Вісник Одеськ. нац. ун-ту. Матем. і мех. – 2009. – Т.14, вип. 20. – С. 115–122

УДК 517.91

Н. В. Скрипник
Одесский национальный университет имени И. И. Мечникова

ТЕОРЕМА КРАСНОСЕЛЬСКОГО–КРЕЙНА ДЛЯ НЕЧЕТКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Скрипник Н. В. Теорема Красносельського–Крейна для нечітких диференціальних рівнянь. У статті розглядається можливість обгрунтування теореми про неперервну залежність розв'язків від параметра і методу усереднення для нечітких диференціальних рівнянь у випадку, коли права частина не задовольняє умові Липшиця по фазовій змінній.
Ключові слова: нечіткі рівняння, усереднення.

Скрипник Н. В. Теорема Красносельского–Крейна для нечетких дифференциальных уравнений. В статье рассматривается возможность обоснования теоремы о непрерывной зависимости решений от параметра и метода усреднения для нечетких дифференциальных уравнений в случае, когда правая часть не удовлетворяет условию Липшица по фазовой переменной.
Ключевые слова: нечеткие уравнения, усреднение.

Scripnik N. V. The Krasnoselskij–Krein theorem for fuzzy differential equations. In this article the possibility of the substantiation of the theorem of continuous dependence of solutions on parameter and the averaging method for fuzzy differential equations in the case when the right-hand side does not satisfy the Lipshitz condition on the phase variable is considered.
Key words: fuzzy equations, averaging.

Введение. В работах Н. Н. Боголюбова [1], А. Н. Филатова [9], В. А. Плотникова [5] рассмотрено обоснование метода усреднения для обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром. M. Kisieliwicz [13] и А. В. Плотников [6] рассмотрели возможность применения некоторых схем усреднения для дифференциальных уравнений с производной Хукухары [10, 11]. При этом существенно использовалось выполнение условия Липшица по фазовой переменной для исходного или усредненного уравнения.

В связи с этим представляет интерес теорема о непрерывной зависимости решения от параметра при менее ограничительных условиях, доказанная М. А. Красносельским и С. Г. Крейном [4] для обыкновенных дифференциальных уравнений, что позволяет получить обоснование метода усреднения для более широкого класса дифференциальных уравнений. В [7] доказан аналог теоремы Красносельского-Крейна для дифференциальных уравнений и включений с производной Хукухары.

В данной работе рассмотрим возможность переноса полученных результатов на нечеткие дифференциальные уравнения, теория которых активно развивается в последнее время [15]-[23].

Основные результаты. Пусть $conv(\mathbb{R}^n)$ — метрическое пространство непустых компактных выпуклых подмножеств $\mathbb{R}^n$ с метрикой Хаусдорфа $h(F,G)$.

Введем в рассмотрение пространство $\mathbb{E}^n$ отображений $x : \mathbb{R}^n \to [0,1]$, удовлетворяющих следующим условиям:

1) x нормально, т. е. существует вектор $y_0 \in \mathbb{R}^n$ такой, что $x(y_0) = 1$;

2) x нечетко выпукло, т. е. для любых $y, z \in \mathbb{R}^n$ и любого $\lambda \in [0,1]$ справедливо неравенство $x(\lambda y + (1-\lambda)z) \geq \min\{x(y), x(z)\}$;

3) x полунепрерывно сверху, т. е. для любого вектора $y_0 \in \mathbb{R}^n$ и любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(y_0, \varepsilon) > 0$ такое, что для всех $y \in \mathbb{R}^n$, удовлетворяющих условию $||y - y_0|| < \delta$, справедливо неравенство $x(y) < x(y_0) + \varepsilon$;

4) замыкание множества $\{y \in \mathbb{R}^n : x(y) > 0\}$ компактно.

Нулем в пространстве $\mathbb{E}^n$ является отображение $\hat{0}(y) = \begin{cases} 1, & y = 0, \\ 0, & y \in \mathbb{R}^n \backslash 0. \end{cases}$

Определение 1. *α — срезкой $[x]^\alpha$ отображения $x \in \mathbb{E}^n$ при $\alpha \in (0,1]$ назовем множество $\{y \in \mathbb{R}^n : x(y) \geq \alpha\}$. Нулевой срезкой отображения $x \in \mathbb{E}^n$ назовем замыкание множества $\{y \in \mathbb{R}^n : x(y) > 0\}$.*

Определим в пространстве $\mathbb{E}^n$ метрику $D(x,v) = \sup\limits_{0 \leq \alpha \leq 1} h([x]^\alpha, [v]^\alpha)$.

