УДК 517.926

С. А. Щёголев
Одесский национальный университет имени И. И. Мечникова

О ПОЛНОМ РАЗДЕЛЕНИИ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ЛИНЕЙНЫХ ОДНОРОДНЫХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Щоголев С. А. Про повний розподiл деяких класiв лiнiйних однорiдних систем диференцiальних рiвнянь. Отримано деякий аналог теореми Флоке–Ляпунова для лiнiйної однорiдної системи диференцiальних рiвнянь, коефiцiєнти якої зображувані у виглядi рядiв Фур'є з повiльно змiнними параметрами.
Ключовi слова: многовид, повiльно змiнний, диференцiальний, ряд Фур'є.

Щёголев С. А. О полном разделении некоторых классов линейных однородных систем дифференциальных уравнений . Получен некоторый аналог теоремы Флоке–Ляпунова для линейной однородной системы дифференциальных уравнений, коэффициенты которой представимы в виде рядов Фурье с медленно меняющимися параметрами.
Ключевые слова: многообразие, медленно меняющийся, дифференциальный, ряд Фурье.

Shchogolev S. A. On full separation of some classes of linear homogeenous system's of the differential equations. The some analog of Floque–Lyapunov theorem for the linear homogeneous system of the differential equations with coefficients, whose represented by a Fourier-series with slowly varying parameters are obtained.
Key words: manifold, slowly varying, differential, Fourier series.

Введение. В теории дифференциальных уравнений важной задачей является проблема построения для линейной однородной системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = P(t)x, \tag{1}$$

где $x = \mathrm{colon}(x_1, \cdots, x_n)$, $P(t) = (p_{jk}(t))_{j,k=\overline{1,n}}$ ляпуновского преобразования

$$x = L(t)y, \tag{2}$$

приводящего систему (1) к виду

$$\frac{dy}{dt} = \Lambda(t)y, \tag{3}$$

где $\Lambda(t) = \mathrm{diag}(\lambda_1(t), \cdots, \lambda_n(t))$, то есть вопрос о полном разделении системы (1). Если преобразование (2) удаётся построить в явном виде, то систему (1) можно проинтегрировать в квадратурах, поскольку система (3) распадается на n независимых линейных однородных уравнений 1-го порядка. В то же время очевидно. что в общем случае построение преобразования (2) в явном виде невозможно, поскольку возникает необходимость интегрирования матричного дифференциального уравнения

$$\frac{dL}{dt} = P(t)L - L\Lambda(t),$$

а это ничуть не менее сложная задача, чем интегрирование непосредственно самой системы (1). Поэтому в ряде исследований [1–6] не ставилась задача явного построения преобразования (2), а лишь доказывалось его существование, исследовались его свойства и возможность его приближённого построения, а также представление в виде асимптотических рядов. Также важным являлся вопрос о принадлежности элементов преобразующей матрицы $L(t)$ к тем же классам, что и элементы матрицы $P(t)$.

В работе [2] изучался вопрос о возможности приведения системы вида

$$\frac{dx}{dt} = (\Lambda(t) + A(t))x, \tag{4}$$

где $\Lambda(t) = \mathrm{diag}(\lambda_1(t), \cdots, \lambda_n(t))$, а $A(t) = (a_{jk}(t))_{j,k=\overline{1,n}}$ в некотором смысле малая по сравнению с $\Lambda(t)$ квадратная матрица, с помощью ляпуновского преобразования

$$x = (E + Q(t))y$$

(E — единичная матрица) к системе вида

$$\frac{dy}{dt} = D(t)y,$$

$D(t) = \mathrm{diag}(d_1(t), \cdots, d_n(t))$. В работе [2] эта задача рассматривалась в классе непрерывных и ограниченных на всей оси функций. При этом предполагалось выполнение условия

$$\inf_{t\in R} |\mathrm{Re}(\lambda_j(t) - \lambda_k(t)| \geq \gamma > 0 \quad (j \neq k). \tag{5}$$

Было установлено, что элементы матрицы $Q(t)$ также являются непрерывными и ограниченными на всей оси функциями.

Проблема разделения в случае неограниченных коэффициентов рассматривалась в работе [7].

В монографии [5] рассматривалась задача блочной расщепляемости на $\mathbf{R}$ линейных систем дифференциальных уравнений, экспоненциально дихотомичных на полуосях $\mathbf{R}^+, \mathbf{R}^-$. При этом указывались оценки для матрицантов систем, полученных в результате расщепления.

В работе [4] задача разделения системы вида (4) рассматривалась при более слабом, чем (5), условии, а именно:

$$\mathrm{Re}\lambda_1(t) < \mathrm{Re}\lambda_2(t) < \ldots < \mathrm{Re}\lambda_n(t) \quad (t_0 \leq t < +\infty).$$

В работе [3] изучалась задача приведения системы вида (4) к блочно-диагональному виду в классах почти периодических (в частности квазипериодических и периодических) функций. При этом было установлено, что элементы матрицы $Q(t)$ также являются функциями соответственно тех же классов.

В работе [8] изучалась задача приведения к L-диагональному виду и к действительному диагональному виду линейных систем с коэффициентами осциллирующего типа.

2. Основные обозначения и определения.

