}\delta < \delta_0$ и, следовательно,

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{Q_1} \frac{1}{\mu(Q(x, \delta))} \int_{Q(x, \delta)} |g(y) - g(x)| d\mu_y d\mu_x \leq \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2\mu(Q_1)} \cdot \mu(Q_1) = \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Для оценки I_2 запишем

$$\begin{aligned} I_2 &\leq \int_{\mathcal{R}^n} \frac{1}{\mu(Q(x, \delta))} \int_{Q(x, \delta)} |h(y)| d\mu_y d\mu_x + \\ &+ \int_{\mathcal{R}^n} \frac{1}{\mu(Q(x, \delta))} |h(x)| \int_{Q(x, \delta)} d\mu_y d\mu_x \equiv I'_2 + I''_2. \end{aligned}$$

Ясно, что

$$I''_2 = \int_{\mathcal{R}^n} |h(x)| d\mu_x < \frac{\varepsilon}{A}.$$

Далее, меняя порядок интегрирования, получим

$$\begin{aligned} I'_2 &= \int_{\mathcal{R}^n} d\mu_x \int_{\mathcal{R}^n} \frac{1}{\mu(Q(x, \delta))} |h(y)| \chi_{Q(x, \delta)}(y) d\mu_y = \\ &= \int_{\mathcal{R}^n} |h(y)| d\mu_y \int_{\mathcal{R}^n} \frac{1}{\mu(Q(x, \delta))} \chi_{Q(x, \delta)}(y) d\mu_x. \end{aligned}$$

Чтобы оценить внутренний интеграл в правой части, заметим, что для $x \notin 5Q(y, \delta)$ справедливо $y \notin Q(x, \delta)$ и, стало быть, $\chi_{Q(x, \delta)}(y) = 0$. Поэтому для произвольного $y \in \mathcal{R}^n$ имеем

$$\int_{\mathcal{R}^n} \frac{1}{\mu(Q(x, \delta))} \chi_{Q(x, \delta)}(y) d\mu_x \leq \int_{5Q(y, \delta)} \frac{1}{\mu(Q(x, \delta))} d\mu_x.$$

С другой стороны, если $x \in 5Q(y, \delta)$, то $7Q(x, \delta) \supset Q(y, \delta)$, так что, в силу условия удвоения (2.1),

$$\mu(Q(x, \delta)) \geq \frac{1}{c} \mu(Q(y, \delta)),$$

где постоянная c зависит лишь от постоянной из условия (2.1). Таким образом,

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{R}^n} \frac{1}{\mu(Q(x, \delta))} \chi_{Q(x, \delta)}(y) d\mu_x &\leq c \frac{1}{\mu(Q(y, \delta))} \int_{5Q(y, \delta)} d\mu_x = \\ &= c \frac{1}{\mu(Q(y, \delta))} \mu(5Q(y, \delta)) \leq c_1, \end{aligned}$$

где постоянная c_1 зависит лишь от постоянной из условия (2.1). Итак, имеем

$$I'_2 \leq c_1 \int_{\mathcal{R}^n} |h(y)| d\mu_y \leq c_1 \frac{\varepsilon}{A}.$$

Если положить $A = 2(c_1 + 1)$, то получим, что $I_2 < \frac{\varepsilon}{2}$. Это неравенство, вместе с полученной выше оценкой I_1 , для $\delta < \delta_1$ дает

$$\int_{\mathcal{R}^n} |f_\delta(x) - f(x)| d\mu < \varepsilon.$$

Теорема доказана.

Следующая теорема называется *теоремой Лебега о дифференцировании интегралов*.

Теорема 10 Пусть функция $f \in L_\mu(\mathcal{R}^n)$. Тогда для μ -почти всех $x \in \mathcal{R}^n$ справедливо равенство

$$\lim_{\delta \rightarrow 0+} \frac{1}{\mu(Q(x, \delta))} \int_{Q(x, \delta)} f(y) d\mu = f(x). \quad (2.10)$$

Доказательство. Пусть δ_k – стремящаяся к нулю последовательность положительных чисел. Тогда из неравенства Чебышева следует

$$\mu(\{x \in \mathcal{R}^n : |f_{\delta_k}(x) - f(x)| > \lambda\}) \leq \frac{1}{\lambda} \int_{\mathcal{R}^n} |f_{\delta_k}(x) - f(x)| d\mu, \quad \lambda > 0.$$

Вместе с теоремой 9 это означает, что последовательность $\{f_{\delta_k}\}_k$ сходится к функции f по мере. Применяя теорему Ф.Рисса, найдем подпоследовательность $\{f_{\delta_{k_i}}\}_i$, сходящуюся к f μ -почти всюду. Поэтому для завершения доказательства теоремы 10 достаточно показать, что предел слева в (2.10) существует μ -почти всюду.

Обозначим

$$\Omega f(x) = \limsup_{\delta \rightarrow 0+} f_\delta(x) - \liminf_{\delta \rightarrow 0+} f_\delta(x), \quad x \in \mathcal{R}^n.$$

Если функция g – непрерывная с компактным носителем, то, очевидно, $g_\delta(x)$ сходится равномерно к $g(x)$ при $\delta \rightarrow 0+$, так что $\Omega g(x) \equiv 0$, $x \in \mathcal{R}^n$.

Для натурального k , пользуясь теоремой 8, представим функцию f в виде $f = g_k + h_k$, где g_k непрерывна и имеет компактный носитель, а $\int_{\mathcal{R}^n} |h_k(x)| d\mu < \frac{1}{k}$. Тогда из неравенства

$$\begin{aligned} \Omega h_k(x) &= \limsup_{\delta \rightarrow 0+} \frac{1}{\mu(Q(x, \delta))} \int_{Q(x, \delta)} h_k(y) d\mu - \\ &- \liminf_{\delta \rightarrow 0+} \frac{1}{\mu(Q(x, \delta))} \int_{Q(x, \delta)} h_k(y) d\mu \leq 2M_\mu h_k(x), \end{aligned}$$

применяя неравенство слабого типа (1-1), находим

$$\begin{aligned} \mu(\{x \in \mathcal{R}^n : \Omega h_k(x) > \lambda\}) &\leq \mu(\{x \in \mathcal{R}^n : 2M_\mu h_k(x) > \lambda\}) \leq \\ &\leq \frac{2c_\mu}{\lambda} \int_{\mathcal{R}^n} |h_k(x)| d\mu < \frac{2c_\mu}{\lambda} \cdot \frac{1}{k}, \quad \lambda > 0. \end{aligned}$$

Но, очевидно, $\Omega f(x) \leq \Omega g_k(x) + \Omega h_k(x)$ и, поскольку $\Omega g_k(x) \equiv 0$, имеем $\Omega f(x) \leq \Omega h_k(x)$, $k = 1, 2, \dots$ Значит

$$\mu(\{x \in \mathcal{R}^n : \Omega f(x) > \lambda\}) \leq \mu(\{x \in \mathcal{R}^n : \Omega h_k(x) > \lambda\}) < \frac{2c_\mu}{\lambda} \cdot \frac{1}{k}, \quad \lambda > 0.$$

Фиксируя $\lambda > 0$ и устремляя $k \rightarrow \infty$, отсюда получаем

$$\mu(\{x \in \mathcal{R}^n : \Omega f(x) > \lambda\}) = 0.$$

Поскольку $\lambda > 0$ произвольно, то $\Omega f(x) = 0$ μ -почти всюду, а это равносильно тому, что предел слева в (2.10) существует μ -почти всюду.

Теорема доказана.

Следствие. Для функции $f \in L_\mu(\mathcal{R}^n)$ неравенство

$$|f(x)| \leq M_\mu f(x)$$

справедливо для μ -почти всех $x \in \mathcal{R}^n$.

Следующая теорема усиливает теорему Лебега.

Теорема 11 Пусть функция $f \in L_\mu(\mathcal{R}^n)$. Тогда для μ -почти всех $x \in \mathcal{R}^n$ справедливо равенство

$$\lim_{\delta \rightarrow 0+} \frac{1}{\mu(Q(x, \delta))} \int_{Q(x, \delta)} |f(y) - f(x)| d\mu = 0. \quad (2.11)$$

Доказательство. Зафиксируем куб $Q \subset \mathcal{R}^n$. Возьмем последовательность $\{q_k\}_{k=1}^\infty$ всех рациональных чисел. Для каждого k функция $|f(x) - q_k| \chi_Q(x) \in L_\mu(\mathcal{R}^n)$ и, в силу теоремы 10, μ -почти всюду на Q

$$\lim_{\delta \rightarrow 0+} \frac{1}{\mu(Q(x, \delta))} \int_{Q(x, \delta)} |f(y) - q_k| d\mu = |f(x) - q_k|. \quad (2.12)$$

Если E_k – множество тех $x \in Q$, для которых (2.12) не выполнено, то $\mu(E_k) = 0$. Положим $E = \cup_{k=1}^\infty E_k$. Тогда $\mu(E) = 0$ и для каждого $x \in (\text{int} Q) \setminus E$ равенство (2.12) справедливо при всех $k = 1, 2, \dots$

Обозначим $A = \{x \in Q : |f(x)| = +\infty\}$. Ясно, что $\mu(A) = 0$. Пусть $x \notin (\text{int} Q) \setminus (A \cup E)$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и найдем такое q_k , что $|f(x) - q_k| < \frac{\varepsilon}{2}$. Тогда, в силу (2.12),

$$\begin{aligned} & \limsup_{\delta \rightarrow 0+} \frac{1}{\mu(Q(x, \delta))} \int_{Q(x, \delta)} |f(y) - f(x)| d\mu \leq \\ & \leq \limsup_{\delta \rightarrow 0+} \frac{1}{\mu(Q(x, \delta))} \int_{Q(x, \delta)} |f(y) - q_k| d\mu + \\ & + \limsup_{\delta \rightarrow 0+} \frac{1}{\mu(Q(x, \delta))} \int_{Q(x, \delta)} |q_k - f(x)| d\mu \leq 2|f(x) - q_k| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Поскольку $\varepsilon > 0$ произвольно, то это означает, что в точке x выполнено (2.11).

Для доказательства равенства (2.11) для μ -почти всех x покроем все \mathcal{R}^n счетным набором кубов. Как уже показано, для каждого такого куба мера множества тех x , где (2.11) не имеет места, равна нулю. Поэтому равна нулю и мера счетного объединения таких множеств, так что (2.11) имеет место μ -почти всюду на \mathcal{R}^n .

Теорема доказана.

Вернемся к неравенству слабого типа (1 – 1). Приведем еще одно доказательство, опирающееся на теорему Лебега о дифференцировании интегралов. Оно полезно еще и тем, что использует часто применяемое в различных вопросах разбиение Кальдерона-Зигмунда – один из новых вариантов лемм о покрытии.

Теорема 12 (разбиение Кальдерона-Зигмунда) Пусть неотрицательная функция $f \in L_\mu(Q_0)$, где абсолютно непрерывная мера μ удовлетворяет условию удвоения (2.1). Тогда для любого $\alpha \geq \frac{1}{\mu(Q_0)} \int_{Q_0} |f(x)| d\mu$ существует такое разложение Q_0 на множества F и Ω , что

- 1) $Q_0 = F \cup \Omega$, $F \cap \Omega = \emptyset$;
- 2) $f(x) \leq \alpha$ μ -почти всюду на F ;
- 3) Ω есть объединение кубов, $\Omega = \bigcup_k Q_k$, внутренности которых не пересекаются, причем для каждого куба Q_k

$$\alpha < \frac{1}{\mu(Q_k)} \int_{Q_k} f(x) d\mu \leq c_\mu \alpha, \quad (2.13)$$

где постоянная c_μ зависит лишь от меры μ .

Доказательство. Разделим Q_0 на 2^n конгруэнтных кубов делением пополам ребер куба Q_0 . Пусть Q' – один из новых кубов. Возможен один, и только один из двух случаев:

1. $\frac{1}{\mu(Q')} \int_{Q'} f(x) d\mu \leq \alpha$;
2. $\frac{1}{\mu(Q')} \int_{Q'} f(x) d\mu > \alpha$.