Определение 2 [19]. *Отображение $f : I \to \mathbb{E}^n$ называется слабо непрерывным в точке $t_0 \in I$, если для любого $\alpha \in [0,1]$ многозначное отображение $f_\alpha(t) = [f(t)]^\alpha$ непрерывно в точке $t_0 \in I$. Отображение $f : I \to \mathbb{E}^n$ называется слабо непрерывным на I, если оно слабо непрерывно в каждой точке $t \in I$.*

Определение 3 [19]. *Интегралом от отображения $f : I \to \mathbb{E}^n$ по промежутку I называется элемент $g \in \mathbb{E}^n$ такой, что $[g]^\alpha = \int\limits_I f_\alpha(t)dt$ для всех $\alpha \in (0,1]$, где интеграл от многозначного отображения $f_\alpha(t)$ понимается в смысле Ауманна [14].*

Определение 4 [19]. *Отображение $f : I \to \mathbb{E}^n$ называется дифференцируемым в точке $t_0 \in I$, если для всех $\alpha \in [0,1]$ многозначное отображение $f_\alpha(t)$ дифференцируемо по Хукухаре [8] в точке t_0, его производная равна $D_H f_\alpha(t_0)$ и семейство множеств $\{D_H f_\alpha(t_0) : \alpha \in [0,1]\}$ определяет элемент $f'(t_0) \in \mathbb{E}^n$. Если отображение $f : I \to \mathbb{E}^n$ дифференцируемо в точке $t_0 \in I$, то $f'(t_0)$ называют нечеткой производной $f(t)$ в точке t_0. Отображение $f : I \to \mathbb{E}^n$ называется дифференцируемым на I, если оно дифференцируемо в каждой точке $t \in I$.*

Определение 5. *Отображение $f : G \to \mathbb{E}^n$ называется равномерно непрерывным на $G \subset \mathbb{E}^n$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для всех $x, y \in G$, удовлетворяющих неравенству $D(x,y) < \delta$, справедлива оценка $D(f(x), f(y)) < \varepsilon$.*

Под нечетким дифференциальным уравнением будем понимать уравнение вида

$$x' = f(t,x), \quad x(t_0) = x_0, \tag{1}$$

где $f : I \times \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^n$.

Определение 6. *Отображение $x : I_0 \to \mathbb{E}^n$ называется решением задачи (1) на $I_0 \subset I$, если оно слабо непрерывно на I_0 и для всех $t \in I_0$ удовлетворяет интегральному уравнению $x(t) = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds$.*

Имеют место следующие теоремы существования и единственности решений нечетких дифференциальных уравнений.

Теорема 1 [8]. *Пусть в области*

$$Q = \{(t, x) : t_0 \leq t \leq t_0 + a,\ D(x, x_0) \leq b\}$$

выполнены следующие условия:

1) $f(\cdot, x)$ *сильно измеримо по* t *при любом фиксированном* x;

2) $f(t, \cdot)$ *слабо непрерывно по* x *при почти всех* t;

3) существует суммируемая функция $m(t)$ *такая, что* $D(f(t, x), \hat{0}) \leq m(t)$ *для почти всех* t.

Тогда на отрезке $[t_0, t_0 + d]$ *существует решение задачи (1), где* $d > 0$ *таково, что* $d \leq a,\ \varphi(t_0 + d) \leq b,\ \varphi(t) = \int_{t_0}^{t} m(s)\, ds$.

Теорема 2 [8]. *Пусть в области* Q *отображение* $f(t, x)$ *удовлетворяет условию Липшица по переменной* x, *т. е. существует постоянная* $L > 0$ *такая, что* $D(f(t, x), f(t, y)) \leq LD(x, y)$ *для всех* $(t, x), (t, y) \in Q$. *Тогда уравнение (1) имеет единственное решение.*

Рассмотрим вопрос о непрерывной зависимости решения от параметра.