Введём область

$$G = \left\{t, \varepsilon : 0 < \varepsilon < \varepsilon_0, -L\varepsilon^{-1} \leq t \leq L\varepsilon^{-1}, 0 < L < +\infty\right\}.$$

Определение 1. *Будем говорить, что в области G функция $f(t,\varepsilon)$ принадлежит классу $S_m \quad (m \in N \cup \{0\})$, если выполнены следующие условия:*

1) $f : G \to \mathbf{C}$,

2) $f(t,\varepsilon) \in \mathrm{C}^m(\mathbf{G})$ *по* t,

3) $d^k f(t,\varepsilon)/dt^k = \varepsilon^k f_k^*(t,\varepsilon), \quad \sup\limits_G |f_k^*(t,\varepsilon)| < +\infty \quad (0 \leq k \leq m).$

Определение 2. *Будем говорить, что в области G функция $f(t,\varepsilon,\theta(t,\varepsilon))$ принадлежит классу $B_m \quad (m, l \in \mathbf{N} \cup \{0\})$, если эта функция представима в виде*

$$f(t,\varepsilon,\theta(t,\varepsilon)) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n(t,\varepsilon) \exp\left(in\theta(t,\varepsilon)\right),$$

причём выполнены условия

1) $f_n(t,\varepsilon) \in S_m, \quad d^k f_n(t,\varepsilon)/dt^k = \varepsilon^k f_{nk}(t,\varepsilon) \quad (n \in \mathbf{Z}, \quad 0 \leq k \leq m),$

2) $\|f\|_{B^l_m} \overset{def}{=} \sum\limits_{k=0}^{m} \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \sup\limits_G |f_{nk}(t,\varepsilon)| < +\infty,$

3) $\theta(t,\varepsilon) = \int\limits_0^t \varphi(\tau,\varepsilon) d\tau, \varphi(t,\varepsilon) \in \mathbf{R}^+, \varphi(t,\varepsilon) \in S_m, \inf\limits_G \varphi(t,\varepsilon) > 0.$

Функции класса B_m образуют линейное пространство, которое превращается в полное нормированное пространство введением нормы $\|\cdot\|_{B_m}$. Справедлива цепочка включений

$$B_0 \supset B_1 \supset \cdots \supset B_m.$$

Для любой функции $f(t,\varepsilon,\theta) \in B_m$ обозначим:

$$\Gamma_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(t,\varepsilon,\theta) \exp(-in\theta) d\theta.$$

Символом $(A)_{jk}$ обозначим элемент a_{jk} матрицы $A = (a_{jk})_{j,k=\overline{1,n}}$.

Для векторов $x = \mathrm{colon}(x_1, \cdots, x_n), y = \mathrm{colon}(y_1, \cdots, y_n)$ обозначим: $(x,y) = \sum_{j=1}^n x_k y_k$.

3. Постановка задачи. Рассматривается следующая система дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx}{dt} = \left(A(t,\varepsilon) + \mu B(t,\varepsilon,\theta)\right) x, \tag{6}$$

где $x = \mathrm{colon}(x_1, \cdots, x_n)$, элементы $n \times n$-матрицы $A(t,\varepsilon)$ из класса S_m, а элементы $n \times n$-матрицы $B(t,\varepsilon,\theta)$ из класса B_m $(m \geq 3)$; $\mu \in [0, \mu_0] \subset \mathbf{R}$.

Изучается вопрос о полном разделении системы (6) и о принадлежности элементов преобразующей матрицы к классам $B_k(0 \le k \le m)$ при условии, что собственые значения $\lambda_j(t,\varepsilon)(j=\overline{1,n}$ матрицы $A(t,\varepsilon)$ таковы, что

$$\lambda_j(t,\varepsilon)-\lambda_k(t,\varepsilon)=i\omega_{jk}(t,\varepsilon) \quad (\omega_{jk}\in\mathbf{R}). \tag{7}$$

При этом существенно используются результаты работы [9]. Целью статьи является также получение некоторого аналога теоремы Флоке–Ляпунова [10] в терминах функций классов $B_k(0 \le k \le m)$ и представление фундаментальной системы решений (6). Статья содержит полное обоснование результатов, сформулированных в [11].

4. Некоторые вспомогательные утверждения.

Лемма 1. *Пусть функция*

$$f(t,\varepsilon,\theta(t,\varepsilon))=\sum_{\substack{n=-\infty\\(n\neq 0)}}^{\infty} f_n(t,\varepsilon)\exp\left(in\theta(t,\varepsilon)\right)\in B_m. \tag{8}$$

Тогда

$$\int\limits_0^t f(\tau,\varepsilon,\theta(\tau,\varepsilon))d\tau\in B_{m-1}.$$

Доказательство. Рассмотрим:

$$\int\limits_0^t f(\tau,\varepsilon,\theta(\tau,\varepsilon))d\tau=\sum_{\substack{n=-\infty\\(n\neq 0)}}^{\infty}\int\limits_0^t f_n(\tau,\varepsilon)\mathrm{exp}(in\theta(\tau,\varepsilon))d\tau$$

(вследствие равномерной сходимости ряда (8) почленное интегрирование законно).