Во втором случае куб Q' больше не делим и это будет один из кубов Q_k , участвующих в формулировке теоремы. Для него выполнено неравенство (2.13), так как

$$\begin{aligned} \alpha < \frac{1}{\mu(Q')} \int_{Q'} f(x) d\mu &\leq \frac{\mu(Q_0)}{\mu(Q')} \frac{1}{\mu(Q_0)} \int_{Q_0} f(x) d\mu \leq \\ &\leq \frac{\mu(Q_0)}{\mu(Q')} \cdot \alpha \leq c \cdot \alpha \end{aligned}$$

(последнее неравенство следует из условия удвоения). В первом случае мы продолжаем разбиение Q' и повторяем этот процесс до тех пор, пока не придем ко второму случаю (если только придем к нему).¹²

Обозначим

$$\Omega = \bigcup_k Q_k$$

– объединение всех кубов, получаемых во втором случае. Осталось показать, что для μ -почти каждого $x \in F \equiv Q_0 \setminus \Omega$ имеем $f(x) \leq \alpha$. Но для каждого $x \in F$ существует последовательность кубов, полученных в первом случае, стягивающихся к x . В силу теоремы Лебега о дифференцировании интегралов, μ -почти всюду

$$f(x) = \lim_{d(Q') \rightarrow 0} \frac{1}{\mu(Q')} \int_{Q'} f(y) d\mu,$$

где предел берется по всем кубам Q' , содержащим x , диаметры которых стремятся к нулю. На каждом таком кубе (так как они получены в результате первого случая)

$$\frac{1}{\mu(Q')} \int_{Q'} f(y) d\mu \leq \alpha,$$

¹²Этот процесс называют "техникой моментов остановки".

значит и $f(x) \leq \alpha$ μ -почти всюду на F .

Теорема доказана.

Замечание. Итак, разбиение Кальдерона-Зигмунда осуществляет разбиение Q_0 на два множества. На первом из них F функция мала, а другое Ω есть объединение кубов с непересекающимися внутренностями, μ -средние значения функции на которых "приблизительно равны".

Теорема 13 (неравенство слабого типа (1-1)) Пусть $f \in L_\mu(Q_0)$, где мера μ на Q_0 удовлетворяет условию удвоения (2.1). Тогда для любого $\lambda > \frac{c_\mu}{\mu(Q_0)} \int_{Q_0} |f(x)| d\mu$ справедливо неравенство

$$\mu(\{x \in Q_0 : M_\mu f(x) > \lambda\}) \leq c'_\mu \frac{1}{\lambda} \int_{Q_0} |f(x)| d\mu, \quad (2.14)$$

где постоянные c_μ и c'_μ зависят лишь от меры μ .

Доказательство. Зададим $\alpha > \frac{1}{\mu(Q_0)} \int_{Q_0} |f(x)| d\mu$ и, применяя разбиение Кальдерона-Зигмунда для $|f|$, построим множества F и $\Omega = \cup_k Q_k$, обладающие свойствами 1) – 3) из этой теоремы. Обозначим $\tilde{Q}_k = 3Q_k$, $\tilde{\Omega} = (\cup_k \tilde{Q}_k) \cap Q_0$ и получим оценку для $M_\mu f(x)$, $x \in Q_0 \setminus \tilde{\Omega}$.

Итак, пусть $x \in Q_0 \setminus \tilde{\Omega}$, Q – куб из Q_0 , содержащий x . Если $Q \cap \Omega = \emptyset$, то $Q \subset F$ и, так как на F μ -почти всюду $|f(y)| \leq \alpha$, то и

$$\frac{1}{\mu(Q)} \int_Q |f(y)| d\mu \leq \alpha.$$

Предположим, что $Q \cap \Omega \neq \emptyset$. Так как куб Q содержит точку $x \in \Omega$, то каждый куб Q_k , имеющий непустое пересечение с Q , содержится в $\tilde{Q} = 3Q$ (если $(3Q) \setminus Q_0 \neq \emptyset$, то в качестве \tilde{Q} выберем наименьший куб, содержащийся в Q_0 и содержащий в себе $(3Q) \cap Q_0$). Через \cup'_k , \sum'_k будем обозначать объединение или сумму по тем номерам k , для которых куб Q_k имеет с Q непустое пересечение. Имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu(Q)} \int_Q |f(y)| d\mu &= \frac{1}{\mu(Q)} \left\{ \int_{Q \cap F} |f(y)| d\mu + \int_{Q \cap (\cup'_k Q_k)} |f(y)| d\mu \right\} \leq \\ &\leq \alpha + \frac{1}{\mu(Q)} \sum'_k \int_{Q_k} |f(y)| d\mu = \\ &= \alpha + \frac{1}{\mu(Q)} \sum'_k \mu(Q_k) \frac{1}{\mu(Q_k)} \int_{Q_k} |f(y)| d\mu \leq \\ &\leq \alpha + c \cdot \alpha \cdot \frac{1}{\mu(Q)} \sum'_k \mu(Q_k) \leq \\ &\leq \alpha + c \cdot \alpha \cdot \frac{\mu(\tilde{Q})}{\mu(Q)} \leq \alpha(1 + c_1) \equiv c_2 \cdot \alpha. \end{aligned}$$

Предпоследнее неравенство вытекает из условия удвоения (2.1) и того, что внутренности Q_k не пересекаются, и $\cup'_k Q_k \subset \tilde{Q}$. Последнее неравенство следует из условия удвоения.

Таким образом, если $x \notin \tilde{\Omega}$, то для каждого куба $Q \ni x$

$$\frac{1}{\mu(Q)} \int_Q |f(y)| d\mu \leq c \cdot \alpha,$$

где c – постоянная, т.е. $M_\mu f(x) \leq c \cdot \alpha$.

Отсюда получаем

$$\{x \in Q_0 : M_\mu f(x) > c \cdot \alpha\} \subset \tilde{\Omega},$$

так что

$$\begin{aligned} \mu(\{x \in Q_0 : M_\mu f(x) > c \cdot \alpha\}) &\leq \sum_k \mu(\tilde{Q}_k) \leq \\ &\leq c_1 \sum_k \mu(Q_k) \leq c_1 \frac{1}{\alpha} \sum_k \int_{Q_k} |f(y)| d\mu \leq c_1 \frac{1}{\alpha} \int_{Q_0} |f(y)| d\mu. \end{aligned}$$

Полагая теперь $\lambda = c \cdot \alpha$, получаем

$$\mu(\{x \in Q_0 : M_\mu f(x) > \lambda\}) \leq c_2 \frac{1}{\lambda} \int_{Q_0} |f(y)| d\mu$$

при $\lambda > c \frac{1}{\mu(Q_0)} \int_{Q_0} |f(y)| d\mu$.

Теорема доказана.

Замечание. При доказательстве теоремы Кальдерона-Зигмунда была использована теорема Лебега о дифференцировании интегралов:

$$f(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\mu(Q_k)} \int_{Q_k} f(y) d\mu,$$

для μ -почти всех x , где последовательность кубов Q_k , содержащих точку x , стягивается к x . Таким образом, мы показали как, используя теорему Лебега, получить максимальную теорему. Однако приведенное нами доказательство теоремы Лебега основано на применении максимальной теоремы Харди-Литтлвуда. Доказательство теоремы Лебега, не использующее неравенство слабого типа $(1-1)$, см., например, в книге Гусмана "Дифференцирование интегралов в \mathcal{R}^n ".

Легко видеть, что $f^{**} = M(f^*)$. Основная идея Харди и Литтлвуда в работе 1930 г. состоит в том, что перестановка максимальной функции $(Mf)^*$ мажорируется функцией f^{**} . Впоследствии Герц (1968) показал, что $(Mf)^*$ и f^{**} эквивалентны. Мы приведем простое доказательство этого факта, принадлежащее Беннетту и Шарпли (1979). Для этого нам понадобится следующая лемма о покрытии, использующая двоичные кубы.

Двоичным в \mathcal{R}^n называется куб вида

$$\{j_i 2^{k_i} \leq x_i \leq (j_i + 1) 2^{k_i}, i = 1 \dots n\},$$

где j_i и k_i – целые числа. Характерное свойство двоичных кубов состоит в том, что для любых двух таких кубов либо один содержится в другом, либо их внутренности не пересекаются. Совокупность всех двоичных кубов осуществляет счетное покрытие пространства \mathcal{R}^n .

Лемма. Пусть мера μ на \mathcal{R}^n удовлетворяет условию удвоения (2.1), а Ω – открытое ограниченное множество в \mathcal{R}^n . Тогда существует набор двоичных кубов Q_j , $j = 1, 2, \dots$, с попарно непересекающимися внутренностями, таких, что

- $Q_j \cap \Omega^c \neq \emptyset$, $j = 1, 2, \dots$;
- $\Omega \subset \bigcup_j Q_j$;
- $\mu(\Omega) \leq \sum_j \mu(Q_j) \leq c \cdot \mu(\Omega)$.¹³

¹³ Смысл леммы состоит в том, чтобы открытое множество покрыть непересекающимися кубами так, чтобы мера покрытия не сильно отличалась от меры самого множества.

Доказательство. Для каждого $x \in \Omega$ выберем *наименьший* двоичный куб $Q(x)$, содержащий x и имеющий непустое пересечение с Ω^c . Разделив $Q(x)$ на 2^n конгруэнтных кубов, выберем один из них (пусть это $\tilde{Q}(x)$), содержащий x . Ясно, что $\tilde{Q}(x) \subset \Omega$ и, в силу условия удвоения,

$$c \cdot \mu(Q(x)) \leq \mu(\tilde{Q}(x)) = \mu(\tilde{Q}(x) \cap \Omega) \leq \mu(Q(x) \cap \Omega). \quad (2.15)$$

Пусть $K = \{Q(x) : x \in \Omega\}$. Так как Ω ограничено, а кубы $Q(x)$ двоичные, то для каждого $x \in \Omega$ во множестве K найдется *наибольший* куб $\overline{Q}(x)$, содержащий x (это не обязательно будет $Q(x)$). Множество $\overline{K} \equiv \{\overline{Q}(x) : x \in \Omega\}$ отличается от K тем, что в \overline{K} любые два куба либо совпадают, либо внутренности их не пересекаются (в K кубы могут быть вложены один в другой). Занумеровывая *различные* кубы из множества \overline{K} в порядке убывания их мер (Лебега), получим набор кубов Q_1, Q_2, \dots . Ясно, что они обладают свойствами а) и б). Левое неравенство в с) следует из б). Так как для каждого Q_j , в силу (2.15),

$$c \cdot \mu(Q_j) \leq \mu(Q_j \cap \Omega),$$

а внутренности кубов Q_j не пересекаются, то из условия удвоения (2.1) и из б) следует

$$\sum_j \mu(Q_j) \leq c_1 \sum_j \mu(Q_j \cap \Omega) = c_1 \mu(\Omega),$$

так что левое неравенство в с) также выполнено.

Лемма доказана.

Замечание. Если Q – фиксированный куб, содержащий Ω , и Ω – открыто по отношению к Q , то легко видеть, что кубы Q_j можно выбрать также содержащимися в Q и двоичными по отношению к Q (т.е. получающимися делением Q на 2^n конгруэнтных кубов и т.д.), пересекающихся с $Q \setminus \Omega$.

Теорема 14 (Харди, Литтлвуд, Стейн, Герц) Пусть мера μ на \mathcal{R}^n удовлетворяет условию удвоения, а функция $f \in L_\mu^{loc}$. Тогда

$$c'(M_\mu f)_\mu^*(t) \leq f_\mu^{**}(t) \leq c''(M_\mu f)_\mu^*(t), \quad t > 0,^{14} \quad (2.16)$$

где положительные постоянные c' и c'' зависят только от меры μ .

Доказательство. Фиксируем $t > 0$. Для доказательства правого неравенства в (2.16) предположим, что $(M_\mu f)_\mu^*(t) < \infty$. Пусть

$$\Omega = \{x \in \mathcal{R}^n : M_\mu f(x) > (M_\mu f)_\mu^*(t)\}.$$

Множество Ω открыто, так как каждый $x \in \Omega$ содержится в некотором кубе Q , для которого

$$\frac{1}{\mu(Q)} \int_Q |f(y)| d\mu > (M_\mu f)_\mu^*(t),$$

а значит и при некотором $\varepsilon > 0$ будет

$$\frac{1}{\mu(Q_\varepsilon)} \int_{Q_\varepsilon} |f(y)| d\mu > (M_\mu f)_\mu^*(t),$$

¹⁴Неравенство (2.16) часто называют *неравенством Герца*.