Теорема 3. *Пусть для нечеткого дифференциального уравнения*

$$x' = f(t, x, \lambda), \tag{2}$$

где отображение $f(t, x, \lambda)$, *принимающее значения в* $\mathbb{E}^n$, *определено при* $t \in \in [0, T], x \in G, G$ *— ограниченная область в* $\mathbb{E}^n, \lambda \in \Lambda, \Lambda$ *— некоторое множество значений параметра* λ, *имеющее* $\lambda_0 \in \Lambda$ *предельной точкой, выполнены следующие условия:*

а) отображение $f(t, x, \lambda)$ *равномерно ограничено, слабо непрерывно по* t, *равномерно непрерывно по* x *равномерно относительно* t *и* λ;

б) отображение $f(t, x, \lambda)$ *интегрально непрерывно по* λ *в точке* λ_0, *т. е. для любых* $t_1, t_2 \in [0, T], t_1 < t_2$ *и любого* $x \in G$ *выполняется условие:*

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} D\left(\int_{t_1}^{t_2} f(s, x, \lambda) ds, \int_{t_1}^{t_2} f(s, x, \lambda_0) ds\right) = 0; \tag{3}$$

в) решения $x(t, \lambda_0)$ *уравнения*

$$x' = f(t, x, \lambda_0), \tag{4}$$

удовлетворяющие начальному условию $x(0, \lambda_0) = x_0 \in G^1 \subset G$, *определены при* $t \in [0, T]$ *и лежат вместе с некоторой* $\rho-$ *окрестностью в области* G.

Тогда каждому $\eta > 0$ *соответствует такая окрестность* $U(\lambda_0)$ *точки* λ_0, *что при* $\lambda \in U(\lambda_0)$ *для любого решения* $x(t, \lambda)$ *уравнения (2), определенного при* $t \in [0, T]$ *и удовлетворяющего начальному условию* $x(0, \lambda) = x_0$, *существует такое решение* $x(t, \lambda_0)$ *уравнения (4), что справедливо неравенство*

$$D(x(t, \lambda), x(t, \lambda_0)) < \eta, \quad t \in [0, T].$$

Доказательство. Из условий а), б) теоремы и ограниченности области G следует, что сходимость в (3) является равномерной относительно t_1, t_2 и x.

Покажем, что пределом любой равномерно сходящейся последовательности решений уравнения (2) является решение уравнения (4).

Пусть $x(t,\lambda)$ $(\lambda\to\lambda_0,\ \lambda\in\Lambda)$ — равномерно сходящаяся последовательность решений (2), удовлетворяющих начальному условию $x(0,\lambda)=x_0$. Следовательно, существует такое слабо непрерывное отображение $y(t)$, что

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0}\max_{t\in[0,T]} D(x(t,\lambda),y(t))=0.$$

В силу определения решения нечеткого дифференциального уравнения отображение $x(t,\lambda)$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$x(t,\lambda)=x_0+\int\limits_0^t f(s,x(s,\lambda),\lambda)\,ds. \tag{5}$$

Перейдем в (5) к пределу при $\lambda\to\lambda_0$. Для этого сначала покажем, что для любого $t\in[0,T]$ справедливо равенство

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0}\int_0^t f(s,x(s,\lambda),\lambda)ds=\int_0^t f(s,y(s),\lambda_0)ds. \tag{6}$$

Введем в рассмотрение кусочно-постоянное отображение $\overline{y}(t)$ такое, что $\max\limits_{t\in[0,T]} D(y(t),\overline{y}(t))<\delta$, где δ выбираем из условия равномерной непрерывности правой части таким образом, чтобы при всех $x,y\in G$, удовлетворяющих условию $D(x,y)<\delta$, выполнялось неравенство

$$D(f(s,x,\lambda),f(s,y,\lambda))<\frac{\varepsilon}{4T}.$$

Выберем окрестность $U(\lambda_0)$ точки λ_0 так, чтобы при $\lambda\in U(\lambda_0)$ и любых $s\in[0,T]$ была справедлива оценка $D(x(s,\lambda),y(s))<\delta$. Тогда

$$I_1=D\left(\int_0^t f(s,x(s,\lambda),\lambda)ds,\int_0^t f(s,y(s),\lambda)ds\right)\le$$