Обозначим:

$$D_n^0u\equiv u,\quad D_n^1u=\frac{d}{dt}\left(\frac{u(t,\varepsilon)}{in\varphi(t,\varepsilon)}\right),\quad D_n^ku=D_n^1(D_n^{k-1}u).$$

Путём m-кратного интегрирования по частям получим:

$$\int\limits_0^t f_n(\tau,\varepsilon)\mathrm{exp}(in\theta(\tau,\varepsilon))d\tau=a_n(t,\varepsilon)\mathrm{exp}(in\theta(t,\varepsilon))-a_n(0,\varepsilon),$$

где

$$a_n(t,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{m-1}(-1)^k\frac{D_n^k(f_n(t,\varepsilon))}{in\varphi(t,\varepsilon)}+$$

$$+(-1)^m\mathrm{exp}(-in\theta(t,\varepsilon))\int\limits_0^t D_n^m(f_n(\tau,\varepsilon))\mathrm{exp}(in\theta(\tau,\varepsilon))d\tau.$$

Применив к функции $a_n(t,\varepsilon)$ оператор $D_n^s\left(\frac{d}{dt}\right)$, получим:

$$D_n^s\left(\frac{da_n}{dt}\right)=\sum_{k=0}^{m-s-2}(-1)^k D_n^{k+s+1}(f_n(t,\varepsilon))+$$

$$+(-1)^{m+s-1}in\varphi(t,\varepsilon)\exp(-in\theta(t,\varepsilon))\int\limits_0^t D_n^m(f_n(\tau,\varepsilon))\exp(in\theta(\tau,\varepsilon))d\tau.$$

Очевидно, что

$$D_n^k(f_n(t,\varepsilon))=\varepsilon^k f_{nk}^*(t,\varepsilon),\quad \sup_G|f_{nk}^*(t,\varepsilon)|<+\infty.$$

Следовательно,

$$\left|\int\limits_0^t D_n^m((f_n(\tau,\varepsilon))\exp(in\theta(\tau,\varepsilon))d\tau\right|\le L\varepsilon^{m-1}\sup_G|f_{nm}^*(t,\varepsilon)|,$$

причём, как несложно убедиться,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|n|\sup_G|f_{nm}^*(t,\varepsilon)|<+\infty.$$

Из этих оценок вытекает, что $\forall s=\overline{0,m-2}:$

$$\frac{d^{s+1}a_n(t,\varepsilon)}{dt^{s+1}}=\varepsilon^{s+1}a_{ns}^*(t,\varepsilon),$$

причём

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|n|\sup_G|a_{ns}^*|<+\infty,$$

что и доказывает лемму.

Лемма 2. *Пусть задана линейная однородная система дифференциальных уравнений:*

$$\frac{dx}{dt}=\left(iD(t,\varepsilon)+\varepsilon R(t,\varepsilon)+\sum_{\nu=1}^{r}P_\nu(t,\varepsilon,\theta)\mu^\nu\right)x, \tag{9}$$

$$D(t,\varepsilon)=\operatorname{diag}(\sigma_1(t,\varepsilon),\ldots,\sigma_N(t,\varepsilon)),\sigma_j(t,\varepsilon)\in\mathbf{R},R(t,\varepsilon)=(r_{jk}(t,\varepsilon))_{j,k=\overline{1,N}},$$

$$P_\nu(t,\varepsilon,\theta)=(p_{\nu jk}(t,\varepsilon))_{j,k=\overline{1,N}}.\sigma_j(t,\varepsilon)\in S_m,r_{jk}(t,\varepsilon)\in S_{m-1},p_{\nu jk}(t,\varepsilon,\theta))\in B_m$$

$$(j,k=\overline{1,N};\nu=\overline{1,r}).$$

При выполнении условия $\forall p\in\mathbf{Z}$

$$\inf_G|\sigma_j(t,\varepsilon)-\sigma_k(t,\varepsilon)-p\varphi(t,\varepsilon)|\ge\gamma>0\quad(j\ne k)$$

существует преобразование вида

$$x = \left(E + \varepsilon\Phi(t,\varepsilon) + \sum_{\nu=1}^{r} \Phi_\nu(t,\varepsilon,\theta)\mu^\nu\right) y, \tag{10}$$

в котором элементы матрицы Φ *из класса* S_{m-1}, *а матриц* Φ_ν — *из класса* B_m, *приводящее систему (9) к виду*

$$\frac{dy}{dt} = \Big(iD(t,\varepsilon) + \varepsilon A_0(t,\varepsilon) + \sum_{\nu=1}^{r} A_\nu(t,\varepsilon)\mu^\nu +$$

$$+ \varepsilon^2 H(t,\varepsilon) + \mu\varepsilon W(t,\varepsilon,\theta,\mu) + \mu^{r+1}F(t,\varepsilon,\theta,\mu)\Big)\, y, \tag{11}$$

где A_0 — *диагональная матрица с элементами из* S_{m-1}, $A_\nu(\nu = \overline{1,r})$ — *диагональные матрицы с элементами из* S_m, H, W, F — *квадратные матрицы с элементами из* B_{m-2}.