где $Q_\varepsilon = (1 + \varepsilon)Q$, т.е. внутренность Q_ε содержится в Ω . Далее, из определения перестановки следует, что $\mu(\Omega) \leq t$. Применяя доказанную выше лемму к множеству Ω , построим набор кубов Q_j , обладающих свойствами *a*), *b*) и *c*). Обозначим

$$F = \left(\bigcup_j Q_j \right)^c, \quad g(x) = \sum_j f(x)\chi_{Q_j}(x), \quad h(x) = f(x)\chi_F(x).$$

Ясно, что почти всюду $f(x) = g(x) + h(x)$. В силу полуаддитивности оператора $f \rightarrow f_\mu^{**}$,

$$f_\mu^{**}(t) \leq g_\mu^{**}(t) + h_\mu^{**}(t) \leq \frac{1}{t}\|g\|_{\mu,1} + \|h\|_{\mu,\infty}. \quad (2.17)$$

Так как $F \subset \Omega^c$, то

$$\|h\|_{\mu,\infty} \leq \|M_\mu f \cdot \chi_F\|_{\mu,\infty} \leq (M_\mu f)_\mu^*(t). \quad (2.18)$$

Далее, так как $Q_j \cap \Omega^c \neq \emptyset$, то

$$\frac{1}{\mu(Q_j)} \int_{Q_j} |f(x)| d\mu \leq (M_f)_\mu^*(t).$$

Следовательно, в силу п. *c*) леммы,

$$\begin{aligned} \|g\|_{\mu,1} &= \sum_j \int_{Q_j} |f(x)| d\mu \leq (M_\mu f)_\mu^*(t) \sum_j \mu(Q_j) \leq \\ &\leq c(M_\mu f)_\mu^*(t) \cdot \mu(\Omega) \leq ct(M_\mu f)_\mu^*(t). \end{aligned}$$

Отсюда и из (2.17) и (2.18) вытекает правое неравенство в (2.16).

Для доказательства левого неравенства в (2.16) применяется стандартное разбиение функции на два слагаемых. Такой метод впервые был предложен Кальдероном.

Итак, предположим, что $f_\mu^{**}(t) < \infty$, и пусть

$$E = \{x \in \mathcal{R}^n : |f(x)| > f_\mu^*(t)\}.$$

Ясно, что $\mu(E) \leq t$. Ведem разбиение

$$g(x) = (f(x) - f_\mu^*(t) \cdot \text{sign } f(x))\chi_E(x), \quad h(x) = f(x) - g(x).$$

Имеем $\|h\|_{\mu,\infty} \leq f_\mu^*(t)$ и

$$\begin{aligned} \|g\|_{\mu,1} &= \int_E |f(x) - f_\mu^*(t) \text{sign } f(x)| d\mu = \\ &= \int_E (|f(x)| - f_\mu^*(t)) d\mu = \int_0^t (f_\mu^*(u) - f_\mu^*(t)) du = \\ &= t \cdot f_\mu^{**}(t) - t \cdot f_\mu^*(t) = t \cdot (f_\mu^{**}(t) - f_\mu^*(t)). \end{aligned}$$

В силу полуаддитивности максимального оператора и ограниченности (с постоянной 1) его в L_μ^∞ ,

$$M_\mu f(x) \leq M_\mu g(x) + M_\mu h(x) \leq M_\mu g(x) + \|h\|_{\mu,\infty},$$

откуда, используя неравенство слабого типа (1-1) для $M_\mu g$, получаем

$$\begin{aligned} (M_\mu f)_\mu^*(t) &\leq (M_\mu g)_\mu^*(t) + \|h\|_{\mu, \infty} \leq \\ &\leq \frac{c}{t} \|g\|_{\mu, 1} + \|h\|_{\mu, \infty} \leq c \cdot (f_{\mu}^{**}(t) - f_\mu^*(t)) + f_\mu^*(t) \leq \\ &\leq c_1 f_\mu^{**}(t),^{15} \end{aligned}$$

что и доказывает левое неравенство в (2.16).

Теорема доказана.

В конце раздела 1 из неравенства Харди мы получили, что при $p > 1$ условие $f \in L_\mu^p(E)$ эквивалентно условию $f_\mu^{**} \in L^p([0, \mu(E)])$. Применяя это утверждение и неравенство Герца,¹⁶ получаем неравенство сильного типа $(p-p)$ для максимального оператора Харди-Литтлвуда.¹⁷

Теорема 15 (неравенство сильного типа $(p-p)$) Пусть абсолютно непрерывная мера μ удовлетворяет условию удвоения и число $p > 1$. Тогда

$$\|M_\mu f\|_{\mu, p} \leq c_{\mu, p} \|f\|_{\mu, p},$$

где постоянная $c_{\mu, p}$ зависит лишь от p и меры μ .

Вернемся к случаю $p = 1$ и пусть μ – мера Лебега. Мы уже видели, что на всем \mathcal{R}^n максимальная функция несуммируема. Рассмотрим функцию f на кубе $Q_0 \subset \mathcal{R}^n$ и поставим следующий вопрос. *Какие должны быть наложены условия на f , обеспечивающие суммируемость Mf на Q_0 ?* Выше мы приводили пример, показывающий, что условие $f \in L(Q_0)$ не является достаточным. Ответ на поставленный вопрос был дан А.Зигмундом. Именно, если $|Q_0| < \infty$ и

$$\int_{Q_0} |f(x)| \ln^+ |f(x)| dx < \infty,^{18} \quad (2.19)$$

то $Mf \in L(Q_0)$, где $\ln^+ z = \max(0, \ln z)$ ($z > 0$). И.Стейн показал (1969), что указанное условие является также и необходимым для суммируемости Mf . Таким образом, справедлива

Теорема 16 (Зигмунда-Стейна о классе $L \log^+ L$) Пусть $f \in L(Q_0)$. Максимальная функция Харди-Литтлвуда Mf суммируема на Q_0 тогда, и только тогда, когда $f \in L \log^+ L$.

Доказательство этой теоремы легко получить, применяя неравенство Герца.¹⁹ Именно, так как условие (2.19) эквивалентно следующему

$$\int_0^{|Q_0|} f^*(t) \ln^+ f^*(t) dt < \infty, \quad (2.20)$$

¹⁵ Чтобы записать самое первое неравенство в этой цепочке, нужно было выделить $\|h\|_{\mu, \infty}$, не зависящую от x . Это связано с тем, что оператор перестановки не является полуаддитивным и поэтому оценку для перестановок нельзя было применять непосредственно к $f = g + h$.

¹⁶ Неравенство (2.16) в теореме 14

¹⁷ Такую оценку можно также получить с помощью интерполяционной теоремы Марцинкевича.

¹⁸ Класс всех функций f , для которых выполнено это условие, обозначается через $L \log^+ L$.

¹⁹ Мы доказали неравенство Герца для случая, когда функция f задана на всем \mathcal{R}^n . Чтобы получить доказательство аналогичного неравенства для функции f , заданной на компакте, достаточно повторить приведенное выше доказательство для \mathcal{R}^n , а в том месте, где применяется основная лемма о покрытии воспользоваться замечанием, сделанным сразу после доказательства этой леммы.

то, в силу неравенства Герца, достаточно показать, что (2.20) эквивалентно условию

$$\infty > \int_0^{|Q_0|} f^{**}(t) dt = \int_0^{|Q_0|} \frac{1}{t} \int_0^t f^*(u) du dt = \int_0^{|Q_0|} f^*(u) \ln \frac{|Q_0|}{u} du. \quad (2.21)$$

Покажем это. Итак, пусть выполнено (2.21). Тогда, очевидно, $f \in L(Q_0)$ и $f^*(t) = \underline{O}(\frac{1}{t})$ при $t \rightarrow +0$, т.е. для t близких к нулю $\ln^+ f^*(t) \leq c + \ln \frac{|Q_0|}{t}$, откуда следует (2.20).

Покажем, что из (2.20) вытекает (2.21). Обозначим

$$E_1 = \{t \in (0, |Q_0|] : f^*(t) < \sqrt{|Q_0|/t}\}, \quad E_2 = \{t \in (0, |Q_0|] : f^*(t) \geq \sqrt{|Q_0|/t}\}.$$

Если сходится интеграл в (2.20), то

$$\begin{aligned} \int_0^{|Q_0|} f^*(t) \ln \frac{|Q_0|}{t} dt &= \int_{E_1} f^*(t) \ln \frac{|Q_0|}{t} dt + \int_{E_2} f^*(t) \ln \frac{|Q_0|}{t} dt \leq \\ &\leq \sqrt{|Q_0|} \int_0^{|Q_0|} \frac{1}{\sqrt{t}} \ln \frac{|Q_0|}{t} dt + 2 \int_0^{|Q_0|} f^*(t) \ln^+ f^*(t) dt < \infty. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

3 Неравенства с весовыми нормами для максимальной функции.

Пусть $1 < p < +\infty$, μ – положительная борелевская мера на \mathcal{R}^n , конечная на компактных множествах. Мы рассматриваем следующую задачу.

Задача. Когда максимальный оператор Харди-Литтлвуда (взятый по мере Лебега) ограничен в L_μ^p ?

Другими словами, когда существует постоянная B_p , такая, что

$$\int_{\mathcal{R}^n} (Mf(x))^p d\mu \leq B_p \int_{\mathcal{R}^n} |f(x)|^p d\mu$$

для всех $f \in L_\mu^p$, где

$$Mf(x) = \sup_{Q \ni x} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)| dy$$

Если μ – мера Лебега, то, как мы видели в разделе 2, максимальный оператор ограничен в L^p . Решение поставленной задачи получено Макенхауптом в 1972 г. Поэтому и условие на меру, обеспечивающее ограниченность в L_μ^p максимального оператора, называется *условием Макенхаупта* (в литературе его называют также A_p -условием).

Теорема 17 (Макенхаупт) Пусть μ – положительная борелевская мера, конечная на компактных множествах, и $1 < p < +\infty$. Тогда

$$\int_{\mathcal{R}^n} (Mf(x))^p d\mu \leq B_p \int_{\mathcal{R}^n} |f(x)|^p d\mu \quad (3.1)$$

с постоянной B_p , не зависящей от f , тогда, и только тогда, когда мера μ абсолютно непрерывна (т.е. $d\mu = w(x)dx$), а вес $w(x)$ удовлетворяет условию

$$\sup_Q \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w(x) dx \right) \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w^{-\frac{1}{p-1}}(x) dx \right)^{p-1} < \infty. \quad (A_p)$$

Доказательство необходимости. Пусть для всех $f \in L_\mu^p$ выполнено (3.1). Покажем, что в этом случае мера μ абсолютно непрерывна, а вес $w(x)$ удовлетворяет условию (A_p) .

Пусть E – компактное множество лебеговой меры нуль, $|E| = 0$. Зададим $\varepsilon > 0$ и найдем такую открытую окрестность V множества E , что

$$\mu(V \setminus E) < \varepsilon.^{20}$$

Положим $f(x) = \chi_{V \setminus E}(x)$. Тогда $\int_{\mathcal{R}^n} |f(x)|^p d\mu = \mu(V \setminus E) < \varepsilon$. С другой стороны, так как $|E| = 0$, то для всех $x \in E$ $Mf(x) = 1$. Поэтому

$$\mu(E) \leq \int_{\mathcal{R}^n} (Mf(x))^p d\mu \leq B_p \int_{\mathcal{R}^n} |f(x)|^p d\mu < B_p \varepsilon.$$

²⁰ Существование такого множества V следует из *регулярности* меры μ , которая означает, что если C – компакт, то

$$\mu(C) = \inf \{ \mu(V) : V \supset C, V \text{ – открытое} \}.$$

В самом деле, для данного E найдем такое V , что $V \supset E$ и $\mu(V) < \mu E + \varepsilon$. Тогда

$$\mu(V \setminus E) = \mu(V) - \mu(E) < \varepsilon.$$

(Борелевская мера *регулярна* в конечномерном пространстве).

Так как ε – произвольно, то $\mu(E) = 0$, а это и означает, что мера μ абсолютно непрерывна.

Положим $d\mu = w(x)dx$, где $w \in L^1_{loc}$ и $w(x) \geq 0$ (это следует из того, что мера μ конечная на компактах и неотрицательна). Пусть $Q \subset \mathcal{R}^n$ – произвольный конечный куб. Положим

$$f(x) = [w(x)]^\alpha \chi_Q(x),$$

где число $\alpha < 0$ выберем позже. Тогда

$$\int_{\mathcal{R}^n} |f(x)|^p d\mu = \int_Q [w(x)]^{1+p\alpha} dx,$$

$$Mf(x) \geq \frac{1}{|Q|} \int_Q f(y) dy = \frac{1}{|Q|} \int_Q [w(y)]^\alpha dy, \quad x \in Q.$$

Приближая $f(x)$ снизу ограниченными функциями²¹, получаем

$$\left(\int_Q w(x) dx \right) \left(\int_Q [w(x)]^\alpha dx \right)^p \leq |Q|^p \int_Q (Mf(x))^p d\mu \leq$$

$$\leq B_p |Q|^p \int_Q [w(x)]^{1+\alpha p} dx.$$

Полагая $\alpha = -\frac{1}{p-1} = 1 + \alpha p$, получаем

$$\left(\int_Q w(x) dx \right) \left(\int_Q [w(x)]^{-\frac{1}{p-1}} dx \right)^{p-1} \leq B_p |Q|^p,$$

а это и есть условие (A_p) .

Необходимость доказана.

Для доказательства достаточности теоремы Макенхаупта нам понадобится ряд вспомогательных утверждений, вытекающих из условия (A_p) . Через A_p будем обозначать класс всех функций w , удовлетворяющих условию (A_p) .