$$\le\int_0^t D(f(s,x(s,\lambda),\lambda),f(s,y(s),\lambda))ds\le\frac{\varepsilon}{4},$$

$$I_2=D\left(\int_0^t f(s,y(s),\lambda)ds,\int_0^t f(s,\overline{y}(s),\lambda)ds\right)\le$$

$$\le\int_0^t D(f(s,y(s),\lambda),f(s,\overline{y}(s),\lambda))ds<\frac{\varepsilon}{4},$$

$$I_4=D\left(\int_0^t f(s,y(s),\lambda_0)ds,\int_0^t f(s,\overline{y}(s),\lambda_0)ds\right)\le$$

$$\le\int_0^t D(f(s,y(s),\lambda_0),f(s,\overline{y}(s),\lambda_0))ds<\frac{\varepsilon}{4}.$$

Сузим окрестность $U(\lambda_0)$, используя условие б) теоремы так, чтобы при $\lambda \in \in U(\lambda_0)$ выполнялось неравенство

$$I_3 = D\left(\int_0^t f(s, \overline{y}(s), \lambda)ds, \int_0^t f(s, \overline{y}(s), \lambda_0)ds\right) < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Таким образом,

$$D\left(\int_0^t f(s, x(s,\lambda), \lambda)ds, \int_0^t f(s, y(s), \lambda_0)ds\right) \le I_1 + I_2 + I_3 + I_4 < \varepsilon,$$

т. е. предельное равенство (6) доказано.

Тогда, переходя в (5) к пределу при $\lambda \to \lambda_0$, получаем

$$y(t) = x_0 + \int_0^t f(s, y(s), \lambda_0)ds,$$

т. е. отображение $y(t)$ является решением нечеткого дифференциального уравнения (4).

Следовательно, показано, что предел любой равномерно сходящейся последовательности решений (2) является решением уравнения (4).

Покажем, что для любого η существует окрестность $U(\lambda_0)$ точки λ_0 такая, что для любого решения $x(t,\lambda), \lambda \in U(\lambda_0)$ уравнения (2), удовлетворяющего начальному условию $x(0,\lambda) = x_0$, существует решение $x(t,\lambda_0)$ уравнения (4) такое, что

$$D(x(t,\lambda), x(t,\lambda_0)) < \eta, \quad t \in [0,T].$$

Предположим противное. Тогда существуют η_0 и последовательность решений $x(t,\lambda_k)$, $\lambda_k \in U(\lambda_0)$, $\lambda_k \to \lambda_0$, $k \to \infty$ уравнения (2) такая, что

$$\max_{t\in[0,T]} D(x(t,\lambda_k), x(t,\lambda_0)) \ge \eta_0 \tag{7}$$

для всех решений $x(t,\lambda_0)$ уравнения (4).

Так как семейство $x(t,\lambda)$ равномерно ограничено и равностепенно непрерывно, то по теореме Асколи [2] из него можно выделить равномерно сходящуюся подпоследовательность, пределом которой в силу доказанного выше будет решение (4), что противоречит (7).

Замечание 1. Если $x(t,\lambda_0)$ — некоторое решение нечеткого дифференциального уравнения (4), то может не существовать последовательности решений (2), сходящейся к $x(t,\lambda_0)$ при $\lambda \to \lambda_0$.

Пример. Рассмотрим уравнение

$$x' = \sqrt{x} + \lambda^2 f, \quad x(0,\lambda) = \hat{0}, \tag{8}$$

где

$$[\sqrt{x}]^\alpha = \left[\sqrt{\min_{z\in[x]^\alpha} z}, \sqrt{\max_{z\in[x]^\alpha} z}\right], \ [f]^\alpha = [1+\alpha, 4-\alpha].$$

Тогда при $\lambda_0 = 0$ уравнение (8) имеет вид

$$x' = \sqrt{x}, \quad x(0,0) = \hat{0}. \tag{9}$$

Очевидно, что решения $x(t,\lambda)$ уравнения (8) сходятся при $\lambda \to 0$ к решению $x(t,0)$ уравнения (9) такому, что $[x(t,0)]^\alpha = \left\{\frac{t^2}{4}\right\}$. В то же время не существует последовательности $x(t,\lambda)$ решений уравнения (8), сходящейся к тривиальному решению уравнения (9).