Доказательство. С учётом того, чтобы преобразованная система имела вид (11), определим матрицы $\Phi, \Phi_\nu, A_0, A_\nu$ $(\nu = \overline{1,r})$ следующим образом:

$$(\Phi)_{jk} = \frac{i(R)_{jk}}{\sigma_j - \sigma_k} \quad (j \neq k), \quad (\Phi)_{jj} \equiv 0,$$

$$(A_0)_{jk} \equiv 0 \quad (j \neq k), \quad (A_0)_{jj} = (R)_{jj},$$

$$(\Phi_\nu)_{jk} = -\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\Gamma_n((T_\nu)_{jk})}{i(\sigma_j - \sigma_k - n\varphi)} \exp(in\theta) \quad (j \neq k),$$

$$(\Phi_1)_{jj} = \sum_{\substack{n=-\infty \\ (n\neq 0)}}^{\infty} \frac{\Gamma_n((T_\nu)_{jj})}{in\varphi} \exp(in\theta),$$

$$(A_\nu)_{jk} \equiv 0 \quad (j \neq k), \quad (A_\nu)_{jj} = \Gamma_0((P_1)_{jj}),$$

где обозначено: $T_1 = P_1$, $T_\nu = P_\nu + \sum_{q=1}^{\nu-1}(P_{\nu-q}\Phi_q - \Phi_q A_{\nu-q})$, $(\nu = \overline{2,r})$.

При достаточно малых значениях параметров ε и μ преобразование (10) будет невырожденным. Матрицы H, W, F можно определить формулами

$$H = -\frac{1}{\varepsilon}(E + \varepsilon\Phi)^{-1}\frac{d\Phi}{dt},$$

$$W = \left(E + \varepsilon\Phi + \sum_{\nu=1}^{r}\Phi_\nu\mu^\nu\right)^{-1}\left(-\frac{1}{\varepsilon}\sum_{\nu=1}^{r}\frac{\partial\Phi_\nu}{\partial t}\mu^{\nu-1} - \varepsilon\sum_{\nu=1}^{r}\Phi_\nu H\mu^{\nu-1}\right),$$

$$F = \left(E + \varepsilon\Phi + \sum_{\nu=1}^{r}\Phi_\nu\mu^\nu\right)^{-1}\sum_{\nu=0}^{r-1}\left(\sum_{\alpha+\beta=\nu+r+1}(P_\alpha\Phi_\beta - \Phi_\alpha A_\beta)\right)\mu^\nu.$$

Лемма 3. *Пусть задана квазилинейная дифференциальная система*

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon f(t,\varepsilon) + \mu g(t,\varepsilon,\theta) + iD(t,\varepsilon)\xi + \varepsilon P(t,\varepsilon)\xi + \mu R(t,\varepsilon,\theta)\xi + \\ + \varepsilon(\xi, U(t,\varepsilon)\xi) + \mu(\xi, V(t,\varepsilon,\theta)\xi), \qquad (12)$$

где $\xi = \mathrm{colon}(\xi_1, \ldots, \xi_N)$, $D = \mathrm{diag}(\sigma_1(t,\varepsilon), \ldots, \sigma_N(t,\varepsilon))$ *— действительная матрица, компоненты* N*-мерного вектора* f *и* $N \times N$*-матриц* P, U *из класса* S_{m-1}*, компоненты* N*-мерного вектора* g *и* $N \times N$*-матриц* R, V *из класса* B_m.

Пусть выполнены следующие условия:

(i) $\inf\limits_G |\sigma_j(t,\varepsilon) - p\varphi(t,\varepsilon)| \geq \gamma > 0$, $\forall p \in \mathbf{Z}$, $j = \overline{1,n}$,

(ii) $\inf\limits_G |\sigma_j(t,\varepsilon) - \sigma_k(t,\varepsilon) - p\varphi(t,\varepsilon)| \geq \gamma > 0$, $\forall p \in \mathbf{Z}$, $j \neq k$.

Тогда для достаточно малых значений ε *и* μ *и произвольного* $r \in \mathrm{N}$ *существует невырожденное преобразование вида*

$$\xi = h_r(t,\varepsilon,\theta,\mu) + \Psi_r(t,\varepsilon,\theta,\mu)\eta, \qquad (13)$$

где компоненты вектора h_r *и матрицы* Ψ_r *из класса* B_{m-1}*, которое сводит систему (12) к виду*

$$\frac{d\eta}{dt} = \Lambda(t,\varepsilon,\mu)\eta + \varepsilon c(t,\varepsilon,\theta,\mu) + \frac{\mu^{r+1}}{\varepsilon} d(t,\varepsilon,\theta,\mu) + \varepsilon^2 V_1(t,\varepsilon,\theta,\mu)\eta + \\ + \mu\varepsilon V_2(t,\varepsilon,\theta,\mu)\eta + \mu^{r+1} V_3(t,\varepsilon,\theta,\mu)\eta + \\ + \varepsilon^2(\eta, W_1(t,\varepsilon,\theta,\mu)\eta) + \mu\varepsilon(\eta, W_2(t,\varepsilon,\theta,\mu)\eta), \qquad (14)$$

где все коэффициенты системы (14) принадлежат классу B_{m-2}*;* $\Lambda(t,\varepsilon,\mu) = iD(t,\varepsilon) + \varepsilon A_0(t,\varepsilon) + \sum_{\nu=1}^r A_\nu(t,\varepsilon)\mu^\nu$*;* $A_0, A_1, \ldots, A_r$ *— диагональные матрицы с элементами из* S_{m-1}.