Свойство 1 Если вес w удовлетворяет (A_p) , то $w \in A_r$ для всех $r > p$.

²¹ Пусть $w_n(x) = \max\{\frac{1}{n}, w(x)\}$. Полагаем $f_n(x) = [w_n(x)]^\alpha \chi_Q(x)$, где $\alpha = -\frac{1}{p-1}$. Получим

$$Mf_n(x) \geq \frac{1}{|Q|} \int_Q f_n(y) dy = \frac{1}{|Q|} \int_Q [w_n(y)]^\alpha dy, \quad x \in Q,$$

$$\left(\int_Q w(x) dx \right) \left(\int_Q [w_n(x)]^\alpha dx \right)^p \leq |Q|^p \int_Q (Mf_n(x))^p d\mu \leq$$

$$\leq B_p |Q|^p \int_Q (f_n(x))^p d\mu = B_p |Q|^p \int_Q [w_n(x)]^{\alpha p} w(x) dx \leq B_p |Q|^p \int_Q [w_n(x)]^{1+\alpha p} dx,$$

откуда

$$\left(\int_Q w(x) dx \right) \left(\int_Q [w_n(x)]^\alpha dx \right)^{p-1} \leq B_p |Q|^p.$$

Устремляя $n \rightarrow \infty$ видим, что $\int_Q [w(x)]^\alpha dx < \infty$.

В самом деле, так как $\frac{1}{r-1} < \frac{1}{p-1}$, то, применяя неравенство Гельдера, получаем

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q [w(x)]^{-\frac{1}{r-1}} dx \leq \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q [w(x)]^{-\frac{1}{p-1}} dx \right)^{\frac{p-1}{r-1}}.$$

Возводим это неравенство в степень $r - 1$, умножаем на $\frac{1}{|Q|} \int_Q w(x) dx$ и получаем свойство (A_r) .

Свойство 2 Если $w \in A_p$, то $w^{-\frac{1}{p-1}}$ удовлетворяет (A_q) , где $q = \frac{p}{p-1}$.

Действительно, поскольку $q - 1 = \frac{1}{p-1}$, то, если $v = w^{-\frac{1}{p-1}}$, то $v^{-\frac{1}{q-1}} = w$. Тогда

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w(x) dx \right) \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q [w(x)]^{-\frac{1}{p-1}} dx \right)^{p-1} \leq c \iff \\ & \iff \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q [v(x)]^{-\frac{1}{q-1}} dx \right) \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q v(x) dx \right)^{p-1} \leq c \iff \\ & \iff \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q [v(x)]^{-\frac{1}{q-1}} dx \right)^{q-1} \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q v(x) dx \right) \leq c^{q-1} \end{aligned}$$

так как $(p-1)(q-1) = 1$.

Свойство 3 (условие удвоения) Пусть вес $w \in A_p$ при некотором p , $1 < p < +\infty$. Тогда мера $d\mu = w(x)dx$ удовлетворяет условию удвоения

$$\frac{\mu(2Q)}{\mu(Q)} \equiv \left(\int_{2Q} w(x) dx \right) \left(\int_Q w(x) dx \right)^{-1} \leq c, \quad Q \subset \mathcal{R}^n,$$

где постоянная c не зависит от куба Q .

Доказательство. Пусть $f(x) = \chi_Q(x)$ – характеристическая функция куба $Q \subset \mathcal{R}^n$. Применяя неравенство Гельдера, получим

$$\begin{aligned} \frac{|Q|}{|2Q|} &= \frac{1}{|2Q|} \int_{2Q} (f(x)w^{\frac{1}{p}}(x))w^{-\frac{1}{p}}(x) dx \leq \\ &\leq \left\{ \frac{1}{|2Q|} \int_{2Q} f^p(x)w(x) dx \right\}^{1/p} \left\{ \frac{1}{|2Q|} \int_{2Q} w^{-\frac{1}{p-1}}(x) dx \right\}^{\frac{p-1}{p}} = \\ &= \left\{ \frac{1}{|2Q|} \mu(Q) \right\}^{1/p} \left\{ \frac{1}{|2Q|} \int_{2Q} w^{-\frac{1}{p-1}}(x) dx \right\}^{\frac{p-1}{p}} \left\{ \frac{1}{|2Q|} \int_{2Q} w(x) dx \right\}^{\frac{1}{p}} \times \\ &\quad \times \left\{ \frac{1}{|2Q|} \int_{2Q} w(x) dx \right\}^{-1/p} \leq c \left\{ \frac{\mu(Q)}{\mu(2Q)} \right\}^{1/p}, \end{aligned}$$

откуда и следует требуемое неравенство.

Два следующих свойства выводятся из неравенства Геринга.

Теорема 18 (неравенство Геринга) Пусть $p > 1$ и для всех подкубов $Q \subset Q_0$

$$\left(\frac{1}{|Q|} \int_Q v^p(x) dx \right)^{1/p} \leq K \frac{1}{|Q|} \int_Q v(x) dx. \quad (3.2)$$

Тогда

$$\left(\frac{1}{|Q_0|} \int_{Q_0} v^r(x) dx \right)^{1/r} \leq c_{p,K,r} \frac{1}{|Q_0|} \int_{Q_0} v(x) dx,$$

при $p \leq r < p + \eta$, где $\eta = \eta(p, K) > 0$.

Доказательство. Не ограничивая общности, можем предположить, что $Q_0 = [0, 1]^n$ и $\int_{Q_0} v^p(x) dx = 1$. Для $\lambda > 0$ положим

$$E_\lambda = \{x \in Q_0 : v(x) > \lambda\}.$$

Нам нужно доказать оценку

$$\int_{E_\lambda} v^p(x) dx \leq A \cdot \lambda^{p-1} \int_{E_\lambda} v(x) dx, \quad \lambda \geq 1, \quad (3.3)$$

где $A = A(p, K)$. Сначала покажем, как из (3.3) вытекает (3.2). При $r > p$

$$\begin{aligned} \int_{E_1} v^r(x) dx &= \int_{E_1} v^p(x) v^{r-p}(x) dx = \\ &= (r-p) \int_{E_1} v^p(x) \left(\frac{1}{r-p} + \int_1^{v(x)} \lambda^{r-p-1} d\lambda \right) dx = \\ &= \int_{E_1} v^p(x) dx + (r-p) \int_1^{+\infty} \lambda^{r-p-1} \left(\int_{E_\lambda} v^p(x) dx \right) d\lambda \leq \\ &\leq \int_{E_1} v^p(x) dx + A(r-p) \int_1^{+\infty} \lambda^{r-2} \int_{E_\lambda} v(x) dx d\lambda = \\ &= \int_{E_1} v^p(x) dx + A(r-p) \int_{E_1} v(x) \left(\int_1^{v(x)} \lambda^{r-2} d\lambda \right) dx \leq \\ &\leq \int_{E_1} v^p(x) dx + A(r-p) \int_{E_1} v(x) \int_0^{v(x)} \lambda^{r-2} d\lambda dx = \\ &= \int_{E_1} v^p(x) dx + A \frac{r-p}{r-1} \int_{E_1} v^r(x) dx, \end{aligned}$$

откуда

$$\left(1 - A \frac{r-p}{r-1} \right) \int_{E_1} v^r(x) dx \leq \int_{E_1} v^p(x) dx.$$

²² Обратное к (3.2) неравенство с постоянной $K = 1$ следует из неравенства Гельдера. Поэтому в (3.2) постоянная $K \geq 1$.

При $A > 1$ мы получим, что $A^{\frac{r-p}{r-1}} < 1$, если $r < p + \frac{p-1}{A-1} = p + \eta$ ($\eta > 0$). Для таких r

$$\begin{aligned} \int_{Q_0} v^r(x) dx &= \int_{\{x: v(x) \leq 1\}} v^r(x) dx + \int_{E_1} v^r(x) dx \leq \\ &\leq \int_{\{x: v(x) \leq 1\}} v^p(x) dx + \frac{1}{1 - A^{\frac{r-p}{r-1}}} \int_{E_1} v^p(x) dx \leq c_r \int_{Q_0} v^p(x) dx. \end{aligned}$$

Отсюда, учитывая нормировку,

$$\begin{aligned} \left(\int_{Q_0} v^r(x) dx \right)^{1/r} &\leq c_r^{1/r} \int_{Q_0} v^p(x) dx = \\ &= c_r^{1/r} \left\{ \int_{\{x: v(x) \leq 1\}} v^p(x) dx + \int_{E_1} v^p(x) dx \right\}. \end{aligned}$$

Для оценки последнего интеграла справа снова воспользуемся неравенством (3.3). Получим

$$\begin{aligned} \left(\int_{Q_0} v^r(x) dx \right)^{1/r} &\leq c_r^{1/r} \left\{ \int_{\{x: v(x) \leq 1\}} v^p(x) dx + A \int_{E_1} v(x) dx \right\} \leq \\ &\leq A c_r^{1/r} \int_{Q_0} v(x) dx, \end{aligned}$$

а это, с учетом, что $|Q_0| = 1$, и есть (3.2).

Осталось доказать неравенство (3.3). Положим

$$\nu = 2K\lambda > \lambda \geq 1.$$

Тогда

$$\int_{E_\lambda \setminus E_\nu} v^p(x) dx \leq \nu^{p-1} \int_{E_\lambda \setminus E_\nu} v(x) dx \leq (2K)^{p-1} \lambda^{p-1} \int_{E_\lambda} v(x) dx, \quad (3.4)$$

так что нам нужна оценка величины $\int_{E_\nu} v^p(x) dx$. К кубу Q_0 применим разбиение Кальдерона-Зигмунда (см. раздел 2) и найдем набор кубов $Q_j \subset Q_0$ с попарно непересекающимися внутренностями, таких, что

$$\nu^p \leq \frac{1}{|Q_j|} \int_{Q_j} v^p(x) dx \leq c \cdot \nu^p, \quad j = 1, 2, \dots, \quad (3.5)$$

и $v(x) \leq \nu$ почти всюду на $Q_0 \setminus (\bigcup_j Q_j)$. Значит,

$$E_\nu \subset \bigcup_j Q_j$$

с точностью до множества меры нуль. Тогда из (3.5) получаем

$$\int_{E_\nu} v^p(x) dx \leq \sum_j \int_{Q_j} v^p(x) dx \leq c \cdot \nu^p \sum_j |Q_j|. \quad (3.6)$$

Но из (3.5) и из условия (3.2) теоремы следует

$$\nu \leq \left(\frac{1}{|Q_j|} \int_{Q_j} v^p(x) dx \right)^{1/p} \leq K \frac{1}{|Q_j|} \int_{Q_j} v(x) dx,$$

так что

$$|Q_j| \leq K \frac{1}{\nu} \int_{Q_j} v(x) dx \leq \frac{K}{\nu} \int_{Q_j \cap E_\lambda} v(x) dx + \frac{K\lambda}{\nu} |Q_j|,$$

откуда, в силу выбора ν ,

$$|Q_j| \leq \frac{1}{\lambda} \int_{Q_j \cap E_\lambda} v(x) dx.$$

Подставляя это в (3.6), получим

$$\begin{aligned} \int_{E_\nu} v^p(x) dx &\leq c \cdot \nu^p \frac{1}{\lambda} \sum_j \int_{Q_j \cap E_\lambda} v(x) dx \leq \frac{c \cdot \nu^p}{\lambda} \int_{E_\lambda} v(x) dx \leq \\ &\leq c \cdot 2^p K^p \lambda^{p-1} \int_{E_\lambda} v(x) dx, \end{aligned}$$

а это вместе с (3.4) дает (3.3).

Теорема доказана.

Продолжаем изучать свойства веса w , удовлетворяющего условию (A_p) .