Замечание 2. Если уравнение (4) имеет единственное решение, то любая последовательность решений $x(t,\lambda)$ уравнения (2) сходится к этому решению при $\lambda \to \lambda_0$.

Из этой теоремы непосредственно следует теорема о методе усреднения.

Теорема 5. *Пусть в области $Q = \{t \geq 0,\ x \in G, G$ — ограниченная область в $\mathbb{E}^n\}$ для нечеткого дифференциального уравнения*

$$x' = \varepsilon f(t,x) \tag{10}$$

выполнены следующие условия:

а) отображение $f(t,x)$ равномерно ограничено, слабо непрерывно по t и равномерно непрерывно по x равномерно относительно t;

б) для всех $x \in G$ существует предел

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T f(s,x)ds = f_0(x); \tag{11}$$

в) решения $y(\tau)$, $\tau = \varepsilon t$ уравнения

$$y' = f_0(y), \quad y(0) = x_0 \in G^1 \subset G \tag{12}$$

определены при $\tau \in [0,L]$ и лежат вместе с $\rho-$ окрестностью в G.

Тогда для любого $\eta > 0$ существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что при $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ для любого решения $x(t,\varepsilon)$ уравнения (10), удовлетворяющего условию $x(0,\varepsilon) = x_0$, существует решение уравнения (12) такое, что на промежутке $[0, L\varepsilon^{-1}]$ справедливо неравенство

$$D(x(t,\varepsilon), y(\varepsilon t)) < \eta.$$

В справедливости этой теоремы легко убеждаемся, если в уравнении (10) произведем замену $\varepsilon t = t_1$, $\varepsilon = \lambda$. Вместо (10) имеем уравнение

$$x' = F(t_1,x,\lambda), \tag{13}$$

где принято обозначение $f\left(\frac{t_1}{\lambda}, x\right) = F(t_1,x,\lambda)$.

Существование среднего (11) эквивалентно интегральной непрерывности по λ в точке $\lambda = 0$ правой части уравнения (13), т. е. эквивалентно соотношению

$$\lim_{\lambda\to 0}\int_0^t F(t_1,x,\lambda)\,dt_1 = \int_0^t f_0(x)dt_1. \tag{14}$$

Действительно, полагая в левой части соотношения (14) $\frac{t_1}{\lambda} = s$, имеем

$$\lim_{\lambda\to 0}\int_0^t F(t_1,x,\lambda)\,dt_1 = \lim_{\lambda\to 0}\int_0^t f\left(\frac{t_1}{\lambda},x\right)dt_1 = \lim_{\lambda\to 0}\lambda\int_0^t f\left(\frac{t_1}{\lambda},x\right)d\left(\frac{t_1}{\lambda}\right) =$$

$$= \lim_{\lambda \to 0} \lambda \int_0^{\frac{t}{\lambda}} f(s,x)\, ds = t \lim_{\lambda \to 0} \frac{1}{\frac{t}{\lambda}} \int_0^{\frac{t}{\lambda}} f(s,x)\, ds =$$

$$= t \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(s,x) ds = t f_0(x) = \int_0^t f_0(x) dt_1.$$

Заключение. Результаты данной статьи являются продолжением результатов, полученных авторами: Комлевой Т. А., Плотниковым А. В., Плотниковой Л. И. в [3].