Доказательство. Наряду с системой (12) рассмотрим вспомогательную квазилинейную систему

$$\varphi(t,\varepsilon)\frac{d\xi}{d\theta} = iD(t,\varepsilon)\xi + \mu g(t,\varepsilon,\theta) + \mu R(t,\varepsilon,\theta)\xi + \mu(\xi, V(t,\varepsilon,\theta)\xi), \qquad (15)$$

где t, φ рассматриваются как постоянные величины. Вектор g и матрицы R, V являются 2π-периодическими по θ. Для нахождения 2π-периодического по θ решения системы (15) можно использовать метод малого параметра Пуанкаре [12], согласно которому это решение ищется в виде степенного по параметру μ ряда

$$\xi(t,\varepsilon,\theta,\mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \xi^k(t,\varepsilon,\theta)\mu^{k+1}, \qquad (16)$$

где ξ^k, $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ — 2π-периодические по θ функции. Запишем уравнения для определения r первых коэффициентов ряда (16):

$$\varphi\frac{d\xi^0}{d\theta} = iD\xi^0 + g, \\ \varphi\frac{d\xi^1}{d\theta} = iD\xi^1 + R\xi^0, \\ \varphi\frac{d\xi^s}{d\theta} = iD\xi^s + R\xi^{s-1} + \sum_{l=0}^{s-2}(\xi^l, V\xi^{s-2-l}), \quad s = \overline{2, r-1}. \qquad (17)$$

Условие (i) леммы гарантирует для каждого из уравнений (17) существование единственного 2π-периодического его решения. Очевидно при этом, что все полученные таким образом функции $\xi^0(t,\varepsilon,\theta),\dots,\xi^{r-1}(t,\varepsilon,\theta)$ принадлежат классу B_m.

Совершим теперь в системе (12) подстановку:

$$\xi = \chi + \sum_{k=0}^{r-1} \xi^k(t,\varepsilon,\theta)\mu^{k+1} + \varepsilon i D^{-1}(t,\varepsilon) f(t,\varepsilon) \tag{18}$$

(вследствие условия (i) матрица $D^{-1}(t,\varepsilon)$ существует), где χ — новый неизвестный вектор. Придём к системе

$$\begin{gathered} \tfrac{d\chi}{dt} = iD(t,\varepsilon)\chi + \varepsilon^2 h(t,\varepsilon) + \mu^{r+1} m(t,\varepsilon,\theta,\mu) + \mu\varepsilon k(t,\varepsilon,\theta,\mu) + \\ + \varepsilon P(t,\varepsilon)\chi + \mu R(t,\varepsilon,\theta)\chi + \mu^2 U_1(t,\varepsilon,\theta,\mu)\chi + \mu\varepsilon U_2(t,\varepsilon,\theta,\mu)\chi + \\ + \varepsilon^2 U_3(t,\varepsilon,\theta,\mu)\chi + \varepsilon(\chi, U(t,\varepsilon)\chi) + \mu(\chi, V(t,\varepsilon,\theta)\chi). \end{gathered} \tag{19}$$

Вследствие условия (ii) леммы на основании леммы 2 систему (19) при помощи невырожденного преобразования

$$\chi = \Psi(t,\varepsilon,\theta,\mu)\chi^1 \tag{20}$$

(χ^1 — новый неизвестный вектор) можно привести к виду

$$\begin{gathered} \tfrac{d\chi^1}{dt} = \left(iD(t,\varepsilon) + \varepsilon A_0(t,\varepsilon) + \textstyle\sum_{\nu=1}^{r} A_\nu(t,\varepsilon)\mu^\nu\right)\chi^1 + \\ + \varepsilon^2 h^1(t,\varepsilon,\theta,\mu) + \mu\varepsilon h^2(t,\varepsilon,\theta,\mu) + \mu^{r+1} h^3(t,\varepsilon,\theta,\mu) + \\ + \varepsilon^2 U_4(t,\varepsilon,\theta,\mu)\chi^1 + \mu\varepsilon U_5(t,\varepsilon,\theta,\mu)\chi^1 + \mu^{r+1} U_6(t,\varepsilon,\theta,\mu)\chi^1 + \\ + \varepsilon(\chi^1, U_7(t,\varepsilon,\theta,\mu)\chi^1) + \mu(\chi^1, U_8(t,\varepsilon,\theta,\mu)\chi^1). \end{gathered} \tag{21}$$

Предполагая ε,μ достаточно малыми, совершим в системе (21) замену:

$$\chi^1 = \mu\varepsilon u(t,\varepsilon,\theta,\mu) + \varepsilon\eta, \tag{22}$$

где η — новый неизвестный вектор, а u - 2π-периодическое решение линейной неоднородной системы:

$$\varphi(t,\varepsilon)\frac{du}{dt} = \left(iD(t,\varepsilon) + \varepsilon A_0(t,\varepsilon) + \sum_{\nu=1}^{r} A_\nu(t,\varepsilon)\mu^\nu\right) u + h^2(t,\varepsilon,\theta,\mu) \tag{23}$$

(t,φ считаются постоянными). В результате получим систему (14).