Свойство 4 Если $1 < p < \infty$ и вес w удовлетворяет условию (A_p) , то существуют $\delta > 0$ и $c > 0$, при которых для любого куба $Q \subset \mathcal{R}^n$

$$\left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w^{1+\delta}(x) dx \right)^{\frac{1}{1+\delta}} \leq c \frac{1}{|Q|} \int_Q w(x) dx. \quad (3.7)$$

Доказательство. В силу свойства 1, из $w \in A_p$ следует $w \in A_r$ при $r > p$. Поэтому в условии (A_p) сразу можем считать, что $p > 2$. В силу неравенства Коши-Буняковского,

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{1}{|Q|} \int_Q w^{-\frac{1}{2(p-1)}}(x) \cdot w^{\frac{1}{2(p-1)}}(x) dx = \\ &= \int_Q \frac{w^{-\frac{1}{2(p-1)}}(x)}{\sqrt{|Q|}} \cdot \frac{w^{\frac{1}{2(p-1)}}(x)}{\sqrt{|Q|}} dx \leq \\ &\leq \left\{ \frac{1}{|Q|} \int_Q w^{-\frac{1}{p-1}}(x) dx \right\}^{1/2} \cdot \left\{ \frac{1}{|Q|} \int_Q w^{\frac{1}{p-1}}(x) dx \right\}^{1/2}, \end{aligned}$$

откуда

$$1 \leq \left\{ \frac{1}{|Q|} \int_Q w^{-\frac{1}{p-1}}(x) dx \right\}^{p-1} \cdot \left\{ \frac{1}{|Q|} \int_Q w^{\frac{1}{p-1}}(x) dx \right\}^{p-1}.$$

Поэтому

$$\frac{1}{|Q|} \int w(x) dx \leq$$

$$\begin{aligned} &\leq \left\{ \frac{1}{|Q|} \int_Q w(x) dx \right\} \left\{ \frac{1}{|Q|} \int_Q w^{-\frac{1}{p-1}}(x) dx \right\}^{p-1} \left\{ \frac{1}{|Q|} \int_Q w^{\frac{1}{p-1}}(x) dx \right\}^{p-1} \leq \\ &\leq K \left\{ \frac{1}{|Q|} \int_Q w^{\frac{1}{p-1}}(x) dx \right\}^{p-1}, \end{aligned}$$

или же

$$\left\{ \frac{1}{|Q|} \int_Q w(x) dx \right\}^{\frac{1}{p-1}} \leq K^{\frac{1}{p-1}} \frac{1}{|Q|} \int_Q w^{\frac{1}{p-1}}(x) dx.$$

Так как $p - 1 > 1$, то последнее неравенство означает, что функция $v = w^{\frac{1}{p-1}}$ удовлетворяет условию (3.2) теоремы Геринга. Применяя эту теорему, получим, что для некоторого $r > p - 1$

$$\left\{ \frac{1}{|Q|} \int_Q w^{\frac{r}{p-1}}(x) dx \right\}^{1/r} \leq c \frac{1}{|Q|} \int_Q w^{\frac{1}{p-1}}(x) dx.$$

К интегралу справа применим неравенство Гельдера. Тогда будем иметь

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{1}{|Q|} \int_Q w^{\frac{r}{p-1}}(x) dx \right\}^{1/r} &\leq c \left\{ \int \left(\frac{w^{\frac{1}{p-1}}(x)}{|Q|} \right)^{p-1} dx \right\}^{\frac{1}{p-1}} \cdot \left\{ \int_Q 1 \cdot dx \right\}^{1-\frac{1}{p-1}} = \\ &= c |Q|^{-1+1-\frac{1}{p-1}} \left\{ \int_Q w(x) dx \right\}^{\frac{1}{p-1}} = c \left\{ \frac{1}{|Q|} \int_Q w(x) dx \right\}^{\frac{1}{p-1}}, \end{aligned}$$

где $p - 1 < r < p - 1 + \eta$, ($\eta > 0$). Полагая $r/(p - 1) = 1 + \delta$, получаем неравенство (3.7).

Свойство 5 Если $1 < p < \infty$, и вес $w \in A_p$, то существует такое $\varepsilon > 0$, что w удовлетворяет условию $(A_{p-\varepsilon})$.

Доказательство. В силу свойства 2, вес $w^{-\frac{1}{p-1}}$ удовлетворяет условию (A_q) , где $q = \frac{p}{p-1}$. Поэтому, применяя свойство 4, получаем, что при некотором $\delta > 0$

$$\left\{ \frac{1}{|Q|} \int_Q w^{-\frac{1+\delta}{p-1}}(x) dx \right\}^{\frac{1}{1+\delta}} \leq c \frac{1}{|Q|} \int_Q w^{-\frac{1}{p-1}}(x) dx.$$

Возведем в степень $p - 1$:

$$\left\{ \frac{1}{|Q|} \int_Q w^{-\frac{1+\delta}{p-1}}(x) dx \right\}^{\frac{p-1}{1+\delta}} \leq c_1 \left\{ \frac{1}{|Q|} \int_Q w^{-\frac{1}{p-1}}(x) dx \right\}^{p-1}.$$

Положим $\varepsilon = \frac{\delta(p-1)}{1+\delta} > 0$, так что

$$p - \varepsilon - 1 = \frac{p-1}{1+\delta},$$

и последнее неравенство помножим на $\frac{1}{|Q|} \int_Q w(x) dx$. Получим

$$\left\{ \frac{1}{|Q|} \int_Q w(x) dx \right\} \left\{ \frac{1}{|Q|} \int_Q w^{-\frac{1}{(p-\varepsilon)-1}}(x) dx \right\}^{(p-\varepsilon)-1} \leq$$

$$c_1 \left\{ \frac{1}{|Q|} \int_Q w(x) dx \right\} \left\{ \frac{1}{|Q|} \int_Q w^{-\frac{1}{p-1}}(x) dx \right\}^{p-1} < \infty,$$

так что вес w удовлетворяет условию $(A_{p-\varepsilon})$ и тем самым доказано свойство 5.

Следующее свойство показывает, что если вес $w \in A_p$, то мера $d\mu = w(x)dx$ удовлетворяет условию ²³

$$\frac{\mu(E)}{\mu(Q)} \leq c \left(\frac{|E|}{|Q|} \right)^\alpha, \quad (A_\infty)$$

где E – произвольное борелевское подмножество, содержащееся в Q , а c и α не зависят от E и Q .

Свойство 6 Если $w \in A_p$, то мера $d\mu = w(x)dx$ удовлетворяет условию (A_∞) .

Доказательство. Из неравенства Гельдера и из свойства 4 получаем

$$\begin{aligned} \frac{\mu(E)}{|Q|} &= \frac{1}{|Q|} \int_E w(x) dx \leq \left\{ \frac{1}{|Q|} \int_E w^{1+\delta}(x) dx \right\}^{\frac{1}{1+\delta}} \left\{ \frac{|E|}{|Q|} \right\}^{\frac{\delta}{1+\delta}} \leq \\ &\leq \left\{ \frac{1}{|Q|} \int_Q w^{1+\delta}(x) dx \right\}^{\frac{1}{1+\delta}} \left\{ \frac{|E|}{|Q|} \right\}^{\frac{\delta}{1+\delta}} \leq c \left\{ \frac{1}{|Q|} \int_Q w(x) dx \right\} \left\{ \frac{|E|}{|Q|} \right\}^{\frac{\delta}{1+\delta}} = \\ &= c \frac{\mu(Q)}{|Q|} \left\{ \frac{|E|}{|Q|} \right\}^{\frac{\delta}{1+\delta}}, \end{aligned}$$

а это и есть условие (A_∞) с $\alpha = \frac{\delta}{1+\delta}$.

Замечание 1. Макенхауптом (1974) доказано, что условие $w \in A_\infty$ эквивалентно условию $w \in A_p$ при некотором $p < \infty$. Отсюда и из свойства 3 вытекает, что из условия (A_∞) следует, что мера $d\mu = w(x)dx$, где $w \in A_\infty$ удовлетворяет условию удвоения. Фейфферман и Макенхаупт построили пример веса $w \notin A_\infty$, такого, что $d\mu = w(x)dx$ удовлетворяет условию удвоения. Таким образом, условие удвоения слабее из всех условий (A_p) , $p \leq \infty$.

Замечание 2. В свойстве 3 утверждается, что из $w \in A_p$, $p < \infty$, следует, что мера $d\mu = w(x)dx$ удовлетворяет условию удвоения. Этот факт может быть получен и другим путем. Именно, из свойства 6 вытекает, что условие (A_p) влечет условие (A_∞) . Покажем, что условие удвоения следует из (A_∞) .

Действительно, из (A_∞) следует существование такого γ , $0 < \gamma < 1$, что из $|E| < \gamma|Q|$ вытекает $\mu(E) < \frac{1}{2}\mu(Q)$. Выберем теперь такое $\delta > 1$, что для $Q' = \delta Q$

$$|E| \equiv |Q' \setminus Q| < \gamma|Q'|.$$

Тогда

$$\mu(Q) = \mu(\delta Q) - \mu(E) > \mu(\delta Q) - \frac{1}{2}\mu(\delta Q) = \frac{1}{2}\mu(\delta Q),$$

т.е.

$$\mu(\delta Q) < 2\mu(Q), \quad \delta > 1.$$

Отсюда уже следует условие удвоения очевидным образом.

²³Это условие (A_∞) мы не будем применять в дальнейшем.

Доказательство достаточности теоремы Макенхаупта.

Итак, мы предполагаем, что вес $w(x)$ удовлетворяет условию (A_p) . Нам нужно доказать, что

$$\int_{\mathcal{R}^n} |Mf(x)|^p d\mu \leq B_p \int_{\mathcal{R}^n} |f(x)|^p d\mu, \text{ где } d\mu = w(x)dx.$$

В силу неравенства Гельдера, для любого куба Q

$$\begin{aligned} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(x)| dx &= \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(x)| w^{\frac{1}{p}}(x) w^{-\frac{1}{p}}(x) dx \leq \\ &\leq \left\{ \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(x)|^p w(x) dx \right\}^{\frac{1}{p}} \left\{ \frac{1}{|Q|} \int_Q w^{-\frac{1}{p} \frac{p}{p-1}}(x) dx \right\}^{\frac{p-1}{p}}. \end{aligned}$$

Второй сомножитель справа оценим с помощью (A_p)

$$\begin{aligned} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(x)| dx &\leq \left\{ \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(x)|^p w(x) dx \right\}^{1/p} \left\{ \frac{1}{|Q|} \int_Q w^{-\frac{1}{p-1}}(x) dx \right\}^{\frac{p-1}{p}} \times \\ &\times \left\{ \frac{1}{|Q|} \int_Q w(x) dx \right\}^{1/p} \left\{ \frac{1}{|Q|} \int_Q w(x) dx \right\}^{-\frac{1}{p}} \leq \\ &\leq c \left\{ \frac{1}{\mu(Q)} \int_Q |f(x)|^p w(x) dx / \frac{1}{|Q|} \int_Q w(x) dx \right\}^{1/p} = \\ &= c \left\{ \frac{1}{\mu(Q)} \int_Q |f(x)|^p w(x) dx \right\}^{1/p} = c \left\{ \frac{1}{\mu(Q)} \int_Q |f(x)|^p d\mu \right\}^{1/p}. \end{aligned}$$

Положим

$$M_\mu g(x) = \sup_{Q \ni x} \frac{1}{\mu(Q)} \int_Q |g(y)| d\mu.$$

Тогда, переходя к верхней грани в последнем неравенстве, получим

$$Mf(x) \leq c \{M_\mu(|f|^p)(x)\}^{1/p}. \quad (3.8)$$

Но, в силу свойства 3, мера μ удовлетворяет условию удвоения, так что для оператора M_μ справедлива максимальная теорема Харди-Литтлвуда (из раздела 2), в силу которой

$$\int_{\mathcal{R}^n} (M_\mu g)^r(x) d\mu \leq c \int_{\mathcal{R}^n} |g(x)|^r d\mu, \quad 1 < r < \infty. \quad (3.9)$$

Кроме того, так как из (A_p) следует $(A_{p-\varepsilon})$ (свойство 5), то (3.8) можно заменить неравенством

$$Mf(x) \leq c_1 \{(M_\mu |f|^{p-\varepsilon})(x)\}^{\frac{1}{p-\varepsilon}} d\mu.$$

Применяя (3.9) с $r = \frac{p}{p-\varepsilon}$, отсюда получаем

$$\int_{\mathcal{R}^n} |Mf(x)|^p d\mu \leq c \int_{\mathcal{R}^n} \{(M_\mu |f|^{p-\varepsilon})(x)\}^{\frac{p}{p-\varepsilon}} d\mu \leq c_1 \int_{\mathcal{R}^n} |f(x)|^p d\mu,$$

что и требовалось доказать.

Замечание 3. В определении условия (A_p) вместо интегрирования по кубам можно было брать интегралы по шарам.

Действительно, пусть B – шар в \mathcal{R}^n , Q – наименьший куб, содержащий B , а Q_1 – наибольший куб, содержащийся в B . Тогда из соотношений $|Q_1| \asymp |B| \asymp |Q|$ и неравенств

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{|Q_1|}{|B|} \right\}^p \left\{ \frac{1}{|Q_1|} \int_{Q_1} w(x) dx \right\} \left\{ \frac{1}{|Q_1|} \int_{Q_1} w^{-\frac{1}{p-1}}(x) dx \right\}^{p-1} \leq \\ & \leq \left\{ \frac{1}{|B|} \int_B w(x) dx \right\} \left\{ \frac{1}{|B|} \int_B w^{-\frac{1}{p-1}}(x) dx \right\}^{p-1} \leq \\ & \leq \left\{ \frac{|Q|}{|B|} \right\}^p \left\{ \frac{1}{|Q|} \int_Q w(x) dx \right\} \left\{ \frac{1}{|Q|} \int_Q w^{-\frac{1}{p-1}}(x) dx \right\}^{p-1}. \end{aligned}$$

вытекает, что условие (A_p) ”по кубам” эквивалентно условию (A_p) ”по шарам”.