1. **Боголюбов Н. Н.** Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний [текст] / Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский. – М.: Наука, 1974. – 503 с.
2. **Келли Дж. Л.** Общая топология [текст] / Дж. Л. Келли. – М.: Наука, 1981. – 432 с.
3. **Комлева Т. А.** Усреднение нечетких дифференциальных уравнений [текст] / Т. А. Комлева, А. В. Плотников, Л. И. Плотникова // Труды Одесского политехнического университета. – 2007. – Вып. 1 (27). – С. 185–190.
4. **Красносельский М. А.** О принципе усреднения в нелинейной механике [текст] / М. А. Красносельский, С. Г. Крейн // Успехи матем. наук. – 1955. – Т. 10, № 3 (65). – С. 147–152.
5. **Плотников В. А.** Метод усреднения в задачах управления [текст] / В. А. Плотников. – Киев-Одесса: Лыбидь, 1992. – 188 с.
6. **Плотников В. А.** Дифференциальные уравнения с многозначной правой частью. Асимптотические методы [текст] / В. А. Плотников, А. В. Плотников, А. Н. Витюк. – Одесса: Астропринт, 1999. – 356 с.
7. **Скрипник Н. В.** Теорема Красносельского-Крейна для дифференциальных уравнений и включений с многозначными решениями [текст] / Н. В. Скрипник // Вісник Харк. нац. ун-ту, серія "Математика, прикладна математика і механіка". – 2008. – № 826. – С. 87–99.
8. **Скрипник Н. В.** Нечеткие дифференциальные уравнения [текст] / Н. В. Скрипник, М. С. Сасонкина // Наукова конференція молодих вчених і студентів з диференціальних рівнянь та їх застосувань, присвячена 100-річневому ювілею Я. Б. Лопатинського: Тези доповідей (11-14 листопада 2008 р.). – Донецк, 2008. – С. 97.
9. **Филатов А. Н.** Усреднение в системах дифференциальных и интегродифференциальных уравнений [текст] / А. Н. Филатов. – Ташкент: Фан, 1971. – 280 с.
10. **de Blasi F. S.** Equazioni differentiali con soluzioni a valore compatto convesso [text] / F. S. de Blasi, F. Iervolino // Boll. Unione Mat.Ital. – 1969. – Vol. 2, № 4-5. – P. 491–501.
11. **Brandao Lopes Pinto A. J.** Uniqueness and existence theorems for differential equations with compact convex valued solutions [text] / A. J. Brandao Lopes Pinto, F. S. de Blasi, F. Iervolino // Boll. Unione Mat.Ital. – 1970. – V. 4. – P. 534–538.
12. **Hukuhara M.** Integration des applications mesurables dont la valeur est un compact convexe [text] / M. Hukuhara // Functial. Ekvac. – 1967. – № 10. – P. 205–223.

13. **Kisielewicz M.** Method of averaging for differential equations with compact convex valued solutions [text] / M. Kisielewicz // Rend. Mat. – 1976. – Vol. 9, № 3. – P. 397–408.

14. **Aumann R.J.** Integrals of set - valued functions [text] / R.J. Aumann // J. Math. Anal. Appl. – 1965. – № 12. – P. 1–12.

15. **Hullermeier E.** An approach to modelling and simulation of uncertain dynamical system [text] / E. Hullermeier // Int. J. Uncertain. Fuzziness Knowledge - Based Systems. – 1997. – № 7. – P. 117–137.

16. **Kaleva O.** Fuzzy differential equations [text] / O. Kaleva // Fuzzy sets and systems. – 1987. – Vol. 24, № 3. – P. 301–317.

17. **Kaleva O.** The Cauchy problem for fuzzy differential equations [text] / O. Kaleva // Fuzzy sets and systems. – 1990. – Vol. 35, № 3. – P. 389–396.

18. **Laksmikantham V.** Existence and interrelation between set and fuzzy differential equations [text] / V. Laksmikantham, A.A. Tolstonogov // Nonlinear Anal. – 2003. – Vol. 55.– P. 255–268.

19. **Park J.Y.** Existence and uniqueness theorem for a solution of fuzzy differential equations [text] / J.Y. Park, H.K. Han // Int. J. Math. Math. Sci. – 1999. – Vol. 22, № 2. – P. 271–279.

20. **Puri M.L.** Differential of fuzzy functions [text] / M.L. Puri, D.A. Ralescu // J. Math. Anal. Appl. – 1983. – Vol. 91. – P. 552–558.

21. **Puri M.L.** Fuzzy random variables [text] / M.L. Puri, D.A. Ralescu // J. Math. Anal. Appl. – 1986. – Vol. 114, № 2. – P. 409–422.

22. **Seikkala S.** On the fuzzy initial value problem [text] / S. Seikkala // Fuzzy Sets and Systems. – 1987. – Vol. 24, № 3. – P. 319–330.

23. **Song S.J.** Existence and uniqueness of solutions to Cauchy problem of fuzzy differential equations [text] / S.J. Song, C.X. Wu // Fuzzy Sets and Systems. – 2000. – Vol. 111. – P. 55–67.

24. **Zadeh L.** Fuzzy sets [text] / L. Zadeh // Inform. Control. – 1965. – № 8. – P. 338–353.