Лемма 3 доказана.

Лемма 4. *Пусть система (14) такова, что выполнено одно из следующих условий (А) или (Б):*

(А) $\mathrm{Re}(A_\nu(t,\varepsilon))_{jj} \equiv 0$, $(j=\overline{1,N}; \nu=\overline{1,r})$;

(Б) $\exists r_0 \in \mathbf{N}(1 \le r_0 \le r)$, *такое, что* $\min\limits_{1\le j\le N} \inf\limits_G |\mathrm{Re}(A_{r_0}(t,\varepsilon))_{jj}| = \gamma > 0$, *и* $\forall \nu = \overline{1, r_0 - 1}$ *(если* $r_0 > 1$*):* $\mathrm{Re}(A_\nu(t,\varepsilon))_{jj} \equiv 0$ $(j = \overline{1,n})$.

Тогда для достаточно малых значений ε, μ *система (14) имеет частное решение класса* B_{m-2}.

Справедливость леммы следует из результатов работы [9].

Следствием лемм 3, 4 является

Лемма 5. *Пусть система (12) такова, что*

(i) выполнены условия (i), (ii) леммы 3,

(ii) для системы (14), полученной из системы (12) с помощью преобразования (13), выполнены условия леммы 4,

Тогда для достаточно малых значений ε, μ *система (12) имеет частное решение класса* B_{m-2}.

5. Основные результаты.

Вернёмся теперь к системе (6) и будем предполагать выполнение следующих условий.

1^0. Собственные значения $\lambda_1(t,\varepsilon), \dots, \lambda_n(t,\varepsilon)$ матрицы $A(t,\varepsilon)$ удовлетворяют условию (7).

2^0. $\inf\limits_G |\omega_{jk}(t,\varepsilon) - p\varphi(t,\varepsilon)| \ge \gamma > 0 \ \forall p \in \mathbf{Z}$ $(j,k = \overline{1,n}; j \ne k)$.

3^0. Существует матрица $L(t,\varepsilon)$ с элементами из класса S_m, такая, что

1) $\inf\limits_G |\det L(t,\varepsilon)| > 0$,

2) $L^{-1}AL = \Lambda(t,\varepsilon) = \mathrm{diag}(\lambda_1(t,\varepsilon), \dots, \lambda_n(t,\varepsilon))$.

4^0. $\exists r \in \mathbf{N} : \mu^{r+1} \le \varepsilon^2$.

Осуществив в системе (6) подстановку

$$x = L(t,\varepsilon)y, \tag{24}$$

приведём её к виду

$$\frac{dy}{dt} = (\Lambda(t,\varepsilon) + \varepsilon K(t,\varepsilon) + \mu W(t,\varepsilon,\theta))\,y, \tag{25}$$

где элементы матрицы $K = -\frac{1}{\varepsilon}L^{-1}\frac{dL}{dt}$ из класса S_{m-1}, а элементы матрицы $W = L^{-1}BL$ из класса B_m.

В системе (25) осуществим подстановку:

$$y = (E + Q(t,\varepsilon,\theta,\mu))z, \tag{26}$$

в котором диагональные элементы матрицы $Q = (q_{jk})_{j,k=\overline{1,n}}$ тождественно равны нулю, а остальные элементы определяются из условия диагональности преобразованной системы. Тогда

$$\frac{dq_{jk}}{dt} = i\omega_{jk}(t,\varepsilon)q_{jk} + \varepsilon(k_{jj}(t,\varepsilon) - k_{kk}(t,\varepsilon))q_{jk} +$$

$$+\mu(w_{jj}(t,\varepsilon,\theta) - w_{kk}(t,\varepsilon,\theta))q_{jk} + +\varepsilon k_{jk}(t,\varepsilon) + \mu w_{jk}(t,\varepsilon,\theta) +$$

$$+\varepsilon \sum_{\substack{s=1\\(s\neq j, s\neq k)}}^{n} k_{js}(t,\varepsilon)q_{sk} + \mu \sum_{\substack{s=1\\(s\neq j, s\neq k)}}^{n} w_{js}(t,\varepsilon,\theta)q_{sk} - \tag{27}$$

$$-\varepsilon q_{jk} \sum_{\substack{s=1\\(s\neq k)}}^{n} k_{ks}(t,\varepsilon)q_{sk} - \mu q_{jk} \sum_{\substack{s=1\\(s\neq k)}}^{n} w_{ks}(t,\varepsilon,\theta)q_{sk}, j,k = \overline{1,n}(j \neq k).$$

При этом для компонент вектора z получим систему

$$\frac{dz_j}{dt} = d_j(t,\varepsilon,\theta,\mu)z_j, \quad j = \overline{1,n}, \tag{28}$$

где

$$d_j(t,\varepsilon,\theta,\mu) = \lambda_j(t,\varepsilon) + \varepsilon_{jj}(t,\varepsilon) + \mu w_{jj}(t,\varepsilon,\theta) +$$

$$+\varepsilon \sum_{\substack{s=1\\(s\neq j)}}^{n} k_{js}(t,\varepsilon,\theta)q_{js}(t,\varepsilon,\theta,\mu) + \mu \sum_{\substack{s=1\\(s\neq j)}}^{n} w_{js}(t,\varepsilon,\theta)q_{js}(t,\varepsilon,\theta,\mu).$$