Пример веса, удовлетворяющего условию (A_p) .

Пусть ω – неотрицательная монотонная функция на $(0, +\infty)$, такая, что при некоторых $c_1, c_2 > 0$

$$c_1 \omega(t) \leq \omega(2t) \leq c_2 \omega(t), \quad t > 0. \quad (3.10)$$

Положим $w(x) = \omega(|x|)$, $x \in \mathcal{R}^n$.

Пусть B – шар в \mathcal{R}^n . Если $0 \notin 2B$, то, как легко видеть,

$$\frac{\sup_{x \in B} |x|}{\inf_{x \in B} |x|} \leq 3,$$

т.е., в силу условия (3.10), для любых $x, y \in B$

$$\frac{w(x)}{w(y)} \leq c,$$

где постоянная c не зависит от шара B . Поэтому

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{1}{|B|} \int_B w(x) dx \right\} \left\{ \frac{1}{|B|} \int_B w^{-\frac{1}{p-1}}(x) dx \right\}^{p-1} \leq \\ & \leq \sup_{x \in B} w(x) \left(\left(\inf_{x \in B} w(x) \right)^{-\frac{1}{p-1}} \right)^{p-1} = \frac{\sup_{x \in B} w(x)}{\inf_{x \in B} w(x)} \leq c. \end{aligned}$$

Если же $2B \ni 0$, то в этом случае мера шара B соизмерима с мерой шара B_R с центром в нуле и радиуса $R = \sup_{x \in B} |x|$. Если $w \in A_p$, то мера $d\mu = w(x)dx$ удовлетворяет условию удвоения (свойство 3), а из $w^{-\frac{1}{p-1}} \in A_q$ (свойство 2) следует, что, в силу свойства 3, мера $d\mu_1 = w^{-\frac{1}{p-1}}(x)dx$ также удовлетворяет условию удвоения. Поэтому

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{1}{|B|} \int_B w(x) dx \right\} \left\{ \frac{1}{|B|} \int_B w^{-\frac{1}{p-1}}(x) dx \right\}^{p-1} \asymp \\ & \asymp \left\{ \frac{1}{|B_R|} \int_{B_R} w(x) dx \right\} \left\{ \frac{1}{|B_R|} \int_{B_R} w^{-\frac{1}{p-1}}(x) dx \right\}^{p-1} = \end{aligned}$$

$$= \left\{ \frac{1}{R^n} \int_0^R r^{n-1} \omega(r) dr \right\} \left\{ \frac{1}{R^n} \int_0^R r^{n-1} \omega^{-\frac{1}{p-1}}(r) dr \right\}^{p-1}.$$

Таким образом, если функция ω удовлетворяет условию (3.10) и монотонна, то *радиальный* вес $w(x) = \omega(|x|)$ удовлетворяет (A_p) тогда, и только тогда, когда

$$\left\{ \int_0^R r^{n-1} \omega(r) dr \right\} \left\{ \int_0^R r^{n-1} \omega^{-\frac{1}{p-1}}(r) dr \right\}^{p-1} \leq cR^{np}, \quad R > 0.$$

В частности, для $\omega(r) = r^\alpha$ получим, что вес $w(x) = |x|^\alpha$ удовлетворяет (A_p) тогда, и только тогда, когда

$$-n < \alpha < n(p-1).$$

Теперь рассмотрим случай $p = 1$. В этом случае, даже когда μ – мера Лебега, максимальный оператор обладает лишь слабым типом (1-1). Поэтому мы и поставим здесь вопрос в следующей формулировке.

Каковы необходимые и достаточные условия на меру μ , обеспечивающие слабую (1-1) весовую оценку для максимального оператора Харди-Литтлвуда

$$\mu(\{x : Mf(x) > \lambda\}) \leq c \frac{1}{\lambda} \int_{\mathcal{R}^n} |f(x)| d\mu, \quad \lambda > 0 ?$$

Покажем, что этим условием является условие

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q w(x) dx \leq c \cdot \operatorname{ess\,inf}_{x \in Q} w(x), \quad (A_1)$$

выполненное для всех кубов $Q \subset \mathcal{R}^n$ с постоянной c , не зависящей от Q .²⁴

Замечание 4. В шкале (A_p) -условий условие (A_1) самое сильное. Это вытекает из следующего свойства.

Свойство 7 *Если вес w удовлетворяет условию (A_1) , то он удовлетворяет также условию (A_p) при любом $p > 1$.*

²⁴ *Упражнение.* Покажите, что (A_1) -условие эквивалентно следующему условию

$$Mw(x) \leq c \cdot w(x) \text{ для п.в. } x \in \mathcal{R}^n. \quad (A'_1)$$

Решение. Для доказательства того, что (A_1) влечет (A'_1) зафиксируем точку $x \in \mathcal{R}^n$ и куб $Q \ni x$. Тогда из (A_1) получим

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q w(y) dy \leq c \operatorname{ess\,inf}_{y \in Q} w(y) \leq cw(x).$$

Так как куб $Q \ni x$ произвольный, то

$$Mw(x) \leq c \cdot w(x),$$

т.е. условие (A'_1) .

Покажем, что (A'_1) влечет (A_1) . Пусть произвольный куб $Q \subset \mathcal{R}^n$. В силу (A'_1) , для почти всех $x \in Q$ имеем

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q w(y) dy \leq Mw(x) \leq c \cdot w(x).$$

Отсюда, очевидно, следует (A_1) .

Действительно, это мгновенно вытекает из неравенства

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{1}{|Q|} \int_Q w(x) dx \right\} \left\{ \frac{1}{|Q|} \int_Q w^{-\frac{1}{p-1}}(x) dx \right\}^{p-1} \leq \\ & \leq \left\{ \operatorname{ess\,inf}_{x \in Q} w(x) \right\}^{-1} \frac{1}{|Q|} \int_Q w(x) dx. \end{aligned}$$

Теорема 19 (Макенхаупт) Пусть μ – положительная борелевская мера, конечная на компактных множествах. Тогда неравенство

$$\mu(\{x \in \mathcal{R}^n : Mf(x) > \lambda\}) \leq c \frac{1}{\lambda} \int_{\mathcal{R}^n} |f(x)| dx, \quad \lambda > 0, \quad (3.11)$$

с постоянной c , не зависящей от f , имеет место тогда, и только тогда, когда мера μ абсолютно непрерывна, а вес $w(x)$ удовлетворяет условию (A_1) .

Доказательство. Для доказательства достаточности условия (A_1) покажем, что из (A_1) вытекает неравенство

$$Mf(x) \leq c M_\mu f(x), \quad (3.12)$$

где $d\mu = w(x)dx$, а c не зависит от x . Для $Q \ni x$ имеем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)| dy = \frac{1}{|Q|} \int_Q \frac{|f(y)|w(y)}{w(y)} dy \leq \\ & \leq \frac{1}{|Q| \operatorname{ess\,inf}_{y \in Q} w(y)} \int_Q |f(y)|w(y) dy \leq \frac{c}{|Q| \frac{1}{|Q|} \int_Q w(y) dy} \int_Q |f(y)|w(y) dy = \\ & = \frac{c}{\mu(Q)} \int_Q |f(y)| d\mu. \end{aligned}$$

Отсюда, переходя к верхней грани по всем кубам Q , содержащим x , получаем (3.12). Из (3.12) следует, что

$$\{x \in \mathcal{R}^n : Mf(x) > \lambda\} \subset \{x \in \mathcal{R}^n : M_\mu f(x) > \frac{\lambda}{c}\},$$

откуда, используя слабую (1-1) оценку для оператора M_μ (теорема Харди-Литтлвуда, раздел 2²⁵), получаем

$$\mu(\{x \in \mathcal{R}^n : Mf(x) > \lambda\}) \leq \mu\left(\left\{x : M_\mu f(x) > \frac{\lambda}{c}\right\}\right) \leq \frac{c'}{\lambda} \int_{\mathcal{R}^n} |f(x)| d\mu.$$

Докажем необходимость. Для этого, как и в случае $p > 1$, покажем сперва, что из условия (3.11) следует абсолютная непрерывность меры μ .

Пусть E – компактное множество лебеговой меры нуль, $|E| = 0$. Нужно показать, что $\mu(E) = 0$. Зададим $\varepsilon > 0$ и найдем такую открытую окрестность V множества E , что $\mu(V \setminus E) < \varepsilon$ (см. с. 28). Положим $f(x) = \chi_{V \setminus E}(x)$. Тогда

$$\int_{\mathcal{R}^n} |f(x)| d\mu = \mu(V \setminus E) < \varepsilon.$$

²⁵ Ее можно применить, так как условие (A_1) влечет (A_p) , которое, в свою очередь, влечет условие удвоения

Но, так как $|E| = 0$ и $Mf(x) = 1$, $x \in E$, то

$$\mu(E) \leq \mu\left(\left\{x \in \mathcal{R}^n : Mf(x) > \frac{1}{2}\right\}\right) \leq 2c \int_{\mathcal{R}^n} |f(x)| d\mu < 2c\varepsilon.$$

Устемляя $\varepsilon \rightarrow 0$, получаем $\mu(E) = 0$.

Итак, мера μ абсолютно непрерывна. Пусть $d\mu = w(x)dx$. Тогда (3.11) принимает следующий вид

$$\int_{\{x \in \mathcal{R}^n : Mf(x) > \lambda\}} w(x)dx \leq \frac{c}{\lambda} \int_{\mathcal{R}^n} |f(x)|w(x)dx. \quad (3.12)$$

Покажем, что из (3.12) следует (A_1) .

Пусть Q – куб в \mathcal{R}^n . Разобьем Q на 2^n конгруэнтных кубов делением пополам его ребер. Пусть Q_1 – один из таких кубов. Обозначим $f(x) = \chi_{Q_1}(x)$. Если x_0 – внутренняя точка куба Q , то, очевидно,

$$Mf(x_0) > \frac{1}{|Q|} \int_Q f(y)dy = \frac{|Q_1|}{|Q|}.$$

Следовательно, для $\lambda = \frac{|Q_1|}{|Q|}$

$$\{x \in \mathcal{R}^n : Mf(x) > \lambda\} \supset \text{int } Q,$$

откуда, в силу (3.12), получаем

$$\int_Q w(x)dx \leq \int_{\{x \in \mathcal{R}^n : Mf(x) > \lambda\}} w(x)dx \leq c \frac{|Q|}{|Q_1|} \int_{Q_1} w(x)dx,$$

т.е.

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q w(x)dx \leq c \frac{1}{|Q_1|} \int_{Q_1} w(x)dx.$$

Пусть теперь x_0 – точка Лебега функции w , Q – куб, содержащий x_0 , Q_k – последовательность двоичных по отношению к Q кубов, стягивающихся к x_0 . Тогда, применяя приведенные выше рассуждения к кубу Q_k , получим

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q w(x)dx \leq c \frac{1}{|Q_k|} \int_{Q_k} w(x)dx,$$

где постоянная c не зависит от куба Q_k . Отсюда, в силу теоремы Лебега, следует

$$w(x_0) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{|Q_k|} \int_{Q_k} w(x)dx \geq \frac{1}{c} \frac{1}{|Q|} \int_Q w(x)dx.$$

В силу произвольности куба Q отсюда вытекает (A_1) .

Теорема доказана.

Важный класс весов, удовлетворяющих условию (A_1) , описывает следующая теорема.

Теорема 20 (Койфман, 1980) Пусть функция $f \in L^{loc}$. Тогда для любого α , $0 < \alpha < 1$, вес $w(x) = (Mf(x))^\alpha$ удовлетворяет условию (A_1) .

Доказательство. Из условия $f \in L^{loc}$ не следует, что $Mf(x)$ локально суммируема. Однако, при $0 < \alpha < 1$ функция $(Mf(x))^\alpha$ уже будет локально суммируемой. Мы это получим в процессе доказательства теоремы.