Легко заметить, что система (27) распадается на n независимых подсистем порядка $n-1$, каждая из которых имеет вид (12). В качестве коэффициентов $\sigma_j(t,\varepsilon)(j=\overline{1,N})$ системы (12) в системах (27) выступают $\omega_{jk}(t,\varepsilon)$, поэтому в силу 2^0 :

$$\inf_G |\sigma_j(t,\varepsilon) - p\varphi(t,\varepsilon)| = \inf_G |\omega_{jk}(t,\varepsilon) - p\varphi(t,\varepsilon)| \geq \gamma > 0, p \in \mathbf{Z},$$

$$\inf_G |\sigma_j(t,\varepsilon) - \sigma_s(t,\varepsilon) - p\varphi(t,\varepsilon)| =$$

$$= \inf_G | - i(\lambda_j(t,\varepsilon) - \lambda_k(t,\varepsilon)) + i(\lambda_s(t,\varepsilon) - \lambda_k(t,\varepsilon)) - p\varphi(t,\varepsilon)| =$$

$$= \inf_G | - i(\lambda_j(t,\varepsilon) - \lambda_s(t,\varepsilon)) - p\varphi(t,\varepsilon)| = \inf_G |\omega_{js}(t,\varepsilon) - p\varphi(t,\varepsilon)| \geq \gamma > 0 (j \neq s).$$

Таким образом, каждая из систем (27) удовлетворяет условиям (i), (ii) леммы 3. Следовательно, справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть система (6) такова, что*

(i) справедливы предположения $1^0 - 4^0$*;*

(ii) каждая из систем (27) удовлетворяет условию (ii) леммы 5.

Тогда для достаточно малых значений параметров ε, μ *существуют преобразования (24), (26), приводящие систему (6) к диагональному виду (28), причём все элементы матрицы* $Q(t,\varepsilon,\theta,\mu)$ *принадлежат классу* B_{m-2}.

Теорема 2. *Пусть система (6) удовлетворяет условиям теоремы 1. Тогда система (6) имеет фундаментальную систему решений вида*

$$x_{jk}=\left(\sum_{\nu=1}^{n} l_{k\nu}(t,\varepsilon)q_{\nu j}(t,\varepsilon,\theta,\mu)\right) r_j(t,\varepsilon,\theta,\mu)\exp\int\limits_0^t d_{j0}(\tau,\varepsilon,\mu)d\tau,\, j,k=\overline{1,n}$$

(j — номер решения, k — номер компоненты), где $l_{k\nu}\in S_m$, $q_{\nu j}\in B_{m-2}$, $r_j\in$ $\in B_{m-3}$, $d_{j0}\in S_{m-2}$ ($q_{jj}\equiv 1$).

Доказательство непосредственно вытекает из теоремы 1, леммы 1 и систе мы (28).

Проиллюстрируем выполнение условий теоремы 2 на примере системы, соответствующей уравнению Матье [13]:

$$\frac{dx_1}{dt}=x_2,\quad \frac{dx_2}{dt}=-\left(\omega^2(t,\varepsilon)-2\mu a(t,\varepsilon)\cos 2\theta(t,\varepsilon)\right)x_1, \tag{29}$$

$\omega,a\in S_m$, $\theta=\int\limits_0^t\varphi(\tau,\varepsilon)d\tau$, $\varphi\in S_m$; $\omega,a,\varphi\in\mathbf{R}$, $\inf\limits_G\omega>0$, $\inf\limits_G\varphi>0$.

Ограничимся случаем $r=1$, то есть вследствие 4^0

$$\mu\le\varepsilon. \tag{30}$$

.

Нетрудно убедиться, что система (27) в данном случае имеет вид:

$$\begin{gathered}\tfrac{dq_{12}}{dt}=-2i\omega q_{12}-2\mu\tfrac{a}{i\omega}\cos 2\theta\cdot q_{12}+\tfrac{\varepsilon\omega_1}{2\omega}-\mu\tfrac{a}{i\omega}\cos 2\theta-\\ -\tfrac{\varepsilon\omega_1}{2\omega}q_{12}^2-\mu\tfrac{a}{i\omega}\cos 2\theta\cdot q_{12}^2,\end{gathered} \tag{31}$$

$$\begin{gathered}\tfrac{dq_{21}}{dt}=2i\omega q_{21}+2\mu\tfrac{a}{i\omega}\cos 2\theta\cdot q_{21}+\tfrac{\varepsilon\omega_1}{2\omega}+\mu\tfrac{a}{i\omega}\cos 2\theta-\\ -\tfrac{\varepsilon\omega_1}{2\omega}q_{21}^2+\mu\tfrac{a}{i\omega}\cos 2\theta\cdot q_{21}^2,\end{gathered} \tag{32}$$

где $\omega_1=\frac{1}{\varepsilon}\frac{d\omega}{dt}$. То есть имеем два независимых уравнения типа Риккати. Согласно вышеописанному методу уравнение (31) при достаточно малых ε,μ можно привести к виду

$$\begin{gathered}\tfrac{d\eta}{dt}=-2i\omega(t,\varepsilon)\eta+\varepsilon f_2(t,\varepsilon,\theta,\mu)+\mu f_3(t,\varepsilon,\theta,\mu)+\\ +\tfrac{\mu^2}{\varepsilon}f_4(t,\varepsilon,\theta,\mu)+\varepsilon^2p_4(t,\varepsilon,\theta,\mu)\eta+\mu\varepsilon p_5(t,\varepsilon,\theta,\mu)\eta+\\ +\mu^2p_6(t,\varepsilon,\theta,\mu)\eta+\varepsilon^2\psi_1(t,\varepsilon,\theta,\mu)\eta^2+\mu\varepsilon\psi_2(t,\varepsilon,\theta,\mu)\eta^2.\end{gathered} \tag{33}$$

Все коэффициенты уравнения (33) из класса B_{m-2}. В данном случае $A_1(t,\varepsilon)\equiv 0$, и, таким образом, имеет место вариант (А) леммы 4. Аналогичная ситуация и в случае уравнения (32). Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Следствие из теоремы 2. Пусть система (29) удовлетворяет условиям

(i) $\inf\limits_{G} |2\omega(t,\varepsilon) - p\varphi(t,\varepsilon)| \geq \gamma > 0 \ \forall p \in \mathbf{Z}$,

(ii) выполнено условие (30).

Тогда для достаточно малых ε система (29) имеет фундаментальную систему решений вида

$$x_{jk} = l_{jk}(t,\varepsilon,\theta,\mu)\exp\left(\int\limits_0^t \beta_j(\tau,\varepsilon,\mu)d\tau\right) \quad (j,k=1,2),$$

где $l_{jk} \in B_{m-3}, \beta_j \in S_{m-2}$.

Заключение. Таким образом, для системы вида (6), удовлетворяющей условию (7), получены условия существования преобразования с коэффициентами класса B_{m-2}, приводящего систему (6) к чисто диагональному виду. Как следствие, получен аналог теоремы Флоке–Ляпунова для линейных систем с коэффициентами из класса B_m, близких к медленно меняющимся.

1. **Абгарян К. А.** Матричные и асимптотические методы в теории линейных систем [текст] / К. А. Абгарян. – М. Наука, 1973. – 431 с.
2. **Лященко Н. Я.** Об одной теореме полного разделения линейной однородной системы дифференциальных уравнений и некоторых свойствах матрицы разделения [текст] / Н. Я. Лященко // Укр. матем. журн. – 1955. – Т. 7. – № 4. – С. 403–418.
3. **Лященко Н. Я.** Об одной теореме разделения линейной системы дифференциальных уравнений с почти периодическими коэффициентами [текст] / Н. Я. Лященко // Укр. матем. журн. – 1955. – Т. 7. – № 1. – С. 47–55.
4. **Костін В. В.** Деякі питання повного розподілу та асимптотичної поведінки розв'язків систем звичайних диференціальних рівнянь [текст] / В. В. Костін // Доп. АН УРСР, сер. Ф. – 1967. – № 7. – С. 593–595.
5. **Митропольский Ю. А.** Исследование дихотомии линейных систем с помощью функций Ляпунова [текст] / Ю. А. Митропольский, А. М. Самойленко, В. Л. Кулик. – К.: Наук. думка, 1990. – 272 с.
6. **Фещенко С. Ф.** Асимптотические методы в теории линейных дифференциальных уравнений [текст] / С. Ф. Фещенко, Н. И. Шкиль, Л. Д. Николенко. – К.: Наук. думка, 1966. – 251 с.
7. **Митропольский Ю. А.** О построении решений почти диагональных систем линейных дифференциальных уравнений с помощью метода, обеспечивающего ускоренную сходимость [текст] / Ю. А. Митропольский, Е. П. Белан // Укр. матем. журн. – 1968. – Т. 20. – № 2. – С. 166–175.
8. **Амелькин К. В.** О расщеплении линейных однородных систем обыкновенных дифференциальных уравнений [текст] / К. В. Амелькин, А. В. Костин // Вісник Одеськ. держ. ун-ту. – 2001. – Т. 6. – Вип. Фіз.-мат. науки. – С. 1–7.
9. **Щёголев С. А.** О решениях, представимых рядами Фурье с медленно меняющимися параметрами, квазилинейных дифференциальных систем второго порядка [текст] / С. А. Щёголев // Вісник Одеськ. нац. ун-ту. – 2007. – Т. 12. – Вип. 7. Матем. і механ. – С. 156–176.

10. **Якубович В. А.** Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами [текст] / В. А. Якубович, В. М. Старжинский. – М.: Наука, 1972. – 720 с.

11. **Щёголев С. А.** О представлении решений некоторых классов систем линейных дифференциальных уравнений [текст] / С. А. Щёголев // Крайові задачі для дифер. рівнянь. К.: ІМ НАНУ, 1998. – Вип. 2. – С. 283-288.

12. **Малкин И. Г.** Некоторые задачи теории нелинейных колебаний [текст] / И. Г. Малкин. – М.: Гостехиздат, 1956. – 491 с.

13. **Хаяси Т.** Нелинейные колебания в физических системах [текст] / Т. Хаяси. – М.: Мир, 1968. – 432 с.