Итак, нам нужно доказать, что для почти каждой точки $x_0 \in \mathcal{R}^n$ и любого куба Q , содержащего x_0 , справедливо неравенство

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q [Mf(x)]^\alpha dx \leq c[Mf(x_0)]^\alpha, \quad (3.13)$$

где постоянная c зависит лишь от n и α . Обозначим

$$f(x) = f(x)\chi_{3Q}(x) + f(x)\chi_{\mathcal{R}^n \setminus 3Q}(x) \equiv f_1(x) + f_2(x).$$

Тогда для любого $x \in Q$

$$Mf(x) \leq Mf_1(x) + Mf_2(x).$$

Оценим второе слагаемое. Пусть R – куб, содержащий x . Если $R \subset 3Q$, то $\int_R |f_2(y)| dy = 0$. Если же $R \setminus (3Q) \neq \emptyset$, то $3R \supset Q$ и, так как $x_0 \in 3R$, то

$$\frac{1}{|R|} \int_R |f_2(y)| dy \leq \frac{|3R|}{|R|} \frac{1}{|3R|} \int_{3R} |f(y)| dy \leq 3^n Mf(x_0).$$

Таким образом, для любого $x \in Q$

$$Mf_2(x) \leq 3^n Mf(x_0). \quad (3.14)$$

Для оценки Mf_1 применим неравенство слабого типа для максимального оператора:

$$\begin{aligned} |\{x \in Q : Mf_1(x) > \lambda\}| &\leq |\{x \in \mathcal{R}^n : Mf_1(x) > \lambda\}| \leq \\ &\leq \frac{c}{\lambda} \int_{\mathcal{R}^n} |f_1(y)| dy = \frac{c}{\lambda} \int_{3Q} |f(y)| dy. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что для $0 < t < |3Q|$

$$(Mf_1)^*(t) \leq \frac{c}{t} \int_{3Q} |f(y)| dy. \quad (3.15)$$

Итак, имеем

$$\begin{aligned} &\frac{1}{|Q|} \int_Q [Mf(x)]^\alpha dx \leq \\ &\leq \frac{1}{|Q|} \int_Q [Mf_1(x)]^\alpha dx + \frac{1}{|Q|} \int_Q [Mf_2(x)]^\alpha dx \equiv I_1 + I_2. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Для оценки I_2 применим (3.14). Получим

$$I_2 \leq c[Mf(x_0)]^\alpha.$$

²⁶Мы использовали неравенство $(a+b)^\alpha \leq a^\alpha + b^\alpha$, где $0 < \alpha < 1$. Чтобы его доказать, обозначим $\varphi(a) = (a+b)^\alpha - a^\alpha - b^\alpha$, где $b \geq 0$ фиксировано. Тогда $\varphi(0) = 0$ и $\varphi'(a) = \alpha((a+b)^{\alpha-1} - a^{\alpha-1}) < 0$, т.е. $\varphi(a)$ не возрастает, что равносильно нашему неравенству.

Из (3.15) находим

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{|Q|} \int_Q [Mf_1(x)]^\alpha dx \leq \frac{1}{|Q|} \int_0^{|3Q|} [(Mf_1)^*(t)]^\alpha dt \leq \\ &\leq \frac{c}{|Q|} \left[\int_{3Q} |f(y)| dy \right]^\alpha \int_0^{|3Q|} \frac{dt}{t^\alpha} = c_1 \frac{|3Q|}{|Q|} \left[\frac{1}{|3Q|} \int_{3Q} |f(y)| dy \right]^\alpha \leq \\ &\leq c_2 [Mf(x_0)]^\alpha. \end{aligned}$$

Из двух последних неравенств и (3.16) следует (3.13).

Теорема доказана.

Как мы уже видели, из всех условий (A_p) , $1 \leq p \leq \infty$, самым сильным является (A_1) -условие. С другой стороны, условие (A_1) имеет самый простой вид и его легко проверять. Поэтому естественно было бы охарактеризовать вес, удовлетворяющий (A_p) при $p > 1$, в терминах весов, удовлетворяющих (A_1) . Впервые такая характеристика была дана П.Джонсом.²⁷ Доказательство Джонса трудное и основано на разложении функций из класса ВМО (функций с ограниченным средним колебанием). Мы рассмотрим простое доказательство разложения (A_p) -весов, предложенное в 1982 г. Рубио де Франсия.²⁸ Но сперва покажем, что имеет место следующее простое утверждение.

Пусть $1 < p < \infty$ и веса w_0 и w_1 удовлетворяют условию (A_1) . Тогда вес

$$w(x) = w_0(x)w_1^{1-p}(x) \quad (3.17)$$

удовлетворяет условию (A_p) .

Действительно, для любого $Q \subset \mathcal{R}^n$ из $w_0, w_1 \in A_1$ следует

$$\begin{aligned} &\left\{ \frac{1}{|Q|} \int_Q w(x) dx \right\} \left\{ \frac{1}{|Q|} \int_Q w^{-\frac{1}{p-1}}(x) dx \right\}^{p-1} = \\ &= \left\{ \frac{1}{|Q|} \int_Q w_0(x)w_1^{1-p}(x) dx \right\} \left\{ \frac{1}{|Q|} \int_Q w_0^{-\frac{1}{p-1}}(x)w_1^{(1-p)\left(-\frac{1}{p-1}\right)}(x) dx \right\}^{p-1} \leq \\ &\leq \left[\operatorname{ess\,inf}_Q w_1(x) \right]^{1-p} \left\{ \frac{1}{|Q|} \int_Q w_0(x) dx \right\} \left[\left(\operatorname{ess\,inf}_Q w_0(x) \right)^{-\frac{1}{p-1}} \right]^{p-1} \times \\ &\quad \times \left\{ \frac{1}{|Q|} \int_Q w_1(x) dx \right\}^{p-1} = \\ &= \frac{\frac{1}{|Q|} \int_Q w_0(x) dx}{\operatorname{ess\,inf}_Q w_0(x)} \cdot \left\{ \frac{\frac{1}{|Q|} \int_Q w_1(x) dx}{\operatorname{ess\,inf}_Q w_1(x)} \right\}^{p-1} \leq c_0 c_1^{p-1} = c_2. \end{aligned}$$

Таким образом, если $w_0, w_1 \in A_1$, то вес w , определенный равенством (3.17), удовлетворяет (A_p) . Характеризация (A_p) весов, данная П.Джонсом, состоит в том, что это утверждение обратимо, т.е. каждый вес, удовлетворяющий (A_p) , представим в виде (3.17) с некоторыми $w_0, w_1 \in A_1$. Такое разложение веса w на произведение двух сомножителей называют *факторизацией*.

²⁷ Jones P.W. Factorization of A_p weights. Ann. of Math., 1980, V.111, N 3, p. 511-530.

²⁸ Rubio de Francia J.L. A new technique in the theory of A_p weights. Top. Mod. Harmonic Analysis. Proc. Semin. Torino and Milano, May-June 1982. Vol. 2. Roma, 1983, 1984. p. 571-579.

Теорема 21 (о факторизации (A_p) весов) Пусть $1 < p < \infty$. Вес w удовлетворяет условию (A_p) тогда, и только тогда, когда существуют два веса $w_0, w_1 \in A_1$, таких, что почти всюду

$$w(x) = w_0(x)w_1^{1-p}(x).$$

Доказательство. Достаточность показана выше. Доказательство необходимости, данное Рубио де Франсиа, основано на следующей замечательной лемме.

Лемма (Рубио де Франсиа). Пусть S – полулинейный, положительный ²⁹ оператор, ограниченный в пространстве $L_\mu^p(X)$. Тогда для любой неотрицательной функции $u \in L_\mu^p(X)$ существует функция U , такая, что

$$u(x) \leq U(x) \text{ п.в. на } X, \quad (3.18)$$

$$\|U\|_{\mu,p} \leq \|u\|_{\mu,p}, \quad (3.19)$$

$$SU(x) \leq cU(x) \text{ п.в. на } X, \quad (3.20)$$

где постоянная c не зависит от u .

Доказательство леммы. Пусть $\|S\|$ – норма оператора S в L_μ^p . Обозначим

$$U(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{S^j u(x)}{(2\|S\|)^j},$$

где $S^j u = S(S^{j-1}(u))$, $S^0 u \equiv u$. Имеем (так как $u \geq 0$ и $Su \geq 0$)

$$\begin{aligned} u(x) &= S^0 u(x) \leq \frac{S^0 u(x)}{(2\|S\|)^0} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{S^j u(x)}{(2\|S\|)^j} = \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{S^j u(x)}{(2\|S\|)^j} = U(x), \end{aligned}$$

т.е. (3.18) выполнено. Далее, в силу полулинейности,

$$\begin{aligned} \|U\|_{\mu,p} &= \left\| \sum_{j=0}^{\infty} \frac{S^j u(x)}{(2\|S\|)^j} \right\|_{\mu,p} \leq \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\|S^j u\|_{\mu,p}}{(2\|S\|)^j} \leq \\ &\leq \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\|S\|^j \|u\|_{\mu,p}}{(2\|S\|)^j} = 2\|u\|_{\mu,p}. \end{aligned}$$

И, наконец, используя полулинейность S , получим

$$SU(x) = S \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{S^j u(x)}{(2\|S\|)^j} \right) \leq \sum_{j=0}^{\infty} \frac{S^{j+1} u(x)}{(2\|S\|)^j} =$$

²⁹ Определенный на X оператор S называется *полулинейным*, если для любых $x, y \in X$ и $\lambda \in \mathcal{R}$

$$S(x+y) \leq S(x) + S(y), \quad S(\lambda x) = |\lambda|S(x),$$

и *положительным*, если $S(x) \geq 0$ для всех $x \in X$.

$$2\|S\| \sum_{j=0}^{\infty} \frac{S^{j+1}u(x)}{(2\|S\|)^{j+1}} \leq 2\|S\| \sum_{j=0}^{\infty} \frac{S^j u(x)}{(2\|S\|)^j} = 2\|S\|U(x).$$

Лемма доказана.

Докажем теперь **необходимость** в теореме о факторизации. Для этого достаточно рассмотреть случай $p \geq 2$. В самом деле, для $1 < p < 2$ из $w \in A_p$, в силу свойства 2, следует $w^{-\frac{1}{p-1}} \in A_{p'}$, где $p' = \frac{p}{p-1} > 2$. Факторизуя вес $w^{-\frac{1}{p-1}}$, найдем w_0, w_1 , для которых

$$w^{-\frac{1}{p-1}} = w_0 w_1^{1-p'},$$

откуда

$$w = w_0^{1-p} w_1.$$

Итак, пусть $p \geq 2$ и $w \in A_p$. Нужно найти такую ненулевую функцию $U \in A_1$, что $w_0 = wU^{p-1} \in A_1$, т.е. чтобы при некоторых c_1, c_2 почти всюду были выполнены неравенства

$$MU(x) \leq c_1 U(x) \tag{3.21}$$

и

$$M(w^{p-1})(x) \leq c_2 w(x) U^{p-1}(x).$$

Последнее неравенство можно переписать в виде

$$\left\{ \frac{1}{w(x)} M(wU^{p-1})(x) \right\}^{\frac{1}{p-1}} \leq c_2 U(x). \tag{3.22}$$

Определим оператор S следующим равенством

$$Su(x) = Mu(x) + \left\{ \frac{1}{w(x)} M(wu^{p-1})(x) \right\}^{\frac{1}{p-1}}. \tag{3.23}$$

Если мы покажем, что к оператору S применима лемма Рубио де Франсия, то из нее сразу получим (3.21) и (3.22). В самом деле, зададим $u(x) \geq 0$ (не эквивалентную нулю) и, применяя лемму, построим функцию $U(x)$, удовлетворяющую (3.18) – (3.20). Из (3.20) получим

$$MU(x) \leq SU(x) \leq cU(x),$$

т.е. (3.21), а также

$$\left\{ \frac{1}{w(x)} M(wU^{p-1})(x) \right\}^{\frac{1}{p-1}} \leq SU(x) \leq cU(x),$$

т.е. (3.22).

Итак, осталось показать, что оператор S , определенный равенством (3.23), ограничен в L_{μ}^p (где мера $d\mu = w(x)dx$), положительный и полулинейный.

Очевидно, $Su \geq 0$ и $S(\lambda u) = |\lambda|Su$, $\lambda \in \mathcal{R}$. Далее, полуаддитивность первого слагаемого в определении (3.23) очевидна. Для доказательства полуаддитивности второго слагаемого запишем неравенство Гельдера

$$\int_Q f(x)g(x)w(x)dx =$$

$$= \int_Q f(x)w^{1/q}(x)g(x)w^{1/q'}(x)dx \leq \left\{ \int_Q f^q(x)w(x)dx \right\}^{1/q} \left\{ \int_Q g^{q'}(x)w(x)dx \right\}^{1/q'},$$

из которого следует неравенство Минковского

$$\begin{aligned} & \int_Q [u(x) + v(x)]^q w(x) dx = \\ &= \int_Q [u(x) + v(x)]^{q-1} u(x) w(x) dx + \int_Q [u(x) + v(x)]^{q-1} v(x) w(x) dx \leq \\ & \leq \left\{ \int_Q [u(x) + v(x)]^q w(x) dx \right\}^{1/q'} \times \\ & \times \left\{ \left[\int_Q u^q(x) w(x) dx \right]^{1/q} + \left[\int_Q v^q(x) w(x) dx \right]^{1/q} \right\}. \end{aligned}$$

Разделив это неравенство на $|Q|$, и переходя к верхним граням, получим

$$M^{1/q}((u + v)^q w)(x) \leq M^{1/q}(u^q w)(x) + M^{1/q}(v^q w)(x).$$

Разделим это неравенство на $w^{1/q}(x)$ и получим полуаддитивность второго слагаемого в определении S .

Осталось доказать ограниченность S в L_μ^p . Пусть $u \in L_\mu^p$. Тогда

$$\begin{aligned} \|Su\|_{\mu,p} &= \left\{ \int_{\mathcal{R}^n} [Su(x)]^p w(x) dx \right\}^{1/p} \leq \\ & \leq \left\{ \int_{\mathcal{R}^n} [Mu(x)]^p w(x) dx \right\}^{1/p} + \\ & + \left\{ \int_{\mathcal{R}^n} \left[\frac{1}{w(x)} M(wu^{p-1})(x) \right]^{\frac{p}{p-1}} w(x) dx \right\}^{1/p} \equiv I_1 + I_2. \end{aligned}$$

В силу условия $w \in A_p$ имеем

$$I_1 \leq c \left\{ \int_{\mathcal{R}^n} |u(x)|^p w(x) dx \right\}^{1/p} = c \|u\|_{\mu,p}.$$

Далее, так как из $w \in A_p$ следует $w^{-\frac{1}{p-1}} \in A_{p'}$ (свойство 2), где $p' = \frac{p}{p-1}$, то

$$\begin{aligned} I_2^p &= \int_{\mathcal{R}^n} [M(wu^{p-1})(x)]^{\frac{p}{p-1}} w^{1-\frac{p}{p-1}}(x) dx = \\ &= \int_{\mathcal{R}^n} [M(wu^{p-1})(x)]^{p'} w^{-\frac{1}{p-1}}(x) dx \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq c \int_{\mathcal{R}^n} [w(x)|u(x)^{p-1}]^{p'} w^{-\frac{1}{p-1}}(x) dx = \\ &= c \int_{\mathcal{R}^n} |u(x)|^p w(x) dx, \end{aligned}$$

откуда

$$I_2 \leq c' \|u\|_{\mu,p}.$$

Окончательно,

$$\|Su\|_{\mu,p} \leq c \|u\|_{\mu,p}, \quad u \in L_{\mu}^p.$$

Теорема доказана.

4 Весовые оценки сингулярных интегралов – краткий обзор.

В этом разделе вкратце обсуждаются некоторые результаты, связанные с оценками сингулярных интегральных операторов и некоторых других операторов в весовых пространствах.

Для заданного оператора T рассматриваются весовые оценки вида

$$\int |Tf(x)|^p w(x) dx \leq c_1 \int |f(x)|^p v(x) dx, \quad (4.1)$$

или соответствующее неравенство слабого типа

$$\int_{\{x: |Tf(x)| > \lambda\}} w(x) dx \leq c_2 \frac{1}{\lambda^p} \int |f(x)|^p v(x) dx, \quad \lambda > 0, \quad (4.2)$$

где постоянные c_1 и c_2 не зависят от f и λ .

Началом этих исследований можно полагать работу Макенхаупта 1972 г., в которой установлено необходимое и достаточное условие (условие (A_p)) в случае равных весов $v \equiv w$ для справедливости (4.1), где T – максимальный оператор Харди-Литтлвуда. В этой же работе получено полное описание пар весов (v, w) , для которых справедливо (4.2).

Хант, Макенхаупт и Виден (1973) показали, что для одномерного оператора Гильберта ³⁰ точным условием на вес $v \equiv w$ для справедливости (4.1) при $1 < p < \infty$ также является условие (A_p) . Койфман и Фэфферман распространили теорию на общие сингулярные интегралы в \mathcal{R}^n .

Рассмотрим общую схему доказательства весовых оценок с помощью интерполяции.

Пусть дан некоторый сублинейный³¹, оператор T , для которого мы можем доказать, что при условии (A_p) оператор T имеет слабый тип в L_w^p , т.е.

$$\int_{\{x: |Tf(x)| > \lambda\}} w(x) dx \leq c \lambda^{-p} \int |f(x)|^p w(x) dx, \quad (4.3)$$

где $f \in L_w^p$, $\lambda > 0$. Основной частью доказательства служит следствие из теоремы Геринга, согласно которому из (A_p) вытекает $(A_{p-\epsilon})$. Используя это следствие, из (4.3) с помощью интерполяционной теоремы Марцинкевича получают ограниченность T в L_w^p .

Именно такой путь применялся нами для доказательства ограниченности в L_w^p максимального оператора Харди-Литтлвуда. Таким же образом доказывается ограниченность в L_w^p сингулярных интегралов. Однако в 1980-81 гг. Соьер предложил новое доказательство весовой максимальной теоремы, не использующее неравенств слабого типа.

4.1 Весовые неравенства Харди.

Обозначим

$$Pf(x) = \int_0^x f(t) dt, \quad Qf(x) = \int_x^\infty f(t) dt$$

³⁰ Определение оператора Гильберта см. ниже

³¹ Оператор T называется *сублинейным*, если

$$|T(f_1 + f_2)(x)| \leq c(|Tf_1(x)| + |Tf_2(x)|),$$

где постоянная c не зависит от f_1 , f_2 и от x .

(предполагаем, что $|Pf(x)|$ и $|Qf(x)|$ конечны для всех $0 < x < \infty$). Рассматривается следующая задача: *Требуется охарактеризовать пары весов v и w , для которых*

$$\left\{ \int_0^\infty |Pf(x)|^q w(x) dx \right\}^{1/q} \leq c \left\{ \int_0^\infty |f(x)|^p v(x) dx \right\}^{1/p} \quad (4.4)$$

и двойственное неравенство

$$\left\{ \int_0^\infty |Qf(x)|^q w(x) dx \right\}^{1/q} \leq c_1 \left\{ \int_0^\infty |f(x)|^p v(x) dx \right\}^{1/p}, \quad (4.5)$$

где $p, q \in \mathcal{R}$, а постоянные не зависят от f .

Неравенства Харди играют важную роль во многих задачах анализа. В частности, они применяются при доказательстве интерполяционных теорем. В том виде, в котором неравенства Харди рассмотрены нами в разделе 1 (этот случай установлен Харди), мы имеем неравенства (4.4) и (4.5) для случая $1 < p = q < \infty$ и степенных весов. В настоящее время найдены условия на пары весов (v, w) , при которых справедливы (4.4) и (4.5) при различных p и q . Изучены также весовые аналоги неравенств Харди слабого типа и некоторых близких операторов.

4.2 Двухвесовые оценки максимального оператора Харди-Литтлвуда.

Для случая $T = M$ при $1 < p < \infty$ Макенхаупт и Виден (1976) показали, что необходимым для справедливости (4.1) является условие

$$\sup_Q \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q |M(\chi_Q)(x)|^p w(x) dx \right) \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q v^{-\frac{1}{p-1}}(x) dx \right)^{p-1} < \infty$$

и предположили, что оно же является и достаточным. Однако Соьер (1981, 1982) показал, что необходимым и достаточным является другое условие

$$\left(\int_Q |M(v^{-\frac{1}{p-1}} \chi_Q)(x)|^q w(x) dx \right)^{\frac{1}{q}} \leq c \left(\int_Q v^{-\frac{1}{p-1}}(x) dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty,$$

где c не зависит от Q . Соьером получены также более общие теоремы для максимальных операторов по мере μ , а также двухвесовые оценки для сильного максимального оператора M_s , в определении которого вместо кубов фигурируют всевозможные параллелепипеды.

4.3 Дробные интегралы.

Потенциал Рисса (дробный интеграл) I_α при $0 < \alpha < n$ определяется равенством

$$I_\alpha f(x) = \int_{\mathcal{R}^n} f(y) \frac{dy}{|x-y|^{n-\alpha}}, \quad x \in \mathcal{R}^n.$$

Классическая теорема вложения (см., например, книгу Стейна) утверждает, что I_α ограничено действует из $L^p(\mathcal{R}^n)$ в $L^{p^*}(\mathcal{R}^n)$, где $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$, $1 < p < \frac{n}{\alpha}$. С дробным интегралом связана дробная максимальная функция

$$M_\alpha f(x) = \sup_{Q \ni x} \frac{1}{|Q|^{1-\frac{\alpha}{n}}} \int_Q |f(y)| dy.$$

Разработан аппарат, который в значительной степени позволяет сводить оценки дробного интеграла $I_\alpha f$ к оценкам $M_\alpha f$. В частности, для $0 < p < \infty$

$$\int_{\mathcal{R}^n} |I_\alpha f(x)|^p w(x) dx \leq c \int_{\mathcal{R}^n} |M_\alpha f(x)|^p w(x) dx,$$

а также имеет место оценка слабых норм

$$\sup_{\lambda > 0} \lambda^p |\{x : |I_\alpha f(x)| > \lambda\}|_w \leq \sup_{\lambda > 0} \lambda^p |\{x : M_\alpha f(x) > \lambda\}|_w.$$

При условии $w \in A_\infty$ эти неравенства доказаны Макехауптом и Виденом. Соьер показал, что условие $w \in A_\infty$ можно несколько ослабить.

Имеется ряд результатов, посвященных одно- и двухвесовым оценкам потенциалов Рисса и соответствующих максимальных функций как в допредельном случае $p < \frac{n}{\alpha}$, так и при $p = \frac{n}{\alpha}$. Исследования в этом направлении продолжаются в настоящее время.

4.4 Сингулярные интегральные операторы.

Классическим примером сингулярного интегрального оператора в \mathcal{R}^1 является преобразование Гильберта

$$Hf(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{|x-t| \geq \varepsilon} f(t) \frac{dt}{x-t}.$$

Важный для приложений большой класс сингулярных интегралов составляют операторы Кальдерона-Зигмунда. Они определяются следующим образом

$$Tf(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{|x-y| \geq \varepsilon} K(x, y) f(y) dy, \quad x \in \mathcal{R}^n,$$

где $f \in C_0^\infty(\mathcal{R}^n)$, а $T : L^2(\mathcal{R}^n) \rightarrow L^2(\mathcal{R}^n)$. При этом предполагаются выполненными следующие условия на ядро оператора K

$$K(x, y) \leq c|x-y|^{-n},$$

$$|K(x', y) - K(x, y)| \leq \frac{|x-x'|^\alpha}{|x-y|^{n+\alpha}}, \quad \text{если } |x-x'| \leq \frac{1}{2}|x-y|,$$

$$|K(x, y') - K(x, y)| \leq \frac{|y-y'|^\alpha}{|x-y|^{n+\alpha}}, \quad \text{если } |y-y'| \leq \frac{1}{2}|x-y|.$$

Теорема 22 Оператор Кальдерона-Зигмунда ограничен в $L^p(\mathcal{R}^n)$, $1 < p < \infty$, и имеет слабый тип $(1-1)$.

Максимальный оператор Кальдерона-Зигмунда определяется равенством

$$T_* f(x) = \sup_{\varepsilon > 0} \left| \int_{|x-y| > \varepsilon} K(x, y) f(y) dy \right|.$$

Теорема 23 Для максимального оператора Кальдерона-Зигмунда справедливо неравенство

$$T_* f(x) \leq c_1 M(Tf)(x) + c_2 Mf(x).$$

Из этой теоремы следует, что оператор T_* ограничен в $L^p(\mathcal{R}^n)$, $1 < p < \infty$. Немного уточняя теорему, можно получить, что T_* имеет слабый тип $(1 - 1)$.

Теорема 24 (Неравенство для хороших λ .) Пусть $w \in A_\infty$. Тогда

$$|\{x : T_* f(x) > 2\lambda, Mf(x) < \beta\lambda\}|_w \leq c\beta^\delta |\{x : T_* f(x) > \lambda\}|_w, \lambda > 0.$$

Следствие 1. $\|T_* f\|_{p,w} \leq c\|Mf\|_{p,w}, \quad p > 0, w \in A_\infty.$

Следствие 2. $\|T_* f\|_{p,w} \leq c\|f\|_{p,w}, \quad 1 < p < \infty, w \in A_p.$

Следствие 3. $|\{x : T_* f(x) > \lambda\}|_w \leq \frac{c}{\lambda} \int_{\mathcal{R}^n} |f(x)|w(x)dx, \quad w \in A_1.$

Для оператора Гильберта условие (A_p) необходимо и достаточно для ограниченности его в L^p_w , $1 < p < \infty$. Двухвесовые оценки сильного и слабого типов для оператора Гильберта исследовались различными авторами. Получены необходимые условия, некоторые достаточные условия для таких оценок, но точные условия неизвестны.

Более подробно с состоянием дел можно ознакомиться в книгах "Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления", т.15 (1987), т.42 (1989).